MMI 2 (Calcul Formel) : Partiel de Mars 2009.

Seules les notes manuscrites, le support de cours et la calculette sont autorisés. Le candidat s'efforcera de rédiger lisiblement et avec soin sa copie. En par ticulier, les réponses doivent être justifiées.
Le sujet est (en principe) trop long pour le temps imparti, il est donc conseillé de traiter en priorité les questions que l'on sait faire en en indiquant clairement la référence.

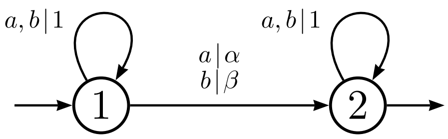
I) Question de Cours :
1) a) Qu'est-ce qu'un graphe de transition ? Qu'est-ce qu'un chemin ? Comment calcule-t-on le poids et l'étiquette d'un chemin ? d'un ensemble de chemins de même étiquette ?.
b) Ce calcul impose-t-il des contraintes sur l'ensemble des scalaires ? lequelles ? justifier.
c) Parmi les ensembles suivants $X \subset \mathbb{N}$, munis de $+$ et $\times$ quels sont ceux qui sont des semianneaux.

$$\text{i) } [1,+\infty[\quad \text{ii) } \{0\}\cup[2,+\infty[\quad \text{iii) } \{0\}\cup\{2,3\}\cup[5,+\infty[\quad \text{iv) } \{0,1,2,3,4\}\cup[6,+\infty[$$

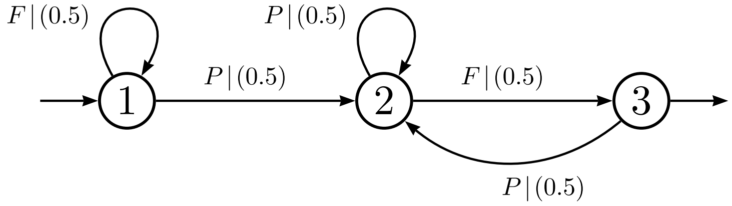
Les réponses seront soigneuseement justifiées : pour ceux qui ne sont pas des semianneaux, on dira les propriétés qui manquent : stabilité d'une loi, manque d'un ou plusieurs éléments neutres.

2) a) Qu'est-ce qu'un automate multiplicités ?
b) Précisez le sens des termes suivants
– états initiaux et leur poids
– états finaux et leur poids
– flèches, l'étiquette d'une flèche et son poids
c) Comment calcule-t-on le poids et l'étiquette d'un chemin ?
d) Comment calcule-t-on le poids d'un ensemble de chemins ?
e) Donner la version matricielle de ce calcul.

II) Exercices :
A) Automates : 1) a) Donner les éléments matriciels de l'automate



b) Montrer que son comportement est la fonction $w \to \alpha|w|_a + \beta|w|_b$
c) Soit l'automate



Montrer que sa série génératrice de probabilié est

$$\frac{2t^2}{(t-2)(2t-4+t^2)}$$

Si le temps manque pour finir le calcul, indiquer la méthode.

B) 1) Soit

$$f_1 = \frac{1}{1 - x + x^2 - x^3} \tag{1}$$

a) En utilisant l'identité $(1-z)(1+z+z^2+z^3) = 1 - z^4$, développer f_1, c'est à dire obtenez une formule du type

$$f_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n \tag{2}$$

b) Donnez les racines de $1 - x + x^2 - x^3$ et montrer que

$$f_1 = \frac{1+x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2(1-x)} \tag{3}$$

c) Développez chaque élément de (3) et retrouver la formule de (2).

C) 1) Soit $\phi(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$. Montrer les identités suivantes

$$\text{a) } \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\equiv 0\ [2]}} a_n z^n = \frac{1}{2}(\phi(z) + \phi(-z)) \quad \text{b) } \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n a_n z^n = \phi(-z)$$

2) Application. — On rappelle que la suite de Fibonacci est définie par

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1;\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

et que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} F_n z^n = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

Montrer que

$$\text{a) } \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\equiv 0\ [2]}} F_n z^n = \frac{z^2}{1-3z^2+z^4} \quad \text{b) } \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n F_n z^n = \frac{z}{z^2+z-1} \quad \text{c) } \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\equiv 0\ [2]}} n z^n = \frac{2z^2}{(1-z^2)^2}$$

3) a) À l'aide de l'égalité $\frac{1}{1+z+z^2} = \frac{1-z}{1-z^3}$, donner le développement en série de cette fraction. Quel en est le support ?
b) Reprendre les questions précédentes avec $\frac{1}{1+z+z^2+z^3}$.
c) Peut-on généraliser à $g_n = (\sum_{j=0}^n z^j)^{-1}$? Quel est le résultat ?

