



**HAL**  
open science

# Développement asymptotique des sommes harmoniques

Văn Chiên Bùì

► **To cite this version:**

Văn Chiên Bùì. Développement asymptotique des sommes harmoniques. Ordinateur et société [cs.CY].  
Université Sorbonne Paris Cité, 2016. Français. NNT : 2016USPCD006 . tel-01690869

**HAL Id: tel-01690869**

**<https://theses.hal.science/tel-01690869>**

Submitted on 23 Jan 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS 13 -  
SORBONNE PARIS CITÉ

présentée et soutenue publiquement par

BÙI VĂN CHIẾN

---

# Développement asymptotique des sommes harmoniques

---

Soutenance le 9 Décembre 2016

Devant le jury composé de :

- |                                  |   |
|----------------------------------|---|
| <i>M.</i> GÉRARD H. E. DUCHAMP   | professeur, Université Paris 13 (Co-directeur)                    |
| <i>M.</i> VINCEL HOANG NGOC MINH | professeur, Université Lille 2 (Co-directeur)                     |
| <i>M.</i> JACKY CRESSON          | professeur, Université de Pau (Rapporteur)                        |
| <i>M.</i> LOÏC FOISSY            | professeur,<br>Université du Littoral Côte d'Opale (Rapporteur)   |
| <i>M.</i> SYLVIE PAYCHA          | professeur, Université de Potsdam (Examineur)                     |
| <i>M.</i> JORIS VAN DER HOEVEN   | directeur de recherche, CNRS<br>& École Polytechnique (Examineur) |
| <i>M.</i> DANIEL BARSKY          | professeur, CNRS & Paris 13 (Examineur)                           |
| <i>M.</i> CHRISTOPHE TOLLU       | Professeur, Université Paris 13 (Examineur)                       |



---

## Développement asymptotique des sommes harmoniques

**Résumé.** En abordant les nombres spéciaux comme les sommes harmoniques ou les polyzêtas sous leur aspect combinatoire, nous introduisons d'abord la définition d'un produit entre mots, dit produit de quasi-mélange  $q$ -déformé, une généralisation des produits de mélange et de quasi-mélange, ce qui nous permet de construire des structures complètes d'algèbre de Hopf en dualité. En même temps, nous construisons des bases en dualité, contenant des bases de transcendance associées aux mots de Lyndon, et des formules explicites sur lesquelles les sommes harmoniques, les polyzêtas ou les polylogarithmes sont indexés et représentés par la factorisation de la série génératrice noncommutative diagonale. De cette façon, nous déterminons des développements asymptotiques des sommes harmoniques, indexées par ces bases, grâce à leur série génératrice et à la formule d'Euler Maclaurin. Nous établissons également une équation de liaison sur les polyzêtas, qui apparaissent comme les parties finies des développements asymptotiques des sommes harmoniques et des polylogarithmes, reliant entre elles deux structures algébriques. En identifiant les coordonnées locales de cette équation, nous trouvons des relations polynomiales homogènes, en poids, entre les polyzêtas. Pour accompagner cette étude théorique, nous proposons des algorithmes et un package en Maple afin de calculer des bases, la structure des polyzêtas et des développements asymptotiques des sommes harmoniques.

### Asymptotic expansion of harmonic sums

**Abstract.** Approaching special numbers as harmonic sums or polyzetas (multiple zeta values) in the spirit of combinatorics, we first focus on the study of algebraic structures on words by introducing the definition of a product on words, called  $q$ -shuffle product, a common generalisation of shuffle and quasi-shuffle products, which allows us to completely construct Hopf algebras in duality. Simultaneously, we establish recurrent formulas in order to compute bases in duality, containing transcendence bases tied to Lyndon words on which harmonic sums, the polyzetas and polylogarithms are indexed. We use them to represent the factorization of a diagonal noncommutative generating series. In this respect, we determine asymptotic expansions of harmonic sums thanks to their generating series and to Euler Maclaurin formula. We also establish a bridge equation of polyzetas, which appear as finite parts in asymptotic expansions of harmonic sums and of polylogarithms, linking two algebraic structures. Through identification of local coordinates of this equation, we can deduce homogenous, in weight, polynomial relations among polyzetas indexed on the bases. We also give algorithms and a package in Maple which, in practice, allowed us to find results and examples within this thesis.



---

## Remerciement

Ça fait cinq ans que je suis arrivé en France et jouis d'un environnement d'éducation parfaite à l'institut Galilée - l'université Paris 13 (Nord). En consacrant une attention particulière pour moi depuis j'étais un étudiant de Master 2, mes conseillers, professeur Gérard Henry Edmond DUCHAMP (LIPN - Paris 13) et professeur Vincel HOANG NGOC MINH (Lille 2) qui sont les codirecteurs de mon mémoire et de ma thèse, sont les exemples pour moi de suivre dans leur travail et dans la vie. Ils m'ont donné les renseignements, les expériences et m'ont aidé dans des études et des recherches pour finir cette thèse. Je voudrais leur dire avec tout mon cœur le remerciement et, bien sûr, j'espère que nous sommes encore et toujours en accompagnement dans le futur.

Je remercie aux membres du jury qui me font l'honneur de juger ce travail et particulièrement les professeurs qui ont accepté de rédiger les rapports. Remerciement donc pour *M. JACKY CRESSON* (Rapporteur) ; *M. LOÏC FOISSY* (Rapporteur) ; *M. SYLVIE PAYCHA* ; *M. JORIS VAN DER HOEVEN* ; *M. DANIEL BARSKY* (Examineur) ; *M. CHRISTOPHE TOLLU* (Examineur).

Je remercie les membres dans l'équipe CALIN du laboratoire LIPN spécialité les membres dans le groupe de travail Combinatoire, Informatique et Physique (CIP) : *M. Christophe Tollu*, *M. Cyril Banderier*, *Ngo Quoc Hoan*,... qui sont de m'avoir communiqué des expériences, des connaissances par les discussions, les séminaires tous les mardis hebdomadairement. Parallèlement, le Laboratoire d'Informatiques de Paris Nord (LIPN) a hébergé mon activité de recherche, me procurant des conditions de travail bien meilleures que celle de la plupart des thésards. Je voudrais remercier à *Mm Patrice Laure*, responsable du laboratoire, *Mm Bassino*, responsable de l'équipe CALIN, ainsi qu'aux secrétaires du laboratoire : *madame Brigitte GUÉVENEUX*, *madame Nathalie TAVARES* et *madame Marie FONTANILLAS* et également les membres dans l'École doctorale Galilée et BRED, merci beaucoup de tout ce que vous m'avez aidé pendant mon séjour ici.

J'ai pu arriver en France par la finance du ministère de l'Education et de la Formation du Vietnam et le Campus France suivant un programme de relation entre le Vietnam et la France. Je voudrais dire les remerciements aux professeurs *Ngo Viet Trung*, *Le Tuan Hoa* - Institut de Maths de Hanoï, professeur *Do Duc Thai* - Ecole Norman Supérieur de Hanoï, professeur *Lionel Schwarz* - LAGA - Université Paris 13 qui sont fondateurs ce programme. Je remercie également aux professeurs Vietnamiens, professeurs allégements et professeurs français qui m'ont renseigné les cours dans le programme de master 1 à Hanoï et de master 2 à l'université Paris 13.

La vie va ne pas être coloré si on n'a pas des amis. Je voudrais remercier à mes amis Vietnamiens en France. *Mm Cam Chi* qui est la première personne m'a donné les sentiments chaleureux avec les conseils utiles ; les amis à l'université Paris 13 : *Ngoc Phuong* - *Tan Loc*, *Van Tuan*, *Thanh Trung*, *Thu Trang*, *Nhung*, *Trong Nghia*, *Hang Nga*,

Huyen (chi), Huyen (em), Anh Thi, Dai Viet, Diep, Hieu, Dinh Hoan, Dinh Hoang, Phuoc Nhat, Hoang Gia, Thi Thu, Thi Theu,... Ils sont comme ma famille, mon appui spirituel en France. Je remercie également les membres dans la chorale Hop Ca Que Huong avec lesquelles j'ai eu le temps amuser ensemble dans les week-end.

Enfin, quelques-uns occupent une place à part dans ces remerciements : mes parents et ma famille au Vietnam qui sont toujours après moi tous les pas dans ma vie.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>1 L'algèbre de Hopf de quasi mélange <math>q</math>-déformée</b>	<b>25</b>
1.1. Combinatoire des mots . . . . .	26
1.1.1. Mot, polynôme, série . . . . .	26
1.1.2. Algèbre de produit mélange . . . . .	27
1.2. Algèbre de quasi mélange $q$ -déformée . . . . .	29
1.3. Bases en dualité dans $K\langle Y \rangle$ . . . . .	38
1.3.1. Propriétés des séries primitives . . . . .	38
1.3.2. Base(s) du module (libre) des éléments primitifs et de l'algèbre enveloppante . . . . .	41
1.3.3. Construction d'une formule pour la base duale . . . . .	50
1.3.4. Représentations des polynômes sur les bases . . . . .	61
<b>2 Développement asymptotique des sommes harmoniques</b>	<b>63</b>
2.1. Quelques concepts fondamentaux . . . . .	64
2.1.1. Définition des séries génératrices . . . . .	64
2.1.2. Formule d'Euler-Maclaurin . . . . .	65
2.2. Somme harmonique . . . . .	67
2.2.1. Fonctions symétriques . . . . .	67
2.2.2. Somme harmonique multiple . . . . .	69
2.3. Développement asymptotique des polylogarithmes . . . . .	71
2.3.1. Définition des polylogarithmes . . . . .	71



2.3.2.	Structure des polylogarithmes . . . . .	72
2.4.	Développement asymptotique des sommes harmoniques . . . . .	83
2.4.1.	En suivant la série génératrice . . . . .	83
2.4.2.	En suivant la formule d'Euler-MacLaurin . . . . .	85
<b>3</b>	<b>Structure des polyzêtas et représentation explicite</b>	<b>89</b>
3.1.	Groupes de Lie et coordonnées locales . . . . .	90
3.1.1.	L'exponentielle de Lie . . . . .	90
3.1.2.	Coordonnées locales sur un groupe de Lie et théorème de Wei-Norman . . . . .	92
3.2.	Structure algébrique des polyzêtas . . . . .	93
3.2.1.	Définitions . . . . .	93
3.2.2.	Structure algébrique de quasi-mélange des polyzêtas . . . . .	94
3.2.3.	Structure algébrique de mélange des polyzêtas . . . . .	95
3.2.4.	Factorisation MRS sur l'algèbre de quasi-mélange $q$ -déformée . . . . .	96
3.3.	Représentations explicites des polyzêtas sur des éléments générateurs algébriques . . . . .	98
3.3.1.	Relations entre les séries génératrices . . . . .	98
3.3.2.	Relations entre polyzêtas grâce à des séries génératrices . . . . .	101
3.3.3.	Algorithmes pour l'exploration de la structure des polyzêtas . . . . .	104
3.3.4.	Exemples obtenus par programme en Maple . . . . .	106
	<b>Conclusion</b>	<b>119</b>
<b>4</b>	<b>Annexes</b>	<b>121</b>
4.1.	Annexe A : Séries doubles, graphes, convolution et limites . . . . .	121
4.1.1.	Séries et polynômes . . . . .	122
4.1.2.	Séries doubles et calculs sur les graphes . . . . .	122
4.1.3.	Limites . . . . .	124
4.1.4.	Partitionnement des indices . . . . .	126
4.1.5.	Factorisation des produits infinis et des caractères . . . . .	126
4.1.6.	Développements asymptotiques . . . . .	127

---

4.2. Annexe B : Programme en Maple . . . . .	130
4.2.1. Calculs sur des mots . . . . .	130
4.2.2. Calculs dans l’algèbre de quasi-mélange $q$ -déformé . . . . .	131
4.2.3. Calculs sur les bases en dualité . . . . .	134
4.2.4. Élimination structure des polyzêtas . . . . .	138
4.2.5. Développement asymptotique des sommes harmoniques . . . . .	143
<b>Bibliographie</b>	<b>145</b>
<b>Index</b>	<b>151</b>



# Introduction

Le  $N$ -ième nombre harmonique généralisé  $H_k(N)$  d'exposant  $k$  est la somme

$$H_k(N) = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots + \frac{1}{N^k} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^k}$$

qui est d'abord apparue dans les recherches de Leonhard Euler (1734) pour accélérer le calcul de limites de séries lentement convergentes, et plus tard (indépendamment) par Colin Maclaurin pour calculer des valeurs approchées d'intégrales. Ils ont déterminé les développements asymptotiques<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} H_1(N) &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \log N + \gamma - \sum_{n=1}^p \frac{B_n}{n} \frac{1}{N^n} + o_{p+1}^{(\infty)}\left(\frac{1}{N^p}\right), \\ H_k(N) &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^k} = \zeta(k) - \sum_{n=k-1}^p \frac{B_{n-k+1}}{n-k+1} \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{N^n} + o_{p+1}^{(\infty)}\left(\frac{1}{N^p}\right), \end{aligned}$$

où  $\gamma$  est la constante d'Euler-Mascheroni et les  $B_n$  désignent les nombres de Bernoulli. Pour tout  $k > 1$ , cette suite converge vers la valeur en  $k$  de fonction zêta de Riemann

$$\lim_{N \rightarrow \infty} H_k(N) = \zeta(k)$$

qui est la partie finie de son développement asymptotique. Il est maintenant classique que les  $H_k(N)$  sont les sommes harmoniques sur un indice et que ces quantités peuvent se généraliser comme suit. Pour toute composition d'entiers positifs  $s = (s_1, \dots, s_r)$ , la somme harmonique (multi-indice),  $H_s(N)$ , est définie par

$$H_s(N) = \sum_{N \geq n_1 > \dots > n_r \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}}.$$

Ces sommes sont encore convergentes, quand  $N$  tend vers l'infini, lorsque  $s_1 > 1$  et leurs limites sont appelées polyzêtas [Car02] ("Multiple Zeta Values" en anglais [Zag94]) et désignés par  $\zeta(s)$ ,

$$\zeta(s) := \sum_{n_1 > \dots > n_r \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}} = \lim_{N \rightarrow \infty} H_s(N). \quad (0.1)$$

---

1.  $o_{p+1}^{(\infty)}$  désigne petit  $o$  à l'infini.

La recherche des relations entre ces nombres ou également la détermination de leurs développements asymptotiques sont des problèmes que mathématiciens et physiciens peuvent (et doivent) poursuivre. En effet, les polylogarithmes et les polyzêtas interviennent, de plus en plus aujourd'hui en combinatoire analytique [Reu93 ; Min07b ; Min98], en théorie quantique des champs [Dri89 ; Dri90 ; Le+96] et en théorie des nombres [Zag94]. Pour établir des identités non triviales entre ces fonctions, on pouvait compter sur les approches basées sur le calcul en haute performance sur les super calculateurs proposées par les physiciens comme D. Broadhurst menées avec l'équipe de très grande compétence et capacité au Centre for Experimental and Constructive Mathematics à Vancouver par J. Borwein (approche qui donne uniquement des quasi-certitudes) [Bor+97] et celles basées sur le calcul par les intégrales de contour proposées par P. Flajolet et B. Salvy à (approche exacte mais exigeant des choix convenables des noyaux d'intégration et donnant des relations entre les polyzêtas une par une) [Fla+98]. Notre approche préconisée sur ces objets est très différente et originale par rapport aux approches précédemment citées car elle cherche tout d'abord expliciter les structures algébriques (de Cauchy et de Hadamard) des polylogarithmes qui sont isomorphes aux algèbres de mélange et de quasi-mélange, pour spécialiser ensuite ces fonctions à des valeurs spéciales pour obtenir la double structure mélange des polyzêtas [Iha+06]. Elle est aussi puissamment efficace car elle se base sur les séries génératrices non commutatives de ces sommes et les bases algébriques en dualité en algèbres de Hopf combinatoires pour obtenir des algorithmes performants et insolites établissant des équations fonctionnelles [G92], calculant la monodromie [Min+00b], développant les comportements asymptotiques des polylogarithmes [Min+99]. De même, il est proposé une méthode pour extraire des contre-terme des sommes et des intégrales divergentes [Min13a ; Min13b]. De là, il est établi que la renormalisation des polyzêtas divergentes peut être obtenue d'une part, par la prise des termes constants des développements asymptotiques dans diverses échelles de comparaison, et d'autre part, par l'action du groupe de Galois différentiel des polylogarithmes sur ces développements asymptotiques [Min+00b ; Min+99]. Cette même action permet également de caractériser le groupe des éléments renormalisant des séries de Chen le long des chemins d'intégration pris dans le plan complexe, doublement fendu aux singularités des polylogarithmes. Par ailleurs, en écrivant la somme harmonique sous la forme

$$H_s(N) = \sum_{N \geq n_1 > \dots > n_r \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}} = \sum_{n_1 > \dots > n_r \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}} - \sum_{n_1 > \dots > n_r > N} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}},$$

on peut voir que le polyzêta est la partie finie de  $H_s(N)$  dans son développement asymptotique sur l'échelle  $\{N^{-i} \log^j(N)\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ . De plus, les séries génératrices ordinaires, en la variable  $z$ , des sommes harmoniques sont encore un objet de recherche très intéressant [Min96 ; Min+00b ; Min+99] : elles donnent les fonctions polylogarithmes<sup>2</sup> (au facteur

2. Les fonctions polylogarithmes définies dans le disque unité ouvert du plan complexe pour tous multi-indices des entiers positifs,  $s = (s_1, \dots, s_r)$ , par  $\text{Li}_s(z) := \sum_{n_1 > \dots > n_r \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}}$ ,  $|z| < 1$ .

$\frac{1}{1-z}$  près) [Min96 ; Min+00c]. C'est-à-dire que, pour chaque composition  $s$ , on a

$$\sum_{N \geq 0} H_s(N) z^N = \frac{1}{1-z} \sum_{n_1 > \dots > n_r \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}} = \frac{\text{Li}_s(z)}{1-z}. \quad (0.2)$$

En ce qui concerne leurs relations, les polylogarithmes, sommes harmoniques et polyzêtas sont toujours les objets de plusieurs travaux de recherche en théorie des nombres et ils apparaissent dans de nombreux problèmes d'analyse combinatoire. La méthode que nous utilisons dans cette thèse est essentiellement combinatoire. Elle utilise les représentations par factorisation des séries génératrices de ces nombres indexées grâce à une structure algébrique construite à partir des mots [Cos+05a ; Min+00c]. La factorisation de Mélançon-Reutenauer-Schützenberger (dit factorisation MRS) a été introduite dans les articles [Sch59 ; Reu93]. Elle joue un rôle central dans la renormalisation des associateurs [Rac00 ; Min13a ; Min13b]. On factorise des séries formelles en variables non-commutatives [Ber+88] dont les coefficients forment des polynômes (indexés par des multi-indices d'entiers positifs) des fonctions zêta de Riemann [Le+96 ; Zag94]. Ces coefficients vérifient des relations quadratiques [Car02] obtenues grâce aux mots de Lyndon [Ber+85 ; Che+58 ; Lot83 ; Rad79]. De cette façon, on a obtenu des relations entre polylogarithmes et, par conséquent, leur structure et leurs développements asymptotiques [Min+99]. Suivant ces représentations, on peut déduire des développements asymptotiques des sommes harmoniques [Cos08].

D'autre part, on obtient une équation que nous appellerons ici "équation du pont"<sup>3</sup> parce qu'elle est un point de passage entre les groupes de Hausdorff du shuffle et du stuffle. Cette équation permet de relier les algèbres de Cauchy et de Hadamard des fonctions polynomiales qui est principalement une conséquence de l'isomorphisme entre les structures algébriques de mélange et de quasi-mélange [Min03 ; Min04 ; Min96 ; Min+00c ; Min+00b ; Cos08]. Ces deux structures admettent les mots de Lyndon comme base de transcendance pure [Rad79].

Pour mieux comprendre ces mécanismes dans notre recherche, nous diviserons la thèse en trois parties correspondant aux trois chapitres :

**1.** Tout d'abord, nous nous concentrerons sur l'étude des structures algébriques sur les mots. Ceci nous permet de produire un système de coordonnées locales [Min13a ; Min13b] pour le groupe de Lie (de dimension infinie) des séries de type groupe grâce à la factorisation de la série diagonale en un produit infini indexé par les mêmes indices que les bases de transcendance<sup>4</sup> (i.e. les mots de Lyndon). Ceci se fait grâce à la factorisation

3. Dans [Eca85], Jean Écalle a introduit également une équation du pont permettant d'effectuer une dérivation étrangère sur les monôme résurgents. Cette dérivation agit comme un opérateur différentiel ordinaire. L'équation est appelée ainsi car elle jette un pont entre le calcul différentiel ordinaire et le calcul différentiel étranger.

4. Pour une algèbre générale (commutative ou non), on appellera *base de transcendance* une base ordonnée  $B = \{b_i\}_{i \in I}$  telle que  $\{B^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}}$  soit une base linéaire de l'algèbre en question, voir [Kan14]

MRS.

Nous compléterons notre recherche [Bui12; Bui+13a; Bui+15b; Bui+15a; Bui+16a; Bui+13b; Bui+15c; Bui+16b] sur les structures algébriques construites avec des mots par des notions utiles effectivement dans l'étude des nombres spéciaux et leurs développements asymptotiques, comme les bases de transcendance (pures) sur lesquelles ces nombres sont indexés. Dans le chapitre 1, en considérant l'alphabet  $Y = \{y_k\}_{k \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$  muni de l'ordre lexicographique  $y_1 > y_2 > \dots$ , nous allons introduire un produit, dit que quasi-mélange  $q$ -déformé, désigné par  $\boxplus_q$ , où  $q$  appartient à une extension du corps des nombres rationnels  $\mathbb{Q}$  (une  $\mathbb{Q}$ -algèbre). La définition du produit est présentée par récursion [Bui12; Bui+13a], pour tous  $y_{k_1}, y_{k_2} \in Y$  et  $u, v \in Y^*$ ,

$$\begin{aligned} u \boxplus_q 1_{Y^*} &= 1_{Y^*} \boxplus_q u = u, \\ y_{k_1} u \boxplus_q y_{k_2} v &= y_{k_1} (u \boxplus_q y_{k_2} v) + y_{k_2} (y_{k_1} u \boxplus_q v) + q y_{k_1+k_2} (u \boxplus_q v). \end{aligned}$$

Ce produit est vraiment une extension du produit de mélange [Ree58] obtenu quand  $q$  est égal à 0, le produit de quasi-mélange [Mal+95] (“shuffle product” en anglais) obtenu quand  $q$  est égal à 1 ou le produit minus-shuffle [Cos+09] obtenu quand  $q$  est égal à  $-1$ . Dans ce contexte, en considérant  $K = \mathbb{Q}[q]$ , extension du corps des nombres rationnels, nous avons une structure d'algèbre  $(K\langle Y \rangle, \boxplus_q, A_{Y^*})$ . Nous considérons également la loi duale, désignée par  $\Delta_{\boxplus_q}$ , définie par

$$\begin{aligned} \Delta_{\boxplus_q} : K\langle Y \rangle &\longrightarrow K\langle Y \rangle \otimes K\langle Y \rangle \\ w &\longmapsto \sum_{u, v \in Y^*} \langle w \mid u \boxplus_q v \rangle u \otimes v. \end{aligned}$$

Cette loi peut également être déterminée comme morphisme du produit de concaténation (et de concaténation double), défini sur les lettres par

$$\Delta_{\boxplus_q}(y_k) = y_k \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes y_k + q \sum_{k_1+k_2=k} y_{k_1} \otimes y_{k_2}, \quad \forall y_k \in Y.$$

De plus, avec le produit de concaténation et son dual, nous obtenons deux structures d'algèbre de Hopf de quasi-mélange

$$(K\langle Y \rangle, \boxplus_q, 1_{Y^*}, \Delta_{\text{conc}}, \varepsilon, \mathcal{S}^{\boxplus_q}) \cong (K\langle Y \rangle, \text{conc}, 1_{Y^*}, \Delta_{\boxplus_q}, \varepsilon, \mathcal{S}_q^{\text{conc}}),$$

où, les antipodes  $\mathcal{S}^{\boxplus_q}$  et  $\mathcal{S}_q^{\text{conc}}$  peuvent être calculées, pour tous les mots  $y_{k_1} \dots y_{k_m}$ , par (voir propositions 1.6, 1.42, et, par la définition de  $J$ , 1.37)

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{\boxplus_q}(y_{k_1} \dots y_{k_m}) &= (-1)^m \sum_{J \in C_m} J(y_{k_m} \dots y_{k_1}), \\ \mathcal{S}_q^{\text{conc}}(y_{k_1} \dots y_{k_m}) &= \sum_{v \in J^{-1}(y_{k_m} \dots y_{k_1})} (-1)^{|v|} v. \end{aligned}$$

Par ailleurs, nous allons encore construire des formules pour les bases en dualité. D'abord, nous construisons une base pour le module des éléments primitifs, désigné par  $Prim(K\langle Y \rangle)$ , qui sont des polynômes  $P \in K\langle Y \rangle$ , solutions de l'équation

$$\Delta_{\sqcup_q}(P) = P \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes P.$$

Dans ce contexte, nous proposons une paire d'opérateurs adjoints<sup>5</sup>,  $\pi_1$  et  $\pi_1^*$ , définis par

$$\begin{aligned} \pi_1(w) &:= \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{w_1, \dots, w_k \in Y^+} \langle w | w_1 \sqcup_q \dots \sqcup_q w_k \rangle w_1 \dots w_k, \\ \pi_1^*(w) &:= \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{w_1, \dots, w_k \in Y^+} \langle w | w_1 \dots w_k \rangle w_1 \sqcup_q \dots \sqcup_q w_k. \end{aligned}$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \pi_1(y_k) &= y_k + \sum_{i \geq 2} \frac{(-q)^{i-1}}{i} \sum_{k_1 + \dots + k_i = k} y_{k_1} \dots y_{k_i}, \\ \pi_1^*(y_k) &= y_k. \end{aligned}$$

Il est facile de déterminer les mots  $w_1, \dots, w_k$  qui interviennent dans la formule de  $\pi_1^*(w)$ . Pour  $\pi_1$ , nous proposons une formule comme suit : pour tout  $w = y_{n_1} \dots y_{n_m} \in Y^*$  et  $k \in \mathbb{N}_+$ ,

$$\begin{aligned} \pi_1(y_{n_1} \dots y_{n_m}) &= \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \times \\ &\sum_{\substack{n_{1_j} + \dots + n_{k_j} = n_j, \\ j=1, \dots, m, n_{i_j} \geq 0}} q^{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m sig(n_{i_j}) - m} y_{n_{1_1}} \dots y_{n_{1_m}} \dots y_{n_{k_1}} \dots y_{n_{k_m}}, \end{aligned}$$

et, en particulier, pour  $w = y_k$ ,

$$\pi_1(y_k) = \sum_{i=1}^k \frac{(-q)^{i-1}}{i} \sum_{k_1 + \dots + k_i = k} y_{k_1} \dots y_{k_i}.$$

On remarque que le morphisme entre les algèbres  $\phi : (\mathbb{Q}\langle Y \rangle, conc, 1_{Y^*}) \rightarrow (\mathbb{Q}\langle Y \rangle, conc, 1_{Y^*})$  vérifiant  $\phi(y_k) = \pi_1(y_k)$  est un automorphisme de  $\mathbb{Q}\langle Y \rangle$ . On a alors [Min13b] que  $\phi$  réalise un isomorphisme de la bialgèbre  $(\mathbb{Q}\langle Y \rangle, conc, 1_{Y^*}, \Delta_{\sqcup}, \epsilon)$  dans la bialgèbre  $(\mathbb{Q}\langle Y \rangle, conc, 1_{Y^*}, \Delta_{\sqcup_q}, \epsilon)$ . C'est-à-dire qu'il vérifie le diagramme commutatif

5. Ils sont adjoints dans le sens, pour tous les mots  $u, v \in Y^*$ ,  $\langle \pi_1(u) | v \rangle = \langle u | \pi_1^*(v) \rangle$ .



suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}\langle Y \rangle & \xrightarrow{\Delta_{\sqcup}} & \mathbb{Q}\langle Y \rangle \otimes \mathbb{Q}\langle Y \rangle \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \otimes \phi \\ \mathbb{Q}\langle Y \rangle & \xrightarrow{\Delta_{\boxplus_q}} & \mathbb{Q}\langle Y \rangle \otimes \mathbb{Q}\langle Y \rangle. \end{array}$$

De plus, pour tout  $w \in Y^*$ ,  $\pi_1(w)$  est un polynôme primitif (voir proposition 1.13) ce qui nous permet de définir la famille  $\{\Pi_l\}_{l \in \mathcal{L}ynY}$  par

$$\Pi_l := \begin{cases} 1_{Y^*} & \text{pour } w = 1_{Y^*} \\ \pi_1(y_k) & \text{pour } w = y_k \\ [\Pi_{l_1}, \Pi_{l_2}] & \text{pour } l \in \mathcal{L}ynY, st(l) = (l_1, l_2). \end{cases}$$

Cette famille forme une base graduée (par le poids<sup>6</sup>) de  $Prim(K\langle Y \rangle)$  ce qui est aussi une algèbre de Lie dans  $K\langle Y \rangle$ . De plus, elle peut être prolongée à la famille dont les indices sont partout dans  $Y^*$ , c'est-à-dire, pour tout mot  $w = l_1^{i_1} \dots l_k^{i_k}$  dans  $Y^*$ ,

$$\Pi_w = \Pi_{l_1}^{i_1} \dots \Pi_{l_k}^{i_k}.$$

D'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, la famille  $\{\Pi_w\}_{w \in Y^*}$  est une base de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie  $Prim(K\langle Y \rangle)$  qui est, d'après le théorème de Cartier-Quillen-Milnor-Moore<sup>7</sup>, isomorphe à l'espace  $K\langle Y \rangle$ . En même temps, la famille duale, désignée par  $\{\Sigma_w\}_{w \in Y^*}$ , i.e. qui vérifie

$$\langle \Sigma_u | \Pi_v \rangle = \delta_{u,v}, \quad \forall u, v \in Y^*,$$

est encore une base de  $K\langle Y \rangle$ . Nous trouvons une formule de récurrence

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Sigma_{y_k} = y_k, & \text{pour } y \in Y, \\ \Sigma_{y_{s_1} \dots y_{s_k}} = \sum_{(\star)_1} y_{s_1} \Sigma_{l_1 \dots l_n} + \sum_{i \geq 2} \frac{q^{i-1}}{i!} \sum_{(\star)_2} y_{s'_1 + \dots + s'_i} \Sigma_{l_1 \dots l_n}, & \text{pour } y_{s_1} \dots y_{s_k} \in \mathcal{L}ynY, \\ \Sigma_w = \frac{\sum_{l_1} \boxplus_q^{i_1} \boxplus_q \dots \boxplus_q \Sigma_{l_k} \boxplus_q^{i_k}}{i_1! \dots i_k!}, & \text{pour } w = l_1^{i_1} \dots l_k^{i_k}, \text{ avec} \\ & l_1 > \dots > l_k \in \mathcal{L}ynY, \end{array} \right.$$

où  $(\star)_1, (\star)_2$  satisfont les conditions  $(y_{s_1}, l_1, \dots, l_n), (y_{s'_1}, \dots, y_{s'_i}, l_1, \dots, l_n) \in \mathcal{N}(y_{s_1}, \dots, y_{s_k})$  ce qui va être détaillé dans la proposition 1.23.

Remarquons que, dans le cas  $q = 0$ , cette formule est exactement la formule (1.11) montrée par Mélançon et Reutenauer [Mel+89]. Ces deux bases,  $\{\Pi_w\}_{w \in Y^*}, \{\Sigma_w\}_{w \in Y^*}$ , sont

6. C'est-à-dire la somme des indices des lettres.

7. Le théorème de Cartier-Quillen-Milnor-Moore affirme que, pour le corps  $K$  caractéristique zéro, une  $K$ -algèbre de Hopf graduée, connecté et cocommutative est isomorphe à l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie des ses éléments primitifs.

respectivement l'images des applications  $\phi$  et  $\check{\phi}^{-1}$ . De plus, nous avons encore la factorisation MRS [Reu93 ; Sch65] et l'algèbre  $(K\langle Y \rangle, \boxplus_q, 1_{Y^*})$  admet la sous-famille  $\{\Sigma_l\}_{l \in \mathcal{L}_{yn}Y}$  comme base de transcendance. Cette base donne un système des coordonnées locales représenté sur la base  $\{\Pi_l\}_{l \in \mathcal{L}_{yn}Y}$  pour les éléments dans le groupe de Hausdorff i.e. le groupe des séries de type groupe. C'est-à-dire, pour tout  $S$ ,

$$S = \sum_{w \in Y^*} \langle S | \Sigma_w \rangle \Pi_w = \prod_{l \in \mathcal{L}_{yn}Y} \exp(\langle S | \Sigma_l \rangle \Pi_l).$$

Pour terminer le chapitre 1, nous proposons un algorithme pour représenter un polynôme sur ces bases.

**2.** Dans le chapitre 2, nous allons appliquer la factorisation MRS pour les représentations de séries génératrices des sommes harmoniques et des polylogarithmes. Ceci nous conduit à établir des relations algébriques associées les mots de Lyndon des polylogarithmes et des sommes harmoniques. Après de brefs rappels sur les somme harmonique et les notions voisines en relation avec les séries génératrices, nous allons mettre de la structure sur les polylogarithmes (dans la section 2.3.2.). Ces structures vont être déduites des structures des sommes harmoniques, établies dans la section 2.4.

D'une part, nous utilisons la série génératrice des fonctions polylogarithmes, pour déduire les coefficients des sommes harmoniques. En considérant la série régularisée des polylogarithmes en  $z = 1$ , Minh et al. [Min+00b ; Min+99] ont établi l'identité

$$L(z) = \sigma[L(1-z)]Z_{\sqcup} = e^{(x_0-1)\log(1-z)} \prod_{l \in \mathcal{L}_{yn}X \setminus X} e^{\text{Li}_{S_l}(z)\sigma(P_l)} e^{x_1 \log \frac{1}{z}} Z_{\sqcup} \quad (0.3)$$

Grâce à la proposition 2.7, par calcul, C. Costermans, J.-Y. Enjalbert et Hoang Ngoc Minh, ont établi [Cos+05a] une formule de représentation des développements asymptotiques des polylogarithmes. Nous donnons ici cette formule en faisant apparaître explicitement le terme contant. L'algorithme de calcul des coefficients a été implémentée sous Maple [Cos08].

