MMI (Calcul Formel) : Rattrapage de Juin 2007.

Seules les notes manuscrites, le support de cours et la calculette sont autorisés. Le candidat s'efforcera de rédiger lisiblement et avec soin sa copie. En particulier, les réponses doivent être justifiées.
Le sujet est (en principe) trop long pour le temps imparti, il est donc conseillé de traiter en priorité les questions que l'on sait faire en en indiquant clairement la référence.

I) Questions de Cours:
1) a) Que sont des séries univariées et bivariées (une et deux variables) ?
b) Donner un exemple de série bivariée.
2) Donner la grammaire des arbres 1-2 et leur série génératrice par nombre de nœuds.
indication : Pour vérification, cette série doit être

$$T = \frac{1 - x - \sqrt{1 - 2x - 3x^2}}{2x} = x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 9x^5 + 21x^6 + 51x^7 + 127x^8 + \cdots \tag{1}$$

II) Exercices

A) La grammaire des arbres 1-2 incomplets est

$$\mathcal{A} = \bullet + \begin{array}{c}\bullet\\ |\\ \mathcal{A}\end{array} + \begin{array}{ccc}\bullet & & \\ \swarrow & & \searrow\\ \mathcal{A} & & \mathcal{A}\end{array} + \begin{array}{ccc}\bullet & & \\ \swarrow & & \\ \mathcal{A} & & \end{array} + \begin{array}{ccc}\bullet & & \\ & & \searrow\\ & & \mathcal{A}\end{array}$$

1) a) Parmi ces trois mesures : nombre de feuilles, de nœuds, profondeur, il y en a un qui ne peut pas donner de série génératrice. Lequel ?
b) Déssinez les arbres de ce type à 1, 2 et 3 nœuds.
c) Donner la série génératrice par nombre de nœuds ? (on explicitera complètement la méthode).
B) 1) Les nombres de Fibonacci sont donnés par la récurrence

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1;\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \tag{2}$$

a) Redémontrer que la série génératrice des nombres de Fibonacci est $S(z) = \frac{z}{1-z-z^2}$.
b) Décomposer la fraction précédente en éléments simples et en déduire (justifier) que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt(5)}(\phi^n - \bar{\phi}^n) \tag{3}$$

c) Déduire du (b) une expression, sous forme de fraction rationnelle, de la série $\sum_{n=0}^{\infty} F_n^2 z^n$.
Indication: On évitera au maximum les calculs à l'aide des relations $\phi\bar{\phi} = -1$ et $\phi + \bar{\phi} = 1$.
d) En calculant $F_{n+3}^2 - F_{n+2}^2$ trouver une relation de récurrence entre les $a_n = F_n^2$. Recalculer la fraction rationnelle $\sum_n F_n^2 z^n$.
2) On considère une suite satisfaisant une relation de récurrence d'ordre deux $x_{n+2} = a_0 x_n + a_1 x_{n+1}$.
a) En s'inspirant de la question (4d) et en développant $x_{n+3}^2 - a_0 x_{n+2}^2$, trouver une relation de récurrence satisfaite par la suite x_n^2.
b) Donner la fraction rationnelle $\sum_{n=0}^{\infty} (x_n)^2 z^n$.
3) a) À l'aide de l'égalité $\frac{1}{1+z+z^2} = \frac{1-z}{1-z^3}$, donner le développement en série de cette fraction. Quel en est le support ?
b) Reprendre les questions précédentes avec $\frac{1}{1+z+z^2+z^3}$.
c) Peut-on généraliser à $g_n = (\sum_{j=0}^{n} z^j)^{-1}$? Quel est le résultat ?
4) a) Donner les récurrences et la SGO des *polyominos* stricts (par la taille de la base).
b) Reprendre la question précédente avec les polyominos *Stricts à droite*, *Stricts à gauche et à droite* (les dessins seront faits au tableau).
B) "Balls and bars" (BB). —
On appelle ainsi des structures du type

$$\bullet | \bullet\bullet\bullet | \bullet | \bullet\bullet \tag{4}$$

c'est à dire des points équidistants et horizontaux séparés par des | de façon que :

Toutes les barres ont (au moins) un point qui les précède et un point qui les suit.

