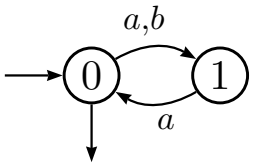
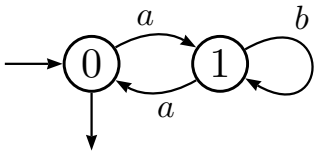
Calcul Formel AMI1 : Partiel du 20 mai 2010.

Seuls les notes manuscrites, le support de cours et la calculette sont autorisés. Le candidat s'efforcera de rédiger lisiblement et avec soin sa copie. En particulier, les réponses doivent être justifiées.
Le sujet est (en principe) trop long pour le temps imparti, il est donc conseillé de traiter en priorité les questions que l'on sait faire en en indiquant clairement la référence.

I) Question de Cours:

1) a) Qu'est qu'un graphe marqué ? (on rappellera : les sommets, les arêtes et les fonctions *head, tail, label, weight*).
b) Comment est calculé le poids d'un chemin ? d'un ensemble de chemins ?
c) $\mathcal{A}$ étant un automate, comment calcule-t-on $\mathcal{A}(w)$ lorsque w est un mot.
d) Rappeler ce que deviennent ces notions dans le cas d'un automate classique (il n'y a pas de poids sur les arêtes, juste des lettres). Quel est le langage reconnu ?
2) a) Redonner l'automate qui reconnait $(a^+b)^*$.
b) Que reconnaissent les automates suivants ?





II) Exercices

Dans la suite $A = \{a,b\}$ est un alphabet à deux lettres et, si $L \subset A^*$,

$$L^* = \epsilon + L + L^2 + \cdots = \sum_{k\geq 0} L^k \ ; \ L^+ = L + L^2 + \cdots = \sum_{k\geq 1} L^k$$

1) Montrer, en les expliquant, les égalités.

i) $A^*abA^* \cap A^*baA^* = A^*ab^+aA^* + A^*ba^+bA^*$ ii) $A^*b + \epsilon = (a^*b)^*$ iii) $aA^*b = a^+b(a^*b)^*$
iv) $(A^*b + \epsilon) - A^*b^2A^* = (a^+b)^*$ v) $bA^*a = (b^+a^+)^+$ vi) $A^* - A^*baA^* = a^*b^*$

2) On pose $\pi(a) = 1$,$\pi(b) = 2$ et $\pi(w) = \sum_{i=1}^{|w|} \pi(w[i])$ (les eommes vides sont toujours nulles donc $\pi(\epsilon) = 0$).
Soit

$$L_n := \{w \in A^* | \pi(w) = n\} \tag{1}$$

Pour vérification $L_4 = \{aaaa,aab,aba,baa,bb\}$

a) Écrire les premiers L_n $(0 \leq n \leq 3)$?
Pour vérification, on a

n	0	1	2	3
$\lvert L_n \rvert$	1	1	2	3

b) Montrer que, pour $n \geq 2$, on a

$$L_n = aL_{n-1} + bL_{n-2} \tag{2}$$

c) En déduire que la suite $l_n = |L_n|$ vérifie

$$l_0 = l_1 = 1 \ ; \ l_n = l_{n-1} + l_{n-2} \tag{3}$$

puis que $l_n = F_n$, le nième nombre de Fibonacci.

III Problèmes. —

A) Vecteurs d'entiers. —
1) Un *vecteur d'entiers* (VE) est une liste d'entiers non nuls $\mathbf{I} = [i_1,i_2,\cdots i_k]$ et son *poids* est la somme de ses coordonnées. En voici quelques uns avec leur poids

$\mathbf{I}$	[1,4]	[3,1,1]	[2,1,3]	[1,2,1,3]
poids($\mathbf{I}$)	0	5	6	7

On attribue à chaque (VE) $\mathbf{I} = [i_1,i_2,\cdots i_k]$ de poids $n > 0$ un nombre binaire sur $n-1$ bits dont les 1 sont aux places $(i_1,i_1+i_2,\cdots,(\sum_{j=1^r} i_j)),\cdots,i_1,i_1+i_2\cdots i_{k-1})$ cette dernière somme étant $n - i_k$. Voici les VE de poids 4 et leurs numéros binaires

$\mathbf{I}$	[4]	[3,1]	[2,2]	[2,1,1]	[1,3]	[1,2,1]	[1,1,2]	[1,1,1,1]
Numéro	000	001	010	011	100	101	110	111

a) Donner les 10 premièrs vecteurs d'entiers de poids 5 et leur numéro binaire, classés (comme dans l'exemple) par ordre croissant de ce numéro.
b) Déduire du (a) que le nombre a_n de vecteurs d'entiesr de poids $n > 0$ est 2^{n-1} et pour $n = 0$, c'est 1.
c) Montrer

$$S = \sum_{n\geq 0} a_n z^n = \frac{1-z}{1-2z} \ . \tag{4}$$

B) (Listes sans répétitions). —
Soit $E = a,b,c\cdots z$ l'alphabet usuel ordonné par l'ordre du dictionnaire et $k \leq 26$. On note SR_E^k l'ensemble des mots de longueur k (ou listes, c'est la même chose) sans répétitions (i.e. les objets sont $x_1x_2\cdots x_k$ avec $i < j \Longrightarrow x_i \neq x_j$). Pour $k = 3$, les premièrs mots, par ordre lexicographique, sont (les traits qui soulignent ne font pas partie de la structure, mais sont là pour aider à la solution des (1)b) et (2)).

$$abc,abd\cdots ab\underline{z},\cdots a\underline{zy}\cdots bac\cdots ba\underline{z},bca,bcd,\cdots ba\underline{z},bda,\cdots b\underline{zy}\cdots \tag{5}$$

1) ($k = 3$) a) Montrer que zyx est le dernier mot de la liste.
b) Pour les mots de longueur 3 différents de zyx, trouver la loi de formation du suivant.
2) Trouver le procédé général pour k quelconque.