**Théorème 0.1** ([Cos+05a]). *Pour chaque  $w \in X^*$ , il existe  $a_{w,i}, b_{w,i,j} \in \mathbb{Z}$ , tels que*

$$\text{Li}_w(z) = \sum_{j=1}^{|w|} a_{w,j} \log^j(1-z) + \langle Z_{\sqcup} | w \rangle + \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{|w|-1} b_{w,i,j} \log^j(1-z)(1-z)^i + o^{(1)}((1-z)^k).$$

Nous allons préciser cette formule dans des cas où les indices sont des mots et essayer de trouver des représentations pour les coefficients dans la formule. Nous allons désigner par  $\text{AE}^{(z_0)}(f(z))$  le développement asymptotique de  $f(z)$  en  $z_0$  sur l'échelle  $\{(1-z)^i \log^j(1-z)\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ . D'abord, nous analysons les fonctions de  $(1-z)$  :

i) Pour  $w = x_0^j, j \in \mathbb{N}_+,$

$$\text{Li}_w(1-z) = \frac{\log^j(1-z)}{j!}.$$

ii) Pour  $^8 |w|_{x_1} = n \geq 1,$

$$\text{Li}_w(1-z) = \sum_{i=n}^k \sum_{j=0}^{|w|-1} b_{w,i,j} (1-z)^i \log^j(1-z) + o^{(1)}((1-z)^k), \quad \forall k \geq n.$$

iii) En le cas particulier  $w = x_0^{k_1} x_1 x_0^{k_2}, k_1, k_2 \in \mathbb{N},$

$$b_{w,i,j} = \begin{cases} \frac{(-1)^{k_2-j}}{j! i^{k_1+k_2+1-j}} \binom{k_1+k_2-j}{k_2-j}, & 0 \leq j \leq k_2 \\ 0, & j > k_2. \end{cases}$$

Ensuite, grâce à l'identité (0.3), nous trouvons :

i) Pour tout  $w \in X^*,$

$$\text{Li}_{S_w}(1-z) = \sum_{uv \leq w} \langle P_u P_v | P_w \rangle \zeta(S_v) \text{Li}_{\sigma(S_u)}(z).$$

ii) En particulier, pour tous les mots de Lyndon,  $l \in \mathcal{Lyn}X,$

$$\text{Li}_{S_l}(1-z) = \text{Li}_{\sigma(S_l)}(z) + \sum_{\substack{l_1 l_2 \leq l \\ l_1, l_2 \in \mathcal{Lyn}X}} \langle P_{l_1} P_{l_2} | P_l \rangle \zeta(S_{l_2}) \text{Li}_{\sigma(S_{l_1})}(z) + \zeta(S_l).$$

Soient  $(u_i^{(n)})_{1 \leq i \leq 2^{n-1}}, (v_j^{(n)})_{1 \leq j \leq 2^{n-1}}$  deux familles en ordre croissant des mots de poids  $n$  sur l'alphabet  $Y,$  nous avons

$$\text{Li}_{\Sigma_{v_j^{(n)}}}(1-z) = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \langle \pi_X(\Sigma_{v_j^{(n)}}) | S_{u_i} \rangle C^{u_i^{(n)}}(z), \quad \forall n \geq 1, 1 \leq i, j \leq 2^{n-1}.$$

D'autre part, nous utilisons la formule d'Euler-Maclaurin dans les développements asymptotiques des sommes harmoniques sur la base de transcendance  $\{\Sigma_l\}_{l \in \mathcal{Lyn}Y}.$  Grâce à cette formule et l'algorithme de Taylor, Costermans et al. [Cos08 ; Cos+05b] ont proposé un algorithme pour déterminer les développements asymptotiques des sommes harmoniques dans l'échelle de fonctions  $\{N^{-i} \log^j(N)\}_{i,j \in \mathbb{N}}$  que :

**Proposition 0.2.** *Pour tout  $w \in Y^*$  et pour tout  $M > 0,$  il existe des coefficients  $\alpha_i, \beta_{k,j}$  et  $C_w$  appartenant à la  $\mathbb{Q}[\gamma]$ -algèbre engendrée par  $\mathcal{Z}$  tels que*

$$H_w(N) = \sum_{j=1}^{|w|} \alpha_j \log^j(N) + C_w + \sum_{i=1}^M \frac{1}{N^i} \sum_{j=0}^{|w|-1} \beta_{i,j} \log^j(N) + o_{M+1}^{(\infty)}\left(\frac{1}{N^M}\right).$$

8.  $|w|_{x_1}$  désigne le nombre de lettres  $x_1$  dans  $w.$

Par exemple

$$\begin{aligned} H_{2,1}(N) &= \zeta(3) + \frac{-\log(N) - 1 - \gamma}{N} + \frac{\frac{1}{2}\log(N) + \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{4}}{N^2} \\ &+ \left(-\frac{1}{6}\gamma - \frac{5}{36} - \frac{1}{6}\log(N)\right) \frac{1}{N^3} + o_4^{(\infty)}\left(\frac{1}{N^3}\right). \end{aligned}$$

Nous proposons aussi une façon de déterminer les développements asymptotiques des sommes harmoniques indexées par la base  $\{\Sigma_l\}_{l \in \mathcal{L}ynY}$  :

i) Pour tout  $l \in \mathcal{L}ynY$

$$\begin{aligned} H_{\Sigma_l}(N) &= \sum_{(\star)} \frac{1}{i!} \sum_{k=1}^N \frac{H_{\Sigma_{l_1 \dots l_j}}(k-1)}{k^{s_{k_1} + \dots + s_{k_i}}} \\ &= \zeta_{\Sigma_l} - \sum_{(\star)} \frac{1}{i!} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{H_{\Sigma_{l_1 \dots l_j}}(k-1)}{k^{s_{k_1} + \dots + s_{k_i}}}, \end{aligned}$$

où, dans  $(\star)$ , la somme est pris sur tous  $\{k_1, \dots, k_i\} \subset \{1, \dots, k\}$  et tous  $l_1 \geq \dots \geq l_j$  tels que  $(y_{s_{k_1}}, \dots, y_{s_{k_i}}, l_1, \dots, l_j) \in \mathcal{N}(y_{s_1}, \dots, y_{s_k})$  (voir proposition 2.18).

ii) Pour chaque mot sous la forme  $w = l_1^{i_1} \dots l_k^{i_k}$ ,

$$H_{\Sigma_w}(N) = \frac{H_{\Sigma_{l_1}}(N)^{i_1} \dots H_{\Sigma_{l_k}}(N)^{i_k}}{i_1! \dots i_k!}$$

De plus, grâce à ces formules, nous proposons également un algorithme (voir Algorithme 2) pour évaluer les développements asymptotiques. Par exemple :

les résultats suivants sont calculés par notre programme en Maple.

$$\begin{aligned} AE^{(\infty)}(H_{\Sigma_{y_1}}(N)) &= \ln(N) + \gamma + 1/2 N^{-1} - 1/12 N^{-2} + \frac{1}{120} N^{-4} + o_5^{(\infty)}(N^{-4}) \\ AE^{(\infty)}(H_{\Sigma_{y_2}}(N)) &= -N^{-1} + 1/2 N^{-2} - 1/6 N^{-3} + o_5^{(\infty)}(N^{-4}) + \zeta_{\Sigma_2} \\ AE^{(\infty)}(H_{\Sigma_{y_1^2}}(N)) &= 1/2 (\ln(N) + \gamma)^2 + \frac{1/2 \ln(N) + 1/2 \gamma}{N} \\ &+ \frac{-1/12 \ln(N) - 1/12 \gamma + 1/8}{N^2} - 1/24 N^{-3} \\ &+ \left(\frac{1}{120} \ln(N) + \frac{1}{120} \gamma + \frac{1}{288}\right) N^{-4} + o_5^{(\infty)}(N^{-4}) \\ AE^{(\infty)}(H_{\Sigma_{y_3}}(N)) &= -1/2 N^{-2} + 1/2 N^{-3} - 1/4 N^{-4} + o_5^{(\infty)}(N^{-4}) + \zeta_{\Sigma_3} \\ AE^{(\infty)}(H_{\Sigma_{y_2 y_1}}(N)) &= 1/2 \zeta_{\Sigma_3} + \frac{1 + \ln(N) + \gamma}{N} + \frac{-1/2 - 1/2 \gamma - 1/2 \ln(N)}{N^2} \\ &+ \left(\frac{7}{18} + 1/6 \ln(N) + 1/6 \gamma\right) N^{-3} - \frac{5}{24} N^{-4} + o_5^{(\infty)}(N^{-4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{AE}^{(\infty)}(\text{H}_{\Sigma_{y_1 y_2}}(N)) &= (\ln(N) + \gamma) \zeta_{\Sigma_2} + \frac{-\ln(N) - \gamma + 1/2 \zeta_{\Sigma_2}}{N} \\
&+ \frac{1/2 \ln(N) + 1/2 \gamma - 1/2 - 1/12 \zeta_{\Sigma_2}}{N^2} \\
&+ \frac{-1/6 \ln(N) - 1/6 \gamma + 1/3}{N^3} + \left(-1/8 + \frac{1}{120} \zeta_{\Sigma_2}\right) N^{-4} + o_5^{(\infty)}(N^{-4})
\end{aligned}$$

**3.** Dans le chapitre 3, nous faisons une étude de la structure des polyzêtas associés aux parties finies des sommes harmoniques. Notre méthode consiste à utiliser des représentations de la série génératrice des polyzêtas convergents. En identifiant les coordonnées locales [Min+13a ; Min+13b], nous trouvons des relations polynomiales entre polyzêtas et tous les polyzêtas sont représentés en termes de polyzêtas irréductibles.

Nous commençons ce chapitre par un bref rappel des définitions élémentaires des exponentielles de Lie, des structures algébriques des polyzêtas et la représentation de leur série génératrice grâce à la factorisation MRS. En codant toutes les compositions d'entiers positifs  $s = (s_1, \dots, s_r)$  par les mots  $y_{s_1} \dots y_{s_r}$  engendrés par l'alphabet  $Y = \{y_k\}_{k \geq 1}$  [Min+00a ; Min+00c], les sommes harmoniques vérifient le produit de quasi-mélange et, en plus, elles définissent l'isomorphisme suivant [Cos+05b ; Min03 ; Min13a]

$$\begin{aligned}
\text{H} : (\mathbb{Q}\langle Y \rangle, \mathfrak{L}) &\longrightarrow (\mathbb{Q}\{\text{H}_w\}_{w \in Y^*}, \cdot) \\
u &\longmapsto \text{H}_u = \{\text{H}_u(N)\}_{N \geq 0}.
\end{aligned}$$

Nous allons maintenir les notations  $\{\Pi_w\}_{w \in Y^*}, \{\Sigma_w\}_{w \in Y^*}$  dans le cas  $q = 1$  (la première famille est une base de Poincaré-Birkhoff-Witt, engendrée par une base (combinatoire) de l'algèbre de Lie des éléments primitifs de la bigèbre  $(\mathbb{Q}\langle Y \rangle, \text{conc}, 1_{Y^*}, \Delta_{\mathfrak{L}}, \varepsilon)$ , et la seconde, sa base duale qui contient une base de transcendance de l'algèbre de quasi-mélange  $(\mathbb{Q}\langle Y \rangle, \mathfrak{L}, 1_{Y^*})$ ). Nous introduisons une formule de factorisation à la fin du chapitre 1, qui permet d'exprimer la série génératrice non-commutative des sommes harmoniques comme suit :

$$\text{H} = \sum_{w \in Y^*} \text{H}_w w = \prod_{l \in \mathcal{L}_{yn} Y} \exp(\text{H}_{\Sigma_l} \Pi_l) = e^{\text{H}_{y_1} y_1} \prod_{l \in \mathcal{L}_{yn} Y \setminus \{y_1\}} \exp(\text{H}_{\Sigma_l} \Pi_l).$$

En développant cette série dans l'échelle de comparaison  $\{N^{-i} \text{H}_{y_1}^j(N)\}_{i, j \in \mathbb{N}}$ , on trouve la partie finie de son développement asymptotique

$$Z_{\mathfrak{L}} := \prod_{l \in \mathcal{L}_{yn} Y \setminus \{y_1\}} \exp(\zeta(\Sigma_l) \Pi_l) \tag{0.4}$$

qui est une série de type groupe pour  $\Delta_{\mathfrak{L}}$ , c'est-à-dire que son terme constant est égal à 1 et que<sup>9</sup>  $\Delta_{\mathfrak{L}}(Z_{\mathfrak{L}}) = Z_{\mathfrak{L}} \hat{\otimes} Z_{\mathfrak{L}}$ . De plus, pour tout mot  $w \in X^*$ , on désigne par

9.  $\hat{\otimes}$  désigne le produit tensoriel complété, en fait tel que  $\mathbb{k}\langle Y \rangle \hat{\otimes} \mathbb{k}\langle Y \rangle = \mathbb{k}\langle Y^* \otimes Y^* \rangle$ .

$\gamma_w$  la partie constante associée à  $H_w$  dans son développement asymptotique sur l'échelle  $\{N^{-i} \log^j(N)\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ , on définit [Cos+09 ; Min13a ; Min13b ; Min+00a ; Min+00c]

$$Z_\gamma := \sum_{w \in Y^*} \gamma_w w. \quad (0.5)$$

Suivant la factorisation MRS dans l'algèbre de Hopf de quasi-mélange, on peut voir que

$$Z_\gamma = \exp(\gamma y_1) Z_{\sqcup}. \quad (0.6)$$

Nous considérons également l'alphabet  $X = \{x_0, x_1\}$ , muni de l'ordre total  $x_0 < x_1$ . Avec le produit de mélange,  $q = 0$ ,  $\{P_w\}_{w \in X^*}$ ,  $\{S_w\}_{w \in X^*}$  désignent respectivement la base de Poincaré-Birkhoff-Witt et la base duale. En codant toutes les compositions  $s = (s_1, \dots, s_r)$  par les mots  $x_0^{s_1-1} x_1 \dots x_0^{s_r-1} x_1$  [Min+00a ; Min+00c], on a aussi que les polylogarithmes vérifient le produit de mélange et on a également la factorisation de la série génératrice non-commutative des polylogarithmes<sup>10</sup>

$$L = \sum_{w \in X^*} \text{Li}_w w = \prod_{l \in \mathcal{L}yn X} \exp(\text{Li}_{S_l} P_l) = e^{\text{Li}_{x_1} x_1} \prod_{l \in \mathcal{L}yn X \setminus X} \exp(\text{Li}_{S_l} P_l) e^{\text{Li}_{x_0} x_0}.$$

En éliminant les éléments divergents des polylogarithmes et des sommes harmoniques dans leurs séries génératrices, on obtient un théorème à la Abel, d'après la formule à la Newton-Girard<sup>11</sup> [Min07a]

$$\lim_{z \rightarrow 1} \exp\left(-y_1 \log \frac{1}{1-z}\right) \pi_Y L(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \exp\left(\sum_{k \geq 1} H_{y_k}(N) \frac{(-y_1)^k}{k}\right) H(N) = \pi_Y Z_{\sqcup}, \quad (0.7)$$

où [Cos+09 ; Min13a ; Min13b ; Min+00a ; Min+00c]

$$Z_{\sqcup} := \prod_{l \in \mathcal{L}yn X \setminus X} \exp(\zeta(S_l) P_l) \quad (0.8)$$

qui est une série de type groupe pour  $\Delta_{\sqcup}$ , c'est-à-dire que son terme constant est égal à 1 et  $\Delta_{\sqcup}(Z_{\sqcup}) = Z_{\sqcup} \hat{\otimes} Z_{\sqcup}$ .

En prenant les parties finies dans le seconde limite de (0.7), on déduit une équation reliant entre elles les parties finies des  $\{\text{Li}_w\}_{w \in X^*}$  et  $\{H_w\}_{w \in Y^*}$  dans les échelles  $\{(1-z)^i \log^j(z)\}_{i,j \in \mathbb{N}}$  et  $\{N^{-i} \log^j(N)\}_{i,j \in \mathbb{N}}$  respectivement<sup>12</sup>

$$Z_\gamma = B(y_1) \pi_Y Z_{\sqcup}, \text{ avec } B(y_1) := \exp\left(\gamma y_1 - \sum_{k \geq 2} \gamma_{y_k} \frac{(-y_1)^k}{k}\right). \quad (0.9)$$

Cette équation, dite "du pont" relie entre elles les deux structures algébriques du produit

10. Ici, on utilise la convention que  $\text{Li}_{x_0^k}(z) := \frac{\log^k(z)}{k!}$ .

11.  $\pi_Y$  désigne une application qui envoie tout mot  $x_0^{s_1-1} x_1 \dots x_0^{s_r-1} x_1$  vers le mot  $y_{s_1} \dots y_{s_r}$ .

12. Cette formule fournit les contre-termes éliminant la divergence de  $\{H_w\}_{w \in y_1 Y^*}$ , en  $\infty$ , et celle de  $\{\text{Li}_w\}_{w \in X^*}$ , en 1.

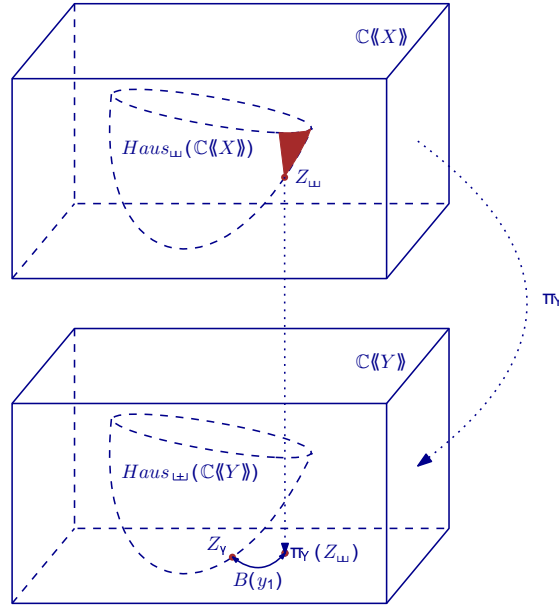


FIGURE 1 – Illustration de l'équation du pont.

mélange et de quasi-mélange (voir FIGURE 1). D'après (0.6) et (0.9), on a [Min13a; Min13b; Cos+09]

$$Z_{\mathbb{L}} = B'(y_1)\pi_Y Z_{\mathbb{L}}, \quad (0.10)$$

où  $B'(y_1) = e^{-\gamma y_1} B(y_1)$ , qui se réduit sous la forme d'une série génératrice en  $y_1$  comme suit [Bui+15b]

$$B'(y_1) = 1 + \sum_{m \geq 2} B^{(m)} y_1^m, \quad \text{où } B^{(m)} = \sum_{i=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{1}{i!} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_i \geq 2 \\ k_1 + \dots + k_i = m}} (-1)^{m-i} \frac{\zeta(k_1) \dots \zeta(k_i)}{k_1 \dots k_i},$$

où  $\lfloor m/2 \rfloor$  est le plus grand entier inférieur ou égal à  $m/2$ . Ensuite, en suivant la dualité des bases, nous détaillons l'expression (0.10) sur la même base puis identifions les coordonnées locales [Min13a; Min13b] et nous trouvons des formules explicites exprimant des relations entre polyzêtas<sup>13</sup>

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\zeta(\Sigma_{l_1}^{i_1} \dots \zeta(\Sigma_{l_k}^{i_k})}{i_1! \dots i_k!} = \zeta(\pi_X \Sigma_v), & \text{pour } v = l_1^{i_1} \dots l_k^{i_k}, l_1, \dots, l_k \in \mathcal{L}ynY, \\ & l_1 > \dots > l_k, i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}, \\ \frac{\zeta(S_{l_1}^{i_1} \dots \zeta(S_{l_k}^{i_k})}{i_1! \dots i_k!} = \zeta(\pi_Y S_u), & \text{pour } u = l_1^{i_1} \dots l_k^{i_k}, l_1, \dots, l_k \in \mathcal{L}ynX, \\ & l_1 > \dots > l_k, i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}. \end{array} \right.$$

13. Nous utilisons la même notation  $\zeta(P)$  au lieu de  $\zeta_{\mathbb{L}}(P)$  ou  $\zeta_{\mathbb{L}}(P)$  lorsque  $P$  ne contient que des mots convergents, i.e. les mots de  $x_0 X^* x_1$  ou  $Y^* \setminus y_1 Y^*$ .

A partir de ces relations, nous proposons également deux algorithmes (voir la sous-section 3.3.3.) qui permettent de réduire les représentations des polyzêtas à des représentations en termes d'éléments irréductibles indexés par les bases  $\{\Sigma_l\}_{l \in \mathcal{L}_{ynY}}$  et  $\{S_l\}_{l \in \mathcal{L}_{ynX}}$ . Grâce à ces algorithmes, nous avons implémenté un programme en Maple [Bui+15b] qui donne les résultats suivants :

$n$	$l$	$\zeta(\Sigma_l)$	$\pi_X(l)$	$\zeta(S_{\pi_X(l)})$
3	$y_2y_1$	$\frac{3}{2}\zeta(\Sigma_{y_3})$	$x_0x_1^2$	$\zeta(S_{x_0^2x_1})$
4	$y_4$	$\frac{2}{3}\zeta(\Sigma_{y_2})^2$	$x_0^3x_1$	$\frac{2}{5}\zeta(S_{x_0x_1})^2$
	$y_3y_1$	$\frac{3}{10}\zeta(\Sigma_{y_2})^2$	$x_0^2x_1^2$	$\frac{1}{10}\zeta(S_{x_0x_1})^2$
	$y_2y_1^2$	$\frac{2}{3}\zeta(\Sigma_{y_2})^2$	$x_0x_1^3$	$\frac{2}{5}\zeta(S_{x_0x_1})^2$
5	$y_4y_1$	$-\zeta(\Sigma_{y_3})\zeta(\Sigma_{y_2}) + \frac{5}{2}\zeta(\Sigma_{y_5})$	$x_0^3x_1^2$	$-\zeta(S_{x_0^2x_1})\zeta(S_{x_0x_1}) + 2\zeta(S_{x_0^4x_1})$
	$y_3y_2$	$3\zeta(\Sigma_{y_3})\zeta(\Sigma_{y_2}) - 5\zeta(\Sigma_{y_5})$	$x_0^2x_1x_0x_1$	$-\frac{3}{2}\zeta(S_{x_0^4x_1}) + \zeta(S_{x_0^2x_1})\zeta(S_{x_0x_1})$
	$y_3y_1^2$	$\frac{5}{12}\zeta(\Sigma_{y_5})$	$x_0^2x_1^3$	$-\zeta(S_{x_0^2x_1})\zeta(S_{x_0x_1}) + 2\zeta(S_{x_0^4x_1})$
	$y_2^2y_1$	$\frac{3}{2}\zeta(\Sigma_{y_3})\zeta(\Sigma_{y_2}) - \frac{25}{12}\zeta(\Sigma_{y_5})$	$x_0x_1x_0x_1^2$	$\frac{1}{2}\zeta(S_{x_0^4x_1})$
	$y_2y_1^3$	$\frac{1}{4}\zeta(\Sigma_{y_3})\zeta(\Sigma_{y_2}) + \frac{5}{4}\zeta(\Sigma_{y_5})$	$x_0x_1^4$	$\zeta(S_{x_0^4x_1})$
6	$y_6$	$\frac{8}{35}\zeta(\Sigma_{y_2})^3$	$x_0^5x_1$	$\frac{8}{35}\zeta(S_{x_0x_1})^3$
	$y_5y_1$	$\frac{2}{7}\zeta(\Sigma_{y_2})^3 - \frac{1}{2}\zeta(\Sigma_{y_3})^2$	$x_0^4x_1^2$	$\frac{6}{35}\zeta(S_{x_0x_1})^3 - \frac{1}{2}\zeta(S_{x_0^2x_1})^2$
	$y_4y_2$	$\zeta(\Sigma_{y_3})^2 - \frac{4}{21}\zeta(\Sigma_{y_2})^3$	$x_0^3x_1x_0x_1$	$\frac{4}{105}\zeta(S_{x_0x_1})^3$
	$y_4y_1^2$	$\frac{3}{10}\zeta(\Sigma_{y_2})^3 - \frac{3}{4}\zeta(\Sigma_{y_3})^2$	$x_0^3x_1^3$	$\frac{23}{70}\zeta(S_{x_0x_1})^3 - \zeta(S_{x_0^2x_1})^2$
	$y_3y_2y_1$	$3\zeta(\Sigma_{y_3})^2 - \frac{9}{10}\zeta(\Sigma_{y_2})^3$	$x_0^2x_1x_0x_1^2$	$\frac{2}{105}\zeta(S_{x_0x_1})^3$
	$y_3y_1y_2$	$-\frac{17}{30}\zeta(\Sigma_{y_2})^3 + \frac{9}{4}\zeta(\Sigma_{y_3})^2$	$x_0^2x_1^2x_0x_1$	$-\frac{89}{210}\zeta(S_{x_0x_1})^3 + \frac{3}{2}\zeta(S_{x_0^2x_1})^2$
	$y_3y_1^3$	$\frac{1}{21}\zeta(\Sigma_{y_2})^3$	$x_0^2x_1^4$	$\frac{6}{35}\zeta(S_{x_0x_1})^3 - \frac{1}{2}\zeta(S_{x_0^2x_1})^2$
	$y_2^2y_1^2$	$\frac{11}{63}\zeta(\Sigma_{y_2})^3 - \frac{1}{4}\zeta(\Sigma_{y_3})^2$	$x_0x_1x_0x_1^3$	$\frac{8}{21}\zeta(S_{x_0x_1})^3 - \zeta(S_{x_0^2x_1})^2$
	$y_2y_1^4$	$\frac{17}{50}\zeta(\Sigma_{y_2})^3 + \frac{3}{16}\zeta(\Sigma_{y_3})^2$	$x_0x_1^5$	$\frac{8}{35}\zeta(S_{x_0x_1})^3$

Tableau 1 : Expression des polyzêtas en fonction polynomiale des polyzêtas irréductibles jusqu'au poids 6.

Ces résultats vérifient<sup>14</sup> encore la conjecture des dimensions de Zagier. Les tableaux similaires pour  $\{\zeta(l)\}_{l \in \mathcal{L}_{ynX \setminus X}}$  ont été obtenus jusqu'au poids 10 [Min+00a], 12 [Big00] et 16 [War99]. Par ailleurs, on peut voir encore une relation zig-zag entre les moules des polyzêtas, grâce à Ecalte [Eca03], *i.e.* la série génératrice commutative des polyzêtas symboliques (Boutet de Monvel [Mon04] et Racinet [Esp+03] ont aussi donné des relations équivalentes pour les séries génératrices noncommutatives des polyzêtas symboliques, voir aussi [Car02]) qui produit les relations linéaires grâce à la relation de régularisation double-shuffle [Bro+10 ; Hof00 ; Kan+08].

Ces relations polynomiales déduisent les éléments irréductibles (en un sens qui sera

14. a) jusqu'au poids 12 par ordinateur Core(TM)i5-4210U CPU @ 1.70GHz et b) au sens où il n'existe pas - observable par machine - de chaîne de réécritures de poids inférieur à 12 qui permette de trouver d'autres relations.



précisé plus bas) jusqu'au poids 12,

$n$	$i_n$	Polyzêtas irréductibles sur la base $\{\Sigma_l\}_{l \in \mathcal{L}_{yn} Y \setminus \{y_1\}}$	Polyzêtas irréductibles sur la base $\{S_l\}_{l \in \mathcal{L}_{yn} X \setminus X}$
2	1	$\zeta(\Sigma_{y_2})$	$\zeta(S_{x_0 x_1})$
3	1	$\zeta(\Sigma_{y_3})$	$\zeta(S_{x_0^2 x_1})$
4	0		
5	1	$\zeta(\Sigma_{y_5})$	$\zeta(S_{x_0^4 x_1})$
6	0		
7	1	$\zeta(\Sigma_{y_7})$	$\zeta(S_{x_0^6 x_1})$
8	1	$\zeta(\Sigma_{y_3 y_1^5})$	$\zeta(S_{x_0 x_1^2 x_0 x_1^4})$
9	1	$\zeta(\Sigma_{y_9})$	$\zeta(S_{x_0^8 x_1})$
10	1	$\zeta(\Sigma_{y_3 y_1^7})$	$\zeta(S_{x_0 x_1^2 x_0 x_1^6})$
11	2	$\zeta(\Sigma_{y_{11}}), \zeta(\Sigma_{y_2 y_1^9})$	$\zeta(S_{x_0^{10} x_1}), \zeta(S_{x_0 x_1^2 x_0 x_1^2 x_0 x_1^4})$
12	2	$\zeta(\Sigma_{y_2^2 y_1^8}), \zeta(\Sigma_{y_3 y_1^9})$	$\zeta(S_{x_0 x_1 x_0 x_1^9}), \zeta(S_{x_0^3 x_1 x_0 x_1^7})$

Tableau 2 : Liste des polyzêtas irréductibles jusqu'au poids 12.

# Chapitre 1

## L'algèbre de Hopf de quasi mélange $q$ -déformée

### Sommaire

---

<b>1.1. Combinatoire des mots</b> . . . . .	<b>26</b>
1.1.1. Mot, polynôme, série . . . . .	26
1.1.2. Algèbre de produit mélange . . . . .	27
<b>1.2. Algèbre de quasi mélange <math>q</math>-déformée</b> . . . . .	<b>29</b>
<b>1.3. Bases en dualité dans <math>K\langle Y \rangle</math></b> . . . . .	<b>38</b>
1.3.1. Propriétés des séries primitives . . . . .	38
1.3.2. Base(s) du module (libre) des éléments primitifs et de l'algèbre enveloppante . . . . .	41
1.3.3. Construction d'une formule pour la base duale . . . . .	50
1.3.4. Représentations des polynômes sur les bases . . . . .	61

---

L'objectif de ce chapitre est de construire des structures complètes d'algèbre de Hopf (commutatives ou non-commutatives) sur les polynômes qui sont des combinaisons linéaires de mots. Après avoir rappelé les concepts fondamentaux et les constructions sur un alphabet, nous allons introduire un nouveau produit<sup>1</sup>, dit quasi-mélange  $q$ -déformé, qui est une généralisation, dans notre étude des algèbres de Hopf sur les mots [Bui12; Bui+13a; Bui+13b; Bui+15c], du shuffle [Ree58], du stuffle [Mel+89] et du minus-stuffle [Cos+09] quand  $q$  est respectivement égal à 0, 1 et  $-1$ . Avec le produit de concaténation, nous construisons complètement des algèbres de Hopf en dualité. De plus, en se basant respectivement sur le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt et sur la factorisation de Mélançon-Reutenauer-Schützenberger (MRS)[Mel+89; Sch65], nous allons aussi

---

1. Les  $q$ -déformations connues sont celles de Hoffman [Hof00] qui utilise un bicaractère et celui de Rosso [Ros95] qui déforme la structure tensorielle et est génériquement non-commutatif.

construire des bases multihomogènes en dualité. Des formules explicites sur les bases seront également fournies avec un algorithme pour représenter les polynômes sur ces bases. Ces constructions sont utiles effectivement dans la représentation des polyzêtas et des sommes harmoniques détaillée dans les prochains chapitres.

## 1.1. Combinatoire des mots

### 1.1.1. Mot, polynôme, série

Soit  $A = \{a_i\}_{i \in I}$  un ensemble quelconque (fini ou infini), que nous appellerons *alphabet*, et dont les éléments seront appelés *lettres*. Un *mot* est une suite finie,  $w = a_{i_1} \dots a_{i_k}$ , de lettres, y compris le *mot vide*, noté  $1_{A^*}$ , ce mot ne contenant aucune lettre. Avec le produit de concaténation<sup>2</sup>, l'ensemble des mots sur  $A$ , qui sera noté  $A^*$ , est un monoïde<sup>3</sup>. Chaque lettre est un mot de longueur 1, et chaque mot  $w = a_{i_1} \dots a_{i_k}$  est en fait le produit des ses lettres. Ici,  $k$  est la *longueur* du mot  $w$ . Elle est notée  $|w|$ . Le mot  $u$  est dit *facteur* de  $w$  si  $w = vuv'$  pour certains  $v, v' \in A^*$ . De plus, si  $v$  (resp.  $v'$ ) est le mot vide, alors  $u$  est dit *facteur gauche* ou préfixe (resp. *droit* ou suffixe) de  $w$ . Un facteur  $u$  de  $w$  est dit *propre* si  $u \neq w$ , et *non-trivial* si  $u \neq 1_{A^*}$ .

Désormais, nous utilisons  $K$  un anneau commutatif (avec unité). Un polynôme non-commutatif est une combinaison linéaire de mots à coefficients dans  $K$ . Si  $P$  est un polynôme, on peut écrire

$$P = \sum_{w \in A^*} \langle P | w \rangle w,$$

où  $\langle P | w \rangle$  désigne le coefficient de  $w$  dans  $P$ ; tous ces coefficients sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux. L'ensemble de ces polynômes est noté  $K\langle A \rangle$ . En d'autres termes,  $K\langle A \rangle$  est la  $K$ -algèbre du monoïde  $A^*$ . De plus, on définit une *série formelle* non commutative sur  $A$  à coefficients dans  $K$  comme une application  $S$  de  $A^*$  dans  $K$ . L'ensemble des séries sur  $A$  à coefficients dans  $K$  est noté  $K\langle\langle A \rangle\rangle$ . Une famille  $\{f_i\}_{i \in I}$  de séries est dite *sommable* [Reu93] si et seulement si pour chaque  $w \in A^*$ , l'ensemble  $\{i \in I \mid f_i(w) \neq 0\}$  est fini. Dans ce cas, on définit  $\sum_{i \in I} f_i$  comme la série  $S$  telle que  $\langle S | w \rangle = \sum_{i \in I} f_i(w)$ . Pour une série  $S$  donnée, il est facile de voir que la famille  $\{\langle S | w \rangle w\}_{w \in A^*}$  est sommable (ici  $w$  signifie la fonction caractéristique de  $\{w\}$ ) et que sa somme est  $S$ . Pour cette raison, on peut écrire  $(\langle S | w \rangle w)$  désignant le coefficient de  $w$  dans  $S$ ,

$$S = \sum_{w \in A^*} \langle S | w \rangle w. \tag{1.1}$$

2. Le produit de concaténation de  $u, v \in A^*$  est le mot  $uv$ .

3. C'est, en fait, le monoïde libre de base  $A$ .

### 1.1.2. Algèbre de produit mélange

On sait bien que l'ensemble des mots  $A^*$  est le (un) monoïde libre (muni du produit de concaténation et avec le mot vide, désigné par  $1_{A^*}$ , comme élément neutre). Si  $A$  est muni d'un ordre lexicographique (total), les mots de Lyndon forment un système de représentants des classes circulaires de mots primitifs<sup>4</sup>, et sont donc en bijection avec les mots circulaires ou colliers primitifs. Avec cette notion, Chen, Fox et Lyndon [Che+58 ; Lot83] ont montré que tout mot est produit, de manière unique, d'une suite décroissante de mots de Lyndon et la factorisation en mots de Lyndon décroissants est appelée la *factorisation de Lyndon* du mot. Pour chaque degré  $n$  (qui sera défini parfois par la longueur, parfois par la somme des indices des lettres dans le mot), le nombre de mots de Lyndon de degré  $n$  est exactement la dimension de la composante homogène de degré  $n$  de l'algèbre de Lie libre. L'ensemble des mots de Lyndon, désigné par  $\mathcal{Lyn}A$ , est en bijection avec une base de l'algèbre de Lie libre  $L\langle A \rangle$ , engendrée par  $A$  sur un certain anneau commutatif  $K$  [Reu93 ; Duc+89 ; Sch65]. Plus précisément, il existe une base  $\{P_l\}_{l \in \mathcal{Lyn}A}$  de cette algèbre qui peut être définie par<sup>5</sup>

$$P_l = \begin{cases} l & \text{si } l \in A, \\ P_{l_1}P_{l_2} - P_{l_2}P_{l_1} & \text{si } st(l) = (l_1, l_2), \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $st(l)$  désigne la *factorisation standard* du mot de Lyndon  $l \in \mathcal{Lyn}A \setminus A$ , c'est-à-dire  $l_1, l_2 \in \mathcal{Lyn}A$  tels que  $l = l_1l_2$  et  $l_2$  est le plus long facteur droit (de Lyndon) de  $l$ .

De plus, l'espace vectoriel<sup>6</sup>, désigné par  $K\langle A \rangle$ , des combinaisons linéaires de mots sur  $K$  forme une algèbre associative avec unité (ici  $1_{A^*}$ ). Plus précisément, en le désignant par *conc*, le produit de concaténation sera étendu en un morphisme (linéaire)

$$\begin{aligned} conc : K\langle A \rangle \otimes K\langle A \rangle &\longrightarrow K\langle A \rangle \\ u \otimes v &\longmapsto uv. \end{aligned} \quad (1.3)$$

De plus, on détermine un coproduit (adjoint ou dual de la loi précédente), désigné par  $\Delta_{conc}$ , qui le dual du produit de concaténation, c'est-à-dire

$$\langle \Delta_{conc}(w) \mid u \otimes v \rangle = \langle w \mid uv \rangle, \quad \forall u, v, w \in A^*. \quad (1.4)$$

Autrement dit, il est déterminé, pour tout mot  $w$ , par

$$\Delta_{conc}(w) = \sum_{\substack{u, v \in A^* \\ uv=w}} u \otimes v. \quad (1.5)$$

4. Un mot est primitif s'il n'est pas puissance entière d'un autre mot.

5. Le produit de deux polynômes  $P, Q$  est défini par  $PQ = \sum_{u, v \in A^*} \langle P \mid u \rangle \langle Q \mid v \rangle uv$ .

6. Le module, si  $K$  est un anneau commutatif.

D'autre part,  $K\langle A \rangle$  est également muni d'un *produit de mélange* ("shuffle product" en anglais), qu'on désigne par  $\sqcup$  et qui est défini récursivement, pour tous  $a, b \in A$ ,  $u, v \in A^*$ , par

$$u \sqcup 1_{A^*} = 1_{A^*} \sqcup u = u \text{ et } au \sqcup bv = a(u \sqcup bv) + b(au \sqcup v). \quad (1.6)$$

On désigne encore par  $\sqcup$  son extension linéaire  $K\langle A \rangle \otimes K\langle A \rangle$  dans  $K\langle A \rangle$ . De manière similaire, son dual est un coproduit déterminé par

$$\begin{aligned} \Delta_{\sqcup} : K\langle A \rangle &\longrightarrow K\langle A \rangle \otimes K\langle A \rangle \\ w &\longmapsto \sum_{u, v \in A^*} \langle w \mid u \sqcup v \rangle u \otimes v. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Au total, cela fait deux structures d'algèbres de Hopf en dualité séparante (i.e. non dégénérée) [Reu93]

$$\mathcal{H}_{\sqcup} := (K\langle A \rangle, conc, 1_{A^*}, \Delta_{\sqcup}, \epsilon) \text{ et } \mathcal{H}_{\sqcup}^{\vee} := (K\langle A \rangle, \sqcup, 1, \Delta_{conc}, \epsilon), \quad (1.8)$$

où,  $\epsilon$  est la counité prenant le terme constant des polynômes, c'est-à-dire

$$\epsilon(P) = \langle P \mid 1_{A^*} \rangle. \quad (1.9)$$

De plus, on peut étendre la famille  $\{P_l\}_{l \in \mathcal{L}yn A}$  en une base de l'espace vectorielle  $K\langle A \rangle$  à l'aide du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt [Reu93]. Tout mot,  $w$ , grâce au théorème de Chen-Fox-Lyndon, peut se décomposer en suite décroissante de mots de Lyndon  $w = l_1^{i_1} \dots l_k^{i_k}$ . Dès cet instant, en définissant  $P_w = P_{l_1}^{i_1} \dots P_{l_k}^{i_k}$ , on obtient une famille  $\{P_w\}_{w \in A^*}$  qui forme une base de  $K\langle A \rangle$ , dit ici "base de Poincaré-Birkhoff-Witt". De plus, on montre que cette base est triangulaire supérieure et homogène en longueur. Par conséquent (l'alphabet  $X$  sera supposé fini sinon on pourra travailler par multi-homogénéité), la famille duale, désignée par  $\{S_w\}_{w \in A^*}$ , i.e. qui vérifie

$$\langle P_u \mid S_v \rangle = \delta_{u,v}, \quad \forall u, v \in A^* \quad (1.10)$$

est encore une base, triangulaire inférieure et homogène en longueur, de l'espace  $K\langle A \rangle$ . De plus, elle peut être déterminée par [Reu93]

$$S_w = \begin{cases} w & \text{si } w \in A, \\ aS_u & \text{si } w = au \in \mathcal{L}yn A, \\ \frac{S_{l_1}^{\sqcup i_1} \sqcup \dots \sqcup S_{l_k}^{\sqcup i_k}}{i_1! \dots i_k!} & \text{pour } w = l_1^{i_1} \dots l_k^{i_k}, \text{ avec} \\ & l_1 > \dots > l_k \in \mathcal{L}yn Y. \end{cases} \quad (1.11)$$

## 1.2. Algèbre de quasi mélange $q$ -déformée

Nous allons maintenant faire une extension du produit de mélange et construire des structures algébriques de Hopf. Nous considérons l'alphabet  $Y := \{y_k \mid k \geq 1\}$  muni de l'ordre total<sup>7</sup>

$$y_1 > y_2 > \dots \tag{1.12}$$

Considérons aussi un paramètre  $q$  dans un certain anneau qui contient le corps des nombres rationnels (une  $\mathbb{Q}$ -algèbre). Nous définissons un produit de quasi mélange  $q$ -déformé, noté par  $\boxplus_q$ , par récursion suivante.

