MMI 1 (Calcul Formel) : Partiel de Janvier 2008.

Seules les notes manuscrites, le support de cours et la calculette sont autorisés. Le candidat s'efforcera de rédiger lisiblement et avec soin sa copie. En particulier, les réponses doivent être justifiées.
Le sujet est (en principe) trop long pour le temps imparti, il est donc conseillé de traiter en priorité les questions que l'on sait faire en en indiquant clairement la référence.

I) Question de Cours. —

1) Rappeler, en donnant les grammaires, ce que sont

a) les arbres binaires complets

b) les arbres binaires généraux

c) les arbres 1-2

2) a) Donner les séries par nombre de nœuds.
indication : Pour vérification, la série des arbres 1-2 doit être

$$T = \frac{1 - x - \sqrt{1 - 2x - 3x^2}}{2x} = x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 9x^5 + 21x^6 + 51x^7 + 127x^8 + \cdots \qquad (1)$$

b) Quelles sont celles que l'on ne peut pas calculer par nombre de feuilles ? Pourquoi ?

c) Donner les SG par nombre de feuilles.

3) Que sont les nombres de Catalan ? Qu'est-ce qu'ils énumèrent ?

II) Exercices. —

1) Développer les séries suivantes :

$$\text{a) } \frac{1}{1-z^2} \quad \text{b) } \frac{1+z}{1-z} \quad \text{c) } \frac{1-\sqrt{1+z}}{z}$$

2) Sommer :

$$\text{a) } S_1 = \sum_{n\geq 0} n z^n \qquad \text{b) } S_2 = \sum_{n\geq 0} n(n-1) z^n$$

$$\text{c) } T_k = \sum_{n\geq k} \Big(n(n-1)\cdots(n-k+1)\Big) z^n \qquad \text{d) } S_3 = \sum_{n\geq 0} n^2 z^n$$

3) Opérateurs :

a) Soit $S = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une SG, montrer que

$$\text{i) } (z\frac{d}{dz})[S] = \sum_{n\geq 0} n a_n z^n \quad \text{ii) } \frac{1}{1-z}.S = \sum_{n\geq 0} (\sum_{j=0}^{n} a_j) z^n$$

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^2 z^n = \frac{z(z+1)}{(1-z)^3}$ (on utilisera deux fois l'opérateur de "a)i)").

c) En utilisant "b)i)", calculer $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (\sum_{j=0}^{n} j^2) z^n$.

d) En utilisant le développement de $n(n+1)(2n+1)$ montrer que

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} z^n = \frac{z(z+1)}{(1-z)^4}$$

e) Qu'en concluez-vous ?

III. (Petit) Problème

On construit une suite de $\mathbb{Z}^2$ par le procédé suivant

$$\begin{array}{ccccccccc}
\bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet \\
\downarrow & & & & & & & & \uparrow \\
\bullet & & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & & \bullet \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \bullet & & \circ & \rightarrow & \bullet & & \bullet \\
 & & \downarrow & & & & & & \uparrow \\
 & & \bullet & \rightarrow & \bullet & \rightarrow & \bullet & \rightarrow & \bullet
\end{array}$$

c'est une suite de couples (c_n), le point de départ ($\circ$) étant l'origine ($c_0 = (0,0)$).

a) Soit $d_1(n)$, l'indice du n$^{\text{ième}}$ passage de c_n sur la première demi-diagonale $x = y;\ x > 0$. On a

n	1	2	3	4	5
$d_1(n)$	2	12	30	56	90

montrer que $a_1(n) = d_1(n+1) - d_1(n)$ vérifie $a_1(n+1) - a_1(n) = 8$ (on pourra donner une preuve “picturale”, sinon il est conseillé d'admettre le résultat et de continuer).

b) Déduire de la question précédente que $a_1(n) = 8n + 2$.

c) Donner les séries génératrices $\sum_{n\geq 0} a_1(n) z^n$ puis $\sum_{n\geq 0} d_1(n) z^n$.

d) Déduire de ce qui précède que $d_1(n) = (2n)^2 - 2n$.

3) Montrer que les indices du n$^{\text{ième}}$ passage de c_n sur 3 autres demi-diagonales sont respectivement (en tournant dans le sens trigonométrique)

$$d_2(n) = (2n)^2;\ d_3(n) = (2n)^2 + 2n;\ d_4(n) = (2n)^2 + 4n = (2n+1)^2 - 1$$

donner les séries génératrices (en z) de $d_i;\ i = 1..4$.

4) Selon la position de k par rapport à $d_1(n) < d_2(n) < d_3(n) < d_4(n)$ donner la valeur de $c_k = (x_k, y_k)$ et montrer que $k \to c_k$ est une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}^2$.

3) Reprendre le problème précédent avec le bijection $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ définie par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \cdots & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet \\
 & & & & & & \uparrow \\
\bullet & \rightarrow & \bullet & \rightarrow & \bullet & & \bullet \\
\uparrow & & & & \downarrow & & \uparrow \\
\bullet & \leftarrow & \bullet & & \bullet & & \bullet \\
 & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow \\
\circ & \rightarrow & \bullet & & \bullet & \rightarrow & \bullet
\end{array}$$