4) a) Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} z^n = \frac{z}{(1-z)^3} \tag{4}$$

(on justifiera avec soin le résultat).
b) En intégrant deux fois la relation précédente, montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2 z^n = \frac{1+4z+z^2}{(1-z)^5} \tag{5}$$

c) Démontrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 z^n = \frac{z(1+4z+z^2)}{(1-z)^4} \tag{6}$$

d) En déduire que $\sum_{j=0}^n j^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

D) "Balls and bars" (BB). —
On appelle ainsi des structures du type

$$\bullet | \bullet \bullet \bullet | \bullet | \bullet \bullet \tag{7}$$

c'est à dire des points équidistants et horizontaux séparés par des | de façon que :

Toutes les barres ont (au moins) un point qui les précède et un point qui les suit.

Soit a_n, le nombre de ces structures avec n points (la structure vide est admise).
1) Expliquer pourquoi a_n vérifie la récurrence linéaire $a_0 = a_1 = 1;\ a_{n+2} = 2a_{n+1}$.
2) Se servir de ce qui précède pour montrer que la série génératrice $S = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ vérifie

$$S = 1 + z + 2z(S-1) \tag{8}$$

3) Résoudre (8) et montrer que $a_n = 2^{n-1}$ pour $n > 0$.
4) Un *vecteur d'entiers* (VE) est une liste d'entiers non nuls $\mathbf{I} = [i_1, i_2, \cdots i_k]$ et son *poids* est la somme de ses coordonnées. En voici quelques uns avec leur poids

$\mathbf{I}$	$[1,4]$	$[3,1,1]$	$[2,1,3]$	$[1,2,1,3]$
$poids(\mathbf{I})$	5	5	6	7

Donner une correspondance naturelle entre les BB de poids n et les vecteurs d'entiers de poids n.

III. (Petit) Problème
On construit une suite de $\mathbf{Z}^2$ par le procédé suivant

$$\begin{array}{ccccccccc}
\bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet \\
\downarrow &&&&&&&& \uparrow \\
\bullet && \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet && \bullet \\
\downarrow && \downarrow &&&& \uparrow && \uparrow \\
&& \bullet && \circ & \rightarrow & \bullet && \bullet \\
&& \downarrow &&&&&& \uparrow \\
&& \bullet & \rightarrow & \bullet & \rightarrow & \bullet & \rightarrow & \bullet
\end{array}$$

c'est une suite de couples (c_n), le point de départ ($\circ$) étant l'origine ($c_0 = (0,0)$).
a) Soit $d_1(n)$, l'indice du $\text{n}^{\text{ième}}$ passage de c_n sur la première demi-diagonale $x = y;\ x > 0$. On a

n	1	2	3	4	5
$d_1(n)$	2	12	30	56	90

montrer que $a_1(n) = d_1(n+1) - d_1(n)$ vérifie $a_1(n+1) - a_1(n) = 8$ (on pourra donner une preuve "picturale", sinon il est conseillé d'admettre le résultat et de continuer).
b) Déduire de la question précédente que $a_1(n) = 8n + 2$.
c) Donner les séries génératrices $\sum_{n\geq 0} a_1(n) z^n$ puis $\sum_{n\geq 0} d_1(n) z^n$.
d) Déduire de ce qui précède que $d_1(n) = (2n)^2 - 2n$.
3) Montrer que les indices du $\text{n}^{\text{ième}}$ passage de c_n sur 3 autres demi-diagonales sont respectivement (en tournant dans le sens trigonométrique)

$$d_2(n) = (2n)^2;\ d_3(n) = (2n)^2 + 2n;\ d_4(n) = (2n)^2 + 4n = (2n+1)^2 - 1$$

donner les séries génératrices (en z) de $d_i;\ i = 1..4$.
4) Selon la position de k par rapport à $d_1(n) < d_2(n) < d_3(n) < d_4(n)$ donner la valeur de $c_k = (x_k, y_k)$ et montrer que $k \to c_k$ est une bijection entre $\mathbf{N}$ et $\mathbf{Z}^2$.

3) Reprendre le problème précédent avec le bijection $\mathbf{N} \to \mathbf{N}^2$ définie par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
& \cdots & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet \\
&&&&&& \uparrow \\
\bullet & \rightarrow & \bullet & \rightarrow & \bullet && \bullet \\
\uparrow &&&& \downarrow && \uparrow \\
\bullet & \leftarrow & \bullet && \bullet && \bullet \\
&& \uparrow && \downarrow && \uparrow \\
\circ & \rightarrow & \bullet && \bullet & \rightarrow & \bullet
\end{array}$$