**Définition 1.1.** Pour tous  $y_{k_1}, y_{k_2} \in Y$  et  $u, v \in Y^*$ ,

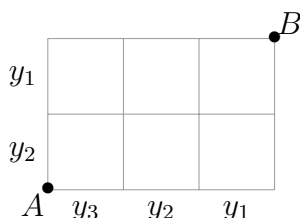
$$u \boxplus_q 1_{Y^*} = 1_{Y^*} \boxplus_q u = u, \tag{1.13}$$

$$y_{k_1} u \boxplus_q y_{k_2} v = y_{k_1} (u \boxplus_q y_{k_2} v) + y_{k_2} (y_{k_1} u \boxplus_q v) + q y_{k_1+k_2} (u \boxplus_q v). \tag{1.14}$$

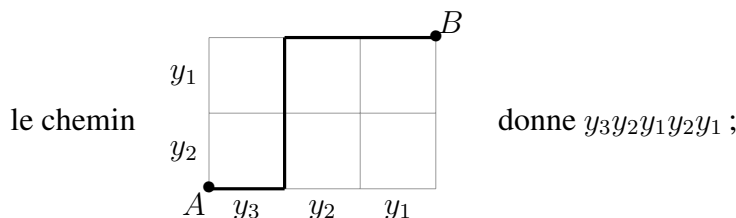
**Exemple 1.1.** i) Dans le cas particulier où  $q = 0$ , le produit de mélange ("shuffle product" en anglais) :

$$\begin{aligned} y_2 y_1 \sqcup y_3 y_1 y_2 &= y_2 (y_1 \sqcup y_3 y_1 y_2) + y_3 (y_2 y_1 \sqcup y_1 y_2) \\ &= y_2 y_1 y_3 y_1 y_2 + 2 y_2 y_3 y_1^2 y_2 + y_2 y_3 y_1 y_2 y_1 + 2 y_3 y_2 y_1^2 y_2 \\ &\quad + y_3 y_2 y_1 y_2 y_1 + y_3 y_1 y_2 y_1 y_2 + 2 y_3 y_1 y_2^2 y_1. \end{aligned}$$

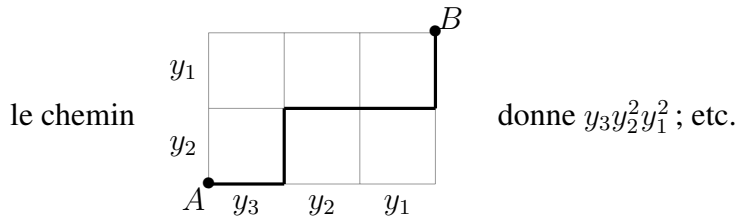
On peut voir ce produit comme indexé à la somme des chemins (pas droit-montant) de  $A$  à  $B$  dans la grille



Par exemple,



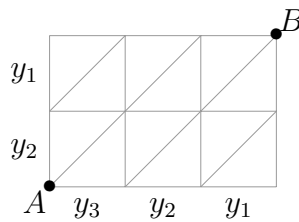
7.  $>$ ,  $<$  ou  $>_{lex}$ ,  $<_{lex}$  désignent l'ordre lexicographique de l'alphabet.



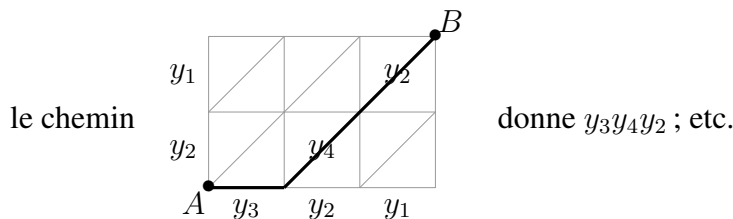
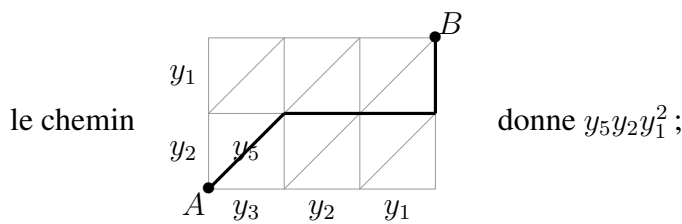
ii) Dans le cas particulier où  $q = 1$ , le produit de quasi-mélange “stuffle product” en anglais) :

$$\begin{aligned}
 y_2 y_1 \sqcup y_3 y_1 y_2 &= y_2 (y_1 \sqcup y_3 y_1 y_2) + y_3 (y_2 y_1 \sqcup y_1 y_2) + y_5 (y_1 \sqcup y_1 y_2) \\
 &= y_2 y_1 y_3 y_1 y_2 + 2 y_2 y_3 y_1^2 y_2 + y_2 y_3 y_1 y_2 y_1 + y_2 y_3 y_1 y_3 + y_2 y_3 y_2^2 \\
 &\quad + y_2 y_4 y_1 y_2 + 2 y_3 y_2 y_1^2 y_2 + y_3 y_2 y_1 y_2 y_1 + y_3 y_2 y_1 y_3 + y_3 y_2^3 \\
 &\quad + y_3 y_1 y_2 y_1 y_2 + 2 y_3 y_1 y_2^2 y_1 + y_3 y_1 y_2 y_3 + y_3 y_1 y_4 y_1 + y_3^2 y_1 y_2 \\
 &\quad + y_3^2 y_2 y_1 + y_3^2 y_3 + 2 y_5 y_1^2 y_2 + y_5 y_1 y_2 y_1 + y_5 y_1 y_3 + y_5 y_2^2.
 \end{aligned}$$

On peut voir ce produit comme indexé à la somme des chemins (pas droit-montant-diagonal) dans la grille (le pas diagonal correspond à la lettre indexée par somme des indices des cellules-projections)



Par exemple,



iii) Par exemple,

$$\begin{aligned}
y_2 y_1 \boxplus_q y_3 y_1 y_2 &= y_2 (y_1 \boxplus_q y_3 y_1 y_2) + y_3 (y_2 y_1 \boxplus_q y_1 y_2) + q y_5 (y_1 \boxplus_q y_1 y_2) \\
&= y_2 y_1 y_3 y_1 y_2 + 2 y_2 y_3 y_1^2 y_2 + y_2 y_3 y_1 y_2 y_1 + q y_2 y_3 y_1 y_3 + q y_2 y_3 y_2^2 \\
&\quad + q y_2 y_4 y_1 y_2 + 2 y_3 y_2 y_1^2 y_2 + y_3 y_2 y_1 y_2 y_1 + q y_3 y_2 y_1 y_3 + q y_3 y_2^3 \\
&\quad + y_3 y_1 y_2 y_1 y_2 + 2 y_3 y_1 y_2^2 y_1 + q y_3 y_1 y_2 y_3 + q y_3 y_1 y_4 y_1 + q y_3^2 y_1 y_2 \\
&\quad + q y_3^2 y_2 y_1 + q^2 y_3^2 y_3 + 2 q y_5 y_1^2 y_2 + q y_5 y_1 y_2 y_1 + q^2 y_5 y_1 y_3 + q^2 y_5 y_2^2.
\end{aligned}$$

Ici, si on définit une application par

$$\begin{aligned}
\varphi_q : Y \times Y &\longrightarrow \mathbb{Q}Y \\
(y_i, y_j) &\longmapsto q y_{i+j}.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Alors, le produit quasi-mélange  $q$ -déformé rentre dans le cadre du  $\boxplus_\varphi$  par la propriété ci-dessous.

**Théorème 1.1** ([Bui+13b]). *Soit  $\varphi$  définie par*

$$\begin{aligned}
\varphi : Y \times Y &\longrightarrow \mathbb{Q}Y \\
(y_i, y_j) &\longmapsto \sum_{k \geq 1} \alpha_{i,j}^k y_k.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

*Nous rappelons qu'on définit le produit de quasi-mélange  $\varphi$ -déformé, noté  $\boxplus_\varphi$ , par Pour tous  $y_{k_1}, y_{k_2} \in Y$  et  $u, v \in Y^*$ ,*

$$\begin{aligned}
u \boxplus_\varphi 1_{Y^*} &= 1_{Y^*} \boxplus_\varphi u = u, \\
y_{k_1} u \boxplus_\varphi y_{k_2} v &= y_{k_1} (u \boxplus_\varphi y_{k_2} v) + y_{k_2} (y_{k_1} u \boxplus_\varphi v) + q y_{k_1+k_2} (u \boxplus_\varphi v).
\end{aligned}$$

*Alors la loi  $\boxplus_\varphi$  est associative (resp. commutative) si et seulement si l'extension linéaire  $\varphi : \mathbb{Q}Y \otimes \mathbb{Q}Y \longrightarrow \mathbb{Q}Y$  l'est aussi.*

Pour faciliter le cadre de calcul ensuite, nous désignons  $K$  l'anneau des polynômes en  $q$  à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ , *i.e.*  $K = \mathbb{Q}[q]$ . En appliquant le théorème précédent, nous avons immédiatement que le produit de quasi-mélange  $q$ -déformé est associatif et commutatif. Par conséquent, nous avons la structure ci-dessous.

**Corollaire 1.2.**  *$(K\langle Y \rangle, \boxplus_q, 1_{Y^*})$  est une algèbre commutative, associative avec unité.*

De la même manière que précédemment, nous construisons un morphisme (linéaire)

$$\begin{aligned}
\boxplus_q : K\langle Y \rangle \otimes K\langle Y \rangle &\longrightarrow K\langle Y \rangle \\
u \otimes v &\longmapsto u \boxplus_q v,
\end{aligned} \tag{1.17}$$



et sa (co-)loi duale, désignée par  $\Delta_{\sqcup_q}$ , donne un coproduit

$$\begin{aligned} \Delta_{\sqcup_q} : K\langle Y \rangle &\longrightarrow K\langle Y \rangle \otimes K\langle Y \rangle \\ w &\longmapsto \sum_{u,v \in Y^*} \langle w \mid u \sqcup v \rangle u \otimes v \end{aligned} \quad (1.18)$$

qui vérifie la propriété ci-dessous.

**Proposition 1.3.**  $\Delta_{\sqcup_q}$  peut être déterminé comme un morphisme de  $K$ -AAU<sup>8</sup>

$$K\langle Y \rangle \rightarrow K\langle Y \rangle \otimes K\langle Y \rangle \quad (1.19)$$

qui vaut sur les générateurs

$$\Delta_{\sqcup_q}(y_k) = y_k \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes y_k + q \sum_{k_1+k_2=k} y_{k_1} \otimes y_{k_2}, \quad \forall y_k \in Y. \quad (1.20)$$

*Démonstration.* Soit  $\delta_1$ , l'application définie sur les lettres par

$$\delta_1(y_k) = y_k \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes y_k + q \sum_{k_1+k_2=k} y_{k_1} \otimes y_{k_2}, \quad \forall y_k \in Y.$$

et prolongée (en  $\Delta_1$ ), à tout  $K\langle Y \rangle$ , par une propriété universelle (en  $\Delta_1$ ) à tout  $K\langle Y \rangle$  comme suit

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\delta_1} & K\langle Y \rangle \otimes K\langle Y \rangle \\ \text{nat} \downarrow & \nearrow \Delta_1 & \\ K\langle Y \rangle & & \end{array} \quad (1.21)$$

On remarque tout de suite que  $\Delta_1$  est graduée par poids.

Elle admet donc une loi duale

$$\mu_{\Delta_1} : K\langle Y \rangle \otimes K\langle Y \rangle \rightarrow K\langle Y \rangle$$

(qui est la restriction de la transposée  $(K\langle Y \rangle \otimes K\langle Y \rangle)^* \rightarrow (K\langle Y \rangle)^*$ ) et qui, pour trois mots  $u, v, w \in Y^*$  satisfait à<sup>9</sup>

$$\langle \mu_{\Delta_1}(u \otimes v) \mid w \rangle = \langle u \otimes v \mid \Delta_1(w) \rangle^{\otimes 2} \quad (1.22)$$

La restriction de  $\mu_{\Delta_1}$  à  $K\langle Y \rangle \otimes K\langle Y \rangle$  se calcule donc, sur la base des mots comme suit

$$\mu_{\Delta_1}(u \otimes v) = \sum_{w \in Y^*} \langle \mu_{\Delta_1}(u \otimes v) \mid w \rangle w = \sum_{w \in Y^*} \langle u \otimes v \mid \Delta_1(w) \rangle^{\otimes 2} w. \quad (1.23)$$

8. Algèbre associative avec unité.

9.  $\langle u \otimes v \mid \Delta_1(w) \rangle^{\otimes 2}$  désigne le coefficient du terme  $u \otimes v$  dans  $\Delta_1(w)$ .

Les sommes étant à support fini du fait que  $\Delta_1$  est graduée par poids,  $\mu_{\Delta_1}$  définit en fait une loi d'algèbre sur  $K\langle Y \rangle$ . Cette loi vérifie

$$\mu_{\Delta_1}(u \otimes 1_{Y^*}) = \sum_{w \in Y^*} \langle u \otimes 1_{Y^*} \mid \Delta_1(w) \rangle^{\otimes 2} w = u \quad (1.24)$$

cette dernière égalité est évidente pour  $u = 1_{Y^*}$  et se montre ensuite par récurrence sur la longueur de  $u$ . On procède de même pour montrer que  $\mu_{\Delta_1}(1_{Y^*} \otimes v) = v$ . En ce qui concerne la récursion on a, pour  $y_i, y_j \in Y$  et  $u, v \in Y^*$

$$\begin{aligned} \mu_{\Delta_1}(y_i u \otimes y_j v) &= \sum_{w \in Y^*} \langle y_i u \otimes y_j v \mid \Delta_1(w) \rangle^{\otimes 2} w \\ &= \langle y_i u \otimes y_j v \mid 1_{Y^*} \otimes 1_{Y^*} \rangle^{\otimes 2} + \sum_{w \in Y^*} \langle y_i u \otimes y_j v \mid \Delta_1(w) \rangle^{\otimes 2} w \\ &= 0 + \sum_{y_k \in Y, w_1 \in Y^*} \langle y_i u \otimes y_j v \mid \Delta_1(y_k w_1) \rangle^{\otimes 2}, y_k w_1 \\ &= \sum_{y_k \in Y, w_1 \in Y^*} \langle y_i u \otimes y_j v \mid (y_k \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes y_k \\ &\quad + q \sum_{k_1+k_2=k} y_{k_1} \otimes y_{k_2}) \Delta_1(w_1) \rangle^{\otimes 2} y_k w_1 \\ &= \sum_{y_k \in Y, w_1 \in Y^*} \langle y_i u \otimes y_j v \mid (y_k \otimes 1_{Y^*}) \Delta_1(w_1) \rangle^{\otimes 2} y_k w_1 \\ &\quad + \sum_{y_k \in Y, w_1 \in Y^*} \langle y_i u \otimes y_j v \mid (1_{Y^*} \otimes y_k) \Delta_1(w_1) \rangle^{\otimes 2} y_k w_1 \\ &\quad + \sum_{y_k \in Y, w_1 \in Y^*} \langle y_i u \otimes y_j v \mid (q \sum_{k_1+k_2=k} y_{k_1} \otimes y_{k_2}) \Delta_1(w_1) \rangle^{\otimes 2} y_k w_1 \\ &= \langle u \otimes y_j v \mid \Delta_1(w_1) \rangle^{\otimes 2} y_i w_1 \\ &\quad + \langle y_i u \otimes v \mid \Delta_1(w_1) \rangle^{\otimes 2} y_j w_1 + q \langle u \otimes v \mid \Delta_1(w_1) \rangle^{\otimes 2} y_{i+j} w_1 \\ &= y_i \mu_{\Delta_1}(u \otimes y_j v) + y_j \mu_{\Delta_1}(y_i u \otimes v) + q y_{i+j} \mu_{\Delta_1}(u \otimes v) \end{aligned}$$

Finalement,  $\mu_{\Delta_1}$  vérifie la même initialisation et la même récursion que  $\mu_q$ , ces lois sont donc égales. Il s'ensuit que  $\Delta_{\mu_q} = \Delta_1$ .  $\square$

### Exemple 1.2.

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu_q}(y_1) &= y_1 \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes y_1, \\ \Delta_{\mu_q}(y_2) &= y_2 \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes y_2 + q y_1 \otimes y_1, \\ \Delta_{\mu_q}(y_3) &= y_3 \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes y_3 + q(y_1 \otimes y_2 + y_2 \otimes y_1). \end{aligned}$$

**Proposition 1.4.**  $(K\langle Y \rangle, \Delta_{\mu_q}, \varepsilon)$  est une coalgèbre avec coïunité.

*Démonstration.* Grâce à la proposition 1.3, on a  $\Delta_{\mu_q}$  est un homomorphisme de structure de concaténation, c'est-à-dire  $\Delta_{\mu_q}(uv) = \Delta_{\mu_q}(u) \Delta_{\mu_q}(v)$  pour tous  $u, v \in Y^*$ . Par

multiplicativité, on peut juste montrer ces deux assertions (coassociativité et coïté) sur les lettres. D'abord, nous démontrons la propriété de coassociativité. Pour chaque lettre  $y_k$ , nous avons <sup>10</sup>

$$(\Delta_{\mathfrak{U}_q} \otimes id)\Delta_{\mathfrak{U}_q}(y_k) = (id \otimes \Delta_{\mathfrak{U}_q})\Delta_{\mathfrak{U}_q}(y_k). \quad (1.25)$$

En effet

$$\begin{aligned} (\Delta_{\mathfrak{U}_q} \otimes id)\Delta_{\mathfrak{U}_q}(y_k) &= (\Delta_{\mathfrak{U}_q} \otimes id)\left(y_k \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes y_k + q \sum_{k_1+k_2=k} y_{k_1} \otimes y_{k_2}\right) \\ &= y_k \otimes 1_{Y^*} \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes y_k \otimes 1_{Y^*} \\ &+ q \sum_{k_1+k_2=k} y_{k_1} \otimes y_{k_2} \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes 1_{Y^*} \otimes y_k \\ &+ q \sum_{k_1+k_2=k} \left(y_{k_1} \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes y_{k_1} + q \sum_{k_{1,1}+k_{1,2}=k_1} y_{k_{1,1}} \otimes y_{k_{1,2}}\right) \otimes y_{k_2} \\ &= y_k \otimes 1_{Y^*} \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes y_k \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes 1_{Y^*} \otimes y_k \\ &+ q \sum_{k_1+k_2=k} (y_{k_1} \otimes y_{k_2} \otimes 1_{Y^*} + y_{k_1} \otimes 1_{Y^*} \otimes y_{k_2} + 1_{Y^*} \otimes y_{k_1} \otimes y_{k_2}) \\ &+ q^2 \sum_{k_1+k_2+k_3=k} (y_{k_1} \otimes y_{k_2} \otimes y_{k_3}). \end{aligned}$$

De manière similaire, nous avons aussi

$$\begin{aligned} (id \otimes \Delta_{\mathfrak{U}_q})\Delta_{\mathfrak{U}_q}(y_k) &= y_k \otimes 1_{Y^*} \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes y_k \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes 1_{Y^*} \otimes y_k \\ &+ q \sum_{k_1+k_2=k} (y_{k_1} \otimes y_{k_2} \otimes 1_{Y^*} + y_{k_1} \otimes 1_{Y^*} \otimes y_{k_2} + 1_{Y^*} \otimes y_{k_1} \otimes y_{k_2}) \\ &+ q^2 \sum_{k_1+k_2+k_3=k} (y_{k_1} \otimes y_{k_2} \otimes y_{k_3}). \end{aligned}$$

Les morphismes  $(\Delta_{\mathfrak{U}_q} \otimes id) \circ \Delta_{\mathfrak{U}_q}$  et  $(id \otimes \Delta_{\mathfrak{U}_q}) \circ \Delta_{\mathfrak{U}_q}$  (voir 1.25) coïncident sur les lettres, ils sont donc égaux partout.

Par ailleurs, pour chaque lettre  $y_k$ ,

$$\begin{aligned} (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta_{\mathfrak{U}_q}(y_k) &= (id \otimes \varepsilon)\left(y_k \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes y_k + q \sum_{k_1+k_2=k} y_{k_1} \otimes y_{k_2}\right) \\ &= y_k \\ &= (\varepsilon \otimes id) \circ \Delta_{\mathfrak{U}_q}(y_k). \end{aligned}$$

Les morphismes  $(id \otimes \varepsilon) \circ \Delta_{\mathfrak{U}_q}$ ,  $(\varepsilon \otimes id) \circ \Delta_{\mathfrak{U}_q}$  et  $id$  coïncident sur les lettres, ils sont donc égaux partout.

Ce qui permet de prouver la proposition.  $\square$

---

10.  $id$  désignant l'identité dans  $K\langle Y \rangle$ .

De plus, avec l'application linéaire  $\varepsilon$ , déterminée par (1.9), on a

**Proposition 1.5.**  $\mathcal{B}_q^{\boxplus} := (K\langle Y \rangle, \boxplus_q, 1_{Y^*}, \Delta_{conc}, \varepsilon)$  est une bigèbre.

*Démonstration.* Il est facile de voir que  $\Delta_{conc}$  transporte les unités, il faut montrer maintenant que  $\Delta_{conc}$  est un morphisme pour le produit de  $\boxplus_q$  dire :

$$\Delta_{conc} \circ \boxplus_q = (\boxplus_q \otimes \boxplus_q) \circ \tau_{2,3} \circ (\Delta_{conc} \otimes \Delta_{conc}) \quad (1.26)$$

$$\begin{array}{ccc} K\langle Y \rangle \otimes K\langle Y \rangle & \xrightarrow{\boxplus_q} & K\langle Y \rangle & \xrightarrow{\Delta_{conc}} & K\langle Y \rangle \otimes K\langle Y \rangle \\ \Delta_{conc} \otimes \Delta_{conc} \downarrow & & & & \uparrow \boxplus_q \otimes \boxplus_q \\ K\langle Y \rangle \otimes K\langle Y \rangle \otimes K\langle Y \rangle \otimes K\langle Y \rangle & \xrightarrow{id \otimes \tau_{2,3} \otimes id} & K\langle Y \rangle \otimes K\langle Y \rangle \otimes K\langle Y \rangle \otimes K\langle Y \rangle & & \end{array}$$

Soient les mots  $u_1, v_1, u_2, v_2 \in Y^*$ , on a

$$\begin{aligned} & \langle \Delta_{conc} \circ \boxplus_q(u_1 \otimes v_1) \mid u_2 \otimes v_2 \rangle = \langle \Delta_{conc}(u_1 \boxplus_q v_1) \mid u_2 \otimes v_2 \rangle \\ & = \langle u_1 \boxplus_q v_1 \mid conc(u_2 \otimes v_2) \rangle = \langle u_1 \otimes v_1 \mid (\Delta_{\boxplus_q} \circ conc)(u_2 \otimes v_2) \rangle \\ & = \langle (\boxplus_q \otimes \boxplus_q) \circ \tau_{23} \circ (\Delta_{conc} \otimes \Delta_{conc})(u_1 \otimes v_1) \mid u_2 \otimes v_2 \rangle \end{aligned} \quad (1.27)$$

Ceci montre que

$$\Delta_{conc} \circ \boxplus_q = (\boxplus_q \otimes \boxplus_q) \circ \tau_{23} \circ (\Delta_{conc} \otimes \Delta_{conc})$$

c'est à dire la propriété annoncée.  $\square$

En désignant par  $(w)$  le poids de  $w$  (défini par la somme des indices des lettres apparues dans  $w$ ), d'après la proposition 1.5, nous voyons que le produit  $\boxplus_q$  et le co-produit  $\Delta_{conc}$  sont gradués en poids, autrement dit ils envoient un certain élément sur une combinaison linéaire homogène de même poids que l'original, c'est-à-dire

- i) Pour tous mots  $u, v \in Y^*$ , si  $w \in \text{supp}(u \boxplus_q v)$  on a  $(w) = (u) + (v)$  ;
- ii) Pour tout mot  $w \in Y^*$ , si  $u \otimes v \in \text{supp}(\Delta_{conc}(w))$  on a  $(u) + (v) = (w)$ .

Par ailleurs, dans toute bigèbre  $(\mathcal{B}, \mu, 1_{\mathcal{B}}, \Delta, \varepsilon)$   $\mathbb{N}$ -graduée et connexe (pas nécessairement cocommutative)<sup>11</sup>, on peut effectuer un calcul analytique<sup>12</sup> pour la convolution de la manière suivante [Bui+15c]. Avec  $e = 1_{\mathcal{B}} \circ \varepsilon$  qui est l'élément neutre de la convolution, en écrivant  $Id_{\mathcal{B}} = I = e + I^+$ , on a les deux projecteurs de la décomposition

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \oplus \left( \bigoplus_{n \geq 1} \mathcal{B}_n \right) \quad (1.28)$$

11.  $\mathcal{B} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ , tous les éléments  $(\mu, 1_{\mathcal{B}}, \Delta, \varepsilon)$  sont gradués et, de plus,  $\mathcal{B}_0 = K.1_{\mathcal{B}}$

12. au voisinage de 1

et, pour toute série  $T(1+z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ , on peut calculer  $T(I)$  par

$$T(I) = a_0 \mathbf{e} + \sum_{n \geq 1} a_n (I^+)^{*n} \quad (1.29)$$

(en effet, pour tout  $b \in \mathcal{B}$ , la somme  $\sum_{n \geq 1} a_n (I^+)^{*n}(b)$  est finie). Ce calcul est compatible avec la convolution car pour tous  $S, T \in K[[1+z]]$ , on a

$$S(I) * T(I) = ST(I)$$

Ceci permet déjà de calculer l'antipode avec la série  $(1+X)^{-1} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n X^n$  et sera repris un peu plus loin avec la série  $\log(1+X) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} X^n$ . Pour l'existence de l'antipode, on a

$$S = I^{*-1} = (\mathbf{e} + I^+)^{*-1} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n (I^+)^{*n} \quad (1.30)$$

Et, dans tous les cas <sup>13</sup>, on a

$$\mathbf{e} = S * I = S * (\mathbf{e} + I^+) = S + S * I^+ \quad (1.31)$$

Soit

$$S = \mathbf{e} - S * I^+ = \mathbf{e} - \mu \circ (S \otimes I^+) \circ \Delta \quad (1.32)$$

*Remarque(s).* On peut noter que cette formule donne un algorithme (récuratif) pour calculer l'antipode lorsque  $\Delta_+$  est nilpotent [Haz08] <sup>14</sup>. Dans d'autres cas, ce calcul peut donner l'antipode quand même, par exemple quand l'algèbre de Hopf contient un élément du type groupe  $g \neq 1$ , on obtient  $S(g)g = 1$  et, avec la formule symétrique  $gS(g) = 1$  d'où  $S(g) = g^{-1}$ .

Par conséquent, en désignant par  $*_1$  le produit de convolution dans  $\text{Hom}(\mathcal{B}_q^{\boxplus}, \mathcal{B}_q^{\boxplus})$ , i.e., on a

$$(I^+)^{*_1 n} = \boxplus_q^{n-1} \circ (I^+)^{\otimes n} \circ \Delta_{conc}^{n-1}, \quad (1.33)$$

et la bigèbre  $\mathcal{B}_q^{\boxplus}$  est une algèbre de Hopf

$$\mathcal{H}_{\boxplus_q}^\vee := (K\langle Y \rangle, \boxplus_q, 1_{Y^*}, \Delta_{conc}, \varepsilon, \mathcal{S}^{\boxplus_q}), \quad (1.34)$$

dont l'antipode,  $\mathcal{S}^{\boxplus_q}$ , est déterminée par la formule

$$\mathcal{S}^{\boxplus_q}(w) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k (I^+)^{*_1 k}(w). \quad (1.35)$$

13. Que  $\Delta_+$  soit localement nilpotent ou non.

14. Même en l'absence de graduation.

Remarquons que cette série est sommable car  $I^+$  est  $\star_1$ -(localement) nilpotent sur la bigèbre  $\mathcal{B}^{\boxplus q}$ . C'est-à-dire, pour chaque  $w \in Y^*$ , il existe  $n \geq 1$  tel que  $(I^+)^{\star_1 k}(w) = 0$  pour tout  $k \geq n$ .

De plus, l'antipode  $\mathcal{S}^{\boxplus q}$  peut être déterminée par la formule de récurrence [Ehr96 ; Sch87] :  $\mathcal{S}^{\boxplus q}(1) = 1$ , et pour tout  $w$  tel que  $(w) \geq 1$ ,

$$\mathcal{S}^{\boxplus q}(w) = -\boxplus q(\mathcal{S}^{\boxplus q} \otimes I^+) \Delta_{conc}(w), \quad (1.36)$$

Nous allons préciser cette formule en une formule explicite dans notre cadre. D'abord, pour chaque entier positif  $m$ , nous dirons que  $J = (i_1, \dots, i_n)$  est une *composition* de  $m$  si  $i_1 + \dots + i_n = m$  (avec  $i_k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ). Cette composition agit sur les mots de longueur  $m$  et plus précisément définit une application  $Y^m \rightarrow Y^n$ . Soit  $w = y_{k_1} \dots y_{k_m}$ , on définit

$$J(w) = q^{m-n} y_{k_1+\dots+k_{i_1}} y_{k_{i_1+1}+\dots+k_{i_2}} \dots y_{k_{i_{n-1}+1}+\dots+k_m}. \quad (1.37)$$

En désignant par  $C_m$  l'ensemble des compositions de  $m$  nous pouvons représenter l'antipode comme ci-dessous.

**Proposition 1.6.** *Pour tout  $w = y_{k_1} \dots y_{k_m} \in Y^*$ , l'antipode  $\mathcal{S}^{\boxplus q}$  est déterminée par*

$$\mathcal{S}^{\boxplus q}(w) = (-1)^m \sum_{J \in C_m} J(y_{k_m} \dots y_{k_1}). \quad (1.38)$$

**Exemple 1.3.** Soit  $w = y_2 y_5 y_4$ , alors

$$\begin{aligned} J_1 &= (1, 1, 1) &\longrightarrow J_1(y_4 y_5 y_2) &= y_4 y_5 y_2, \\ J_2 &= (2, 1) &\longrightarrow J_2(y_4 y_5 y_2) &= q y_9 y_2, \\ J_3 &= (1, 2) &\longrightarrow J_3(y_4 y_5 y_2) &= q y_4 y_7, \\ J_4 &= (3) &\longrightarrow J_4(y_4 y_5 y_2) &= q^2 y_{11}. \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{\boxplus q}(y_2 y_5 y_4) &= (-1)^3 \sum_{J \in C_3} J(y_4 y_5 y_2) \\ &= -(J_1(y_4 y_5 y_2) + J_2(y_4 y_5 y_2) + J_3(y_4 y_5 y_2) + J_4(y_4 y_5 y_2)) \\ &= -y_4 y_5 y_2 - q(y_9 y_2 + y_4 y_7) - q^2 y_{11}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* (Proposition 1.6) Pour le mot  $w = y_{k_1} \dots y_{k_m}$ , en étendant la formule (1.36), on a

$$\mathcal{S}^{\boxplus q}(w) = - \sum_{j=0}^{m-1} \mathcal{S}^{\boxplus q}(y_{k_1} \dots y_{k_j}) \boxplus q(y_{k_{j+1}} \dots y_{k_m}). \quad (1.39)$$

On peut trouver facilement le résultat par récurrence [Bui12 ; Bui+13a].  $\square$

De la même manière, nous construisons une structure d'algèbre de Hopf [Bui12 ; Bui+13a]

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{L}_q} := (K\langle Y \rangle, \text{conc}, 1_{Y^*}, \Delta_{\mathfrak{L}_q}, \varepsilon, \mathcal{S}_q^{\text{conc}}), \quad (1.40)$$

dont l'antipode  $\mathcal{S}_q^{\text{conc}}$  est déterminée par la formule

$$\mathcal{S}_q^{\text{conc}}(w) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k (I^+)^{*2k}(w), \quad (1.41)$$

où  $*_2$  désigne le produit de convolution de la bigèbre  $(K\langle Y \rangle, \text{conc}, 1_{Y^*}, \Delta_{\mathfrak{L}_q}, \varepsilon)$ , ou par la formule de récurrence

$$\mathcal{S}_q^{\text{conc}}(w) = -\text{conc}(\mathcal{S}_q^{\text{conc}} \otimes I^+) \Delta_{\mathfrak{L}_q}(w). \quad (1.42)$$

Nous en déduisons une formule explicite pour  $\mathcal{S}_q^{\text{conc}}$  comme suite.

**Proposition 1.7.** *Pour chaque mot  $w$ ,*

$$\mathcal{S}_q^{\text{conc}}(w) = \sum_{v \in J^{-1}(\bar{w})} (-1)^{|v|} v,$$

où  $\bar{w} = y_{k_m} \dots y_{k_1}$  si  $w = y_{k_1} \dots y_{k_m}$  et  $J^{-1}(w) := \{v \mid \text{supp}(J(v)) = w \text{ pour un certain } J \in C_{|w|}\}$ .

### 1.3. Bases en dualité dans $K\langle Y \rangle$

Nous avons bien deux structures d'algèbre de Hopf en dualité (non-dégénérée),  $\mathcal{H}_{\mathfrak{L}_q}$  et  $\mathcal{H}_{\mathfrak{L}_q}^\vee$ . Dans cette section, nous allons construire des bases pour ces structures grâce au théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt et à la dualité, ce qui permettra d'écrire explicitement la factorisation MRS [Mel+89 ; Sch65].

#### 1.3.1. Propriétés des séries primitives

En étendant, par continuité le morphisme  $\Delta_{\mathfrak{L}_q}$  de  $K\langle Y \rangle$  à  $K\langle\langle Y \rangle\rangle$  (avec valeurs dans  $K\langle\langle Y^* \otimes Y^* \rangle\rangle$ ), nous rappelons que, une série  $S$  est *primitive*<sup>15</sup> si et seulement si  $\Delta_{\mathfrak{L}_q}(S) = S \hat{\otimes} 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \hat{\otimes} S$ .

**Lemme 1.8** (Friedrichs criterium). *Soit  $S$  une série dans  $K\langle\langle Y \rangle\rangle$ . Alors,*

1. (avec  $\langle S \mid 1_{Y^*} \rangle = 0$ )  $S$  est primitive si et seulement si, pour tous les mots non vides  $u, v \in Y^+$ ,  $\langle S \mid u \mathfrak{L}_q v \rangle = 0$ .

---

15.  $\hat{\otimes}$  désigne

2. (avec  $\langle S | 1_{Y^*} \rangle = 1$ )  $S$  est du type groupe<sup>16</sup>, i.e.  $\Delta_{\boxplus_q} S = S \hat{\otimes} S$ , si et seulement si, pour tous  $u, v \in Y^+$ ,  $\langle S | u \boxplus_q v \rangle = \langle S | u \rangle \langle S | v \rangle$ .

*Démonstration.* Les résultats s'obtiennent facilement en utilisant les formules suivantes

$$\begin{aligned} \Delta_{\boxplus_q} S &= S \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes S - \langle S | 1_{Y^*} \rangle 1_{Y^*} \otimes 1_{Y^*} + \sum_{u,v \in Y^+} \langle S | u \boxplus_q v \rangle u \otimes v, \\ \Delta_{\boxplus_q} S &= \sum_{u,v \in Y^*} \langle S | u \boxplus_q v \rangle u \otimes v \quad \text{et} \quad S \otimes S = \sum_{u,v \in Y^*} \langle S | u \rangle \langle S | v \rangle u \otimes v. \end{aligned}$$

□

**Lemme 1.9.** Soit  $S \in K\langle\langle Y \rangle\rangle$  telle que  $\langle S | 1_{Y^*} \rangle = 1$ . Alors  $S$  est de type groupe si et seulement si  $\log S$  est primitive.

