Informatique et modelisation. Partiel du 19.12.01.

Seules les notes manuscrites et le support de cours sont autorisés. Le candidat s'efforcera de rédiger lisiblement et avec soin sa copie.
Le sujet est (en principe) trop long pour le temps imparti, il est donc conseillé de traiter en priorité les questions que l'on sait faire en en indiquant clairement la référence.

I) QUESTIONS DE COURS. —
1) a) En quoi consiste le modèle de Cox-Ross-Rubinstein ?
b) Donner l'espérance de prix d'un actif à risque qui suit ce modèle.

2) a) Qu'est-ce qu'un générateur à un pas (G1P), à deux pas (G2P) ?
b) Qu'est-ce qu'un GCL1 ? Un GCL2 (ou GL2P) ? Donner des exemples.
c) Donner la décomposition du GL2P dans le cas où l'équation caractéristique (EC) a des racines (deux cas). On utilisera les notations suivantes

$$(x_0,\ x_1;\ x_{n+2} \equiv \alpha x_n + \beta x_{n+1}\ [p]) \tag{1}$$

d) Que fait-on quand l'EC n'a pas de racine ?
II) EXERCICE. —
1) a) Donner les orbites des GL2P suivants (pour vous aider, la période est indiquée dans le tableau qui utilise les notations de (1)).

Question	x_0	x_1	a	b	p	λ
i)	1	5	9	11	13	4
ii)	1	5	1	10	13	4
iii)	1	1	9	11	13	12
iv)	1	1	1	10	13	52

b) Décomposer les générateurs donnés par le tableau précédent.

4) a) Donner les orbites des GL2P suivants.

Question	x_0	x_1	a	b	p	$r^2 =$	λ
i)	1	1	1	2	5	2	12
ii)	1	1	5	0	7	3	12
iii)	1	1	3	1	5	2	24
iv)	1	1	3	1	7	3	24

b) Décomposer les générateurs donnés par le tableau précédent (on adjoindra la racine indiquée dans le tableau).

III. (Petit) Problème

On considère la suite $x_n = n2^n + 3^n + 1 \mod 13$, le but du problème est de montrer qu'elle provient d'un GL4P. Un GLkP est défini par

$$(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{k-1};\ x_{n+k} = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j x_{n+j})$$

a) Calculer les différences $y_n = x_{n+1} - x_n;\ z_n = y_{n+1} - 2y_n;\ t_n = z_{n+1} - 3.z_n$
b) Montrer que z_n provient d'un GL2P en calculant $t_{n+1} - 2.t_n$.
c) Montrer, par une méthode similaire que y_n et x_n proviennent respectivement d'un GL3P et d'un GL4P que l'on précisera.