Master ISIFAR, Visualisation. Examen de Mars 2009.

Seules les notes manuscrites et le polycopié sont autorisés. Le candidat s'efforcera de rédiger lisiblement et avec soin sa copie.
Le sujet est (en principe) trop long pour le temps imparti, il est donc conseillé de traiter en priorité les questions que l'on sait faire en en indiquant clairement la référence.

I) Question de Cours:

1) a) Qu'est-ce qu'un générateur à un pas ? Qu'est-ce qu'un GCL1 ?
b) Quand est-il période maximale ? Quel est l'intérêt du fait qu'il le soit ? (On présentera le GC1

$$x_0;\ x_{n+1} = ax_n + b \bmod m)$$

2) a) Qu'est-ce qu'une suite ultimement périodique ? comment dfinit-on ses paramètres ?
b) Qu'est-ce que la vectorisation ?
c) Montrer que les suites qui proviennent d'un GL2 sont ultiment périodiques ? En est-il de même pour les GLk en général ?
d) Qu'est-ce qui caractérise les suites ultimement périodiques engendrées par les G1P ?
c) Faire tourner complètement sur les générateurs (non-linéaires à un pas) suivants, donner leurs orbites et leurs paramètres :

$\clubsuit$) $x_0 = 3;\ x_{n+1} = x_n^2 + 1\ [17]$ $\diamondsuit$) $x_0 = 4;\ x_{n+1} = x_n^2 + x_n\ [11]$
$\heartsuit$) $x_0 = 2;\ x_{n+1} = x_n^3 + x_n\ [12]$ $\spadesuit$) $x_0 = 1, 2, 3;\ x_{n+1} = x_n^2 + x_n + 1\ [19]$

II) Exercice:

1) Donner les paramètres des suites suivantes (indice d'entrée et période).
(Attention $0^0 = 1$) :

a) $3^n + 4^n + 0^n\ [19]$ b) $n + n^2 2^n\ [11]$
c) $x_0 = x_1 = 0$ *et* $(n \geq 2 \Longrightarrow x_n = 2^{(2^n)})[17]$ d) $3^{2n+1} + 2^{3n+1}\ [23]$

III) Problème:

A) On considère la suite $x_n = 2^n + n3^n\ [17]$.
1) a) Soit $y_n = x_{n+1} - 2x_n$. Calculer y_n. Est-ce une suite géométrique (modulo 17) ?
b) Montrer que $z_n = y_{n+1} - 3y_n$ est une suite géométrique (modulo 17).
c) En déduire que y_n provient d'un GL2P dont on donnera la fonction de transition sous la forme.

$$y_{n+2} \equiv ay_n + by_{n+1}\ [17] \tag{1}$$

2) a) En reportant x_n dans (1), montrer que x_n suit une loi de transition (modulo 17) du type

$$x_{n+3} \equiv \alpha x_n + \beta x_{n+1} + \gamma x_{n+2}$$

et expliquer pourquoi x_n [17] est ultimement périodique.
3) a) Montrer que 2^n [17] a pour période 8. Quelle en est la 1/2 période ? Ce fait est-il général ?
b) Montrer que 3^n [17] a une période 16.
c) En déduire que la période de x_n divise 272. Quelle est sa véritable période ?
B) (Étude générale) On considère les suites qui sont données par

$$x_0, x_1;\ x_{n+2} = c_0 x_n + c_1 x_{n+1} + c_2\ [m] \tag{2}$$

1) Pourquoi ces suites sont-elles ultimement périodiques ? (On considèrera la fonction de transition $(x, y) \to c_0 x + c_1 y + c_2$ définie dans un ensemble que l'on précisera).
2) On définit la suite $y_n = x_n + h$, exprimer y_{n+2} en fonction de y_n et y_{n+1} et montrer que, si $(c_0 + c_1 - 1)$ est inversible modulo m, on peut ajuster h de façon que y_n soit donnée par un GL2P (on donnera la valeur de h).
3) a) On définit la suite des différences $z_n = x_{n+1} - x_n$, montrer que z_n est définie par un GL2P que l'on précisera.
Dans la suite, on suppose que $m = p$ est premier.
b) Dans le cas où $z_n = ur_1^n + vr_2^n$ avec $r_1, r_2 \neq 1$, montrer que

$$x_n = u\left(\frac{r_1^n - 1}{r_1 - 1}\right) + v\left(\frac{r_2^n - 1}{r_2 - 1}\right) + x_0$$

c) Pourquoi, alors, est-on dans les hypothèses de la question (2) ?