*Démonstration.* Grâce aux applications  $\Delta_{\boxplus_q}$  et  $T \mapsto T \hat{\otimes} 1_{Y^*}$  et  $T \mapsto 1_{Y^*} \hat{\otimes} T$  qui sont des homomorphismes continus,  $\log S$  est primitive, car, en vertu du lemme 1.8, si  $\Delta_{\boxplus_q}(\log S) = \log S \hat{\otimes} 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \hat{\otimes} \log S$ , et en raison du fait que  $\log S \hat{\otimes} 1_{Y^*}, 1_{Y^*} \hat{\otimes} \log S$  commutent, on a

$$\begin{aligned} \Delta_{\boxplus_q} S &= \Delta_{\boxplus_q}(\exp(\log S)) \\ &= \exp(\Delta_{\boxplus_q}(\log S)) = \exp(\log S \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes \log S) \\ &= \exp(\log S \otimes 1_{Y^*}) \exp(1_{Y^*} \otimes \log S) \\ &= (\exp(\log S) \otimes 1_{Y^*})(1_{Y^*} \otimes \exp(\log S)) \\ &= S \otimes S. \end{aligned}$$

Cela, avec le fait que  $\langle S | 1_{Y^*} \rangle = 1$ , signifie que  $S$  est de type groupe. □

**Proposition 1.10.** Soient  $S_1, \dots, S_n$  des séries formelles sans terme constant et  $P_1, \dots, P_m$  des éléments primitifs (pour  $\Delta_{\boxplus_q}$ ) dans  $K\langle Y \rangle$ . Alors,

i) pour  $n > m$ ,

$$\langle S_1 \boxplus_q \dots \boxplus_q S_n | P_1 \dots P_m \rangle = 0; \quad (1.43)$$

ii) pour  $n = m$ ,

$$\langle S_1 \boxplus_q \dots \boxplus_q S_n | P_1 \dots P_n \rangle = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \langle S_1 | P_{\sigma(1)} \rangle \dots \langle S_n | P_{\sigma(n)} \rangle; \quad (1.44)$$

iii) pour  $n < m$ , soit  $\mathcal{P} := \{p_1, \dots, p_m\}$  un alphabet de cardinal  $m$ <sup>17</sup> et  $\mu$  le morphisme de  $(K\langle \mathcal{P} \rangle, \text{conc}, 1_{\mathcal{P}^*})$  dans  $(K\langle Y \rangle, \text{conc}, 1_{Y^*})$  qui envoie chaque lettre  $p_k \in \mathcal{P}$  sur le polynôme  $P_k \in K\langle Y \rangle$ . Alors

$$\langle S_1 \boxplus_q \dots \boxplus_q S_n | P_1 \dots P_m \rangle = \sum_{\substack{w_1, \dots, w_n \in \mathcal{P}^+ \\ P_1 \dots P_m \in \text{supp}(w_1 \boxplus \dots \boxplus w_n)}} \langle S_1 | \mu(w_1) \rangle \dots \langle S_n | \mu(w_n) \rangle. \quad (1.45)$$

16. "Group-like" en anglais.

17. i.e. toutes les lettres sont distinctes



*Démonstration.* D'une part

$$\begin{aligned} \langle S_1 \bowtie_q \dots \bowtie_q S_n \mid P_1 \dots P_m \rangle &= \langle S_1 \otimes \dots \otimes S_n \mid \Delta_{\bowtie_q}^{(n-1)}(P_1 \dots P_m) \rangle \\ &= \langle S_1 \otimes \dots \otimes S_n \mid \Delta_{\bowtie_q}^{(n-1)}(\mu(p_1 \dots p_m)) \rangle. \end{aligned}$$

D'autre part, parce que les  $P_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) sont primitifs, on a

$$\Delta_{\bowtie_q} \circ \mu \equiv (\mu \otimes \mu) \circ \Delta_{conc, \mathcal{P}}$$

sur les générateurs  $\mathcal{P}$  donc sur tout  $K\langle \mathcal{P} \rangle$ . Donc, on a aussi

$$\Delta_{\bowtie_q}^{(n-1)} \circ \mu = \mu^{\otimes n} \circ \Delta_{conc, \mathcal{P}}^{(n-1)}$$

En posant  $w = p_1 \dots p_m$  (donc  $|w| = m$ ) et en appliquant la formule générale (pour  $u \in \mathcal{P}^+$ )

$$\Delta_{conc, \mathcal{P}}^{(n-1)}(u) = \sum_{I_1 + \dots + I_n = [1 \dots m]} u[I_1] \otimes \dots \otimes u[I_n]$$

on a

$$\Delta_{conc, \mathcal{P}}^{(n-1)}(w) = \sum_{\substack{w_1, \dots, w_n \in \mathcal{P}^+ \\ p_1 \dots p_m \in \text{supp}(w_1 \bowtie \dots \bowtie w_n)}} w_1 \otimes \dots \otimes w_n$$

d'où

$$\begin{aligned} \langle S_1 \bowtie_q \dots \bowtie_q S_n \mid P_1 \dots P_m \rangle &= \langle S_1 \otimes \dots \otimes S_n \mid \Delta_{\bowtie_q}^{(n-1)}(\mu(p_1 \dots p_m)) \rangle \\ &= \langle S_1 \otimes \dots \otimes S_n \mid \mu^{\otimes n} \circ \Delta_{conc, \mathcal{P}}^{(n-1)}(p_1 \dots p_m) \rangle \\ &= \langle S_1 \otimes \dots \otimes S_n \mid \sum_{\substack{w_1, \dots, w_n \in \mathcal{P}^+ \\ p_1 \dots p_m \in \text{supp}(w_1 \bowtie \dots \bowtie w_n)}} \mu(w_1) \otimes \dots \otimes \mu(w_n) \rangle \\ &= \sum_{\substack{w_1, \dots, w_n \in \mathcal{P}^+ \\ p_1 \dots p_m \in \text{supp}(w_1 \bowtie \dots \bowtie w_n)}} \langle S_1 \mid \mu(w_1) \rangle \dots \langle S_n \mid \mu(w_n) \rangle \end{aligned} \tag{1.46}$$

compte tenu du fait que les  $S_i$  sont sans terme constant.

i) Pour  $n > m$ , dans tout terme de la somme, il existe au moins un élément  $\mu(w_j) = 0$  pour certain  $1 \leq j \leq n$ , cela donne que la somme est nulle.

ii) Pour  $n = m$ , les seules possibilités se produisent pour  $|w_i| = 1$  (des lettres donc), toutes les lettres devant être distinctes, le shuffle est égal à

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} p_{\sigma(1)} \dots p_{\sigma(n)}$$

d'où la formule (1.44).

iii) Pour  $n < m$ , c'est la formule (1.45). □

### 1.3.2. Base(s) du module (libre) des éléments primitifs et de l'algèbre enveloppante

Nous allons considérer l'algèbre associative (avec unité)

$$\mathcal{A} := K\langle Y \rangle \hat{\otimes} K\langle Y \rangle = K\langle\langle Y^* \otimes Y^* \rangle\rangle. \quad (1.47)$$

C'est l'algèbre large<sup>18</sup> du monoïde  $M := Y^* \otimes Y^*$ , c'est-à-dire l'algèbre des séries doubles déjà rencontrée au paragraphe précédent. On munit ce module du  $q$ -stuffle à gauche de  $\otimes$  et du produit de concaténation à droite, comme suit

$$S.T = \sum_{u_1, v_1, u_2, v_2 \in Y^*} \langle S \mid u_1 \otimes v_1 \rangle \langle T \mid u_2 \otimes v_2 \rangle (u_1 \sqcup_q u_2) \otimes v_1 v_2$$

(on vérifie que la famille contenue dans cette somme, homogène en poids, est bien sommable<sup>19</sup>). Soient  $\{P_i\}_{i \in I}, \{Q_i\}_{i \in I}$  deux familles de polynômes dans  $K\langle Y \rangle$  telles que  $T := \sum_{i \in I} P_i \otimes Q_i$  est sommable sans terme constant dans  $K\langle\langle M \rangle\rangle$ . Alors, le *logarithme* de  $1 + T$  et l'*exponentielle* de  $T$  dans  $\mathcal{A}$  vérifient :

$$\begin{aligned} \exp T &:= \sum_{k \geq 0} \frac{T^k}{k!} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k \in I} (P_{i_1} \sqcup_q \dots \sqcup_q P_{i_k}) \otimes (Q_{i_1} \dots Q_{i_k}), \end{aligned} \quad (1.48)$$

$$\begin{aligned} \log(1_{Y^*} \otimes 1_{Y^*} + T) &:= \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} T^k \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{i_1, \dots, i_k \in I} (P_{i_1} \sqcup_q \dots \sqcup_q P_{i_k}) \otimes (Q_{i_1} \dots Q_{i_k}). \end{aligned} \quad (1.49)$$

Nous allons maintenant appliquer ceci à la série diagonale

$$\mathcal{D}_Y := \sum_{w \in Y^*} w \otimes w = 1_{Y^*} \otimes 1_{Y^*} + \sum_{w \in Y^+} w \otimes w, \quad (1.50)$$

18. En anglais "total algebra".

19. De manière similaire à ce qui a été vu précédemment, une famille de séries  $\{S_i\}_{i \in I}$ , dans  $K\langle\langle M \rangle\rangle$  est dite *sommable* si et seulement si, pour tout  $u \otimes v$  dans  $M$ , l'ensemble  $\{i \in I \mid \langle S_i \mid u \otimes v \rangle \neq 0\}$  est fini. On peut calculer la limite par la formule  $S = \sum_{i \in I} S_i = \sum_{u \otimes v \in M} (\sum_{i \in I} \langle S_i \mid u \otimes v \rangle) u \otimes v$ .

ce qui donne

$$\begin{aligned} \log \mathcal{D}_Y &= \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left( \sum_{w \in Y^+} w \otimes w \right)^k \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{w_1, \dots, w_k \in Y^+} (w_1 \boxplus_q \dots \boxplus_q w_k) \otimes (w_1 \dots w_k) \\ &= \sum_{u \in Y^+} u \otimes \left( \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{w_1, \dots, w_k \in Y^+} \langle u \mid w_1 \boxplus_q \dots \boxplus_q w_k \rangle w_1 \dots w_k \right) \end{aligned}$$

Cela nous permet définir un opérateur comme suit.

**Définition 1.2.** Pour chaque mot non vide  $w$ ,  $\pi_1(w)$  est défini par

$$\pi_1(w) := \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{w_1, \dots, w_k \in Y^+} \langle w \mid w_1 \boxplus_q \dots \boxplus_q w_k \rangle w_1 \dots w_k. \quad (1.51)$$

Nous avons alors l'expression

$$\log \mathcal{D}_Y = \sum_{w \in Y^+} w \otimes \pi_1(w). \quad (1.52)$$

*Remarque(s).* On remarquera que, suivant la théorie exposée plus haut (1.29), on a

$$\pi_1 = \log_*(I) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (I^+)^{*n} \quad (1.53)$$

**Lemme 1.11.** pour tous  $w = y_{n_1} \dots y_{n_m} \in Y^*$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$ , on a

$$\begin{aligned} \pi_1(y_{n_1} \dots y_{n_m}) &= \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &\quad \sum_{\substack{n_{1_j} + \dots + n_{k_j} = n_j, \\ j=1, \dots, m, n_{i_j} \geq 0}} q^{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \text{sig}(n_{i_j}) - m} y_{n_{1_1}} \dots y_{n_{1_m}} \dots y_{n_{k_1}} \dots y_{n_{k_m}}, \end{aligned} \quad (1.54)$$

où on convient de  $y_0 = 1$  et  $\text{sig}$  désigne l'opérateur de signe, c'est-à-dire

$$\text{sig}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (1.55)$$

En particulier,

$$\begin{aligned}
\pi_1(y_k) &= y_k + \sum_{i \geq 2} \frac{(-q)^{i-1}}{i} \sum_{k_1 + \dots + k_i = k} y_{k_1} \dots y_{k_i} \\
&= y_k - \frac{q}{2} \sum_{k_1 + k_2 = k} y_{k_1} y_{k_2} + \frac{q^2}{3} \sum_{k_1 + k_2 + k_3 = k} y_{k_1} y_{k_2} y_{k_3} - \dots \\
&\quad + \frac{(-q)^{k-1}}{k} y_1^k.
\end{aligned} \tag{1.56}$$

**Exemple 1.4.**

$$\begin{aligned}
\pi_1(y_1) &= y_1, \quad \pi_1(y_2) = y_2 - \frac{q}{2} y_1^2, \\
\pi_1(y_3) &= y_3 - \frac{q}{2} (y_1 y_2 + y_2 y_1) + \frac{q^2}{3} y_1^3, \\
\pi_1(y_4) &= y_4 - \frac{q}{2} (y_1 y_3 + y_2^2 + y_3 y_1) + \frac{q^2}{3} (y_1^2 y_2 + y_1 y_2 y_1 + y_2 y_1^2) - \frac{q^3}{4} y_1^4, \\
\pi_1(y_2 y_1) &= y_2 y_1 - \frac{1}{2} [(1y_1)(y_2 1) + q(y_1 1)(y_1 y_1) + q(y_1 y_1)(y_1 1) + (y_2 1)(1y_1)] \\
&\quad + \frac{1}{3} [q(y_1 1)(y_1 1)(1y_1) + q(y_1 1)(1y_1)(y_1 1) + q(1y_1)(y_1 1)(y_1 1)] \\
&= \frac{1}{2} y_2 y_1 - \frac{1}{2} y_1 y_2.
\end{aligned}$$

Par contre, en appliquant l'opérateur logarithme sur la série diagonale, on a

$$\log \mathcal{D}_Y = \sum_{u \in Y^+} \left( \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{w_1, \dots, w_k \in Y^+} \langle u \mid w_1 \dots w_k \rangle w_1 \boxplus_q \dots \boxplus_q w_k \right) \otimes u$$

**Définition 1.3.** Pour chaque mot non vide,  $w$ , l'opérateur  $\pi_1^*$  est défini par

$$\pi_1^*(w) := \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{w_1, \dots, w_k \in Y^+} \langle w \mid w_1 \dots w_k \rangle w_1 \boxplus_q \dots \boxplus_q w_k. \tag{1.57}$$

En particulier,

$$\pi_1^*(y_k) = y_k, \quad y_k \in Y. \tag{1.58}$$

Nous avons alors l'expression

$$\log \mathcal{D}_Y = \sum_{w \in Y^+} \pi_1^*(w) \otimes w. \tag{1.59}$$

**Exemple 1.5.**

$$\begin{aligned}\pi_1^*(y_1) &= y_1, & \pi_1^*(y_2) &= y_2 \\ \pi_1^*(y_1 y_2) &= \frac{1}{2}y_1 y_2 - \frac{1}{2}y_2 y_1 - \frac{q}{2}y_3.\end{aligned}$$

Observons que, grâce à la construction ci-dessus,  $\pi_1$  et  $\pi_1^*$  donnent une *paire d'adjoints*, c'est-à-dire  $\langle \pi_1(u) | v \rangle = \langle u | \pi_1^*(v) \rangle$  pour tous mots  $u, v \in Y^*$ .

**Lemme 1.12.** *Pour chaque mot non vide  $w$ , nous avons les expressions*

$$w = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \sum_{w_1, \dots, w_k \in Y^+} \langle w | w_1 \boxtimes_q \dots \boxtimes_q w_k \rangle \pi_1(w_1) \dots \pi_1(w_k), \quad (1.60)$$

$$= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \sum_{w_1, \dots, w_k \in Y^+} \langle w | w_1 \dots w_k \rangle \pi_1^*(w_1) \boxtimes_q \dots \boxtimes_q \pi_1^*(w_k). \quad (1.61)$$

En particulier,

$$y_k = \sum_{i \geq 1} \frac{q^{i-1}}{i!} \sum_{k_1 + \dots + k_i = k} \pi_1(y_{k_1}) \dots \pi_1(y_{k_i}), \quad (1.62)$$

$$= \pi_1^*(y_k). \quad (1.63)$$

**Exemple 1.6.**

$$y_1 = \pi_1(y_1),$$

$$y_2 = \pi_1(y_2) + \frac{q}{2!} \pi_1(y_1)^2,$$

$$y_3 = \pi_1(y_3) + \frac{q}{2!} (\pi_1(y_1) \pi_1(y_2) + \pi_1(y_2) \pi_1(y_1)) + \frac{q^2}{3!} \pi_1(y_1)^3,$$

$$y_4 = \pi_1(y_4) + \frac{q}{2!} (\pi_1(y_1) \pi_1(y_3) + \pi_1(y_2)^2 + \pi_1(y_3) \pi_1(y_1))$$

$$+ \frac{q^2}{3!} (\pi_1(y_1)^2 \pi_1(y_2) + \pi_1(y_1) \pi_1(y_2) \pi_1(y_1) + \pi_1(y_2) \pi_1(y_1)^2) + \frac{q^3}{4!} \pi_1(y_1)^4.$$

*Démonstration.* (Lemme 1.12) En développant la série diagonale, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_Y &= \exp\left(\log \sum_{w \in Y^*} w \otimes w\right) \\ &= \exp\left(\sum_{w \in Y^+} w \otimes \pi_1(w)\right) \quad (\text{d'après (1.52)}) \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \left(\sum_{w \in Y^+} w \otimes \pi_1(w)\right)^k \\ &= 1_{Y^*} \otimes 1_{Y^*} + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \sum_{w_1, \dots, w_k \in Y^+} (w_1 \boxtimes_q \dots \boxtimes_q w_k) \otimes (\pi_1(w_1) \dots \pi_1(w_k))\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{w \in Y^+} w \otimes w = \sum_{u \in Y^+} u \otimes \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \sum_{w_1, \dots, w_k \in Y^*} \langle u \mid w_1 \mathfrak{L}_q \dots \mathfrak{L}_q w_k \rangle \pi_1(w_1) \dots \pi_1(w_k) \right).$$

En identifiant la dernière égalité, nous avons

$$\forall w \in Y^+, w = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \sum_{w_1, \dots, w_k \in Y^*} \langle w \mid w_1 \mathfrak{L}_q \dots \mathfrak{L}_q w_k \rangle \pi_1(w_1) \dots \pi_1(w_k)$$

En d'autres termes, nous avons aussi

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_Y &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \left( \sum_{w \in Y^+} \pi_1^*(w) \otimes w \right)^k \quad (\text{d'après (1.59)}) \\ &= 1_{Y^*} \otimes 1_{Y^*} + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \sum_{w_1, \dots, w_k \in Y^*} (\pi_1^*(w_1) \mathfrak{L}_q \dots \mathfrak{L}_q \pi_1^*(w_k)) \otimes (w_1 \dots w_k) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{w \in Y^+} w \otimes w = \sum_{u \in Y^+} \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \sum_{w_1, \dots, w_k \in Y^*} \langle u \mid w_1 \dots w_k \rangle \pi_1^*(w_1) \mathfrak{L}_q \dots \mathfrak{L}_q \pi_1^*(w_k) \right) \otimes u.$$

En identifiant les deux côtés, nous avons

$$\forall w \in Y^+, w = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \sum_{w_1, \dots, w_k \in Y^*} \langle w \mid w_1 \dots w_k \rangle \pi_1^*(w_1) \mathfrak{L}_q \dots \mathfrak{L}_q \pi_1^*(w_k),$$

ce qui achève cette démonstration.  $\square$

Les polynômes  $\pi_1(w)$ ,  $w \in Y^*$  ( $\pi_1(1_{Y^*}) = 0$ ) satisfont la propriété suivante.

**Proposition 1.13.** *Pour chaque mot  $w$ , le polynôme  $\pi_1(w)$  est primitif.*

*Démonstration.* Soit, à nouveau  $\mathcal{A} = K\langle\langle Y^* \otimes Y^* \rangle\rangle$  que l'on peut considérer comme l'algèbre  $(K\langle\langle Y \rangle\rangle)\langle\langle Y \rangle\rangle$ , l'anneau (commutatif) des coefficients étant ici  $R = (K\langle\langle Y \rangle\rangle, \mathfrak{L}_q, 1_{Y^*})$ , ces coefficients seront notés entre crochets.

L'isomorphisme étant donné par

$$S \mapsto \sum_{v \in Y^*} \left[ \sum_{u \in Y^*} \langle S \mid u \otimes v \rangle u \right] v.$$

On remarque qu'alors, la série diagonale s'écrit  $D = \sum_{w \in Y^*} [w] w$ . En étendant par continuité  $\Delta_{\mathfrak{L}_q}$  à  $R\langle\langle Y \rangle\rangle$  (avec valeurs dans  $R\langle\langle Y^* \otimes Y^* \rangle\rangle$ ) on remarque que la série diagonale est de type groupe. En effet, toutes les familles étant sommables, on a

$$\Delta_{\mathfrak{L}_q}(D) = \Delta_{\mathfrak{L}_q} \left( \sum_{w \in Y^*} [w] w \right) = \sum_{w \in Y^*} [w] \Delta_{\mathfrak{L}_q}(w)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{w \in Y^*} \sum_{u, v \in Y^*} [w] \langle w \mid u \bowtie_q v \rangle u \otimes_R v \\
&= \sum_{u, v \in Y^*} \left( \sum_{w \in Y^*} [w] \langle w \mid u \bowtie_q v \rangle \right) u \otimes_R v \\
&= \sum_{u, v \in Y^*} [u \bowtie_q v] u \otimes_R v \\
&= \left( \sum_{u \in Y^*} [u] u \right) \otimes_R \left( \sum_{v \in Y^*} [v] v \right) \\
&= D \otimes_R D
\end{aligned}$$

et  $\langle D \mid 1_{Y^*} \otimes 1_{Y^*} \rangle = 1_R$ . On a donc  $L = \log(D) = \sum_{w \in Y^*} [w] \pi_1(w)$  qui est primitive. C'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\sum_{w \in Y^*} [w] \Delta_{\bowtie_q}(\pi_1(w)) &= L \otimes_R 1 + 1 \otimes_R L \\
&= \sum_{w \in Y^*} [w] \pi_1(w) \otimes_R 1 + 1 \otimes_R \sum_{w \in Y^*} [w] \pi_1(w) \\
&= \sum_{w \in Y^*} [w] \left( \pi_1(w) \otimes_R 1 + 1 \otimes_R \pi_1(w) \right).
\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de  $[w]$ , ce qui est possible avec l'opérateur  $\delta_w : [u] \mapsto \langle u \mid w \rangle$  ( $\delta_w \in \text{End}_K(R)$ ), on a bien que, pour tout mot  $w \in Y^+$ ,

$$\Delta_{\bowtie_q}(\pi_1(w)) = \pi_1(w) \otimes_R 1 + 1 \otimes_R \pi_1(w).$$

□

Désignons par  $\text{Prim}(K\langle Y \rangle)$  l'ensemble des éléments primitifs, c'est un  $K$ -sous-module libre de  $K\langle Y \rangle$ , pour lequel nous allons construire une base.

**Définition 1.4.** Soit  $\{\Pi_w\}_{w \in Y^*}$  la famille de polynômes définie par<sup>20</sup>

$$\Pi_w := \begin{cases} 1_{Y^*} & \text{si } w = 1_{Y^*} \\ \pi_1(y_k) & \text{si } w = y_k \\ [\Pi_{l_1}, \Pi_{l_2}] & \text{si } l \in \text{Lyn}Y, st(l) = (l_1, l_2), \\ \Pi_{l_1}^{i_1} \dots \Pi_{l_k}^{i_k} & \text{pour } w = l_1^{i_1} \dots l_k^{i_k}, l_1 > \dots > l_k, l_1, \dots, l_k \in \text{Lyn}Y. \end{cases}$$

20. Une couple des mots de Lyndon  $(l_1, l_2)$  est appelé factorisation standard du mot de Lyndon  $l$  si  $l = l_1 l_2$  et  $l_2$  est le plus long facteur droit propre de  $l$  qui soit de Lyndon. Alors, nous désignons par  $st(l) = (l_1, l_2)$ .

Grâce au théorème de Chen–Fox–Lyndon [Che+58; Lot83], tout le mot  $w$  peut être récrit comme un produit décroissant des mots de Lyndon  $w = l_1^{i_1} \dots l_k^{i_k}$ .

**Exemple 1.7.**

$$\begin{aligned}
\Pi_{y_1} &= y_1, & \Pi_{y_2} &= y_2 - \frac{q}{2}y_1^2, \\
\Pi_{y_2y_1} &= [\Pi_{y_2}, \Pi_{y_1}] = y_2y_1 - y_1y_2, \\
\Pi_{y_3y_1y_2} &= [\Pi_{y_3}, \Pi_{y_1y_2}] = [\Pi_{y_3}, \Pi_{y_1}\Pi_{y_2}] \\
&= y_3y_1y_2 - \frac{q}{2}y_3y_1^3 - qy_2y_1^2y_2 + \frac{q^2}{4}y_2y_1^4 - y_1y_3y_2 + \frac{q}{2}y_1y_3y_1^2 + \frac{q}{2}y_1^2y_2^2 \\
&\quad - \frac{q^2}{2}y_1^2y_2y_1^2 - y_2y_3y_1 + \frac{q}{2}y_2^2y_1^2 + y_2y_1y_3 + \frac{q}{2}y_1^2y_3y_1 - \frac{q}{2}y_1^3y_3 + \frac{q^2}{4}y_1^4y_2, \\
\Pi_{y_3y_1y_2y_1} &= y_3y_1y_2y_1 - y_3y_1^2y_2 - \frac{q}{2}y_2y_1^2y_2y_1 - y_1y_3y_2y_1 + y_1y_3y_1y_2 + \frac{q}{2}y_1^2y_2^2y_1 \\
&\quad - \frac{q}{2}y_1^2y_2y_1y_2 - y_2y_1y_3y_1 + \frac{q}{2}y_2y_1y_2y_1^2 + y_2y_1^2y_3 + y_1y_2y_3y_1 \\
&\quad - \frac{q}{2}y_1y_2^2y_1^2 - y_1y_2y_1y_3 + \frac{q}{2}y_1y_2y_1^2y_2.
\end{aligned}$$

Pour la preuve du lemme suivant (lemme 1.15), on va utiliser le fait que l'ordre lexicographique par poids  $<$  est compatible avec la structure de monoïde ([Bou+03], paragraphe 1 ex. 1). Il est bien connu que l'ordre lexicographique sur un monoïde libre  $Z^*$  ( $Z$  étant un alphabet totalement ordonné) n'est pas compatible avec la structure de monoïde (dès que  $|Z| \geq 2$ ) mais que l'ordre lexicographique par longueur l'est. Nous verrons que l'ordre lexicographique par poids est une image réciproque de celui-ci.

**Lemme 1.14.** *Soient  $E_1, E_2$  des ensembles,  $\phi : E_1 \longrightarrow E_2$ , une injection. On suppose que  $E_2$  est totalement ordonné par  $<_2$ . Alors, l'image réciproque de cet ordre par  $\phi$  définie par*

$$x <_1 y \Leftrightarrow \phi(x) <_2 \phi(y) \quad (1.64)$$

*est un ordre total.*

*Si, de plus,  $E_i$  est muni d'une structure de monoïde pour laquelle  $\phi$  est un morphisme et que  $<_2$  est compatible avec la structure de monoïde de  $E_2$ , alors  $<_1$  est compatible avec la structure de monoïde de  $E_1$ .*

Il est facile de voir que l'ordre lexicographique par poids  $<_{plex, Y}$  est l'image réciproque par  $\pi_X$  de l'ordre lexicographique par longueur,  $<_{lex, X}$ . Nous sommes alors en position de démontrer le lemme suivant.

**Lemme 1.15.** *Pour chaque mot de Lyndon  $l$ , le polynôme  $\Pi_l$  est homogène (en poids) et triangulaire supérieur. Plus précisément*

$$\Pi_l = l + \sum_{\substack{w > l \\ (w) = (l)}} \alpha_w w, \quad (1.65)$$

*où  $>_{lex}$  désigne l'ordre lexicographique (ou bien l'ordre lexicographique par poids).*



*Démonstration.* Nous allons démontrer ce lemme par récurrence sur la longueur de  $l$ . Le résultat est immédiat, par (1.56), si  $|l| = 1$ .

Supposons acquis pour les  $l$  de longueur  $k$ , où  $1 \leq k \leq n$ , que

$$\Pi_l = l + \sum_{\substack{w >_{plex} l \\ (w)=(l)}} \alpha_w w,$$

où  $>_{plex}$  désigne l'ordre lexicographique par poids. Alors, pour  $|l| = n + 1$  et  $st(l) = (l_1, l_2)$ , en utilisant l'hypothèse de récurrence, nous obtenons (pour faciliter la lecture nous noterons  $<$  au lieu de  $<_{plex}$ )

$$\Pi_{l_1} = l_1 + \sum_{\substack{u > l_1 \\ (u)=(l_1)}} \alpha_u u \quad \text{et} \quad \Pi_{l_2} = l_2 + \sum_{\substack{v > l_2 \\ (v)=(l_2)}} \beta_v v.$$

Par conséquent, comme  $<$  est compatible avec la structure de monoïde de  $Y^*$ , nous avons

$$\begin{aligned} \Pi_l &= [\Pi_{l_1}, \Pi_{l_2}] = \Pi_{l_1} \Pi_{l_2} - \Pi_{l_2}, \Pi_{l_1} \\ &= l_1 l_2 + \sum_{\substack{v > l_2 \\ (v)=(l_2)}} \beta_v l_1 v + \sum_{\substack{u > l_1 \\ (u)=(l_1)}} \alpha_u u l_2 + \sum_{\substack{u > l_1, v > l_2 \\ (u)=(l_1), (v)=(l_2)}} \alpha_u \beta_v u v \\ &\quad - l_2 l_1 - \sum_{\substack{u > l_1 \\ (u)=(l_1)}} \alpha_u l_2 u - \sum_{\substack{v > l_2 \\ (v)=(l_2)}} \beta_v v l_1 - \sum_{\substack{u > l_1, v > l_2 \\ (v)=(l_2), (u)=(l_1)}} \beta_v \alpha_u v u \\ &= l + \sum_{\substack{w > l \\ (w)=(l)}} c_w w, \quad (\text{par } l = l_1 l_2 < l_2 l_1). \end{aligned}$$

où les  $c_w$  sont obtenus à partir des  $\alpha_u$  et des  $\beta_v$ .

Enfin, puisque les  $\Pi_l$  sont homogènes par poids, nous avons

$$\Pi_l = l + \sum_{\substack{w > l \\ (w)=(l)}} \alpha_w w.$$

□

**Corollaire 1.16.** *La famille  $\{\Pi_w\}_{w \in Y^*}$  est triangulaire supérieure, plus précisément*

$$\forall w \in Y^+, \quad \Pi_w = w + \sum_{\substack{u > w \\ (u)=(w)}} \alpha_u u.$$

*Démonstration.* Cela résulte directement de la structure de monoïde de  $Y^*$  ordonné par l'ordre lexicographique par poids et du lemme 1.15. □

*Remarque(s).* Quand on considère l'ensemble des polynômes  $K\langle Y \rangle$  comme un  $K$ -module, il est libre et admet l'ensemble des mots  $Y^*$  comme base. Par ailleurs, l'ensemble des mots de Lyndon, désigné par  $\mathcal{Lyn}Y$ , indexe une base de l'algèbre de Lie libre

construite sur  $Y$ ,  $L\langle Y \rangle$  (que nous n'utiliserons pas ici).

Enfin, l'algèbre de Lie des éléments primitifs  $Prim(K\langle Y \rangle)$  (qui est différente de  $L\langle Y \rangle$ ) va admettre la famille  $\{\Pi_l\}_{l \in \mathcal{L}_{ym}Y}$  comme base linéaire. C'est ce que nous verrons plus bas (prop. 1.18).

**Proposition 1.17.** *La famille  $\{\Pi_w\}_{w \in Y^*}$  est homogène en poids et est une base de l'algèbre associative libre  $K\langle Y \rangle$ .*

*Démonstration.* D'abord, grâce à la propriété de triangularité supérieure, il est facile de voir que la famille  $(\Pi_w)_{w \in Y^*}$  est linéairement indépendante. Comme elle est homogène en poids, que  $K\langle Y \rangle$  est gradué en dimension finie par le poids et qu'elle a pour cardinal, par poids, le nombre de mots de ce poids donné, elle est génératrice de chaque composante homogène et, partant, de  $K\langle Y \rangle$ <sup>21</sup>.  $\square$

**Proposition 1.18.** *Le module des éléments primitifs,  $Prim(K\langle Y \rangle)$ , admet la famille  $\{\Pi_l\}_{l \in \mathcal{L}_{ym}Y}$  comme base.*

Le résultat est une conséquence directe du lemme suivant.

**Lemme 1.19.** *(L'anneau des coefficients est de caractéristique zéro<sup>22</sup>) Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie et  $B = (b_i)_{i \in I}$  une famille libre totalement ordonnée de  $\mathfrak{g}$ . On suppose que la famille de Poincaré-Birkhoff-Witt déduite de  $B$ ,  $(B^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}}$  est une base de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ . Alors  $B$  est une base de  $\mathfrak{g}$ .*

*Démonstration.* Soit  $g \in Prim(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ , comme  $g \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ , on peut écrire

$$g = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}} c_\alpha B^\alpha$$

et donc ( $\Delta$  étant le coproduit canonique de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ )

$$\begin{aligned} 1 \otimes g + g \otimes 1 = \Delta(g) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}} c_\alpha \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} \binom{\alpha}{\alpha_1} B^{\alpha_1} \otimes B^{\alpha_2} \\ &= \sum_{\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}^{(I)}} c_{\alpha_1 + \alpha_2} \binom{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1} B^{\alpha_1} \otimes B^{\alpha_2}. \end{aligned}$$

La famille  $(B^{\alpha_1} \otimes B^{\alpha_2})_{\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}^{(I)}}$  étant libre<sup>23</sup>, l'équation précédente montre que tous les coefficients  $(c_\alpha)_{|\alpha| \geq 2}$  sont nuls. Comme  $\varepsilon(g) = 0$  ( $g$  est primitif), on voit que  $g$  se décompose sur  $(B^\alpha)_{|\alpha|=1} = B$ .  $\square$

21. Nous allons préciser les décompositions associées par un algorithme dans la dernière sous-section de ce chapitre

22. Ceci veut dire que  $n \rightarrow n.1_K$  est injective. Ce lemme cesse d'être vrai en caractéristique  $p$  comme le montre l'exemple, avec  $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , de  $\mathfrak{g} = Prim(K[x])$  et  $B = \{x\}$ .

23. C'est une base de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ .

*Remarque(s).* i) La démonstration précédente montre que, si l'on connaît un algorithme pour décomposer les éléments selon  $(B^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}}$ , on connaît un algorithme pour décomposer les éléments primitifs selon  $B$ .

ii) Grâce au théorème de Chen–Fox–Lyndon, chaque mot peut être récrit comme un produit décroissant des mots de Lyndon. Par cette raison, la famille  $\{\Pi_w\}_{w \in Y^*} = \{\Pi_{l_1}^{i_1} \cdots \Pi_{l_k}^{i_k}\}_{l_1, \dots, l_k \in \mathcal{L}^{yn} Y, i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}}$  est une base de Poincaré-Birkhoff-Witt de  $K\langle Y \rangle$ .

### 1.3.3. Construction d'une formule pour la base duale

Nous construisons ici une formule pour une base de l'algèbre  $(K\langle Y \rangle, conc, 1_{Y^*})$  qui est une des algèbres en dualité. De façon logique, nous devrions avoir également une base de l'autre algèbre. Cette sous-section va indiquer une manière de construire une formule pour cette base duale.

Soit  $\{\Sigma_w\}_{w \in Y^*}$  la famille de polynômes<sup>24</sup> définie par<sup>25</sup>

$$\langle \Sigma_u \mid \Pi_v \rangle = \delta_{u,v}. \quad (1.66)$$

Grâce à la dualité et au corollaire 1.16, nous avons,

**Proposition 1.20.** *La famille  $(\Sigma_w)_{w \in Y^*}$  est triangulaire inférieure, i.e.*

$$\forall w \in Y^+, \quad \Sigma_w = w + \sum_{\substack{u < w \\ (v)=(w)}} c_u u. \quad (1.67)$$

*Démonstration.* En posant  $M_n$  la représentation matricielle (matrice des coefficients) de  $\Pi_w$  sur les mots  $w$ , où les  $w$  sont de poids  $n$ , on a que  ${}^t(M_n^{-1})$  est la représentation matricielle de  $\Sigma_w$  avec  $w$  de poids  $n$ . Cette dernière est triangulaire inférieure.  $\square$

**Exemple 1.8.**  $n = 2$  : La liste des mots de poids 2 est  $\{y_2, y_1^2\}$ ,

$$\begin{aligned} \Pi_{y_2} &= y_2 - \frac{1}{2} q y_1^2, \\ \Pi_{y_1^2} &= y_1^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons la matrice

$$M_2 = \begin{matrix} & y_2 & y_1^2 \\ \Pi_{y_2} & \begin{pmatrix} 1 & -1/2q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Pi_{y_1^2} & \end{matrix} \implies {}^t(M_2^{-1}) = \begin{matrix} & y_2 & y_1^2 \\ \Sigma_{y_2} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2q & 1 \end{pmatrix} \\ \Sigma_{y_1^2} & \end{matrix},$$

24. En général, les formes linéaires coordonnées d'une base sont des séries, mais, ici, la graduation par poids induit une décomposition orthogonale en sous espaces de dimension finie.