Soit a_n, le nombre de ces structures avec n points (la structure vide est admise). Expliquer pourquoi a_n vérifie la récurrence linéaire $a_0 = a_1 = 1;\ a_{n+2} = 2a_{n+1}$.
2) Se servir de ce qui précède pour montrer que la série génératrice $S = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ vérifie

$$S = 1 + z + 2z(S-1) \tag{5}$$

3) Résoudre (5) et montrer que $a_n = 2^{n-1}$ pour $n > 0$.
4) Un *vecteur d'entiers* (VE) est une liste d'entiers non nuls $\mathbf{I} = [i_1, i_2, \cdots i_k]$ et son *poids* est la somme de ses coordonnées. En voici quelques uns avec leur poids

$\mathbf{I}$	$[1,4]$	$[3,1,1]$	$[2,1,3]$	$[1,2,1,3]$
$poids(\mathbf{I})$	5	5	6	7

a) Donner une correspondance naturelle entre les BB de poids n et les vecteurs d'entiers de poids n.

III. (Petit) Problème
On construit une suite de $\mathbb{Z}^2$ par le procédé suivant

$$\begin{array}{ccccccccc}
\bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet \\
\downarrow & & & & & & & & \uparrow \\
\bullet & & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & & \bullet \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \bullet & & \circ & \rightarrow & \bullet & & \bullet \\
 & & \downarrow & & & & & & \uparrow \\
 & & \bullet & \rightarrow & \bullet & \rightarrow & \bullet & \rightarrow & \bullet
\end{array}$$

c'est une suite de couples (c_n), le point de départ ($\circ$) étant l'origine ($c_0 = (0,0)$).
a) Soit $d_1(n)$, l'indice du n^{ième} passage de c_n sur la première demi-diagonale $x = y;\ x > 0$. On a

n	1	2	3	4	5
$d_1(n)$	2	12	30	56	90

montrer que $a_1(n) = d_1(n+1) - d_1(n)$ vérifie $a_1(n+1) - a_1(n) = 8$ (on pourra donner une preuve "picturale", sinon il est conseillé d'admettre le résultat et de continuer).
b) Déduire de la question précédente que $a_1(n) = 8n + 2$.
c) Donner les séries génératrices $\sum_{n\geq 0} a_1(n) z^n$ puis $\sum_{n\geq 0} d_1(n) z^n$.
d) Déduire de ce qui précède que $d_1(n) = (2n)^2 - 2n$.
3) Montrer que les indices du n^{ième} passage de c_n sur 3 autres demi-diagonales sont respectivement (en tournant dans le sens trigonométrique)

$$d_2(n) = (2n)^2;\ d_3(n) = (2n)^2 + 2n;\ d_4(n) = (2n)^2 + 4n = (2n+1)^2 - 1$$

donner les séries génératrices (en z) de $d_i;\ i = 1..4$.
4) Selon la position de k par rapport à $d_1(n) < d_2(n) < d_3(n) < d_4(n)$ donner la valeur de $c_k = (x_k, y_k)$ et montrer que $k \to c_k$ est une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}^2$.

3) Reprendre le problème précédent avec le bijection $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ définie par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \cdots & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet \\
 & & & & & & \uparrow \\
\bullet & \rightarrow & \bullet & \rightarrow & \bullet & & \bullet \\
\uparrow & & & & \downarrow & & \uparrow \\
\bullet & \leftarrow & \bullet & & \bullet & & \bullet \\
 & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow \\
\circ & \rightarrow & \bullet & & \bullet & \rightarrow & \bullet
\end{array}$$