IUP3 : Informatique et modelisation. Examen du 08.01.03.

Avertissement : Seules les notes manuscrites et le support de cours sont autorisés. Le candidat s'efforcera de rédiger lisiblement et avec soin sa copie. Le sujet est (en principe) trop long pour le temps imparti, il est donc conseillé de traiter en priorité les questions que l'on sait faire en en indiquant clairement la référence.
Le surveillant de l'épreuve a toute lattitude pour placer les candidats afin qu'ils puissent composer dans les meilleures conditions.

I) Questions de Cours. —

1) a) Décrire le modèle de Cox-Ross-Rubinstein. Quel en est l'interêt ?
b) Combien, en général, trouve-t-on de prix possibles à l'arrivée ? (i.e. au bout de n échéances temporelles)
c) Quelles sont les probabilités d'avoir ces prix ?
d) Donner, en la justifiant, l'espérance de prix à l'arrivée.
2) a) Donner le type des générateurs de hasard suivants (G1P, G2P, GL1P, GL2P) :

i) $x_0 = x_1 = 1;\ x_{n+2} = x_n^2 + x_{n+1}\ [11]$ ii) $x_0 = 0,\ x_1 = 1;\ x_{n+2} = 3x_n + 2x_{n+1}\ [17]$
iii) $x_0 = 1;\ x_{n+1} = 2^{x_n}\ [53]$ iv) $x_0 = 2,\ x_n = 2^n + 3^n\ [29]$

b) Le générateur (i) peut il être mis sous forme linéaire ?

II) Exercices. —

1) Trouver, s'ils existent, le premier et le k$^{\text{ième}}$ n (en fonction de k) tel que:

a) $3^n + 7^n \equiv 0\ [11]$ b) $3^n + (-4)^n \equiv 0\ [7]$ c) $n^2 + 1 \equiv 4\ [11]$ d) $5n3^n + 2n5^{2n} \equiv 5\ [7]$

Si l'équation est impossible, on expliquera pourquoi.
2) a) Donner les orbites et les paramètres des générateurs suivants:

i) $x_0 = 1;\ x_{n+1} = 2x_n + 5\ [11]$ ii) $x_0 = 0;\ x_{n+1} = x_n + 3\ [21]$
iii) $x_0 = 2;\ x_{n+1} = 7x_n + 4\ [13]$ iv) $x_0 = 2;\ x_{n+1} = 9x_n + 1\ [15]$

b) Quel est le type des générateurs précédents ? Citer le théorème permettant de savoir, sans calculs, s'ils sont (ou non) de période maximum.
3) a) Résoudre et discuter dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$:
i) $x^2 + x + 1 = 0;\ p = 11, 13$ ii) $x^2 + 4x + 1 = 0;\ p = 11, 17$
iii) $x^2 + mx + 2 = 0;\ p = 7, 11$ iv) $x^3 + 1 = 0;\ p = 13, 17$
v) $x^4 = m;\ p = 19, 23$ vi) $x^4 + x^2 + 1 = 0;\ p = 13, 17$
b) Quel est le lien de la question (1) avec les GL2P ? (on donnera l'étude complète de la période dans les cas où il y a des racines).
4) On considère les GL2P qui sont donnés par

$$(x_0,\ x_1;\ x_{n+2} \equiv \alpha x_n + \beta x_{n+1}\ [p]) \tag{A}$$

a) Donner les orbites des GL2P suivants (pour vous aider, la période est indiquée dans le tableau qui utilise les notations de (A)).

Question	x_0	x_1	α	β	p	λ
i)	1	5	9	11	13	4
ii)	1	5	1	10	13	4
iii)	1	1	9	11	13	12
iv)	1	1	1	10	13	52

b) Décomposer les générateurs donnés par le tableau précédent.

III. (Petit) Problème

On considère les suites qui sont données par

$$x_0, x_1;\ x_{n+2} = c_0 x_n + c_1 x_{n+1} + c_2\ [m] \tag{A}$$

1) Pourquoi ces suites sont-elles ultimement périodiques ? (On considèrera la fonction de transition $(x, y) \to c_0 x + c_1 y + c_2$ définie dans un ensemble que l'on précisera).
2) On définit la suite $y_n = x_n + h$, exprimer y_{n+2} en fonction de y_n et y_{n+1} et montrer que, si $(c_0 + c_1 - 1)$ est inversible modulo m, on peut ajuster h de façon que y_n soit donnée par un GL2P (on donnera la valeur de h).
3) a) On définit la suite des différences $z_n = x_{n+1} - x_n$, montrer que z_n est définie par un GL2P que l'on précisera.
Dans la suite, on suppose que $m = p$ est premier.
b) Dans le cas où $z_n = u r_1^n + v r_2^n$ avec $r_1, r_2 \neq 1$, montrer que

$$x_n = u\left(\frac{r_1^n - 1}{r_1 - 1}\right) + v\left(\frac{r_2^n - 1}{r_2 - 1}\right) + x_0$$

c) Pourquoi, alors, est-on dans les hypothèses de la question (2) ?