25.  $\delta_{u,v}$  désigne la fonction delta de Kronecker, c'est-à-dire  $\delta_{u,v} = \begin{cases} 1 & \text{si } u = v \\ 0 & \text{si } u \neq v \end{cases}$ .



ensuite,

$${}^t(M_4^{-1}) = \begin{matrix} & y_4 & y_3y_1 & y_2^2 & y_2y_1^2 & y_1y_3 & y_1y_2y_1 & y_1^2y_2 & y_1^4 \\ \Sigma_{y_4} & \left( \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2q & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2q & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6q^2 & 1/2q & 1/2q & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2q^2 & 3/2q & q & 2 & 1/2q & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2q^2 & q & q & 1 & q & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/24q^3 & 1/6q^2 & 1/4q^2 & 1/2q & 1/6q^2 & 1/2q & 1/2q & 1 & 1 \end{array} \right) \end{matrix}.$$

Par conséquent, nous obtenons les valeurs des  $\{\Sigma_w\}_{(w)=4}$  comme suit :

$$\begin{aligned} \Sigma_{y_4} &= y_4, \\ \Sigma_{y_3y_1} &= 1/2qy_4 + y_3y_1, \\ \Sigma_{y_2^2} &= 1/2qy_4 + y_2^2, \\ \Sigma_{y_2y_1^2} &= 1/6q^2y_4 + 1/2qy_3y_1 + 1/2qy_2^2 + y_2y_1^2, \\ \Sigma_{y_1y_3} &= qy_4 + y_3y_1 + y_1y_3, \\ \Sigma_{y_1y_2y_1} &= 1/2q^2y_4 + 3/2qy_3y_1 + qy_2^2 + 2y_2y_1^2 + 1/2qy_1y_3 + y_1y_2y_1, \\ \Sigma_{y_1^2y_2} &= 1/2q^2y_4 + qy_3y_1 + qy_2^2 + y_2y_1^2 + qy_1y_3 + y_1y_2y_1 + y_1^2y_2, \\ \Sigma_{y_1^4} &= 1/24q^3y_4 + 1/6q^2y_3y_1 + 1/4q^2y_2^2 + 1/2qy_2y_1^2 + 1/6q^2y_1y_3 + 1/2qy_1y_2y_1 \\ &+ 1/2qy_1^2y_2 + y_1^4. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant établir une formule explicite pour cette base afin de l'utiliser dans calculs pratiques. Nous dirons que :

- une suite de mots de Lyndon  $S = (l_1, \dots, l_n)$ ,  $n \geq 1$  est une *suite standard* ssi pour chaque  $i$ ,  $l_i$  est une lettre ou  $l_i = (l'_i, l''_i)$ , et  $l'_i \geq l_{i+1}, \dots, l''_i \geq l_n$ . De cette façon, une suite décroissante est aussi une suite standard.
- une *montée* de la suite standard  $S$  est un indice  $i$  tel que  $l_i < l_{i+1}$  et, de plus, si  $l_{i+1} \geq l_{i+2}, \dots, l_{i+1} \geq l_n$ , la montée est dite *montée légale*.

Pour chaque montée légale, nous définissons

$$\lambda_i(S) = (l_1, \dots, l_{i-1}, l_i l_{i+1}, l_{i+2}, \dots, l_n), \quad (1.68)$$

$$\rho_i(S) = (l_1, \dots, l_{i-1}, l_{i+1}, l_i, l_{i+2}, \dots, l_n). \quad (1.69)$$

Nous écrivons  $S \Rightarrow T$  si  $T = \lambda_i(S)$  ou  $T = \rho_i(S)$ ; et  $S \xRightarrow{*} T$  pour la clôture transitive de  $\Rightarrow$ . Un *arbre différentiel*, désigné par  $\mathcal{T}(S)$ , de la suite standard  $S$  est construit par : si  $S$  est une suite décroissante,  $\mathcal{T}(S)$  est réduit à un nœud (lui-même); sinon,  $\mathcal{T}(S)$  est

un arbre marqué  $S$  à la racine, la branche gauche étant le sous-arbre  $\mathcal{T}(S')$  et la branche droite étant le sous-arbre  $\mathcal{T}(S'')$ , où  $S' = \lambda_i(S)$ ,  $S'' = \rho_i(S)$  pour une montée  $i$  de  $S$ .

Par ailleurs, pour chaque suite standard  $S = (l_1, \dots, l_n)$ , nous définissons  $\Pi(S)$  par  $\Pi_{l_1} \dots \Pi_{l_n}$ . Il convient de noter que si  $(l_1, \dots, l_n)$  n'est pas décroissante, le polynôme  $\Pi_{l_1} \dots \Pi_{l_n}$  est différent du polynôme  $\Pi_{l_1 \dots l_n}$ . On a toutefois, pour  $\Pi(S)$ , la propriété suivante.

**Lemme 1.21.** *Pour chaque suite standard  $S$ ,  $\Pi(S)$  est la somme des  $\Pi(T)$ , où les  $T$  sont les feuilles de l'arbre différentiel  $\mathcal{T}(S)$ .*

*Démonstration.* Comme  $\Pi(S) = \Pi_{l_1} \dots \Pi_{l_n}$ , le lemme est une conséquence des définitions de  $\lambda_i$  et de  $\rho_i$  grâce à la remarque suivante :

$$\Pi_{l_i} \Pi_{l_{i+1}} = [\Pi_{l_i}, \Pi_{l_{i+1}}] + \Pi_{l_{i+1}} \Pi_{l_i} = \Pi_{l_i l_{i+1}} + \Pi_{l_{i+1}} \Pi_{l_i} .$$

□

**Exemple 1.9.** Soit  $S = (y_4, y_2, y_1)$ , nous avons

$$\begin{aligned} \Pi(y_4, y_2, y_1) &= \Pi_{y_4} \Pi_{y_2} \Pi_{y_1} = \Pi_{y_4} \Pi_{y_2 y_1} + \Pi_{y_4} \Pi_{y_1} \Pi_{y_2} \\ &= \Pi_{y_4 y_2 y_1} + \Pi_{y_2 y_1} \Pi_{y_4} + \Pi_{y_4 y_1} \Pi_{y_2} + \Pi_{y_1} \Pi_{y_4} \Pi_{y_2} \\ &= \Pi_{y_4 y_2 y_1} + \Pi_{y_2 y_1} \Pi_{y_4} + \Pi_{y_4 y_1 y_2} + \Pi_{y_2} \Pi_{y_4 y_1} + \Pi_{y_1} \Pi_{y_4 y_2} + \Pi_{y_1} \Pi_{y_2} \Pi_{y_4} . \end{aligned}$$

On peut aussi trouver ce résultat en prenant les feuilles de l'arbre suivant (FIGURE 1.1).

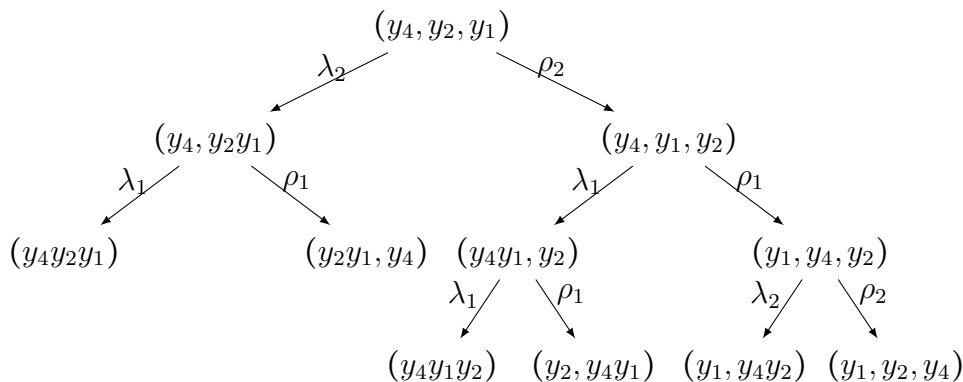


FIGURE 1.1 – L'arbre différentiel  $\mathcal{T}(y_4, y_2, y_1)$ .

*Remarque(s).* Suivant la définition d'une montée légale, pour construire l'arbre d'une suite standard, on commence de gauche à droite de la suite.

Inversement, soit  $S = (l_1, \dots, l_n)$ , nous allons appeler *descente* un indice  $i$  de  $S$  tel que  $l_1, \dots, l_{i-1} \in Y, l_1 \geq \dots \geq l_i, l_i > l_{i+1}$  et définir

$$\rho_i^{-1}(S) = (l_1, \dots, l_{i+1}, l_i, \dots, l_n). \quad (1.70)$$

On dit qu'un indice  $i$  est une *marque* ssi  $l_1, \dots, l_{i-1} \in Y, l_i \in Y^* \setminus Y$ . A ce moment-là, nous définissons

$$\lambda_i^{-1}(S) = (l_1, \dots, l_{i-1}, l'_i, l''_i, l_{i+1}, \dots, l_n), \quad (1.71)$$

où,  $st(l_i) = (l'_i, l''_i)$ . De plus, en écrivant  $S \Leftarrow T$  si  $T = \rho_i^{-1}(S)$  ou  $T = \lambda_i^{-1}(S)$ ; et  $S \Leftarrow^* T$  pour la clôture transitive de  $\Leftarrow$ . Un *arbre différentiel inverse*, désigné par  $\mathcal{T}^{-1}(S)$ , est construit par sa racine, toujours marquée  $S$ , le sous-arbre  $\mathcal{T}^{-1}(S')$  à gauche et le sous-arbre  $\mathcal{T}^{-1}(S'')$  à droite, où  $S' = \rho_i^{-1}(S)$  pour certaine descente  $i$  et  $S'' = \lambda_i^{-1}(S)$  pour certaine marque  $i$ .

**Exemple 1.10.** Soit  $S = (y_5 y_1 y_4 y_2)$ , l'arbre différentiel inverse,  $\mathcal{T}^{-1}(S)$ , est :

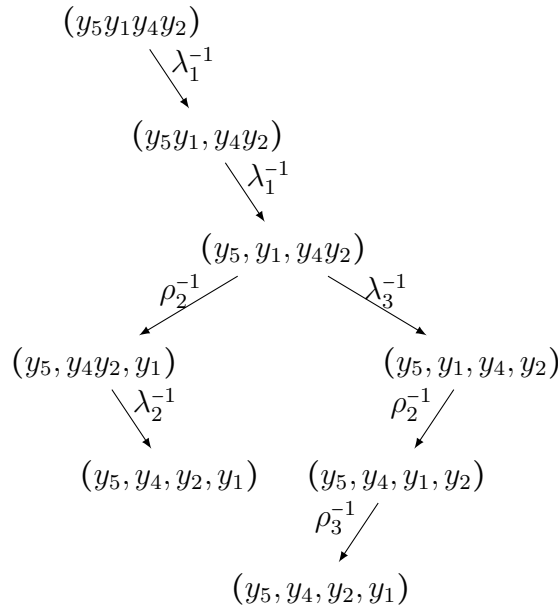


FIGURE 1.2 – L'arbre différentiel inverse  $\mathcal{T}^{-1}(y_5 y_1 y_4 y_2)$ .

*Remarque(s).* i) Dans un arbre différentiel, chaque nœud a toujours deux branches parce que pour chaque montée légale  $i$  de la suite standard  $S$ , on a toujours  $\lambda_i(S)$  et  $\rho_i(S)$ . Cependant un nœud d'un arbre différentiel inverse ne se produit pas toujours en même temps que la descente et la marque.

- ii) A partir d'un nœud de mot de Lyndon  $(y_{s_1} \dots y_{s_k})$ , on a toujours la branche droite jusqu'au nœud des lettres  $(y_{s_1}, \dots, y_{s_k})$ .
- iii) Si on a  $S \Rightarrow T$ , on n'a pas nécessairement  $T \Leftarrow S$ . Par exemple  $\rho_2(y_1, y_4, y_2) = (y_1, y_2, y_4)$ , c'est-à-dire  $(y_1, y_4, y_2) \Rightarrow (y_1, y_2, y_4)$ , pendant que  $(y_1, y_2, y_4) \Leftarrow (y_2, y_1, y_4)$  et  $(y_1, y_2, y_4) \nLeftarrow (y_1, y_2, y_4)$ .

**Lemme 1.22.** Soit  $y_{s_1} \dots y_{s_k}$  un mot de Lyndon. Alors, tous les nœuds de son arbre différentiel inverse forment une suite  $(y_{s_1}u, l_1, \dots, l_n)$ , où  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u \in Y^*$  et il existe un nœud  $(y_{s_1}, l_1, \dots, l_m)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

*Démonstration.* Remarquons d'abord que pour chaque mot de Lyndon  $l \in \mathcal{Lyn}Y \setminus Y$  de factorisation standard  $st(l) = (l_1, l_2)$ , on a  $l_1 < l_2$ ; et que la lettre  $y_{s_1}$  est l'une des plus petites lettres dans le support,  $\{y_{s_1}, \dots, y_{s_k}\}$ , du mot original, on peut déduire de cela que toutes ses racines forment une suite  $(y_{s_1}u, l_1, \dots, l_n)$ . Ensuite, d'après la remarque ci-dessus, on peut conclure que  $(y_{s_1}, l_1, \dots, l_m)$  est une racine de l'arbre différentiel inverse  $\mathcal{T}(y_{s_1} \dots y_{s_k})$ .  $\square$

Pour chaque mot de Lyndon  $y_{s_1} \dots y_{s_k}$ , nous définissons l'ensemble

$$\mathcal{N}(y_{s_1}, \dots, y_{s_k}) = \left\{ (y_{s'_1}, \dots, y_{s'_i}, l_1, \dots, l_n) \mid (y_{s_1} \dots y_{s_k}) \stackrel{*}{\Leftarrow} (y_{s'_1}, \dots, y_{s'_i}, l_1, \dots, l_n), \right. \\ \left. s'_1, \dots, s'_i \in \{s_1, \dots, s_k\}, l_1 \geq \dots \geq l_n \in \mathcal{Lyn}Y \right\}. \quad (1.72)$$

Grâce aux concepts précédents, nous démontrons le résultat suivant.

**Proposition 1.23.** La base  $\{\Sigma_w\}_{w \in Y^*}$  est calculée par la formule de récurrence :

- i) pour le mot vide  $w = 1_{Y^*}$ ,  $\Sigma_w = 1_{Y^*}$ ,
- ii) pour chaque lettre  $y_k \in Y$ ,  $\Sigma_{y_k} = \pi_1^*(y_k)$ ,
- iii) pour chaque mot de Lyndon  $y_{s_1} \dots y_{s_k}$ ,

$$\Sigma_{y_{s_1} \dots y_{s_k}} = \sum_{(y_{s_1}, l_1, \dots, l_n) \in \mathcal{N}(y_{s_1}, \dots, y_{s_k})} y_{s_1} \Sigma_{l_1 \dots l_n} \\ + \sum_{i \geq 2} \frac{q^{i-1}}{i!} \sum_{(y_{s'_1}, \dots, y_{s'_i}, l_1, \dots, l_n) \in \mathcal{N}(y_{s_1}, \dots, y_{s_k})} y_{s'_1 + \dots + s'_i} \Sigma_{l_1 \dots l_n}.$$

En particulier, si ses lettres vont en croissant, i.e.  $y_{s_1} \leq \dots \leq y_{s_k}$ ,

$$\Sigma_{y_{s_1} \dots y_{s_k}} = \sum_{i=1}^k \frac{q^{i-1}}{i!} y_{s_1 + \dots + s_i} \Sigma_{y_{s_{i+1}} \dots y_{s_k}}.$$

- iv) pour le mot général  $w = l_1^{i_1} \dots l_k^{i_k}$ ,  $l_1, \dots, l_k \in \mathcal{Lyn}Y$ ,  $l_1 > \dots > l_k$ ,

$$\Sigma_w = \frac{\sum_{l_1}^{\lfloor q^{i_1} \rfloor} \lfloor q \dots \lfloor q \sum_{l_k}^{\lfloor q^{i_k} \rfloor} \lfloor q^{i_k} \rfloor}{i_1! \dots i_k!}.$$



*Démonstration.* Par dualité,  $i)$  est évident. Pour montrer  $ii)$ , en utilisant la propriété inférieure de cette base (Proposition 1.20), nous supposons que  $\Sigma_{y_k} = y_k + \sum_{\substack{u < y_k \\ (u)=k}} c_u u$ . Supposons que  $u = y_{k_1} \dots y_{s_k}$ ,  $s_1, \dots, s_k \in \mathbb{N}_+$ ,  $k \geq 2$ , alors

$$\begin{aligned} (u) = (y_k) &\Rightarrow s_1 + \dots + s_k = s \\ &\Rightarrow s_1 < s \Rightarrow y_{k_1} > y_k \\ &\Rightarrow u > y_k \text{ (contradictoirement)}. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $\Sigma_{y_k} = y_k = \pi_1^*(y_k)$ .

$iii)$  Tout d'abord, nous remarquons que le résultat est équivalent à l'assertion suivante : pour tout mot  $u \in Y^*$  et toute lettre  $y_s \in Y$ ,

$$\begin{aligned} \langle \Sigma_{y_{s_1} \dots y_{s_k}} \mid y_s u \rangle &= \sum_{(y_{s_1}, l_1, \dots, l_n) \in \mathcal{N}(y_{s_1}, \dots, y_{s_k})} \delta_{s_1, s} \langle \Sigma_{l_1 \dots l_n} \mid u \rangle \\ &+ \sum_{i \geq 2} \frac{q^{i-1}}{i!} \sum_{(y_{s'_1}, \dots, y_{s'_i}, l_1, \dots, l_n) \in \mathcal{N}(y_{s_1}, \dots, y_{s_k})} \delta_{s'_1 + \dots + s'_i, s} \langle \Sigma_{l_1 \dots l_n} \mid u \rangle. \end{aligned}$$

Grâce à la dualité des bases, on peut représenter le mot  $u$  par

$$u = \sum_{w \in Y^*} \langle \Sigma_w \mid u \rangle \Pi_w.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} y_s u &= \sum_{w \in Y^*} \langle \Sigma_w \mid u \rangle \left( \sum_{i \geq 1} \frac{q^{i-1}}{i!} \sum_{s'_1 + \dots + s'_i = s} \Pi_{y_{s'_1}} \dots \Pi_{y_{s'_i}} \right) \Pi_w \\ &= \sum_{w \in Y^*} \langle \Sigma_w \mid u \rangle \sum_{i \geq 1} \frac{q^{i-1}}{i!} \sum_{s'_1 + \dots + s'_i = s} \Pi_{y_{s'_1}} \dots \Pi_{y_{s'_i}} \Pi_w, \\ \Rightarrow \langle \Sigma_{y_{s_1} \dots y_{s_k}} \mid y_s u \rangle &= \sum_{w \in Y^*} \langle \Sigma_w \mid u \rangle \sum_{i \geq 1} \frac{q^{i-1}}{i!} \sum_{s'_1 + \dots + s'_i = s} \langle \Sigma_{y_{s_1} \dots y_{s_k}} \mid \Pi_{y_{s'_1}} \dots \Pi_{y_{s'_i}} \Pi_w \rangle. \end{aligned}$$

Soit  $w = l_1 \dots l_n$ ,  $l_1 \geq \dots \geq l_n$ . Puisque  $S := (y_{s'_1}, \dots, y_{s'_i}, l_1, \dots, l_n)$  est une suite standard, nous obtenons la représentation ci-dessous d'après le lemme 1.21

$$\Pi(S) = \Pi(y_{s'_1}, \dots, y_{s'_i}, l_1, \dots, l_n) = \sum_{S \xrightarrow{*} T} \alpha_T \Pi(T).$$

Par conséquent,

$$\langle \Sigma_{y_{s_1} \dots y_{s_k}} \mid y_s u \rangle = \sum_{\substack{l_1, \dots, l_n \in \mathcal{L}_{yn} Y \\ l_1 \geq \dots \geq l_n}} \langle \Sigma_{l_1 \dots l_n} \mid u \rangle \sum_{i \geq 1} \frac{q^{i-1}}{i!} \sum_{\substack{s'_1 + \dots + s'_i = s \\ (y_{s'_1}, \dots, y_{s'_i}, l_1, \dots, l_n) \xrightarrow{*} T}} \alpha_T \langle \Sigma_{y_1 \dots y_k} \mid \Pi(T) \rangle.$$

Remarquons que les branches  $T$  de l'arbre différentiel  $\mathcal{T}(S)$  sont des compositions décroissantes de mots de Lyndon de longueur  $\geq 2$  sauf les branches de la forme  $T = (l)$ , avec  $l \in \mathcal{Lyn}Y$ . Tellement que  $\langle \Sigma_{y_{s_1} \dots y_{s_k}} | \Pi(T) \rangle \neq 0$  si  $T = (y_{s_1} \dots y_{s_k})$ . En utilisant les projections  $\rho^{-1}$  et  $\lambda^{-1}$ , nous construisons l'arbre différentiel inverse  $\mathcal{T}^{(-1)}(y_{s_1} \dots y_{s_k})$ , puis nous prenons des feuilles sous la forme  $(y_{s'_1}, \dots, y_{s'_i}, l_n, \dots, l_n)$ ,  $i \geq 1$  de laquelle l'arbre différentiel existe une seule feuille  $T = (y_{s_1} \dots y_{s_k})$  et cela donne  $\alpha_T = 1$ . Par conséquent, l'assertion générale est démontrée.

De plus, dans le cas particulier où  $y_{s_1} \leq \dots \leq y_{s_k}$ , l'arbre différentiel  $\mathcal{T}(y_{s_1} \dots y_{s_k})$  contient seulement une seule après application de  $\lambda_i$ . De là,  $\langle \Sigma_{y_{s_1} \dots y_{s_k}} | \Pi_{y_{s'_1}} \dots \Pi_{y_{s'_i}} \Pi_w \rangle \neq 0$  si et seulement si  $y_{s_1} \dots y_{s_k} = y_{s'_1} \dots y_{s'_i} l_1 \dots l_n$ . Cela donne  $y_{s_1} = y_{s'_1}, \dots, y_{s'_i} = y_{s_i}$  et  $y_{s_{i+1}} \dots y_{s_k} = l_1 \dots l_n$ . Alors,

$$\langle \Sigma_{y_{s_1} \dots y_{s_k}} | \Pi_{y_{s'_1}} \dots \Pi_{y_{s'_i}} \Pi_w \rangle = \delta_{s_1 + \dots + s_i, s} \delta_{y_{s_{i+1}} \dots y_{s_k}, w},$$

nous obtenons finalement que

$$\langle \Sigma_{y_{s_1} \dots y_{s_k}} | y_s u \rangle = \frac{q^{i-1}}{i!} \delta_{s_1 + \dots + s_i, s} \langle \Sigma_{y_{s_{i+1}} \dots y_{s_k}} | u \rangle.$$

*iv)* Récrivant  $w$  sous la forme de produit décroissant de mots de Lyndon,  $w = u_1 \dots u_n$ , ( $u_1 \geq \dots \geq u_n$ ), c'est-à-dire  $n = i_1 + \dots + i_k$  et  $u_1 = \dots = u_{i_1} = l_1, \dots, u_{i_{k-1}+1} = \dots = u_n = l_k$ . Pour chaque  $v = v_1 \dots v_m$ ,  $v_1, \dots, v_m \in \mathcal{Lyn}Y$ ,  $v_1 \geq \dots \geq v_m$ , d'après la proposition 1.18 nous avons bien que  $\Pi_{v_1}, \dots, \Pi_{v_m}$  sont primitifs. Grâce à la proposition 1.10, la réduction de

$$\langle \Sigma_{u_1} \boxplus_q \dots \boxplus_q \Sigma_{u_n} | \Pi_{v_1} \dots \Pi_{v_m} \rangle$$

donne zéro si  $n > m$ . Si  $n < m$ , nous avons

$$\langle \Sigma_{u_1} \boxplus_q \dots \boxplus_q \Sigma_{u_n} | \Pi_{v_1} \dots \Pi_{v_m} \rangle = \sum_{\substack{w_1, \dots, w_n \in \mathcal{P} \\ w_1 \boxplus \dots \boxplus w_n = \Pi_{v_1} \dots \Pi_{v_m}}} \langle \Sigma_{u_1} | \mu(w_1) \rangle \dots \langle \Sigma_{u_n} | \mu(w_n) \rangle,$$

où  $\mathcal{P} := \{\Pi_{v_1}, \dots, \Pi_{v_m}\}$  peut être vu comme un nouvel alphabet. Sur le côté droit, chaque terme a au moins un  $j \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $r := |w_j| \geq 2$  (dans l'alphabet  $\mathcal{P}$ ), supposons que  $w_j = \Pi_{v_{j_1}} \dots \Pi_{v_{j_r}} (\in \mathcal{P}^+)$ . Alors,  $\mu(w_j) = \Pi_{v_{j_1}} \dots \Pi_{v_{j_r}}$ , dans  $K\langle Y \rangle$ , forme un produit décroissant. Par suite,  $\langle \Sigma_{u_j} | \mu(w_j) \rangle = 0$ . Pour l'autre cas où  $n = m$ , nous avons aussi que

$$\begin{aligned} \langle \Sigma_{u_1} \boxplus_q \dots \boxplus_q \Sigma_{u_n} | \Pi_v \rangle &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \langle \Sigma_{u_1} | \Pi_{v_{\sigma(1)}} \rangle \dots \langle \Sigma_{u_n} | \Pi_{v_{\sigma(n)}} \rangle \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \delta_{u_1, v_{\sigma(1)}} \dots \delta_{u_n, v_{\sigma(n)}}. \end{aligned}$$

Si  $(u_1, \dots, u_n) \neq (v_1, \dots, v_m)$  et parce que les deux suites sont décroissantes, l'expression disparaît. Au contraire, si  $w = v$ , en effet  $(l_1, \dots, l_1, \dots, l_k, \dots, l_k) = (v_1, \dots, v_m)$ , chaque

$l_j, 1 \leq j \leq k$  répété  $i_j$  fois. L'expression est égale au nombre de permutations,  $i_1! \dots i_k!$ .  
Finalement,

$$\frac{1}{i_1! \dots i_k!} \langle \Sigma_{l_1}^{\boxplus q^{i_1}} \boxplus q \dots \boxplus q \Sigma_{l_k}^{\boxplus q^{i_k}} \mid \Pi_v \rangle = \delta_{u,v}$$

qui achève cette démonstration par dualité. □

**Exemple 1.11.** *i)*

$$\begin{aligned} \Sigma_{y_1} &= y_1, & \Sigma_{y_2} &= y_2, & \Sigma_{y_3} &= y_3, \\ \Sigma_{y_2 y_1} &= y_2 \Sigma_{y_1} + \frac{q}{2} y_3 = y_2 y_1 + \frac{q}{2} y_3. \end{aligned}$$

On peut voir que ces résultats sont les mêmes dans l'exemple 1.8. *ii)* Considérons l'arbre différentiel inverse du mot de Lyndon  $y_3 y_1 y_2$ , voyez FIGURE 1.3. A la racine  $(y_3, y_1, y_2)$ ,

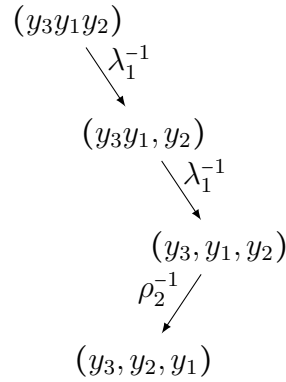


FIGURE 1.3 – L'arbre différentiel inverse  $\mathcal{T}^{-1}(y_3 y_1 y_2)$ .

nous trouvons les termes dans la somme droite de la formule :  $y_3 \Sigma_{y_1 y_2}, \frac{q}{2} y_4 \Sigma_{y_2}, \frac{q^2}{6} y_6$  ; à la racine  $(y_3, y_2, y_1)$ , nous obtenons les termes  $\frac{q}{2} y_5 \Sigma_{y_1}, \frac{q^2}{6} y_6$  (n'ayant pas le terme  $y_3 \Sigma_{y_2 y_1}$  parce que  $y_2 < y_1$ ). C'est-à-dire

$$\begin{aligned} \Sigma_{y_3 y_1 y_2} &= y_3 \Sigma_{y_1 y_2} + \frac{q}{2} (y_4 \Sigma_{y_2} + y_5 \Sigma_{y_1}) + \frac{q^2}{6} (y_6 + y_6) \\ &= y_3 y_1 y_2 + y_3 y_2 y_1 + q(y_3^2 + \frac{1}{2} y_4 y_2 + \frac{1}{2} y_5 y_1) + \frac{q^2}{3} y_6. \end{aligned}$$

*ii)* De même, d'après l'arbre différentiel inverse  $\mathcal{T}^{-1}(y_5 y_1 y_4 y_2)$  dans l'exemple 1.10 : à la racine  $(y_5, y_1, y_4 y_2)$ , nous obtenons les termes  $y_5 \Sigma_{y_1 y_4 y_2}, \frac{q}{2} y_6 \Sigma_{y_4 y_2}$  ; à la racine  $(y_5, y_1, y_4, y_2)$ , nous obtenons les termes  $\frac{q^2}{6} y_{10} \Sigma_{y_2}, \frac{q^3}{24} y_{12}$  ; à la racine  $(y_5, y_4, y_1, y_2)$ , nous

obtenons les termes  $\frac{q}{2}y_9\Sigma_{y_1y_2}$ ,  $\frac{q^2}{6}y_{10}\Sigma_{y_2}$ ,  $\frac{q^3}{24}y_{12}$ ; à la racine  $(y_5, y_4, y_2, y_1)$ , nous obtenons les termes  $\frac{q^2}{6}y_{11}\Sigma_{y_1}$ ,  $\frac{q^3}{24}y_{12}$ . C'est-à-dire

$$\begin{aligned} \Sigma_{y_5y_1y_4y_2} &= y_5\Sigma_{y_1y_4y_2} + \frac{q}{2}(y_6\Sigma_{y_4y_2} + y_9\Sigma_{y_1y_2}) + \frac{q^2}{6}(2y_{10}\Sigma_{y_2} + 2y_{11}\Sigma_{y_1}) + 4\frac{q^3}{24}y_{12} \\ &= y_5y_1y_4y_2 + y_5y_4y_1y_2 + y_5y_4y_2y_1 \\ &+ q(y_5y_4y_3 + y_5y_5y_2 + \frac{1}{2}y_5y_6y_1\frac{1}{2}y_6y_4y_2 + \frac{1}{2}y_9y_1y_2 + \frac{1}{2}y_9y_2y_1 + \frac{1}{2}y_5y_1y_6) \\ &+ q^2(\frac{1}{4}y_6^2 + \frac{1}{3}y_{11}y_1 + \frac{1}{3}y_{10}y_2 + \frac{1}{2}y_9y_3 + \frac{1}{2}y_5y_7) + \frac{1}{6}q^3y_{12}. \end{aligned}$$

*Remarque(s).* La formule de  $\{\Sigma_w\}_{w \in Y^*}$  dans la proposition 1.23 donne une généralisation pour calculer la base MRS. Quand  $q = 0$ , cette formule est exactement la formule de la base  $\{S_w\}_{w \in Y^*}$  dans le cas du produit de mélange,  $\sqcup\sqcup$ , introduite dans [Reu93].

**Théorème 1.24.** *Les familles  $(\Pi_l)_{l \in \mathcal{L}_{yn}Y}$  et  $(\Sigma_l)_{l \in \mathcal{L}_{yn}Y}$  sont respectivement les bases de transcendance des algèbres  $(K\langle Y \rangle, \text{conc})$  et  $(K\langle Y \rangle, \sqcup_q)$ .*

*Démonstration.* Grâce à la dualité entre les deux bases  $(\Sigma_w)_{w \in Y^*}$  et  $(\Pi_w)_{w \in Y^*}$ , nous pouvons représenter un polynôme  $P$  comme suit

$$P = \sum_{w \in Y^*} \langle \Sigma_w | P \rangle \Pi_w = \sum_{w \in Y^*} \langle \Pi_w | P \rangle \Sigma_w. \quad (1.73)$$

La définition de  $\sum_{w \in Y^*} \langle \Pi_w | P \rangle \Sigma_w$  et la proposition 1.23.iv), achèvent la démonstration.  $\square$

Nous avons construit les deux bases en dualité  $(\Pi_w)_{w \in Y^*}$  et  $(\Sigma_w)_{w \in Y^*}$  et deux bases de transcendance  $(\Pi_l)_{l \in \mathcal{L}_{yn}Y}$  et  $(\Sigma_l)_{l \in \mathcal{L}_{yn}Y}$ . De plus, nous en déduisons une représentation de la série diagonale comme un produit infini.

**Théorème 1.25.**

$$\sum_{w \in Y^*} w \otimes w = \sum_{w \in Y^*} \Sigma_w \otimes \Pi_w = \prod_{l \in \mathcal{L}_{yn}Y} \exp(\Sigma_l \otimes \Pi_l). \quad (1.74)$$

*Démonstration.* D'après dualité, nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{w \in Y^*} w \otimes w &= \sum_{w \in Y^*} \left( \sum_{u \in Y^*} \langle \Pi_u | w \rangle \Sigma_u \right) \otimes w \\
&= \sum_{u \in Y^*} \Sigma_u \otimes \left( \sum_{w \in Y^*} \langle \Pi_u | w \rangle w \right) \\
&= \sum_{u \in Y^*} \Sigma_u \otimes \Pi_u \\
&= \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{l_1 > \dots > l_k \\ i_1, \dots, i_k \geq 1}} \frac{\Sigma_{l_1}^{\boxplus q^{i_1}} \boxplus q \dots \boxplus q \Sigma_{l_k}^{\boxplus q^{i_k}}}{i_1! \dots i_k!} \otimes \Pi_{l_1}^{i_1} \dots \Pi_{l_k}^{i_k} \\
&= \prod_{l \in \mathcal{L}ynY} \sum_{i \geq 0} \frac{\Sigma_l^{\boxplus q^i}}{i!} \otimes \Pi_l^i \\
&= \prod_{l \in \mathcal{L}ynY} \exp(\Sigma_l \otimes \Pi_l).
\end{aligned}$$

□

Cette formule peut être utilisée pour proposer un système de coordonnées locales sur groupe de Hausdorff i.e. le groupe des séries dans  $K\langle\langle Y \rangle\rangle$  qui sont de type groupe pour  $\Delta_{\boxplus q}$ . Plus précisément, on a le corollaire suivant.

**Corollaire 1.26.** *Soit  $S$  une série de type groupe, alors*

$$S = \sum_{w \in Y^*} \langle S | \Sigma_w \rangle \Pi_w = \prod_{l \in \mathcal{L}ynY} \exp(\langle S | \Sigma_l \rangle \Pi_l). \quad (1.75)$$

*Démonstration.* Grâce au lemme 1.8.2 on a, pour tous les mots  $u, v \in Y^*$ , que  $\langle S | u \boxplus q v \rangle = \langle S | u \rangle \langle S | v \rangle$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned}
S = \sum_{w \in Y^*} \langle S | w \rangle w &= (S \otimes id) \sum_{w \in Y^*} w \otimes w \\
&= (S \otimes id) \sum_{w \in Y^*} \Sigma_w \otimes \Pi_w = \sum_{w \in Y^*} \langle S | \Sigma_w \rangle \Pi_w \\
&= (S \otimes id) \prod_{l \in \mathcal{L}ynY} \exp(\Sigma_l \otimes \Pi_l) = \prod_{l \in \mathcal{L}ynY} \exp(\langle S | \Sigma_l \rangle \Pi_l).
\end{aligned}$$

□

### 1.3.4. Représentations des polynômes sur les bases

L'objectif de cette sous-section est de construire une manière de représenter d'un polynôme dans  $\mathbb{Q}\langle Y \rangle$  dans les bases  $\{\Pi_w\}_{w \in Y^*}$  ou  $\{\Sigma_w\}_{w \in Y^*}$ .

Nous nous rappelons que les bases  $\{\Pi_w\}_{w \in Y^*}$  ;  $\{\Sigma_w\}_{w \in Y^*}$  sont homogènes, en poids, la première étant triangulaire supérieure, pendant que la deuxième est triangulaire inférieure. Sans perte de généralité, nous supposons que  $P \in \mathbb{Q}\langle Y \rangle$  est un polynôme homogène de poids  $n$ , nous allons maintenant construire un algorithme pour représenter  $P$  en termes de  $\{\Sigma_w\}_{w \in Y^*}$  comme suivant.

**Algorithme 1. ENTREE :** Un polynôme homogène  $P$  de poids  $n$ .

**SORTIE :** La représentation de  $P$  dans la base  $\{\Sigma_w\}_{w \in Y^*}$ .

**Etape 1.** En choisissant le terme principal, dit  $\lambda_{w_1} w_1$ ,<sup>26</sup> de  $P$ , nous suivions la proposition 1.20 et la proposition 1.23 pour remplacer le mot dans le terme principal par

$$w_1 = \Sigma_{w_1} + \sum_{v < w_1, (v)=n} \alpha_v v ,$$

cela donne

$$P = \lambda_{w_1} \Sigma_{w_1} + \sum_{v < w_1, (v)=n} \beta_v v . \quad (1.76)$$

**Etape 2.** En assignant la somme  $\sum_{v < w_1, (v)=n} \beta_v v$  à  $P$  dans (1.76) et répétant l'étape 1. jusqu'au dernier monôme associé le plus petit mot de poids  $n$ , c'est  $y_n (= \Sigma_{y_n})$ . Enfin, nous allons obtenir la représentation du polynôme original comme suit

$$P = \sum_{v \leq w_1, (v)=n} \lambda_v \Sigma_v . \quad (1.77)$$

**Exemple 1.12.** i) Etant donnée un polynôme  $P := 2y_1y_2 - \frac{1}{2}y_3$ . Nous effectuons les étapes suivantes :

Etape 1. Comme  $\Sigma_{y_1y_2} = y_1y_2 + y_2y_1 + y_3$ , nous remplaçons  $y_1y_2$  par le polynôme  $\Sigma_{y_1y_2}$  dans  $P$

$$P = 2\Sigma_{y_1y_2} - 2y_2y_1 - \frac{5}{2}y_3.$$

Etape 2.

