AMI2 (Calcul Formel) : Partiel du 20 Mars 2013.

Seules les notes manuscrites et le support de cours sont autorisés. Le candidat s'efforcera de rédiger lisiblement et avec soin sa copie.
Le sujet est (en principe) trop long pour le temps imparti, il est donc conseillé de traiter en priorité les questions que l'on sait faire en en indiquant clairement la référence.

I) Questions de Cours. —
1) a) Qu'est-ce qu'une suite ultimement périodique ? Quels en sont les paramètres ?
On met une suite ultimement prriodique $S = (x_n)_{n\geq 0}$ sous deux formes

$$S = x_0, x_1, \cdots (x_{N_1}, \cdots x_{N_1+P_1})^\infty = x_0, x_1, \cdots (x_{N_2}, \cdots x_{N_2+P_2})^\infty \tag{1}$$

avec $N_i \geq 0$; $P_i > 0$.
b) Expliquez pourquoi on peut la mettre sous la forme

$$S = x_0, x_1, \cdots (x_{N_3}, \cdots x_{N_3+P_3})^\infty \tag{2}$$

avec $N_3 = min(N_1, N_2)$; $P_3 = ppcm(P_1, P_2)$.
c) En déduire qu'il existe une forme minimale

$$S = x_0, x_1, \cdots (x_e, \cdots x_{e+p})^\infty \tag{3}$$

qui minore toutes les autres, c'est à dire que si

$$S = x_0, x_1, \cdots (x_N, \cdots x_{N+P})^\infty \tag{4}$$

alors $e \leq N$ et $p|P$.
2) a) Qu'est-ce qu'un générateur à un pas (G1P), à deux pas (G2P) ?
b) Qu'est-ce qu'un GCL1 ? Un GCL2 (ou GL2P) ? Donner des exemples.
c) Donner la décomposition du GL2P dans le cas où l'équation caractéristique (EC) a des racines (deux cas). On utilisera les notations suivantes

$$(x_0,\ x_1;\ x_{n+2} \equiv \alpha x_n + \beta x_{n+1}\ [p]) \tag{5}$$

d) Que fait-on quand l'EC n'a pas de racine ?
II) Exercices. —
1) Donner l'ensemble des n qui vérifient l'équation (on le donnera soit sous forme de $\emptyset$ soit à l'aide d'un ensemble périodique le cas échéant)

$$\text{a) } 3^{2n} \equiv 7^n\ [11] \quad \text{b) } 3^n \equiv n^4\ [11] \quad \text{c) } n3^n \equiv (2n+1)2^n\ [11]$$

2) a) Donner les orbites (sauf pour le $\heartsuit$) et les paramètres des générateurs suivants:

$$\clubsuit)\ x_0 = 1;\ x_{n+1} = 3x_n + 1\ [17] \qquad \diamondsuit)\ x_0 = 0;\ x_{n+1} = 7x_n + 1\ [18]$$
$$\heartsuit)\ x_0 = 2;\ x_{n+1} = 16x_n + 4\ [45] \qquad \spadesuit)\ x_0 = 2;\ x_{n+1} = 16x_n + 3\ [45]$$

b) Quel est le type des générateurs précédents ? Citer le théorème permettant de savoir, sans calculs s'ils sont (ou non) de période maximum.
3) Donner les "pieuvres" des générateurs suivants:

$$\clubsuit)\ x \to x^2 + 1\ [11] \qquad \diamondsuit)\ x \to x^3 + x\ [17]$$
$$\heartsuit)\ x \to x^3 - 1\ [7] \qquad \spadesuit)\ x \to x^3 + x^2\ [10]$$

c) On constate que, dans les "pieuvres" précédentes, les sommets ont un nombre d'antécédents bornés par B selon le tableau suivant:

Exercice	♣	♢	♡	♠
B	2	3	3	9

pouvez-vous expliquer ce phénomène ?

4) a) Donner les orbites des GL2P suivants (pour vous aider, la période est indiquée dans le tableau qui utilise les notations de (5)).

Question	x_0	x_1	a	b	p	λ
i)	1	5	9	11	13	4
ii)	1	5	1	10	13	4
iii)	1	1	9	11	13	12
iv)	1	1	1	10	13	52

b) Décomposer les générateurs donnés par le tableau précédent.

5) a) Donner les orbites des GL2P suivants.

Question	x_0	x_1	a	b	p	$r^2 =$	λ
i)	1	1	1	2	5	2	12
ii)	1	1	5	0	7	3	12
iii)	1	1	3	1	5	2	24
iv)	1	1	3	1	7	3	24

b) Décomposer les générateurs donnés par le tableau précédent (on adjoindra la racine indiquée dans le tableau).

III. (Petit) Problème

On considère la suite $x_n = n2^n + 3^n + 1 \mod 13$, le but du problème est de montrer qu'elle provient d'un GL4P. Un GLkP est défini par

$$(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{k-1};\ x_{n+k} = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j x_{n+j})$$

a) Calculer les différences $y_n = x_{n+1} - x_n;\ z_n = y_{n+1} - 2y_n;\ t_n = z_{n+1} - 3.z_n$

b) Montrer que z_n provient d'un GL2P en calculant $t_{n+1} - 2.t_n$.

c) Montrer, par une méthode similaire que y_n et x_n proviennent respectivement d'un GL3P et d'un GL4P que l'on précisera.