

### IUP3 (Finance et Actuariat): Examen de Janvier 2000.

Seules les notes manuscrites et le support de cours sont autorisés. Le candidat s'efforcera de rédiger lisiblement et avec soin sa copie.

Le sujet est (en principe) trop long pour le temps imparti, il est donc conseillé de traiter en priorité les questions que l'on sait faire en indiquant clairement la référence.

#### I) QUESTION DE COURS:

- 1) a) Comment modélise-t-on le comportement d'un actif à risque à l'aide du modèle de Cox-Ross-Rubinstein ? (On expliquera en quoi il est lié à la loi binomiale et le calcul de l'espérance de prix).
- b) Quelle interprétation peut-on donner à cette moyenne ?
- c) En considérant le prox comme une variable aléatoire, en calculer la variance et l'écart-type.
- 2) Comment modélise-t-on les tirages (avec et sans remise) sur machine ? Donner des exemples.
- 3) Comment calcule-t-on la période d'un GL2P

$$(x_0, x_1; x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n) ?$$

#### II) EXERCICES (Ces exercices, sur de petits modules, visent à vérifier si le cours a été bien compris).

- 1) Trouver, s'ils existent, le premier et le 10<sup>ième</sup>  $n$  tel que:

$$\text{a) } 3^n \equiv 7^{2n} \pmod{11} \quad \text{b) } 3^{7n+1} \equiv 7^{3n+1} \pmod{11} \quad \text{c) } 5n3^n \equiv 2n7^{2n} \pmod{11}$$

Indication: Si l'équation est impossible, expliquer pourquoi.

- 2) a) Donner les orbites (sauf pour le  $\heartsuit$ ) et les paramètres des générateurs suivants:

$$\begin{array}{ll} \clubsuit) x_0 = 1; x_{n+1} = 3x_n + 1 \pmod{17} & \diamondsuit) x_0 = 0; x_{n+1} = 7x_n + 1 \pmod{18} \\ \heartsuit) x_0 = 2; x_{n+1} = 16x_n + 4 \pmod{45} & \spadesuit) x_0 = 2; x_{n+1} = 16x_n + 3 \pmod{45} \end{array}$$

bb) Quel est le type des générateurs précédents ? Citer le théorème permettant de savoir, sans calculs s'ils sont (ou non) de période maximum.

- 2) Donner les "pieuvres" des générateurs suivants:

$$\begin{array}{ll} \clubsuit) x \rightarrow x^2 + 1 \pmod{11} & \diamondsuit) x \rightarrow x^3 + x \pmod{17} \\ \heartsuit) x \rightarrow x^3 - 1 \pmod{7} & \spadesuit) x \rightarrow x^3 + x^2 \pmod{10} \end{array}$$

c) On constate que, dans les "pieuvres" précédentes, les sommets ont un nombre d'antécédents bornés par  $B$  selon le tableau suivant:

| Exercice | $\clubsuit$ | $\diamondsuit$ | $\heartsuit$ | $\spadesuit$ |
|----------|-------------|----------------|--------------|--------------|
| $B$      | 2           | 3              | 3            | 9            |

pouvez-vous expliquer ce phénomène ?

#### III. (Petit) Problème

Soit  $X$  une variable aléatoire de loi  $\mathcal{B}(n, p)$ . Chaque résultat de  $X$  est affiché sur un compteur qui est détraqué de la façon suivante: quand  $X$  n'est pas nul, le compteur affiche le résultat correct et si  $X$  est nul, le compteur affiche un nombre au hasard entre 1 et  $n$ . Soit  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre affiché.

- a) Déterminer la loi de  $Y$  et son espérance. Variance ?
  - b) Montrer sans calculs que  $E(Y) \geq E(X)$ .
- (D'après ESCP).