- Comme  $\Sigma_{y_2y_1} = y_2y_1 + \frac{1}{2}y_3$ , nous remplaçons  $y_2y_1$  par le polynôme  $\Sigma_{y_2y_1}$  dans  $P$

$$P = 2\Sigma_{y_1y_2} - 2\Sigma_{y_2y_1} - \frac{3}{2}y_3.$$

- Comme  $y_3 = \Sigma_{y_3}$ , nous obtenons finalement

$$P = 2\Sigma_{y_1y_2} - 2\Sigma_{y_2y_1} - \frac{3}{2}\Sigma_{y_3}.$$

---

26. C'est le terme associé avec le plus grand mot dans le support de  $P$ .

Nous avons également la représentation de  $P$  par la base  $\{\Pi_w\}_{w \in Y^*}$ ,

$$P = \frac{-1}{2}\Pi_{y_3} - \frac{1}{4}\Pi_{y_2y_1} + \frac{3}{2}\Pi_{y_1y_2} + \frac{11}{12}\Pi_{y_1^3}.$$

ii) Similairement, on a les représentations

$$\begin{aligned} y_3 &= \Sigma_{y_3} \\ &= \Pi_{y_3} + \frac{1}{2}\Pi_{y_2y_1} + \Pi_{y_1y_2} + \frac{1}{6}\Pi_{y_1^3}, \\ y_3y_1y_2 &= \Sigma_{y_3y_1y_2} - \Sigma_{y_3y_2y_1} - \frac{1}{2}\Sigma_{y_3^2} - \frac{1}{2}\Sigma_{y_4y_2} + \frac{1}{3}\Sigma_{y_6} \\ &= \Pi_{y_3y_1y_2} + \frac{1}{2}\Pi_{y_3y_1^3} + \Pi_{y_2y_3y_1} + \frac{1}{2}\Pi_{y_2y_1^2y_2} + \frac{1}{4}\Pi_{y_2y_1^4} + \Pi_{y_1y_3y_2} + \frac{3}{2}\Pi_{y_1y_3y_1^2} \\ &+ \Pi_{y_1y_2y_3} + \frac{3}{2}\Pi_{y_1y_2y_1y_2} + \frac{5}{4}\Pi_{y_1y_2y_1^3} + \frac{3}{2}\Pi_{y_1^2y_3y_1} + \Pi_{y_1^2y_2^2} + \frac{9}{4}\Pi_{y_1^2y_2y_1^2} \\ &+ \frac{1}{2}\Pi_{y_1^3y_3} + \frac{7}{4}\Pi_{y_1^3y_2y_1} + \frac{2}{3}\Pi_{y_1^4y_2} + \frac{1}{12}\Pi_{y_1^6}. \end{aligned}$$

Par conséquent, en suivant cet algorithme, nous pouvons déduire.

**Corollaire 1.27.** *Pour chaque  $w \in Y^*$ , on peut représenter*

$$\begin{aligned} w &= \Pi_w + \sum_{v > w, (v)=(w)} \beta_v^1 \Pi_v \\ &= \Sigma_w + \sum_{v < w, (v)=(w)} \beta_v^2 \Sigma_v. \end{aligned}$$

# Chapitre 2

## Développement asymptotique des sommes harmoniques

### Sommaire

---

<b>2.1. Quelques concepts fondamentaux</b> . . . . .	<b>64</b>
2.1.1. Définition des séries génératrices . . . . .	64
2.1.2. Formule d'Euler-Maclaurin . . . . .	65
<b>2.2. Somme harmonique</b> . . . . .	<b>67</b>
2.2.1. Fonctions symétriques . . . . .	67
2.2.2. Somme harmonique multiple . . . . .	69
<b>2.3. Développement asymptotique des polylogarithmes</b> . . . . .	<b>71</b>
2.3.1. Définition des polylogarithmes . . . . .	71
2.3.2. Structure des polylogarithmes . . . . .	72
<b>2.4. Développement asymptotique des sommes harmoniques</b> . . . . .	<b>83</b>
2.4.1. En suivant la série génératrice . . . . .	83
2.4.2. En suivant la formule d'Euler-MacLaurin . . . . .	85

---

On a vu, à la fin du chapitre 1, la représentation des séries de type groupe par les coordonnées locales dans les structures algébriques de quasi-mélange. Nous allons appliquer cette propriété pour des représentations des séries génératrices des polylogarithmes et des sommes harmoniques indexées par les bases de transcendance. Ceci nous permet de déterminer les développements asymptotiques des polylogarithmes et ensuite des sommes harmoniques sur des échelles classiques. Nous présentons aussi, dans ce chapitre, une autre méthode pour obtenir ces développements grâce à par un algorithme qui utilise la formule d'Euler Maclaurin.



## 2.1. Quelques concepts fondamentaux

Dans les deux premiers paragraphes de cette section, nous rappelons quelques concepts fondamentaux en combinatoire et en analyse (séries génératrices et formule d'Euler Mac-Laurin) <sup>1</sup>.

### 2.1.1. Définition des séries génératrices

Une *série génératrice* (appelée autrefois *fonction génératrice*, terminologie encore utilisée en particulier dans le contexte de la théorie des probabilités) est une série formelle dont les coefficients codent une suite  $a_n$  de nombres (ou plus généralement de polynôme, etc.). On dit que la série est associée à la suite.

Il existe plusieurs sortes de séries génératrices, comme les séries génératrices exponentielles, les séries de Lambert, les séries génératrices de suites de polynômes, etc. Par exemple, étant donné une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,

- i) la série génératrice ordinaire de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est (on ne se préoccupe a priori pas de leur domaine de convergence)

$$G(a_n; x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (2.1)$$

Cette définition se généralise aisément à des suites à plusieurs indices. Par exemple, pour la suite  $a_{m,n}$ , où  $n$  et  $m$  sont des entiers naturels), la série génératrice est

$$G(a_{m,n}; x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n} x^m y^n. \quad (2.2)$$

- ii) la série génératrice exponentielle associée à la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est

$$EG(a_n; x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}. \quad (2.3)$$

- iii) les séries génératrices de suites de polynômes qui s'étendent à d'autres suites d'objets. Ainsi, la série génératrice (exponentielle) des *polynômes de Bernoulli* est

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{te^{xt}}{e^t - 1}. \quad (2.4)$$

---

1. Tels qu'on peut les trouver dans les textes standards (par exemple sur Wikipedia).

On peut voir que les premiers polynômes de Bernoulli sont :

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1, \\ B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\ B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, \\ B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \\ B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

### 2.1.2. Formule d'Euler-Maclaurin

La formule d'Euler-Maclaurin (appelée parfois formule sommatoire d'Euler) est une relation entre sommes discrètes et intégrales. Elle fut découverte indépendamment, aux alentours de 1735, par le mathématicien suisse Leonhard Euler (pour accélérer le calcul de limites de séries lentement convergentes) et par l'écossais Colin Maclaurin (pour calculer des valeurs approchées d'intégrales).

Soient  $p$  et  $q$  deux entiers relatifs ( $p < q$ ),  $f$  une fonction continue complexe définie sur  $[p, q]$ . L'énoncé qui suit exprime la somme

$$\frac{f(p) + f(q)}{2} + \sum_{i=p+1}^{q-1} f(i) = \frac{f(p)}{2} + f(p+1) + f(p+2) + \dots + f(q-1) + \frac{f(q)}{2}. \quad (2.5)$$

Pour une fonction  $f$   $2k$  fois continûment dérivable sur le segment  $[p, q]$  (avec  $k \geq 0$ ), la formule d'Euler-Maclaurin s'énonce ainsi :

$$\frac{f(p) + f(q)}{2} + \sum_{i=p+1}^{q-1} f(i) = \int_p^q f(x)dx + \sum_{j=1}^k \frac{b_{2j}}{(2j)!} (f^{(2j-1)}(q) - f^{(2j-1)}(p)) + R_k. \quad (2.6)$$

Si  $f$  est un polynôme de degré  $d$  et si on applique la formule sommatoire avec  $p = 0, q = n$  et  $k$  choisi tel que  $d \leq 2k + 1$ , le reste  $R_k$  disparaît.

**Exemple 2.1.** En considérant la fonction  $f(x) = x^3$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a

$$\sum_{i=0}^n i^3 = \int_0^n x^3 dx + \frac{0^3 + n^3}{2} + \frac{1}{6} \frac{3n^2 - 0}{2!} = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Pour exprimer le reste  $R_k$ , on utilise les polynômes de Bernoulli définis par (2.4). Les nombres  $b_k = B_k(0) = B_k(1), k > 1$  sont appelés *les nombres de Bernoulli* qui sont

---

2. Parfois on utilise la notation  $B_k$  s'il n'y a pas de confusion avec les polynômes de Bernoulli ou les nombres de Bell.

nuls au rang impair :

$$\begin{aligned} B_{2k+1}(0) &= B_{2k+1}(1) = b_{2k+1} = 0, \quad \forall k \geq 1, \\ B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) &= 0, \quad k \geq 0, \\ B_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2^{2k-1}} - 1\right) b_{2k}, \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

L'expression du reste  $R_k$  pour une fonction complexe  $2k$  fois continûment dérivable sur le segment  $[p, q]$  (avec  $k \geq 1$ ) est la suivante<sup>3</sup>

$$R_k = -\frac{1}{(2k)!} \int_p^q f^{(2k)}(x) B_{2k}(x - [x]) dx, \quad (2.7)$$

et si  $f$  est  $2k + 1$  fois continûment dérivable sur le segment  $[p, q]$  (avec  $k \geq 0$ ), le reste  $R_k$  s'exprime comme suit :

$$R_k = -\frac{1}{(2k+1)!} \int_p^q f^{(2k+1)}(x) B_{2k+1}(x - [x]) dx. \quad (2.8)$$

Si  $f$  est une fonction réelle  $2k + 2$  fois continûment dérivable sur le segment  $[p, q]$  (avec  $k \geq 0$ ), le reste peut s'écrire des manières suivantes :

$$R_k = -\frac{1}{(2k+2)!} \int_p^q f^{(2k+2)}(x) (B_{2k+2}(x - [x]) - b_{2k+2}) dx \quad (2.9)$$

$$= \frac{p-q}{(2k+2)!} b_{2k+2} f^{2k+2}(\psi), \quad \text{avec } \psi \in (p, q). \quad (2.10)$$

Remarquons que le reste  $R_k$  est nul pour tout polynôme de degré au plus  $2k + 1$ .

**Exemple 2.2.** En appliquant la formule d'Euler Maclaurin à la fonction  $f(x) = \frac{1}{x}$  et  $f(x) = \frac{1}{x^r}$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} &= \log N + \gamma - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{b_k}{k} \frac{1}{N^k} + o_p^{(\infty)}\left(\frac{1}{N^{p-1}}\right), \\ \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^r} &= \zeta(r) - \sum_{k=r-1}^{p-1} \frac{b_{k-r+1}}{k-r+1} \binom{k-1}{r-1} \frac{1}{N^k} + o_p^{(\infty)}\left(\frac{1}{N^{p-1}}\right), \end{aligned}$$

où  $\gamma, \zeta(r)$  sont respectivement la constante d'Euler et le polyzêta de  $r$ .

---

3.  $B_k(x - [x])$  en est une version périodique, de période 1, égale à  $B_k(x)$  si  $0 < x < 1$ .

## 2.2. Somme harmonique

### 2.2.1. Fonctions symétriques

Une *fonction symétrique* est une fonction invariante par les permutations de ses variables. Le cas le plus fréquent est celui d'un polynôme symétrique, c'est-à-dire d'un polynôme qui est une fonction symétrique. Par exemple, les fonctions  $f(t_1, t_2) = t_1 + t_2$  et  $f(t_1, t_2) = t_1 t_2$  sont symétriques. Le discriminant en trois variables  $f(t_1, t_2, t_3) = (t_1 - t_2)^2 (t_1 - t_3)^2 (t_2 - t_3)^2$  est aussi symétrique. On parle alors de fonctions symétriques plutôt que de *polynômes symétriques*. Soient  $n$  un entier fixé et  $T = \{t_1, \dots, t_n\}, t_1 < \dots < t_n$  un alphabet totalement ordonné. Considérons l'anneau  $\mathbb{k}[T]$  des polynômes en les variables indépendantes  $t_1, \dots, t_n$ . Le groupe symétrique agit naturellement sur  $\mathbb{k}[T]$  par les permutations des variables

$$(\sigma f)(t_1, \dots, t_n) = f(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)}). \quad (2.11)$$

La transposition élémentaire  $\sigma_i$  est donc l'unique morphisme d'algèbre qui échange  $t_i$  et  $t_{i+1}$  en fixant les autres variables. Un polynôme  $f$  est dit symétrique s'il est invariant par l'échange des variables, c'est-à-dire si

$$\sigma f = f \quad \text{pour tout } \sigma \in \mathfrak{S}_n. \quad (2.12)$$

Il est souvent pratique de considérer un alphabet  $T$  infini. Ceci est possible car les morphismes de restriction d'alphabet

$$\rho_{m,n} := f(t_1, \dots, t_m) \mapsto f(t_1, \dots, t_n, 0, \dots, 0) \quad (2.13)$$

sont compatibles, c'est-à-dire  $\rho_{m,p} = \rho_{n,p} \circ \rho_{m,n}$  pour  $m > n > p$ . Les fonctions symétriques sont donc des sommes formelles de monômes, de degré fini, invariantes par l'échange des variables. On note  $\text{Sym}$  l'algèbre des fonctions symétriques et  $\text{Sym}(T)$  l'algèbre des polynômes symétriques sur l'alphabet  $T$ .

Nous allons maintenant prolonger les notations précédentes à un ensemble infini de variables  $T = \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}_+}$ . Nous définissons les fonctions symétriques (modifiées)  $\lambda_r^{(k)}$  et les sommes de puissances  $\psi_r^{(k)}$  vues comme les coefficients des fonctions génératrices

$$\lambda^{(k)}(\underline{t} | z) := \sum_{r \geq 0} \lambda_r^{(k)}(\underline{t}) z^r = \prod_{n \geq 1} (1 + t_n^k z), \quad (2.14)$$

$$\psi^{(k)}(\underline{t} | z) := \sum_{r \geq 1} \psi_r^{(k)}(\underline{t}) z^{r-1} = \sum_{n \geq 1} \frac{t_n^k}{1 - t_n^k z}. \quad (2.15)$$

De la même manière, ces fonctions ont les formes explicites

$$\lambda_r^{(k)}(\underline{t}) = \sum_{n_1 > \dots > n_r \geq 1} t_{n_1}^k \dots t_{n_r}^k \quad \text{et} \quad \psi_r^{(k)}(\underline{t}) = \sum_{n \geq 1} t_n^{kr}. \quad (2.16)$$

*Démonstration.* Il est facile de trouver la formule de  $\lambda_r^{(k)}$ . Pour  $\psi_r^{(k)}$ , on peut l'obtenir par

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{t_n^k}{1 - t_n^k z} &= \sum_{n \geq 1} t_n^k \sum_{r \geq 0} (t_n^k z)^r \\ &= \sum_{r \geq 0} \left( \sum_{n \geq 1} t_n^{k(r+1)} \right) z^r \\ &= \sum_{r \geq 1} \left( \sum_{n \geq 1} t_n^{kr} \right) z^{r-1}. \end{aligned}$$

□

De plus, les susdites fonction satisfont à l'identité de Newton

$$\frac{d}{dz} \log \lambda^{(k)}(\underline{t} | z) = \psi^{(k)}(\underline{t} | -z). \quad (2.17)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \log \lambda^{(k)}(\underline{t} | z) &= \frac{d}{dz} \sum_{n \geq 1} \log(1 + t_n^k z) \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{d}{dz} \log(1 + t_n^k z) = \sum_{n \geq 1} \frac{t_n^k}{1 + t_n^k z} \\ &= \psi^{(k)}(\underline{t} | -z). \end{aligned}$$

□

### Polynômes quasi-symétriques

Continuons avec l'alphabet  $T$ . Si  $T$  est de cardinal  $n$ , un polynôme  $f \in \mathbb{C}[T]$  est dit *quasi-symétrique* si pour tous  $r \geq n$  et  $i_1, \dots, i_r \in \mathbb{N}$ , le coefficient de  $t_{j_1}^{i_1} \dots t_{j_r}^{i_r}$  est invariant pour tous  $j_1 < \dots < j_r$ .

**Exemple 2.3.** Une polynôme quasi-symétrique en quatre variables est le polynôme

$$t_1^2 t_2 + t_1^2 t_3 + t_2^2 t_3.$$

Le polynôme symétrique le plus simple contenant ce polynôme est

$$t_1^2 t_2 + t_1 t_2^2 + t_1^2 t_3 + t_1 t_3^2 + t_2^2 t_3 + t_2 t_3^2.$$

Comme pour les fonctions symétriques, on fait tendre le nombre de variables vers l'infini, en prenant la limite projective dans la catégorie des algèbres graduées et on obtient une algèbre appelée algèbre des fonctions quasi-symétriques notée par  $\text{QSym}$ . Cette algèbre est graduée, elle se décompose comme suit :

$$\text{QSym} = \bigoplus_{n \geq 0} \text{QSym}_n, \quad (2.18)$$

où  $\text{QSym}_n$  est  $\mathbb{R}$ -espace vectorielle engendré par les fonctions quasi-symétriques homogènes de degré  $n$  (*i.e.* de monômes de  $n$  variables).

Nous allons maintenant considérer l'alphabet  $Y = \{y_k\}_{k \in \mathbb{N}_+}$ . Pour chaque mot  $w = y_{s_1} \dots y_{s_r} \in Y^*$ , la fonction quasi-symétrique monômiale est défini par

$$F_w(\underline{t}) := \sum_{n_1 > \dots > n_r \geq 1} t_{n_1}^{s_1} \dots t_{n_r}^{s_r}. \quad (2.19)$$

La fonction est une généralisation de la fonction symétrique  $\lambda_r^{(k)}$ . Plus précisément, on a  $F_{y_k^r} = \lambda_r^{(k)}$  et en particulier, on a  $F_{y_1^r} = \lambda_r^{(1)}$ ,  $F_{y_r} = \psi_r^{(1)}$ . De plus, l'intégration de l'équation (2.17) nous amène à la relation suivante

$$\sum_{r \geq 0} F_{y_1^r} z^r = \exp\left(-\sum_{r \geq 1} F_{y_r} \frac{(-z)^r}{r}\right). \quad (2.20)$$

Il est clair que les fonctions  $F_w$ ,  $w \in Y^*$  sont linéairement indépendantes, et plus précisément que ces fonctions quasi-symétriques monômiales forment une base de l'espace des fonctions quasi-symétriques  $\text{QSym}$ . En remplaçant les  $t_n$  par  $\frac{1}{n}$  si  $1 \leq n \leq N$  et par 0 si  $n > N$  ; la variable  $z$  par  $y_1$ , on obtient [Cos08]

$$\sum_{r \geq 0} H_{y_1^r} y_1^r = \exp\left(-\sum_{r \geq 1} H_{y_r} \frac{(-y_1)^r}{r}\right). \quad (2.21)$$

### 2.2.2. Somme harmonique multiple

De la même que pour les polylogarithmes, une somme harmonique est définie pour chaque composition d'entiers positifs  $s = (s_1, \dots, s_r)$  et une paramètre  $N$  par

$$H_s(N) := \sum_{N \geq n_1 > \dots > n_r \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}}. \quad (2.22)$$

**Exemple 2.4.**

$$\begin{aligned}
H_1(N) &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N}, \\
H_{(2,1)}(N) &= \sum_{N \geq n_1 > n_2 \geq 1} \frac{1}{n_1^2 n_2} \\
&= \frac{1}{2^2 \cdot 1} + \left( \frac{1}{3^2 \cdot 2} + \frac{1}{3^2 \cdot 1} \right) + \left( \frac{1}{4^2 \cdot 3} + \frac{1}{4^2 \cdot 2} + \frac{1}{4^2 \cdot 1} \right) + \dots \\
&\quad + \left( \frac{1}{N^2(N-1)} + \frac{1}{N^2(N-2)} + \dots + \frac{1}{N^2 \cdot 1} \right).
\end{aligned}$$

Pour toute composition  $s = (s_1, s_2, \dots, s_r)$ , nous avons les remarques suivantes :

i)

$$H_s(N) = \sum_{n_1=r}^N \frac{H_{(s_2, \dots, s_r)}(n_1 - 1)}{n_1}. \quad (2.23)$$

En effet,

$$\begin{aligned}
H_s(N) &= \sum_{N \geq n_1 > \dots > n_r \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}} \\
&= \sum_{n_1=r}^N \frac{1}{n_1^{s_1}} \sum_{n_1-1 \geq n_2 > \dots > n_r \geq 1} \frac{1}{n_2^{s_2} \dots n_r^{s_r}} \\
&= \sum_{n_1=r}^N \frac{H_{(s_2, \dots, s_r)}(n_1 - 1)}{n_1^{s_1}}.
\end{aligned}$$

ii) Si  $s_1 > 1$ , il existe la limite de  $H_s(N)$  quand  $N$  tend vers l'infini, de plus

$$\lim_{N \rightarrow \infty} H_s(N) = \zeta(s). \quad (2.24)$$

Nous allons utiliser le codage des compositions  $s = (s_1, \dots, s_r)$  par les mots  $y_{s_1} \dots y_{s_r}$  dans le monoïde  $Y^*$  de l'alphabet  $Y = \{y_k\}_{k \in \mathbb{N}_+}$ , on peut alors définir  $H_w(N)$  pour tout mot  $w \in Y^*$  avec la convention que  $H_{1_{Y^*}}(N) = 1$ . On a vu dans l'exemple 2.2 les développements asymptotiques des sommes harmoniques simples. Continuons ce travail, nous allons étudier des développements asymptotiques des sommes harmoniques en multi-indice indexées par des mots. Tout d'abord, on rappelle la propriété importante suivante. La théorie des fonctions quasi-symétriques montre que les sommes harmonique vérifient la relation de quasi-mélange [Hof97], c'est-à-dire, pour tous mots  $w_1, w_2 \in Y^*$ , on a

$$H_{w_1}(N)H_{w_2}(N) = H_{w_1 \boxplus w_2}(N). \quad (2.25)$$

Par exemple

$$\sum_{m=1}^N \frac{1}{m^{s_1}} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{s_2}} = \sum_{N \geq m > n \geq 1} \frac{1}{m^{s_1} n^{s_2}} + \sum_{N \geq n > m \geq 1} \frac{1}{m^{s_1} n^{s_2}} + \sum_{m=n=1}^N \frac{1}{m^{s_1} n^{s_2}},$$

qui correspond  $H_{y_{s_1}}(N)H_{y_{s_2}}(N) = H_{y_{s_1}y_{s_2}}(N) + H_{y_{s_2}y_{s_1}}(N) + H_{y_{s_1+s_2}}(N)$ . Par conséquent, cette propriété nous permet de définir un morphisme des sommes harmoniques vers l'algèbre de quasi-mélange. En voyant  $H_w$  comme fonction de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ , on a la proposition suivante [Cos+05b].

**Proposition 2.1.** *L'application  $H : w \mapsto H_w$  est un isomorphisme de  $(\mathbb{Q}\langle Y \rangle, \boxplus, 1_{Y^*})$  dans l'algèbre des sommes harmoniques avec le produit standard, désigné par  $(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}, \cdot, 1)$ .*

Comme l'ensemble des mots de Lyndon génère librement l'algèbre de quasi-mélange, on a alors  $\mathcal{H}_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}[H_l, l \in \mathcal{L}y n Y]$ . De plus, en utilisant représentation de la série diagonale  $\mathcal{D}_Y$  dans le théorème 1.25, nous pouvons factoriser la série génératrice des sommes harmoniques comme suit.

**Proposition 2.2.**

$$H := \sum_{w \in Y^*} H_w w = \prod_{l \in \mathcal{L}y n Y} \exp(H_{\Sigma_l} \Pi_l) = e^{H_{y_1} y_1} \prod_{l \in \mathcal{L}y n Y \setminus \{y_1\}} e^{H_{\Sigma_l} \Pi_l}. \quad (2.26)$$

## 2.3. Développement asymptotique des polylogarithmes

### 2.3.1. Définition des polylogarithmes

Pour tout multi-indice  $s = (s_1, \dots, s_r)$ , formé d'entiers positifs, un *polylogarithme* est défini dans le disque unité ouvert du plan complexe, désigné par  $\mathbb{D}$ , par

$$\text{Li}_s(z) := \sum_{n_1 > \dots > n_r \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}}, \quad |z| < 1. \quad (2.27)$$

En considérant les polylogarithmes indexés par les mots engendrés par l'alphabet  $X = \{x_0, x_1\}$ , nous allons coder chaque multi-indice  $s = (s_1, \dots, s_r)$  par un mot unique  $w = x_0^{s_1-1} x_1 \dots x_0^{s_r-1} x_1$ . Chaque fonction  $\text{Li}_s$ , qui est désormais notée  $\text{Li}_w$ , peut s'obtenir, grâce aux remarques ci-dessus, par l'intégrale itérée [Zag94 ; Min+00b] :

$$\text{Li}_{x_1}(z) = \int_0^z \omega_1 = -\log(1-z), \quad (2.28)$$

$$\text{Li}_{x_i w}(z) = \int_0^z \omega_i \text{Li}_w, \quad \text{avec } i \in \{0, 1\}, |x_i w|_{x_1} \neq 0, \quad (2.29)$$



où

$$\omega_0 := \frac{dz}{z}, \quad \omega_1 := \frac{dz}{1-z} \quad (2.30)$$

sont des formes différentielles.

*Remarque(s).* Ceci permet alors de prolonger analytiquement les  $\text{Li}_w$  à tout  $\Omega$ .

Afin de compléter cette définition sur tout  $X^*$  en utilisant la formule (2.29), on prend la convention que  $\text{Li}_{1_{X^*}}(z) = 1$  et pour tout  $n > 0$ ,

$$\text{Li}_{x_0^n}(z) = \int_1^z \omega_0 \text{Li}_{x_0^{n-1}} = \frac{\log^n(z)}{n!}. \quad (2.31)$$

Par exemple

$$\text{Li}_{x_1 x_0^2}(z) = \int_0^z \omega_1 \text{Li}_{x_0^2} = \int_0^z \frac{dt}{1-t} \frac{\log^2(t)}{2!},$$

ou plus généralement,

$$\begin{aligned} \text{Li}_{w x_1 x_0^n}(z) &= \int_0^z \text{Li}_w(s_{n+1}) \omega_1 \int_1^{s_{n+1}} \omega_0 \cdots \int_1^{s_2} \omega_0 \\ &= \int_0^z \text{Li}_w(s_{n-1}) \frac{ds_{n+1}}{1-s_{n+1}} \int_1^{s_{n+1}} \frac{ds_n}{s_n} \cdots \int_1^{s_2} \frac{ds_1}{s_1}. \end{aligned}$$

Alors, les définitions précédentes nous permettent d'introduire la *série génératrice* non commutative des polylogarithmes

$$L(z) = \sum_{w \in X^*} \text{Li}_w(z) w. \quad (2.32)$$

### 2.3.2. Structure des polylogarithmes

Observons que

$$L(z) = 1 + \sum_{u \in X^*} \text{Li}_{x_0 u}(z) x_0 u + \sum_{v \in X^*} \text{Li}_{x_1 v}(z) x_1 v,$$

grâce aux formules (2.29) et (2.31), cette série satisfait l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dz} L(z) = \left( \frac{x_0}{z} + \frac{x_1}{1-z} \right) L(z), \quad (2.33)$$

avec la condition initiale [Min+00b ; Min+99]

$$L(\epsilon) = e^{x_0 \log \epsilon} + O(\sqrt{\epsilon}), \quad \text{si } \epsilon \rightarrow 0^+. \quad (2.34)$$

Par conséquent, l'étude de la monodromie des polylogarithmes (prolongement analytique sur un chemin fermé) fournit un autre moyen pour calculer les relations entre polyzêtas que nous allons étudier dans le chapitre suivant. La série de Chen  $S_{z_0 \rightsquigarrow z}$  est par définition l'unique solution, sur le chemin  $z_0 \rightsquigarrow z$  de l'équation 3.2 vérifiant la condition initiale  $S(z_0) = 1$ . On peut prolonger analytiquement la série  $L$  le long et au voisinage d'un chemin. Alors les séries  $L(z)$  et  $S_{z_0 \rightsquigarrow z}L(z)$  satisfont l'équation différentielle (2.33) et prennent la même valeur en  $z = z_0$ . Ceci prouve que :

**Proposition 2.3.** *Pour tout chemin  $z_0 \rightsquigarrow z$  dans  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ , on a [Che71 ; Car87 ; Min+00b]*

$$L(z) = S_{z_0 \rightsquigarrow z}L(z_0). \quad (2.35)$$

En d'autres termes, d'après la condition limite (2.34), nous déduisons<sup>4</sup>

$$L(z) \sim e^{x_0 \log z} \quad \text{si } z \longrightarrow 0^+. \quad (2.36)$$

Cette condition nous permet de montrer que la série génératrice  $L(z)$  est une exponentielle de Lie [Reu93 ; Den+11 ; Min+00b]. De plus, suivant le théorème de Ree [Ree58], on en déduit que

$$\forall u, v \in X^*, \quad \text{Li}_{u \sqcup v} = \text{Li}_u \text{Li}_v. \quad (2.37)$$

Ceci nous permet de prolonger  $L$  comme morphisme :

**Théorème 2.4** ([Min+00b]). *Soit  $\mathcal{C} := \mathbb{C} \left[ z, \frac{1}{z}, \frac{1}{1-z} \right]$ . L'application  $L : w \longmapsto \text{Li}_w$  est un isomorphisme de  $(\mathcal{C}\langle X \rangle, \sqcup, 1_{X^*})$  dans  $(\mathcal{C}[\{\text{Li}_w\}_{w \in X^*}], \cdot, 1_\Omega)$ .*

*Remarque(s).* On trouvera une autre preuve de l'indépendance linéaire des  $\{\text{Li}_w\}_{w \in X^*}$  dans [Den+11]. Cette méthode permet également de montrer que ces fonctions sont linéairement indépendantes sur les (germes de) fractions rationnelles et d'autres corps de fonctions.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, la *série double*  $\mathcal{D}_Y$  sur l'alphabet  $Y$  avec le produit de quasi-mélange  $q$ -déformé (le  $q$ -stuffle) à gauche du tenseur et le produit de concaténation à droite du tenseur. En se plaçant dans le cas du produit de mélange ( $q = 0$ ) sur l'alphabet  $X$ , nous allons maintenant calculer la série diagonale  $\mathcal{D}_X$  avec les objets suivants : (a)  $\{P_w\}_{w \in X^*}$ , la base de Poincaré-Birkhoff-Witt, et (b) sa base duale,  $\{S_w\}_{w \in X^*}$ , qui contient la base de transcendance,  $\{S_l\}_{l \in \mathcal{L}_{\text{ym}}X}$ , base algébrique de l'algèbre de mélange  $(\mathbb{Q}\langle X \rangle, \sqcup, 1_{X^*})$  (c'est une extension transcendante pure de  $\mathbb{Q}$ ). On a alors [Mel+89 ; Reu93]

$$\mathcal{D}_X := \sum_{w \in X^*} w \otimes w = \prod_{l \in \mathcal{L}_{\text{ym}}X} e^{S_l \otimes P_l}. \quad (2.38)$$

4. C'est, ici, une notation compacte pour l'équivalence terme à terme.

La série génératrice  $L(z)$  peut s'obtenir comme l'image par le morphisme<sup>5</sup>  $\text{Li} \otimes \text{id}_{X^*}$  de la série double  $\mathcal{D}_X$  :

$$L(z) = \text{Li} \hat{\otimes}_{X^*} (\mathcal{D}_X) = \sum_{w \in X^*} \text{Li}_w(z) w = \prod_{l \in \mathcal{Lyn} X} e^{\text{Li}_{S_l}(z) P_l} \quad (2.39)$$

$$= e^{-\log(1-z)x_1} \left( \prod_{l \in (\mathcal{Lyn} X) \setminus X} e^{\text{Li}_{S_l}(z) P_l} \right) e^{\log(z)x_0}. \quad (2.40)$$

La factorisation (2.40) s'explique par le principe de partitionnement des indices (cf Annexe A).

Par ailleurs, pour tout mot  $l \in (\mathcal{Lyn} X) \setminus X$ , nous avons que  $S_l \in x_0 X^* x_1$ . Par conséquent, nous pouvons considérer la *série régularisée*, désignée par  $L_{reg}$ , ainsi que son évaluation en  $z = 1$  [Min+00b],

$$L_{reg}(z) = \prod_{l \in (\mathcal{Lyn} X) \setminus X} e^{\text{Li}_{S_l}(z) P_l} \quad \text{et} \quad Z_{\sqcup} := L_{reg}(1) = \prod_{l \in (\mathcal{Lyn} X) \setminus X} e^{\zeta(S_l) P_l}. \quad (2.41)$$

On en déduit que :

**Proposition 2.5** ([Min+00b ; Rac00]).  $Z_{\sqcup}$  est l'unique exponentielle de Lie telle que

$$\langle Z_{\sqcup} \mid w \rangle = \zeta(w), \quad \forall w \in x_0 X^* x_1, \quad (2.42)$$

$$\langle Z_{\sqcup} \mid x_0 \rangle = \langle Z_{\sqcup} \mid x_1 \rangle = 0. \quad (2.43)$$

## Identités fonctionnelles entre polylogarithmes

On considère [Min+00c] le groupe du birapport  $\mathcal{G}$  i.e. celui des transformations projectives de la droite complexe  $P^1\mathbb{C}$  qui laissent globalement invariants les trois points  $0, 1, \infty$  :

$$\mathcal{G} = \left\{ z, \frac{1}{z}, \frac{z-1}{z}, \frac{z}{z-1}, \frac{1}{1-z}, 1-z \right\}. \quad (2.44)$$

Un élément  $g$  de  $\mathcal{G}$  est déterminé par son action sur ces trois points. L'image directe des formes  $\omega_0$  et  $\omega_1$  vaut :

$$g^* \omega_0 = \frac{dg(z)}{g(z)} \quad \text{et} \quad g^* \omega_1 = \frac{dg(z)}{1-g(z)}. \quad (2.45)$$

5. Ce morphisme n'est pas continu sur tout le produit tensoriel

$$(\mathbb{Q}\langle X \rangle, \sqcup, 1_{X^*}) \otimes (\mathbb{Q}\langle X \rangle, \text{conc}, 1_{X^*})$$

mais sur la sous-algèbre

$$\text{Iso}_{\mathbb{Q}\langle X \rangle} = \text{span}_{\mathbb{Q}} \{ u \otimes v \mid |u| = |v| \}$$

voir l'annexe A.

Ainsi, pour le groupe du birapport  $\mathcal{G}$ , on a [Min96 ; Min+99]

$g$	$z$	$\frac{1}{z}$	$\frac{z-1}{z}$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{1-z}$	$1-z$
$g^*\omega_1$	$\omega_1$	$\omega_1 + \omega_0$	$-\omega_0$	$-\omega_1$	$-\omega_0 - \omega_1$	$-\omega_0$
$g^*\omega_0$	$\omega_0$	$-\omega_0$	$-\omega_1 - \omega_0$	$\omega_1 + \omega_0$	$\omega_1$	$-\omega_1$

L'image réciproque  $g_*$  des séries de Chen par  $g$  est la substitution donnée sur les lettres par

$g$	$z$	$\frac{1}{z}$	$\frac{z-1}{z}$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{1-z}$	$1-z$
$g_*x_1$	$x_1$	$x_1$	$-x_0$	$x_0 - x_1$	$x_0 - x_1$	$-x_0$
$g_*x_0$	$x_0$	$x_1 - x_0$	$x_1 - x_0$	$x_0$	$-x_1$	$-x_1$

Elle s'étend donc aux mots en un morphisme de monoïde (pour la concaténation) et s'étend par linéarité aux polynômes puis, par continuité aux séries.

**Théorème 2.6** ([Min+00b]). *Soient  $g$  une transformation du groupe  $\mathcal{G}$  et  $S_\gamma$  la série de Chen associée au chemin  $\gamma$  de  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ . On a*

$$S_{g \circ \gamma} = g_* S_\gamma = \sum_{w \in X^*} \langle S \mid w \rangle g_* w. \quad (2.46)$$

D'après la proposition 2.3, en prenant respectivement les chemins en  $1-t, 1/t$  et  $1-1/t$ , on obtient les identités suivantes :

**Proposition 2.7** ([Min+99]). *Pour chaque  $t$  dans un intervalle convenable,*

- i)  $L(x_0, x_1 \mid 1-t) = L(-x_1, -x_0 \mid t) Z_{\sqcup}(x_0, x_1);$
- ii)  $L(x_0, x_1 \mid 1/t) = L(-x_0 + x_1, x_1 \mid t) Z_{\sqcup}^{-1}(-x_0 + x_1, x_1) e^{i\pi x_1} Z_{\sqcup}(x_0, x_1);$
- iii)  $L(x_0, x_1 \mid 1-1/t) = L(-x_0 + x_1, -x_0 \mid t) Z_{\sqcup}^{-1}(-x_0 + x_1, -x_0) e^{i\pi x_0}.$

La série génératrice ordinaire des sommes harmoniques, désignée par  $G_s^X$ , forme une polylogarithme au facteur  $\frac{1}{1-z}$  près, c'est-à-dire

$$G_s^X(z) = \sum_{N \geq 0} H_s(N) z^N = \frac{\text{Li}_s(z)}{1-z}. \quad (2.47)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \frac{\text{Li}_s(z)}{1-z} &= \sum_{n \geq 0} z^n \sum_{n_1 > \dots > n_r \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}} \\ &= \sum_{n \geq r} z^n \sum_{n \geq n_1 > \dots > n_r \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}} \\ &= \sum_{n \geq r} z^n H_w(n). \end{aligned}$$

---

6. Ici, on utilise  $L(x_0, x_1 \mid t)$  au lieu de  $L(t)$ .

D'après la proposition 2.7.i), en définissant un morphisme, désignant par  $\sigma$ , de monoïde qui vérifie  $\sigma(x_0) = -x_1, \sigma(x_1) = -x_0$ , on écrit cette identité comme suit

$$L(z) = \sigma[L(1-z)]Z_{\square} = e^{(x_0-1)\log(1-z)} \prod_{l \in \mathcal{L}ynX \setminus X} e^{\text{Li}_{S_l}(z)\sigma(P_l)} e^{x_1 \log \frac{1}{z}} Z_{\square} \quad (2.48)$$

**Exemple 2.5.**

$$\begin{aligned} \text{Li}_{2,1}(z) &= \zeta(3) + (1-z)\log(1-z) - 1 - (1-z)\log^2(1-z)/2 \\ &\quad + (1-z)^2[-\log^2(1-z) + \log(1-z)]/4 + o^{(1)}((1-z)^3), \\ \text{Li}_{1,2}(z) &= 2 - 2\zeta(3) - \zeta(2)\log(1-z) - 2(1-z)\log(1-z) \\ &\quad + (1-z)\log^2(1-z) + (1-z)^2[\log^2(1-z) - \log(1-z)]/2 + o^{(1)}((1-z)^3). \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant la manière numérique, Costermans et al. ont établi une représentation de développement asymptotique des polylogarithmes comme suit.

**Théorème 2.8** ([Cos+05a]). *Pour chaque  $w \in X^*$ , il existe  $a_{w,i}, b_{w,i,j} \in \mathbb{Z}$ , tels que*

$$\text{Li}_w(z) = \sum_{j=1}^{|w|} a_{w,j} \log^j(1-z) + \zeta_{\square}(w) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{|w|-1} b_{w,i,j} \log^j(1-z)(1-z)^i + o^{(1)}((1-z)^{k+1}).$$

Nous allons préciser cette formule en divisant les cas des indices associés des mots et essayer de trouver des représentations de coefficient dans la formule. Nous allons désigner par  $\text{AE}^{(z_0)}(f(z))$  le développement singulier en  $z_0$  de la fonction  $f(z)$ . Ici nous déterminons les développements asymptotiques des polylogarithmes en  $z_0 = 1$  sur l'échelle  $\{(1-z)^i \log^j(1-z)\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ .

**Lemme 2.9.** *i) Pour  $w = x_0^j, j \in \mathbb{N}_+$ ,*

$$\text{Li}_w(1-z) = \frac{\log^j(1-z)}{j!}. \quad (2.49)$$

*ii) Pour<sup>7</sup>  $|w|_{x_1} = n \geq 1$ ,*

$$\text{Li}_w(1-z) = \sum_{i=n}^k \sum_{j=0}^{|w|-1} b_{w,i,j} (1-z)^i \log^j(1-z) + o^{(1)}((1-z)^k), \quad \forall k \geq n. \quad (2.50)$$

*iii) En le cas particulier  $w = x_0^{k_1} x_1 x_0^{k_2}, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ ,*

$$\langle \text{AE}^{(1)}(\text{Li}_w(1-z)) \mid \log^j(1-z)(1-z)^i \rangle = \begin{cases} \frac{(-1)^{k_2-j}}{j! i^{k_1+k_2+1-j}} \binom{k_1+k_2-j}{k_2-j}, & 0 \leq j \leq k_2 \\ 0, & j > k_2. \end{cases} \quad (2.51)$$

---

7.  $|w|_{x_1}$  désigne le nombre de lettre  $x_1$  dans  $w$ .

*Démonstration.* i) Le résultat est immédiat grâce à la convention que  $\text{Li}_{x_0^j}(z) = \frac{\log(z)^j}{j!}$ .

ii) D'après i), à chaque lettre  $x_0$ , on associe une puissance de  $\log(1-z)$ . Par conséquent, on peut voir que  $j \leq |w| - 1$ . Remarquons maintenant que la plus petite puissance de  $(1-z)$  dans l'expression de  $\text{Li}_s(1-z)$  est le nombre des indices, différent de 0, dans  $s$ , tandis que chaque lettre  $x_1$  contribue à un indice ( $w = x_0^{s_1-1}x_1 \dots \Leftrightarrow s = (s_1, \dots)$ ). D'après la décomposition de Radford, on peut exprimer le mot  $w$  sous forme d'une somme finie de termes  $\alpha l_1 \sqcup \dots \sqcup l_k$ , où  $\alpha \in \mathbb{Q}$ ,  $l_1, \dots, l_k \in \mathcal{Lyn}X$  dont les termes ont le même nombre de lettres  $x_0, x_1$  que le mot original  $w$ . Pour  $1 \leq j \leq k$ , remarquons que si  $|l_j|_{x_1} = i$ , la plus petite puissance de  $(1-z)$  dans  $\text{Li}_{l_j}(1-z)$  est  $i$ . Par conséquent, la plus petite puissance de  $(1-z)$  dans  $\text{Li}_w(1-z)$  est  $n$ .

iii) Pour  $k_1$  donné, nous allons effectuer la preuve par récurrence sur  $k_2$ . En fait, pour  $k_2 = 0$ ,  $\text{Li}_w(1-z) = \sum_{i \geq 1} \frac{(1-z)^i}{i^{k_1+1}}$ . Ainsi,  $\langle \text{AE}^{(1)}(\text{Li}_w(1-z)) \mid (1-z)^i \rangle = \frac{1}{i^{k_1+1}}$ . Pour  $k_2 = 1$ , nous avons  $x_0^{k_1}x_1 \sqcup x_0 = x_0^{k_1}x_1x_0 + (k_1+1)x_0^{k_1+1}x_1$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \text{Li}_{x_0^{k_1}x_1x_0}(1-z) &= \log(1-z)\text{Li}_{x_0^{k_1}x_1}(1-z) - (k_1+1)\text{Li}_{x_0^{k_1+1}x_1}(1-z) \\ &= \log(1-z) \sum_{i \geq 1} \frac{(1-z)^i}{i^{k_1+1}} - (k_1+1) \sum_{i \geq 1} \frac{(1-z)^i}{i^{k_1+2}}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\langle \text{AE}^{(1)}(\text{Li}_{x_0^{k_1}x_1x_0}(1-z)) \mid (1-z)^i \rangle = \frac{-1}{i^{k_1+1}} \binom{k_1+1}{1}$ ,  $\langle \text{AE}^{(1)}(\text{Li}_{x_0^{k_1}x_1x_0}(1-z)) \mid \log(1-z)(1-z)^i \rangle = \frac{1}{i^{k_1+1}}$ . En supposant le résultat satisfait pour tous  $N$  et  $k_2 \leq N$ , nous considérons  $k_2 = N+1$ . Comme

$$x_0^{k_1}x_1 \sqcup x_0^{N+1} = x_0^{k_1}x_1x_0^{N+1} + \sum_{n=1}^{N+1} \binom{k_1+n}{n} x_0^{k_1+n}x_1x_0^{N+1-n},$$

nous avons que

$$\begin{aligned} \text{Li}_{x_0^{k_1}x_1x_0^{N+1}}(1-z) &= \text{Li}_{x_0^{k_1}x_1}(1-z)\text{Li}_{x_0^{N+1}}(1-z) - \sum_{i=1}^{N+1} \binom{k_1+i}{i} \text{Li}_{x_0^{k_1+i}x_1x_0^{N+1-i}} \\ &= \frac{\log^{N+1}(1-z)}{(N+1)!} \sum_{i \geq 1} \frac{(1-z)^i}{i^{k_1+1}} - \sum_{i=1}^{N+1} \binom{k_1+i}{i} \text{Li}_{x_0^{k_1+i}x_1x_0^{N+1-i}}. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que ce résultat est satisfait pour  $j = N+1$ . Pour tout  $j \leq N$ , par

l'hypothèse de récurrence, on a <sup>8</sup>

$$\begin{aligned}
\langle \text{AE}^{(1)}(\text{Li}_{x_0^{k_1} x_1 x_0^{N+1}}(1-z)) \mid \log^j(1-z)(1-z)^i \rangle \\
&= - \sum_{n=1}^{N+1-j} \binom{k_1+n}{n} \langle \text{Li}_{x_0^{k_1+n} x_1 x_0^{N+1-n}} \mid \log^j(1-z)(1-z)^i \rangle \\
&= - \sum_{n=1}^{N+1-j} \frac{(-1)^{N+1-n-j}}{j! i^{k_1+N+2-j}} \binom{k_1+n}{n} \binom{k_1+N+1-j}{N-n+1-j} \\
&= - \frac{1}{j! i^{k_1+N+2-j}} \sum_{n=1}^{N+1-j} \frac{(-1)^{N+1-j-n}}{n!(N+1-j-n)!} \prod_{k=1}^{N+1-j} (k_1+k) \\
&= - \frac{1}{j! i^{k_1+N+2-j}} \frac{1}{(N+1-j)!} (-1)^{N-j} \prod_{k=1}^{N+1-j} (k_1+k) \\
&= \frac{(-1)^{N+1-j}}{j! i^{k_1+N+2-j}} \binom{k_1+N+1-j}{N+1-j}
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Proposition 2.10.** *i) Pour tout mot  $w \in X^*$ ,*

$$\text{Li}_w(z) = \sum_{\substack{u, v \in X^* \\ uv=w}} \text{Li}_{\sigma(u)}(1-z) \zeta_{\sqcup}(v). \quad (2.52)$$

*ii) Pour  $w = x_1^{k_1} x_0 x_1^{k_2} x_0 u$ ,  $u \in X^*$ ,  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_+$ , en utilisant les notations des coefficients dans le développement asymptotique sur l'échelle  $\{(1-z)^i \log^j(1-z)\}_{i,j \in \mathbb{N}}$  comme dans le théorème 2.8, on voit que*

- a)  $\zeta_{\sqcup}(w)$  est la partie constante dans le développement asymptotique de  $\text{Li}_w(z)$  ;  
b)

$$a_{w,j} = \begin{cases} \frac{(-1)^j}{j!} \zeta_{\sqcup}(x_1^{k_1-j} x_0 x_1^{k_2} u), & \text{pour } 1 \leq j \leq k_1 \\ 0, & \text{pour } j > k_1. \end{cases}$$

c)

$$b_{w,i,j} = \begin{cases} \sum_{n=j}^{k_2} \frac{(-1)^{k_1+1-j}}{j! i^{k_1+n+1-j}} \binom{k_1+n-j}{n-j} \zeta_{\sqcup}(x_1^{k_2-n} x_0 u), & \text{pour } 0 \leq j \leq k_2 \\ 0, & \text{pour } j > k_2. \end{cases}$$

---

8. Ici, nous utilisons l'expression  $\sum_{i=1}^m \frac{(-1)^{m-i}}{i!(m-i)!} = \frac{(-1)^{m-1}}{m!}$  pour  $m \geq 1$ .

*Démonstration.* *i)* Cette propriété résulte de la formule (2.48) et par la remarque que

$$\sum_{w \in X^*} \text{Li}_w(1-z)\sigma(w) = \sum_{w \in X^*} \text{Li}_{\sigma(w)}(1-z)w.$$

*ii)* D'après *i)*, on peut voir que la partie constante dans le développement asymptotique de  $\text{Li}_w(z)$  vient quand  $u = 1_{X^*}, v = w$  ce qui achève *a)*. La preuve de *b)* est la conséquence du lemme 2.9.*i)*. D'après le lemme 2.9, nous avons

$$\begin{aligned} \langle \text{AE}^{(1)}(\text{Li}_w(z)) \mid \log^j(1-z)(1-z)^i \rangle &= \sum_{n=j}^{k_2} \zeta_{\sqcup}(x_1^{k_2-n} x_0 u) \langle \text{AE}^{(1)}(\text{Li}_{\sigma(x_1^{k_1} x_0 x_1^n)}(1-z)) \mid \log^j(1-z)(1-z)^i \rangle \\ &= \sum_{n=j}^{k_2} \zeta_{\sqcup}(x_1^{k_2-n} x_0 u) (-1)^{k_1+1+n} \langle \text{AE}^{(1)}(\text{Li}_{x_0^{k_1} x_1 x_0^n}) \mid \log^j(1-z)(1-z)^i \rangle \\ &= \sum_{n=j}^{k_2} (-1)^{j_1+n} \frac{(-1)^{n-j}}{j! i^{k_1+n+1-j}} \binom{k_1+n-j}{n-j} \zeta_{\sqcup}(x_1^{k_2-n} x_0 u) \\ &= \sum_{n=j}^{k_2} \frac{(-1)^{k_1+1-j}}{j! i^{k_1+n+1-j}} \binom{k_1+n-j}{n-j} \zeta_{\sqcup}(x_1^{k_2-n} x_0 u) \end{aligned}$$

ce qui prouve *c)*. □

### Exploitation (2.10) de sur les bases standards

Nous allons maintenant analyser le morphisme  $\sigma$ . Remarquons que  $\sigma^2 = id_{X^*}$ . Nous utilisons les mêmes notations dans la section 3.3.1., grâce au dualité de deux bases  $\{P_w\}_{w \in X^*}$  et  $\{S_w\}_{w \in X^*}$ , nous avons le diagramme commutatif pour chaque poids  $n$  comme suit

$$\begin{array}{ccc} (\text{span}_{\mathbb{Q}}(X_n), \{P_{u_i^{(n)}}\}_{1 \leq i \leq 2^n}) & \xrightarrow[E^{(n)}]{\sigma} & (\text{span}_{\mathbb{Q}}(X_n), \{P_{u_i^{(n)}}\}_{1 \leq i \leq 2^n}) \\ \text{dualit} \downarrow \text{dualit} & & \downarrow \text{dualit} \\ (\text{span}_{\mathbb{Q}}(X_n), \{S_{u_i^{(n)}}\}_{1 \leq i \leq 2^n}) & \xleftarrow[t E^{(n)}]{\sigma} & (\text{span}_{\mathbb{Q}}(X_n), \{S_{u_i^{(n)}}\}_{1 \leq i \leq 2^n}) \end{array}$$

Où  $E^{(n)}$  est une représentation matricielle déterminée, pour tous  $1 \leq i, j \leq 2^n$ , par

$$E_{ij}^{(n)} := \langle \sigma(P_{u_i^{(n)}}) \mid P_{u_j^{(n)}} \rangle = \langle \sigma(S_{u_j^{(n)}}) \mid S_{u_i^{(n)}} \rangle. \quad (2.53)$$



**Proposition 2.11.** Soit  $L(z)$  la série génératrice des polylogarithmes, on a

$$\sigma[L(z)] = \sum_{w \in X^*} \text{Li}_{S_w}(z) \sigma(P_w) = \sum_{w \in X^*} \text{Li}_{\sigma(S_w)}(z) P_w. \quad (2.54)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \sum_{w \in X^*} \text{Li}_{S_w}(z) \sigma(P_w) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{i=1}^{2^n} \text{Li}_{S_{u_i}}(z) \sigma(P_{u_i}) \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{i=1}^{2^n} \text{Li}_{S_{u_i}}(z) \sum_{j=1}^{2^n} E_{ij}^{(n)} P_{u_j} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{j=1}^{2^n} \left( \sum_{i=1}^{2^n} E_{ij}^{(n)} \text{Li}_{S_{u_i}}(z) \right) P_{u_j} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{j=1}^{2^n} \text{Li}_{\sum_{i=1}^{2^n} E_{ij}^{(n)} S_{u_i}}(z) P_{u_j} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{j=1}^{2^n} \text{Li}_{\sigma(S_{u_j})}(z) P_{u_j} \\ &= \sum_{w \in X^*} \text{Li}_{\sigma(S_w)}(z) P_w. \end{aligned}$$

□

**Proposition 2.12.** i) Pour tout  $w \in X^*$ ,

$$\text{Li}_{S_w}(1-z) = \sum_{uv \leq w} \langle \mathcal{P}(P_u P_v) \mid P_w \rangle \zeta(S_v) \text{Li}_{\sigma(S_u)}(z), \quad (2.55)$$

où  $\mathcal{P}(P_u P_v)$  est la représentation du produit de concaténation de  $P_u P_v$  sur la base  $\{P_w\}_{w \in X^*}$ .

ii) En particulier, pour tout mot de Lyndon  $l \in \mathcal{Lyn} X$ ,

$$\text{Li}_{S_l}(1-z) = \text{Li}_{\sigma(S_l)}(z) + \sum_{\substack{l_1 l_2 \leq l \\ l_1, l_2 \in \mathcal{Lyn} X}} \langle \mathcal{P}(P_{l_1} P_{l_2}) \mid P_l \rangle \zeta(S_{l_2}) \text{Li}_{\sigma(S_{l_1})}(z) + \zeta(S_l). \quad (2.56)$$

**Exemple 2.6.**

$$\begin{aligned}
\text{Li}_{S_{x_0}}(1-z) &= \text{Li}_{\sigma(S_{x_0})}(z) + \zeta(S_{x_0}) = -\text{Li}_{S_{x_1}}(z) = \log(1-z), \\
\text{Li}_{S_{x_1}}(1-z) &= \text{Li}_{\sigma(S_{x_1})}(z) + \zeta(S_{x_1}) = -\text{Li}_{S_{x_0}}(z) = -\log(z), \\
\text{Li}_{S_{x_0x_1}}(1-z) &= \text{Li}_{\sigma(S_{x_0x_1})}(z) + \zeta(S_{x_1})\text{Li}_{\sigma(S_{x_0})}(z) + \zeta(S_{x_0x_1}) \\
&= \text{Li}_{S_{x_0}}(z)\text{Li}_{S_{x_1}}(z) - \text{Li}_{S_{x_0x_1}}(z) + \zeta(S_{x_0x_1}) \\
&= -\log(z)\log(1-z) - \text{Li}_{S_{x_0x_1}}(z) + \zeta(S_{x_0x_1}), \\
\text{Li}_{S_{x_0^2x_1}}(1-z) &= \text{Li}_{\sigma(S_{x_0^2x_1})}(z) + \zeta(S_{x_0x_1})\text{Li}_{\sigma(S_{x_0})}(z) + \zeta(S_{x_0^2x_1}) \\
&= -\frac{1}{2}\text{Li}_{S_{x_0}}(z)\text{Li}_{S_{x_1}}(z)^2 + \text{Li}_{S_{x_1}}(z)\text{Li}_{S_{x_0x_1}}(z) - \text{Li}_{S_{x_0^2x_1}}(z) \\
&\quad + \zeta(S_{x_0^2x_1}) - \text{Li}_{S_{x_1}}(z)\zeta(S_{x_0x_1}) - \text{Li}_{S_{x_0x_1}}(z)\zeta(S_{x_0}) \\
&= -\frac{1}{2}\log(z)\log(1-z)^2 - \log(1-z)\text{Li}_{S_{x_0x_1}}(z) - \text{Li}_{S_{x_0^2x_1}}(z) \\
&\quad + \zeta(S_{x_0^2x_1}) + \log(1-z)\zeta(S_{x_0x_1}), \\
\text{Li}_{S_{x_0x_1^2}}(1-z) &= \text{Li}_{\sigma(S_{x_0x_1^2})}(z) + \text{Li}_{\sigma(S_{x_0x_1})}\zeta(S_{x_1}) + \zeta(S_{x_0x_1^2}) \\
&= -\frac{1}{2}\text{Li}_{S_{x_0}}(z)^2\text{Li}_{S_{x_1}}(z) + \text{Li}_{S_{x_0}}(z)\text{Li}_{S_{x_0x_1}}(z) - \text{Li}_{S_{x_0x_1^2}}(z) \\
&\quad + \zeta(S_{x_0x_1^2})\text{Li}_{S_{x_0}}(z)\zeta(S_{x_0x_1}) \\
&= \frac{1}{2}\log(z)^2\log(1-z) + \log(z)\text{Li}_{S_{x_0x_1}}(z) - \text{Li}_{S_{x_0x_1^2}}(z) \\
&\quad + \zeta(S_{x_0x_1^2}) + \log(z)\zeta(S_{x_0x_1}) \\
\text{Li}_{S_{x_0^2x_1^2}}(1-z) &= \text{Li}_{\sigma(S_{x_0^2x_1^2})}(z) + \text{Li}_{\sigma(S_{x_0})}\zeta(S_{x_0x_1^2}) + \zeta(S_{x_0^2x_1^2}) \\
&= \frac{1}{4}\log(z)^2\log(1-z)^2 - \log(1-z)\text{Li}_{S_{x_0^2x_1}}(z) \\
&\quad + \log(z)\log(1-z)\text{Li}_{S_{x_0x_1}}(z) + \log(z)\text{Li}_{S_{x_0x_1^2}}(z) \\
&\quad - \text{Li}_{S_{x_0^2x_1^2}}(z) + \frac{1}{10}\zeta(S_{x_0x_1})^2 + \log(1-z)\zeta(S_{x_0^2x_1})
\end{aligned}$$

La proposition 2.12 est prouvée grâce au lemme suivant.

**Lemme 2.13.** Soient  $l_1, l_2 \in \mathcal{L}ynX$

$$P_{l_1}P_{l_2} = \begin{cases} P_{l_1l_2} & \text{pour } l_1 \geq l_2 \\ P_{l_1l_2} + P_{l_2l_1} & \text{pour } l_1 < l_2 \text{ et } st(l_1l_2) = (l_1, l_2) \\ P_{l_1l_2} + \sum_{w>l_1l_2} \alpha_w P_w & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Démonstration.* On a immédiatement le premier cas suivant la définition de  $P_w$ . Les

autres cas d'après l'argument  $P_u = u + \sum_{w>u} \alpha_w w$ ,

$$\begin{aligned} P_{l_1} P_{l_2} &= (l_1 + \sum_{u>l_1} \alpha_u u)(l_2 + \sum_{v>l_1} \alpha_v v) \\ &= l_1 l_2 + \sum_{w>l_1 l_2} \alpha_w w \\ &= P_{l_1 l_2} + \sum_{w>l_1 l_2} \beta_w P_w. \end{aligned}$$

□

Pour chaque  $w \in X^*$ ,  $C^w(z)$  désigne le côté droit de la représentation (2.55). On peut récrire la formule (2.48) de la forme

$$\sum_{w \in X^*} \text{Li}_{S_w}(1-z) P_w = \sum_{w \in X^*} C^w(z) P_w. \quad (2.57)$$

En appliquant la projection  $\pi_Y$  sur l'équation (2.57) et en utilisant la représentation matricielle comme dans le 2, nous avons les identités suivantes.

**Proposition 2.14.** *Soient les  $u_i^{(n)}, v_j^{(n)}$  comme précédemment, nous avons*

$$\text{Li}_{\Sigma_{v_j^{(n)}}}(1-z) = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \langle \pi_X(\Sigma_{v_j^{(n)}}) | S_{u_i} \rangle C^{u_i^{(n)}}(z), \quad \forall n \geq 1, 1 \leq i, j \leq 2^{n-1}. \quad (2.58)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \sum_{w \in X^*} \text{Li}_{S_w}(1-z) \pi_Y(P_w) &= \sum_{w \in X^*} C^w(z) \pi_Y(P_w) \\ \sum_{n \geq 0} \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \text{Li}_{\Sigma_w}(1-z) \Pi_{v_j^{(n)}} &= \sum_{n \geq 0} \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \left[ \sum_{i=1}^{2^{n-1}} M_{ij}^{(n)} C^{u_i^{(n)}}(z) \right] \Pi_{v_j^{(n)}} \end{aligned}$$

□

**Exemple 2.7.**

$$\begin{aligned} \text{Li}_{\Sigma_{y_2}}(1-z) &= C^{x_0 x_1}(z) = -\log(z) \log(1-z) - \text{Li}_{S_{x_0 x_1}}(z) + \zeta(S_{x_0 x_1}) \\ \text{Li}_{\Sigma_{y_2 y_1}}(1-z) &= C^{x_0 x_1^2}(z) + \frac{1}{2} C^{x_0^2 x_1}(z) \\ &= \frac{1}{2} \log(z)^2 \log(1-z) + \log(z) \text{Li}_{S_{x_0 x_1}}(z) - \text{Li}_{S_{x_0^2 x_1}}(z) + \zeta(S_{x_0^2 x_1}) \\ &\quad + \log(z) \zeta(S_{x_0 x_1}) + \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2} \log(z) \log(1-z)^2 - \log(1-z) \text{Li}_{S_{x_0 x_1}}(z) \right. \\ &\quad \left. - \text{Li}_{S_{x_0 x_1^2}}(z) + \zeta(S_{x_0^2 x_1}) + \log(1-z) \zeta(S_{x_0 x_1}) \right] \end{aligned}$$

## 2.4. Développement asymptotique des sommes harmoniques

### 2.4.1. En suivant la série génératrice

#### Séries génératrices sur l'alphabet $X$

La série  $Z_{\sqcup}$  correspond en fait à la série  $\Phi_{KZ}$  de Drinfel'd [Dri90]. Et on a :

**Théorème 2.15** ([Min+00b]). *Lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , la série génératrice des polylogarithmes  $L$  admet le développement asymptotique suivant :*

$$L(1 - \epsilon) \sim e^{-x_1 \log \epsilon} Z_{\sqcup} \quad \text{si } \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon \rightarrow 0^+. \quad (2.59)$$

D'après la formule (2.47) on a  $G^X(z) = \frac{L(z)}{1-z}$  et d'après (2.48), on déduit la relation suivante

$$G^X(1 - z) = \frac{1 - z}{z} \sigma[G^X(z)] Z_{\sqcup}.$$

En développant cette formule, on a

$$\begin{aligned} & e^{(x_1+1) \log \frac{1}{z}} \prod_{l \in \mathcal{L} \text{yn} X \setminus X} e^{\text{Li}_{S_l}(1-z) P_l} e^{x_0 \log(1-z)} \\ &= \frac{1 - z}{z} e^{(x_0-1) \log(1-z)} \prod_{l \in \mathcal{L} \text{yn} X \setminus X} e^{\text{Li}_{S_l}(z) \sigma(P_l)} e^{x_1 \log \frac{1}{z}} Z_{\sqcup} \end{aligned}$$

#### Exemple 2.8.

$$\begin{aligned} G_{S_{x_0}}^X(1 - z) &= \frac{\log(1 - z)}{z}, \quad G_{S_{x_1}}^X(1 - z) = -\frac{\log(z)}{z}, \\ G_{S_{x_0 x_1}}^X(1 - z) &= \frac{z - 1}{z} G_{S_{x_0 x_1}}^X(z) + \frac{1}{z} \log z \log \frac{1}{1 - z} + \zeta(S_{x_0 x_1}) \\ G_{S_{x_0^2 x_1}}^X(z) &= \frac{z - 1}{z} \left( -G_{S_{x_0^2 x_1}}^X(z) + \log z G_{S_{x_0 x_1}}^X(z) + \frac{\log^2 z \log(1 - z)}{1 - z} + \frac{\zeta(S_{x_0^2 x_1})}{1 - z} \right) \\ \Rightarrow G_{S_{x_0^2 x_1}}^X(z) &= -\frac{1}{1 - z} G_{S_{x_0^2 x_1}}^X(1 - z) + \frac{z}{1 - z} \log(1 - z) G_{S_{x_0 x_1}}^X(1 - z) \\ &+ \frac{1 \log^2(1 - z)}{2(1 - z)} \log z + \frac{\zeta(S_{x_0^2 x_1})}{1 - z}. \end{aligned}$$

Désignons  $[z^N]G_w^X(z)$  le coefficient de  $z^N$  dans  $G_w^X(z)$  dans le développement asymptotique sur l'échelle  $\{(1 - z)^i \log^j(1 - z)\}_{i, j \in \mathbb{N}}$ , grâce à ces identités, nous pouvons déduire des développements asymptotiques des sommes harmoniques.

**Exemple 2.9.**

$$H_{S_{x_0 x_1^2}} = [z^N] G_{S_{x_0 x_1^2}}^X = \zeta(S_{x_0 x_1^2}) - \frac{\log N + 1 + \gamma}{N} + \frac{1}{2} \frac{\log N}{N^2} + o_3^{(\infty)}\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

**Série génératrice sur l'alphabet  $Y$** 

En remarquant que  $\pi_Y w$  disparaît pour tout mot  $w$  terminé par  $x_0$ , on déduit que

$$\pi_Y L(z) = \pi_Y \sum_{w \in X^*} \text{Li}_w(z) w = \sum_{w \in Y^*} \text{Li}_w(z) w = L^Y(z).$$

En suivant l'identité (2.48), nous exprimons également

$$L^Y(z) \underset{z \rightarrow 1}{\sim} e^{y_1 \log \frac{1}{1-z}} \pi_Y Z_{\sqcup}, \quad (2.60)$$

$$G^Y(z) \underset{z \rightarrow 1}{\sim} e^{(y_1+1) \log \frac{1}{1-z}} \pi_Y Z_{\sqcup}, \quad (2.61)$$

En d'autres termes, en développant  $e^{(y_1+1) \log \frac{1}{1-z}}$  sous forme de série génératrice ordinaire en  $y_1$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} e^{(y_1+1) \log \frac{1}{1-z}} &= \sum_{k \geq 0} G_{y_1^k}^Y(z) y_1^k \\ &= \sum_{k \geq 0} \left( \sum_{N \geq 0} H_{y_1^k}(N) z^N \right) y_1^k \\ &= \sum_{N \geq 0} \left( \sum_{k \geq 0} H_{y_1^k}(N) y_1^k \right) z^N \\ &= \sum_{N \geq 0} \exp \left( - \sum_{k \geq 1} H_{y_k}(N) \frac{(-y_1)^k}{k} \right) z^N. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\sum_{w \in Y^*} H_w(N) w = [z^N] G^Y(z) \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \exp \left( - \sum_{k \geq 1} H_{y_k}(N) \frac{(-y_1)^k}{k} \right) \pi_Y Z_{\sqcup}. \quad (2.62)$$

En outre, comme

$$\pi_Y Z_{\sqcup} = \exp \left( \sum_{k \geq 2} \zeta(y_k) \frac{(-y_1)^k}{k} \right) Z_{\sqcup},$$

on a que

$$\begin{aligned} \sum_{w \in Y^*} H_w(N) w &\underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \exp \left( \sum_{k \geq 1} [\zeta(y_k) - H_{y_k}(N)] \frac{(-y_1)^k}{k} \right) Z_{\sqcup}, \\ \sum_{w \in Y^*} H_{\Sigma_w}(N) \Pi_w &\underset{z \rightarrow 1}{\sim} \exp \left( \sum_{k \geq 1} [\zeta(y_k) - H_{y_k}(N)] \frac{(-y_1)^k}{k} \right) \sum_{w \in Y^*} \zeta(\Sigma_w) \Pi_w. \end{aligned}$$

**Lemme 2.16.** *Si on écrit*

$$\exp\left(\sum_{k \geq 1} [\zeta(y_k) - H_{y_k}(N)] \frac{(-y_1)^k}{k}\right) = 1 + \sum_{m \geq 1} C^{(m)} y_1^m,$$

les coefficients sont représentés par

$$C^{(m)} = \sum_{i=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_i \geq 2 \\ k_1 + \dots + k_i = m}} (-1)^{m-i} \frac{[\zeta(k_1) - H_{k_1}(N)] \dots [\zeta(k_i) - H_{k_i}(N)]}{k_1 \dots k_i},$$

où  $\lfloor m/2 \rfloor$  désigne la partie entière de  $m/2$ .

**Proposition 2.17.** *Pour tout mot convergent<sup>9</sup>  $w$ , on a*

$$H_{\Sigma_w}(N) = \zeta(\Sigma_w) + o^{(\infty)}(1) \text{ lorsque } N \rightarrow \infty. \quad (2.63)$$

Pour tous  $v \in Y^* \setminus y_1 Y^*$  et  $w = y_1^k v$ , on a

$$H_{\Sigma_w}(N) = \zeta(\Sigma_w) + \sum_{i=1}^k C^{(i)} \zeta(\Sigma_{y_1^{k-i} v}) + o^{(\infty)}(1) \text{ lorsque } N \rightarrow \infty. \quad (2.64)$$

## 2.4.2. En suivant la formule d'Euler-MacLaurin

**Proposition 2.18.** *i) Pour tout mot  $y_{s_1} \dots y_{s_k} \in \mathcal{L}ynY$ , on a*

$$H_{\Sigma_{y_{s_1} \dots y_{s_k}}}(N) = \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i!} \sum_{(y_{s'_1}, \dots, y_{s'_i}, l_1, \dots, l_n) \in \mathcal{N}(y_{s_1}, \dots, y_{s_k})} \sum_{k=1}^N \frac{H_{\Sigma_{l_1 \dots l_j}}(k-1)}{k^{s'_1 + \dots + s'_i}} \quad (2.65)$$

$$= \zeta_{\Sigma_{y_{s_1} \dots y_{s_k}}} - \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i!} \sum_{(y_{s'_1}, \dots, y_{s'_i}, l_1, \dots, l_n) \in \mathcal{N}(y_{s_1}, \dots, y_{s_k})} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{H_{\Sigma_{l_1 \dots l_n}}(k-1)}{k^{s'_1 + \dots + s'_i}}, \quad (2.66)$$

ii) *Pour chaque mot de la forme  $w = l_1^{i_1} \dots l_k^{i_k}$ , on a*

$$H_{\Sigma_w}(N) = \frac{H_{\Sigma_{l_1}}(N)^{i_1} \dots H_{\Sigma_{l_k}}(N)^{i_k}}{i_1! \dots i_k!} \quad (2.67)$$

---

9.  $o^{(\infty)}(1)$  désigne le petit  $o$  de 1 à l'infini.

*Démonstration.* i) La première égalité vient de la formule de  $\{\Sigma_w\}_{w \in Y^*}$  dans la proposition 1.23.iii) et de

$$\begin{aligned} H_{y_{s_1} \dots y_{s_k}}(N) &= \sum_{N \geq n_1 > n_2 > \dots > n_k} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_k^{s_k}} \\ &= \sum_{n_1=1}^N \frac{1}{n_1^{s_1}} \sum_{n_1-1 \geq n_2 > \dots > n_k} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_k^{s_k}} \\ &= \sum_{n_1=1}^N \frac{H_{y_{s_2} \dots y_{s_k}}(n_1-1)}{n_1^{s_1}}, \end{aligned}$$

avec la convention  $H_u(k) = 0$  si  $k < |u|$ . La deuxième égalité est obtenue par la combinaison linéaire des éléments suivants

$$\begin{aligned} H_{y_{s_u}}(N) &= \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{H_u(n_1-1)}{n_1^{s_1}} - \sum_{n_1=N+1}^{\infty} \frac{H_u(n_1-1)}{n_1^{s_1}} \\ &= \zeta(y_{s_u}) - \sum_{n_1=N+1}^{\infty} \frac{H_u(n_1-1)}{n_1^{s_1}}. \end{aligned}$$

ii) L'affirmation est obtenue immédiatement d'après la formule de  $\{\Sigma_w\}_{w \in Y^*}$  dans la proposition 1.23.iv).

□

Suivant la proposition 2.18, nous pouvons aussi établir un algorithme pour représenter les développements asymptotiques des sommes harmoniques indexées par la base  $\{\Sigma_w\}_{w \in Y^*}$ .  $\text{AE}_p^{(\infty)}(H_{\Sigma_w}(N))$  désigne le développement asymptotique des sommes harmoniques sur l'échelle  $\{\{N^{-i} \log^j(N)\}_{i,j \in \mathbb{N}}\}$  codés par  $\Sigma_w$ .

**Algorithme 2.** 1. **ENTRÉE :**  $n, p, N \in \mathbb{N}_+$  sont les paramètres.

2. **SORTIE :** Les développements asymptotiques des sommes harmoniques indexées par la base  $\{\Sigma_w\}_{(w)=n}$  jusqu'à l'ordre  $p$ .

**Étape 1** Établir une liste, notée par  $Y_n$ , des mots de poids  $n$  dans  $Y^*$ .

**Étape 2** Pour tout mot  $w$ , établir le développement asymptotique,  $\text{AE}_p^{(\infty)}(H_{\Sigma_w}(N))$ , comme suit :

- Si  $w \in Y$ , calculer comme la formule (2.11).
- Si  $w = y_{s_1} \dots y_{s_k} \in \mathcal{L}ynY$ , calculer  $\text{AE}_p^{(\infty)}(H_{\Sigma_w}(N))$  en utilisant la récursion

$$\begin{aligned} \text{AE}_p^{(\infty)}(H_{\Sigma_w}(N)) &= \zeta_{\Sigma_l} - \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i!} \sum_{(y_{s'_1}, \dots, y_{s'_i}, l_1, \dots, l_i) \in \mathcal{N}(y_{s_1}, \dots, y_{s_k})} \\ &\quad \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\text{AE}_p^{(\infty)}(H_{\Sigma_{l_1 \dots l_j}}(k-1))}{k^{s_{k_1} + \dots + s_{k_i}}}. \end{aligned}$$

- Si  $w = l_1^{i_1} \dots l_k^{i_k}$ ,

$$AE_p^{(\infty)}(H_{\Sigma_w}(N)) = \frac{AE_p^{(\infty)}(H_{\Sigma_{l_1}}(N))^{i_1} \dots AE_p^{(\infty)}(H_{\Sigma_{l_k}}(N))^{i_k}}{i_1! \dots i_k!}$$

**Exemple 2.10.** Les résultats suivants sont calculés par notre programme sur MAPLE.

$$\begin{aligned} AE_4^{(\infty)}(H_{\Sigma_{y_1}}(N)) &= \ln(N) + \gamma + 1/2 N^{-1} - 1/12 N^{-2} + \frac{1}{120} N^{-4} + o^{(\infty)}(N^{-4}) \\ AE_4^{(\infty)}(H_{\Sigma_{y_2}}(N)) &= -N^{-1} + 1/2 N^{-2} - 1/6 N^{-3} + (N^{-4}) + \zeta_{\Sigma_2} \\ AE_4^{(\infty)}(H_{\Sigma_{y_1^2}}(N)) &= 1/2 (\ln(N) + \gamma)^2 + \frac{1/2 \ln(N) + 1/2 \gamma}{N} \\ &+ \frac{-1/12 \ln(N) - 1/12 \gamma + 1/8}{N^2} - 1/24 N^{-3} \\ &+ \left( \frac{1}{120} \ln(N) + \frac{1}{120} \gamma + \frac{1}{288} \right) N^{-4} + o_5^{(\infty)}(N^{-4}) \\ AE_4^{(\infty)}(H_{\Sigma_{y_3}}(N)) &= -1/2 N^{-2} + 1/2 N^{-3} - 1/4 N^{-4} + o_5^{(\infty)}(N^{-4}) + \zeta_{\Sigma_3} \\ AE_4^{(\infty)}(H_{\Sigma_{y_2 y_1}}(N)) &= 1/2 \zeta_{\Sigma_3} + \frac{1 + \ln(N) + \gamma}{N} + \frac{-1/2 - 1/2 \gamma - 1/2 \ln(N)}{N^2} \\ &+ \left( \frac{7}{18} + 1/6 \ln(N) + 1/6 \gamma \right) N^{-3} - \frac{5}{24} N^{-4} + o_5^{(\infty)}(N^{-4}) \\ AE_4^{(\infty)}(H_{\Sigma_{y_1 y_2}}(N)) &= (\ln(N) + \gamma) \zeta_{\Sigma_2} + \frac{-\ln(N) - \gamma + 1/2 \zeta_{\Sigma_2}}{N} \\ &+ \frac{1/2 \ln(N) + 1/2 \gamma - 1/2 - 1/12 \zeta_{\Sigma_2}}{N^2} \\ &+ \frac{-1/6 \ln(N) - 1/6 \gamma + 1/3}{N^3} + \left( -1/8 + \frac{1}{120} \zeta_{\Sigma_2} \right) N^{-4} + o_5^{(\infty)}(N^{-4}) \end{aligned}$$





# Chapitre 3

## Structure des polyzêtas et représentation explicite sur des bases de transcendance

### Sommaire

---

<b>3.1. Groupes de Lie et coordonnées locales . . . . .</b>	<b>90</b>
3.1.1. L'exponentielle de Lie . . . . .	90
3.1.2. Coordonnées locales sur un groupe de Lie et théorème de Weierstrass . . . . .	92
<b>3.2. Structure algébrique des polyzêtas . . . . .</b>	<b>93</b>
3.2.1. Définitions . . . . .	93
3.2.2. Structure algébrique de quasi-mélange des polyzêtas . . . . .	94
3.2.3. Structure algébrique de mélange des polyzêtas . . . . .	95
3.2.4. Factorisation MRS sur l'algèbre de quasi-mélange $q$ -déformée . . . . .	96
<b>3.3. Représentations explicites des polyzêtas sur des éléments généra-</b>	
<b>teurs algébriques . . . . .</b>	<b>98</b>
3.3.1. Relations entre les séries génératrices . . . . .	98
3.3.2. Relations entre polyzêtas grâce à des séries génératrices . . . . .	101
3.3.3. Algorithmes pour l'exploration de la structure des polyzêtas . . . . .	104
3.3.4. Exemples obtenus par programme en Maple . . . . .	106

---

Comme dans le chapitre précédent, les polyzêtas apparaissent dans les développements asymptotiques des sommes harmoniques ou des polylogarithmes. Par un théorème à la Abel, pour tout multi-indice convergent<sup>1</sup>  $s$ , le polyzêta  $\zeta(s)$  est la limite du polylogarithme  $\text{Li}_s(z)$  quand  $z$  tend vers 1 ou la limite de la somme harmonique  $H_s(N)$  quand  $N$

---

1. Une multi-indice  $s = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{N}^r$  est convergent si  $s_1 > 1$ .

tend vers l'infini. De ces façons, les polyzêtas héritent des propriétés des relations entre eux. Par ailleurs, le concept de multi-zêta est une généralisation multi-indice de la fonction zêta de Riemann originale (*i.e.* sur un seul indice réel ou complexe). Lorsque ces multi-indices sont pris sur l'ensemble des entiers positifs, ces fonctions sont appelées polyzêtas (en anglais "Multiple Zeta Values" (MZV)). Elles possèdent toutes des structures algébriques extrêmement intéressantes.

En représentant les polyzêtas par leurs séries génératrices, on obtient des points d'un groupe de Lie de dimension infinie (groupe de Hausdorff) sur lequel nous pouvons identifier certains systèmes de coordonnées locales [Min13a; Min13b] et trouver des relations entre polyzêtas indexées à des bases de transcendance d'algèbres de mélange et de quasi-mélange (celles qui sont construites dans le chapitre 1). Après cela, en utilisant les structures algébriques des polyzêtas et le théorème Wei-Norman (adapté au groupe de Hausdorff et factorisation MRS [Mel+89; Sch65]) nous obtenons des représentations dans des systèmes de coordonnées locales. Des formules explicites de relations entre polyzêtas et des algorithmes [Bui+15b; Bui+15a; Bui+16a] seront donnés également dans ce chapitre. Le résultat de l'identification, une fois encore, confirme jusqu'à un certain ordre <sup>2</sup> la conjecture des dimensions de Zagier.

## 3.1. Groupes de Lie et coordonnées locales

### 3.1.1. L'exponentielle de Lie

Dans la théorie de groupes de Lie, l'*application exponentielle* est une application allant de l'algèbre de Lie d'un groupe  $\mathcal{G}$  vers ce groupe. Elle permet de re-capturer la structure locale de  $\mathcal{G}$  à partir de son algèbre de Lie. L'existence de cette application est l'une des principales justifications pour étudier les groupes de Lie à l'aide de leurs algèbres. Plus précisément, soit  $\mathcal{G}$  un groupe de Lie et  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie (que l'on peut identifier à l'espace tangent à l'élément neutre de  $\mathcal{G}$ ). L'application exponentielle  $exp : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{G}$  peut être définie, selon les groupes, de deux manières équivalentes par :

1. Elle est donnée par  $exp(x) = \varphi(1)$ , où  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}$  est l'unique sous-groupe à un paramètre de  $\mathcal{G}$  dont le vecteur tangent à l'identité est égal à  $x$ .
2. Si  $\mathcal{G}$  est un groupe de matrices, alors l'application exponentielle coïncide avec l'exponentielle des matrices, et est donnée par le développement en série usuel :

$$exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = I + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots,$$

où  $I$  est la matrice identité et  $x$  est une matrice.

---

2. Nous expliquerons au paragraphe 3.3.4. en quel sens il faut entendre cette confirmation par le calcul

L'application exponentielle satisfait les propriétés suivantes<sup>3</sup> :

1. Comme nous l'avons dit plus haut, pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ , l'application  $\varphi(t) = \exp(tx)$  est l'unique sous-groupe à un paramètre de  $\mathcal{G}$  dont le vecteur tangent à l'identité est  $x$ . Il en résulte que

$$\begin{aligned} e^{(t+s)x} &= e^{tx} e^{sx}, \\ e^{-x} &= (e^x)^{-1}. \end{aligned}$$

2. L'application exponentielle  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{G}$  est différentiable. Sa dérivée en 0,  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , est l'application identité (avec les identifications usuelles). L'application exponentielle, par conséquent, a une restriction qui est un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans  $\mathfrak{g}$  vers un voisinage de 1 dans  $\mathcal{G}$ .
3. Quand  $\mathcal{G}$  est compact, l'application exponentielle est surjective sur cette composante connexe de l'élément neutre. L'image de l'application exponentielle du groupe  $SL_2(\mathbb{R})$  (connexe mais non compact) n'est pas ce groupe entier.
4. L'application  $\varphi(t) = e^{tx}$  est la courbe intégrale passant par l'identité (en  $t = 0$ ) pour les deux champs de vecteurs (invariants à droite et à gauche) associés à  $x$ .

Pour tout alphabet  $A$ , une série<sup>4</sup>  $S \in \mathbb{K}\langle\langle A \rangle\rangle$  est appelée *exponentielle de Lie* s'il existe une série de Lie  $L \in \mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}\langle\langle A \rangle\rangle$  telle que  $S = e^L$ . Un produit de deux exponentielles de Lie est une exponentielle de Lie car le fait, pour une série de terme constant 1, d'être une exponentielle de Lie est équivalent avec l'une des deux propriétés suivantes

$$\begin{aligned} i) & \quad (\forall u, v \in A^+)(\langle S | u \sqcup v \rangle = \langle S | u \rangle \langle S | v \rangle) \\ ii) & \quad \Delta_{\sqcup}(S) = S \otimes S \end{aligned}$$

(voir lemme 1.8). Une telle série  $S$  peut être factorisée comme produit d'exponentielles de Lie (voir corollaire 1.26)

$$S = \sum_{w \in A^*} \langle S | w \rangle w = \prod_{l \in \mathcal{L}yn A} e^{\langle S | l \rangle P_l}. \quad (3.1)$$

### Série de Chen

Pour chaque chemin différentiable par morceaux  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  allant de  $a$  à  $b$ , soit  $S_\gamma$  la solution de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dz} S(z) = \left( \frac{x_0}{z} + \frac{x_1}{1-z} \right) S(z), \quad \text{pour } z \in \gamma([0, 1]) \quad (3.2)$$

3. Voir Wikipédia.

4.  $\mathbb{K}$  est ici une  $\mathbb{Q}$ -algèbre.

avec la condition initiale  $S(a) = 1_{X^*}$ . Cette série,  $S_\gamma \in C\langle\langle X \rangle\rangle$ , est appelée [Che71 ; Che09] *série de Chen* associée au chemin  $\gamma$  (et pour les formes différentielles  $dz/z$  et  $dz/(1-z)$ ). Il est connu [Che71] que  $S_\gamma$  est une exponentielle de Lie qui ne dépend que de la classe d'homotopie de  $\gamma$ . En outre, pour la concaténation,  $\gamma_1\gamma_2$ , de deux chemins composables  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  on a  $S_{\gamma_1\gamma_2} = S_{\gamma_2}S_{\gamma_1}$ .

### 3.1.2. Coordonnées locales sur un groupe de Lie et théorème de Wei-Norman

Nous rappelons ici un théorème de Wei-Norman que nous allons adapter (en dimension infinie) à la représentation des polyzêtas.

**Théorème 3.1.** [Wei+63 ; Wei+64] Soit  $G$  un groupe de Lie (dimension finie) (réel  $k = \mathbb{R}$  ou complexe  $k = \mathbb{C}$ ) et soit  $\mathfrak{g}$  sa  $k$ -algèbre de Lie. Soit  $B = \{b_i\}_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $\mathfrak{g}$ . Il existe alors un voisinage  $W$  de  $1_G$  (dans  $G$ ) et  $n$  fonctions analytiques (coordonnées locales)

$$W \rightarrow k, (t_i)_{1 \leq i \leq n}$$

telles que, pour tout  $g \in W$

$$g = \prod_{1 \leq i \leq n}^{\rightarrow} e^{t_i(g)b_i} = e^{t_1(g)b_1} e^{t_2(g)b_2} \dots e^{t_n(g)b_n}.$$

**Exemple 3.1.** Soit  $M \in GL_+(2, \mathbb{R})$  ( $GL_+(2, \mathbb{R})$  la composante connexe de 1 dans  $GL(2, \mathbb{R})$ ),

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Nous allons effectuer la décomposition d'Iwasawa ([Bou00], ch VII par 3 exemple 7) de  $M$  et pour cela, nous utiliserons la forme  $MTDU = I_2$ .

1. (Orthogonalisation) Nous effectuons un calcul par blocs sur les deux colonnes

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (C_1 \ C_2) \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (C_1 \ t_1 C_1 + C_2).$$

Les deux colonnes sont orthogonales si

$$\begin{aligned} \langle C_1 | t_1 C_1 + C_2 \rangle &= 0 \\ \Rightarrow t_1 &= -\frac{\langle C_1 | C_2 \rangle}{\|C_1\|^2} = -\frac{a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22}}{a_{11}^2 + a_{21}^2}. \end{aligned}$$

On pose,

$$M_1 := M \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} \end{pmatrix} = (C_1^{(1)} \ C_2^{(1)}),$$

a maintenant ses colonnes orthogonales.

2. (Normalisation) Nous allons normaliser  $M_1$ ,

$$\begin{aligned} M_2 &:= \begin{pmatrix} C_1 & C_2^{(1)} \\ \|C_1\| & \|C_2^{(1)}\| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^{(1)} & C_2^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\|C_1^{(1)}\|} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\|C_2^{(1)}\|} \end{pmatrix} = M_1 D \\ &= M_1 e^{-\log(\|C_1^{(1)}\|)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-\log(\|C_2^{(1)}\|)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. (Unitarisation) Puisque les colonnes de  $M_2$  forment une base orthonormale et que  $\det(M_2) > 0$ , on peut écrire

$$M_2 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t_2) & -\sin(t_2) \\ \sin(t_2) & \cos(t_2) \end{pmatrix} = e^{t_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

et parce que  $M_2$  est dans un voisinage de  $I_2$ , on trouve  $t_2 = \arctan\left(\frac{a_{21}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}}\right) = \arctan\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$ .

4. (Par conséquent)

$$MTD = M_2 = e^{\arctan\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

finalement

$$\begin{aligned} M &= e^{\arctan\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} D^{-1} T^{-1} \\ &= e^{\arctan\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} e^{\log(\|C_1\|)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{\log(\|C_2^{(1)}\|)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\frac{\langle C_1 | C_2 \rangle}{\|C_1\|^2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a ainsi obtenu une décomposition de Wei-Norman relative à la base de  $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$  :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 3.2. Structure algébrique des polyzêtas

### 3.2.1. Définitions

Comme le montre l'expression (3.4), le polyzêta  $\zeta(s)$  est la somme d'une série convergente définie pour chaque composition d'entiers positifs  $s = (s_1, \dots, s_r)$ , avec  $s_1 > 1$ , par

$$\zeta(s) := \lim_{z \rightarrow 1} = \text{Li}_s(1) = \sum_{n_1 > \dots > n_r \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}}. \quad (3.4)$$

En particulier, dans le cas où l'indice est un nombre complexe simple dont la partie réelle est strictement supérieure à 1, on l'appelle fonction zêta de Riemann. Il a été établi par Euler pour les entiers pairs que

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(2\pi)^{2k} |b_{2k}|}{2(2k)!}, \text{ pour } k \in \mathbb{N}, \quad (3.5)$$

où les  $b_k \in \mathbb{Q}$  sont les nombres de Bernoulli définis par la série génératrice

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{t^k}{k!}. \quad (3.6)$$

### 3.2.2. Structure algébrique de quasi-mélange des polyzêtas

Nous allons maintenant re-considérer l'alphabet  $Y = \{y_k\}_{k \geq 1}$ . En utilisant le codage du chapitre précédent, tous les mots  $y_{s_1} \dots y_{s_r} \in Y^* \setminus y_1 Y^*$  associent aux compositions d'entiers positifs  $s = (s_1, \dots, s_r)$ ,  $s_1 > 1$  qui sont dits *mots convergents*, sur lesquels les polyzêtas peuvent être définis. De plus, sur cet alphabet  $Y$ , les polyzêtas sont compatibles avec le produit de quasi-mélange (le stuffle), c'est-à-dire que

$$\zeta(w_1)\zeta(w_2) = \zeta(w_1 \sqcup w_2), \forall w_1, w_2 \in Y^* \setminus y_1 Y^*. \quad (3.7)$$

Par exemple, avec  $s_1, s_2 > 1$ , la formule de réflexion de Nielsen

$$\zeta(s_1)\zeta(s_2) = \zeta(s_1, s_2) + \zeta(s_2, s_1) + \zeta(s_1 + s_2), \quad (3.8)$$

correspond au  $\zeta(y_{s_1})\zeta(y_{s_2}) = \zeta(y_{s_1}y_{s_2}) + \zeta(y_{s_2}y_{s_1}) + \zeta(y_{s_1+s_2})$ , ce qui est obtenu par la décomposition

$$\sum_{m>0} \frac{1}{m^{s_1}} \sum_{n>0} \frac{1}{n^{s_2}} = \sum_{m>n>0} \frac{1}{m^{s_1}n^{s_2}} + \sum_{n>m>0} \frac{1}{m^{s_1}n^{s_2}} + \sum_{m=n} \frac{1}{m^{s_1}n^{s_2}}.$$

Ceci en vue de la définition de  $Z_{\sqcup}$  dans (0.4) nous permet de définir un morphisme de l'algèbre de quasi-mélange vers les polyzêtas [Rac00 ; Min13a ; Min13b] comme suit :

**Définition 3.1.** Le morphisme

$$\zeta_{\sqcup} : (\mathbb{Q}\langle Y \rangle, \sqcup, 1_{Y^*}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \cdot, 1)$$

est défini comme celui qui envoie tout mot convergent  $y_{s_1} \dots y_{s_k}$ ,  $s_1 > 1$  sur  $\zeta(s_1, \dots, s_k)$  et  $y_1$  sur 0.

**Exemple 3.2.** i)  $\zeta_{\sqcup}(y_2 \sqcup y_2) = \zeta_{\sqcup}(y_2)^2 = \zeta(2)^2$ . Par ailleurs, comme  $y_2 \sqcup y_2 = 2y_2^2 + y_4$ , on a  $\zeta_{\sqcup}(y_2 \sqcup y_2) = 2\zeta_{\sqcup}(y_2, y_2) + \zeta_{\sqcup}(y_4)$ . On obtient que  $\zeta(2)^2 = 2\zeta(2, 2) + \zeta(4)$ .

ii) Pour le mot divergent  $y_1y_2$ , parce que  $y_1 \sqcup y_2 = y_1y_2 + y_2y_1 + y_3$ , on a

$$\begin{aligned}\zeta_{\sqcup}(y_1y_2) &= \zeta_{\sqcup}(y_1 \sqcup y_2 - y_2y_1 - y_3) \\ &= \zeta_{\sqcup}(y_1)\zeta_{\sqcup}(y_2) - \zeta_{\sqcup}(y_2y_1) - \zeta_{\sqcup}(y_3) \\ &= -\zeta(2, 1) - \zeta(3).\end{aligned}$$

### 3.2.3. Structure algébrique de mélange des polyzêtas

En comprenant que les polyzêtas sont les limites des polylogarithmes quand  $z$  tend vers  $1_-$ , les polyzêtas héritent des propriétés des polylogarithmes comme le fait d'être compatible avec le produit de mélange, ils peuvent (lorsque l'indice est convergent) également s'exprimer par l'intégrale itérée [Che77], avec les différentielles  $\omega_0, \omega_1$  (définis par (2.30)), comme suit

$$\zeta(s_1, \dots, s_r) = \int_{1 > z_1 > \dots > z_k > 0} \omega_{j_1}(z_1) \dots \omega_{j_k}(z_k), \quad (3.9)$$

où  $k = s_1 + \dots + s_r$ ,  $j_i = 1$  (i.e.  $\omega_{j_i}(z) = \omega_1(z)$ ) si  $i \in \{s_1, s_1 + s_2, \dots, s_1 + s_2 + \dots + s_r\}$  et  $j_i = 0$  autrement.

#### Exemple 3.3.

$$\begin{aligned}\int_{0 < t_1 < t_2 < 1} \omega_0(t_2)\omega_1(t_1) &= \int_{0 < t_1 < t_2 < 1} \frac{dt_2}{t_2} \frac{dt_1}{1-t_1} = \int_0^1 \frac{dt_2}{t_2} \int_0^{t_2} \sum_{n=0}^{\infty} t_1^n dt_1 \\ &= \int_0^1 \frac{dt_2}{t_2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_1^n}{n} \right]_0^{t_2} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 dt_2 \frac{t_2^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{t_2^n}{n^2} \right]_0^1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2).\end{aligned}$$

(on peut montrer que, à partir du moment où l'intégrale de droite se fait sur  $\omega_1$ , toutes les interversions ci-dessus sont autorisées [Che77 ; Che09]).

Grâce à cette représentation, on trouve la propriété de mélange des polyzêtas [Che77 ; Che09]. On peut voir plus clair par l'exemple suivant.

**Exemple 3.4.** En écrivant sous la forme de série intégrale itérée, le polyzêta  $\zeta(2)^2$  peut être exprimé par

$$\begin{aligned}\zeta(2)^2 &= \left( \int_{1 > t_1 > t_2 > 0} \frac{dt_1 dt_2}{t_1(1-t_2)} \right) \left( \int_{1 > r_1 > r_2 > 0} \frac{dr_1 dr_2}{r_1(1-r_2)} \right) = \\ &4 \left( \int_{1 > t_1 > t_2 > t_3 > t_4 > 0} \frac{dt_1 dt_2 dt_3 dt_4}{t_1 t_2 (1-t_3)(1-t_4)} \right) + 2 \left( \int_{1 > t_1 > t_2 > t_3 > t_4 > 0} \frac{dt_1 dt_2 dt_3 dt_4}{t_1 t_3 (1-t_2)(1-t_4)} \right)\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\zeta(2)^2 = 4\zeta(3, 1) + 2\zeta(2, 2).$$



Pour exprimer la propriété de mélange des polyzêtas, on a considéré l'alphabet  $X = \{x_0, x_1\}$ . En codant toutes compositions d'entiers positifs  $s = (s_1, \dots, s_r)$ ,  $s_1 > 1$ , par les mots  $x_0^{s_1-1}x_1 \dots x_0^{s_r-1}x_1 \in x_0X^*x_1$ , qui sont encore dits *mots convergents*, sur lesquels polyzêtas peuvent être définis. Par conséquent, suivant l'exemple 3.4, on a la transformation

$$\begin{aligned}\zeta(x_0x_1)^2 &= 2\zeta(x_0x_1x_0x_1) + 4\zeta(x_0^2x_1^2) \\ &= \zeta(x_0x_1 \sqcup x_0x_1).\end{aligned}$$

De plus, cette propriété est encore satisfaite pour tous les mots convergents, c'est-à-dire que,

$$\zeta(w_1)\zeta(w_2) = \zeta(w_1 \sqcup w_2), \forall w_1, w_2 \in x_0X^*x_1. \quad (3.10)$$

Ceci nous permettra de définir de  $Z_{\sqcup}$  (comme annoncé dans (2.41)) ce qui fournit un morphisme entre polyzêtas et l'algèbre de mélange [Rac00 ; Min+00a] comme suit.

**Définition 3.2.** Le morphisme

$$\zeta_{\sqcup} : (\mathbb{Q}\langle X \rangle, \sqcup, 1_{X^*}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \cdot, 1_{\mathbb{R}})$$

est défini comme celui qui envoie tout mot convergent  $x_0^{s_1-1}x_1 \dots x_0^{s_r-1}x_1 \in x_0X^*x_1$  sur  $\zeta(s_1, \dots, s_k)$  et  $x_0, x_1$  sur 0.

**Exemple 3.5.** i)  $\zeta_{\sqcup}(x_0x_1 \sqcup x_0x_1) = \zeta_{\sqcup}(x_0x_1)^2 = \zeta(2)^2$ . Par ailleurs, comme  $x_0x_1 \sqcup x_0x_1 = 4x_0^2x_1^2 + 2x_0x_1x_0x_1$ , on a  $\zeta_{\sqcup}(x_0x_1 \sqcup x_0x_1) = 4\zeta_{\sqcup}(x_0^2x_1^2) + 2\zeta_{\sqcup}(x_0x_1x_0x_1)$  et on obtient que  $\zeta(2)^2 = 4\zeta(3, 1) + 2\zeta(2, 2)$ .

ii) Pour le mot divergent  $x_1x_0$ , parce que  $x_0 \sqcup x_1 = x_0x_1 + x_1x_0$ , on a

$$\begin{aligned}\zeta_{\sqcup}(x_1x_0) &= \zeta(x_0 \sqcup x_1) - \zeta_{\sqcup}(x_0x_1) \\ &= \zeta_{\sqcup}(x_0)\zeta_{\sqcup}(x_1) - \zeta_{\sqcup}(x_0x_1) \\ &= -\zeta(2).\end{aligned}$$

### 3.2.4. Factorisation MRS sur l'algèbre de quasi-mélange $q$ -déformée

Nous avons introduit au chapitre 1 les deux bases en dualité  $\{\Pi_w\}_{w \in Y^*}$  et  $\{\Sigma_w\}_{w \in Y^*}$  de  $\mathbb{Q}[q]\langle Y \rangle$ . Désormais, nous allons utiliser les mêmes notions  $\{\Pi_w\}_{w \in Y^*}$  et  $\{\Sigma_w\}_{w \in Y^*}$  pour le cas  $q = 1$ , c'est-à-dire le cas du produit de quasi-mélange (le stuffle). À ce moment, les algèbres  $\mathcal{H}_{\sqcup_q} = (\mathbb{Q}[q]\langle Y \rangle, conc, 1_{Y^*}, \Delta_{\sqcup_q}, \varepsilon, \mathcal{S}_q^{conc})$  et  $\mathcal{H}_{\sqcup_q}^{\vee} := (\mathbb{Q}[q]\langle Y \rangle, \sqcup_q, 1_{Y^*}, \Delta_{conc}, \varepsilon, \mathcal{S}_q^{\sqcup_q})$  seront respectivement désignées par  $\mathcal{H}_{\sqcup}$  et  $\mathcal{H}_{\sqcup}^{\vee}$ . De plus, la factorisation MRS énoncée sur les algèbres enveloppantes s'applique ici et nous avons [Bui+15b ; Bui+16a ; Mel+89 ; Sch65]

$$\mathcal{D}_Y := \sum_{w \in Y^*} w \otimes w = \sum_{w \in Y^*} \Sigma_w \otimes \Pi_w = \prod_{l \in \mathcal{L}ynY} \exp(\Sigma_l \otimes \Pi_l). \quad (3.11)$$

**Lemme 3.2.** *Pour tout mot convergent  $w \in Y^* \setminus y_1 Y^*$ , le polynôme  $\Sigma_w$  ne contient que les mots convergents. En particulier, pour tout mot de Lyndon  $l \in \mathcal{L}yn Y$ ,  $\Sigma_l$  ne contient que les mots convergents.*

*Démonstration.* Remarquons que un produit (par  $\sqcup_q$ ) des mots convergents est un polynôme des mots convergents. En effet, pour tous  $y_{k_1}, y_{k_2} \in Y \setminus \{y_1\}$ ,  $u, v \in Y^*$ , on a

$$y_{k_1} u \sqcup_q y_{k_2} v = y_{k_1} (u \sqcup_q y_{k_2} v) + y_{k_2} (y_{k_1} u \sqcup_q v) + y_{k_1+k_2} (u \sqcup_q v).$$

Les mots dans ce produit commencent par une des lettres  $y_{k_1}, y_{k_2}$  et  $y_{k_1+k_2}$ , ces sont les mots convergents. D'autre part, en suivant la formule de  $\{\Sigma_w\}_{w \in Y^*}$  précisée dans la proposition 1.23, on peut voir que les  $\{\Sigma_w\}_{w \in Y^*}$  sont calculés par les produits des  $\{\Sigma_l\}_{l \in \mathcal{L}yn Y}$ . En outre, pour chaque mot de Lyndon  $y_{s_1} \dots y_{s_k}$ , les nœuds de l'arbre différentiel inverse  $\mathcal{T}^{-1}(y_{s_1} \dots y_{s_k})$  commencent par les lettres  $y_s$  avec  $s \geq s_1$ . On déduit de ceci que tous les mots du support de  $\Sigma_{y_{s_1} \dots y_{s_k}}$  sont convergents. Cela complète la démonstration.  $\square$

En appliquant le produit de morphisme<sup>5</sup>  $\zeta_{\sqcup} \hat{\otimes} id_{Y^*}$  sur  $\mathcal{D}_Y$ , on a<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} \zeta_{\sqcup} \hat{\otimes} id_Y(\mathcal{D}_Y) &= \sum_{w \in Y^*} \zeta_{\sqcup}(w)w = \sum_{w \in Y^*} \zeta_{\sqcup}(\Sigma_w)\Pi_w \\ &= \prod_{l \in \mathcal{L}yn Y \setminus \{y_1\}} \exp(\zeta(\Sigma_l)\Pi_l) = Z_{\sqcup}. \end{aligned}$$

**Proposition 3.3** ([Rac00; Min+00b]). *La série  $Z_{\sqcup}$  est l'unique exponentielle de Lie vérifiant pour tout  $w \in Y^* \setminus y_1 Y^*$  que  $\langle Z_{\sqcup} \mid w \rangle = \zeta(w)$  et  $\langle Z_{\sqcup} \mid y_1 \rangle = 0$ . De plus, elle est de type groupe pour  $\Delta_{\sqcup}$ , i.e.*

$$\Delta_{\sqcup}(Z_{\sqcup}) = Z_{\sqcup} \hat{\otimes} Z_{\sqcup}. \quad (3.12)$$

De la même façon, nous considérons l'alphabet  $X = \{x_0, x_1\}$  avec le produit de mélange (correspondant à  $q = 0$ ), nous désignons par  $\mathcal{H}_{\sqcup} := (\mathbb{Q}\langle X \rangle, conc, 1_{Y^*}, \Delta_{\sqcup}, \varepsilon, \mathcal{S})$  et  $\mathcal{H}_{\sqcup}^\vee := (\mathbb{Q}\langle X \rangle, \sqcup, 1_{Y^*}, \Delta_{conc}, \varepsilon, \mathcal{S})$  les structures d'algèbres de Hopf en dualité. En appliquant le produit de morphisme  $\zeta_{\sqcup} \hat{\otimes} id_X$  sur la série diagonale  $\mathcal{D}_X$ , on a<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} \zeta_{\sqcup} \hat{\otimes} id_Y(\mathcal{D}_X) &= \sum_{w \in X^*} \zeta_{\sqcup}(w)w = \sum_{w \in X^*} \zeta_{\sqcup}(S_w) \otimes P_w \\ &= \prod_{l \in (\mathcal{L}yn X) \setminus X} \exp(\zeta(S_l)P_l) = Z_{\sqcup}. \end{aligned}$$

5. Ce produit n'est pas continu sur  $\mathbb{C}\langle Y \rangle \otimes \mathbb{C}\langle Y \rangle$ , mais il l'est sur la sous algèbre

$$Iso_{\mathbb{C}}(Y) = span_{\mathbb{C}}\{(u, v) \in Y^* \times Y^* \mid (u) = (v)\}$$

6. Remarquons que  $\zeta_{\sqcup}(\Sigma_{y_1}) = \zeta_{\sqcup}(y_1) = 0$ .

7. Remarquons que  $\zeta_{\sqcup}(S_{x_1}) = \zeta_{\sqcup}(x_1) = 0$ .

**Proposition 3.4** ([Rac00 ; Min+00b]). *La série  $Z_{\sqcup}$  est l'unique exponentielle de Lie vérifiant pour tout  $w \in x_0 X^* x_1$  que  $\langle Z_{\sqcup} \mid w \rangle = \zeta(w)$  et  $\langle Z_{\sqcup} \mid x_0 \rangle = \langle Z_{\sqcup} \mid x_1 \rangle = 0$ . De plus, elle est de type groupe pour  $\Delta_{\sqcup}$ , i.e.*

$$\Delta_{\sqcup}(Z_{\sqcup}) = Z_{\sqcup} \hat{\otimes} Z_{\sqcup}. \quad (3.13)$$

### 3.3. Représentations explicites des polyzêtas sur des éléments générateurs algébriques

#### 3.3.1. Relations entre les séries génératrices

Nous rappelons que

$$\mathcal{H}_1 := \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}\langle X \rangle_{x_1} \simeq \mathbb{Q}\langle Y \rangle, \quad (3.14)$$

$$\mathcal{H}_2 := \mathbb{Q} \oplus x_0 \mathbb{Q}\langle X \rangle_{x_1} \simeq \mathbb{Q} \oplus (Y \setminus \{y_1\}) \mathbb{Q}\langle Y \rangle, \quad (3.15)$$

$$L_1 := (\mathcal{L}yn X) \setminus \{x_0\} \simeq \mathcal{L}yn Y, \quad (3.16)$$

$$L_2 := (\mathcal{L}yn X) \setminus \{x_0, x_1\} \simeq \mathcal{L}yn Y \setminus \{y_1\}. \quad (3.17)$$

Remarquons que les espaces  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  sont respectivement gradués par la longueur et par le poids de mots. Plus précisément,

$$\mathcal{H}_1 = \bigoplus_{n \geq 0} \text{span}_{\mathbb{Q}}(X_n), \quad \mathbb{Q}\langle Y \rangle = \bigoplus_{n \geq 0} \text{span}_{\mathbb{Q}}(Y_n)$$

où  $X_n, Y_n$  désignant les ensembles des mots de longueur et de poids  $n$  respectivement (ce sont des bases). Par exemple,

$$\begin{aligned} X_0 &:= \{1\}, & Y_0 &:= \{1\}, \\ X_1 &:= \{x_1\}, & Y_1 &:= \{y_1\}, \\ X_2 &:= \{x_0 x_1, x_1^2\}, & Y_2 &:= \{y_2, y_1^2\}, \\ X_3 &:= \{x_0^2 x_1, x_0 x_1^2, x_1 x_0 x_1, x_1^3\}, & Y_3 &:= \{y_3, y_2 y_1, y_1 y_2, y_1^3\}. \end{aligned}$$

En outre, nous avons les propriétés d'homogénéité des paires de bases en dualité comme suit :  $\{P_u\}_{u \in X^*}$  et  $\{S_u\}_{u \in X^*}$  sont homogènes pour la longueur dans  $\mathbb{Q}\langle X \rangle$  ; la paire de bases en dualité  $\{\Pi_v\}_{v \in Y^*}$  et  $\{\Sigma_v\}_{v \in Y^*}$  sont homogènes pour le poids dans  $\mathbb{Q}\langle Y \rangle$ . Malheureusement la famille  $\{P_w\}_{w \in X^*}$  n'est pas une base de l'espace  $\mathcal{H}_1$  (par exemple,  $P_{x_0 x_1} = x_0 x_1 - x_1 x_0$ , mais  $x_1 x_0 \notin \mathcal{H}_1$ ). C'est pourquoi on ne peut pas représenter  $x_0 x_1$  dans  $\{P_w\}_{w \in X_n}$ . Nous allons résoudre ce problème en construisant de nouvelles bases comme suit :

**Définition 3.3.** Pour tout  $w \in X^* x_1$ ,  $P'_w$  désigne la réduction de  $P_w$  sur  $\mathcal{H}_1$ .

**Exemple 3.6.**

$$\begin{aligned} P_{x_1} &= x_1 && \in \mathcal{H}_1 \Rightarrow P'_{x_1} &= x_1, \\ P_{x_0x_1} &= x_0x_1 - x_1x_0 && \notin \mathcal{H}_1 \Rightarrow P'_{x_0x_1} &= x_0x_1, \\ P_{x_0x_1x_1} &= x_0x_1x_1 - 2x_1x_0x_1 + x_1x_1x_0 && \notin \mathcal{H}_1 \Rightarrow P'_{x_0x_1x_1} &= x_0x_1x_1 - 2x_1x_0x_1. \end{aligned}$$

En considérant les bases  $\{P_w\}_{w \in X_n}$  et  $\{S_w\}_{w \in X_n}$ , on a la conséquence suivante.

- Proposition 3.5.** *i) Pour tout  $w \in X_n$ ,  $n \geq 1$ , on a  $S_w \in \mathcal{H}_1$ .  
 ii) La famille  $\{P'_w\}_{w \in X_n}$  est triangulaire supérieure par rapport à la base  $\{P_w\}_{w \in X_n}$ .  
 iii) Les familles  $\{P'_w\}_{w \in X_n}$  et  $\{S_w\}_{w \in X_n}$  sont les bases en dualité de  $\mathcal{H}_1$ .*

*Démonstration.* i) Grâce au lemme 3.2, on a que pour tout mot  $w = x_0u \in \mathcal{H}_1$ , alors  $S_w$  ne contient que les mots convergents. C'est-à-dire  $S_w$  est dans  $\mathcal{H}_1$ . En outre,  $S_{x_1^k} = \frac{x_1^{\sqcup k}}{k} = x_1^k \in \mathcal{H}_1$ . En fin, pour tout  $w = x_1^k x_0 u x_1$ , on a  $S_w = x_1 \sqcup S_{x_1^{k-1} x_0 u x_1}$  et par récurrence, on a à la fin que  $S_w = x_1^k \sqcup S_{x_0 u x_1} \in \mathcal{H}_1$ .

ii) La confirmation *ii)* obtient immédiatement par la dualité des bases  $\{P_w\}_{w \in X_n}$  et  $\{S_w\}_{w \in X_n}$ .

iii) En utilisant la triangularité des familles  $\{P'_w\}_{w \in X_n}$  et  $\{S_w\}_{w \in X_n}$  et suivant la méthode de représentation un polynôme dans l'algorithme 1, nous obtenons facilement que les familles sont les bases de  $\mathcal{H}_1$ . En autre terme, pour tous mots  $u, v \in X_n$ ,

$$\begin{aligned} \langle P'_u | S_v \rangle &= \sum_{w \in X_n} \langle P'_u | w \rangle \langle w | S_v \rangle \\ &= \sum_{w \in X_n} \langle P'_u | w \rangle \langle w | S_v \rangle + \sum_{\substack{|w|=n \\ w \notin X_n}} \langle P'_u | w \rangle \langle w | S_v \rangle, \quad (\langle w | S_v \rangle = 0, \forall w \notin X_n) \\ &= \sum_{|w|=n} \langle P_u | w \rangle \langle w | S_v \rangle = \langle P_u | S_v \rangle \\ &= \delta_{uv}. \end{aligned}$$

Cela démontre l'affirmation *iii)*. □

Pour construire le pont entre les deux espaces, l'une sur l'alphabet  $X$  et l'autre sur l'alphabet  $Y$ , nous utilisons le morphisme de concaténation  $\pi_X$  qui envoie le mot  $y_{s_1} \dots y_{s_r}$  sur  $x_0^{s_1-1} x_1 \dots x_0^{s_r-1} x_1$ ,  $\pi_Y$  désigne son adjoint. Nous prolongeons  $\pi_Y$  partout  $X^*$  par la convention que  $\pi_Y(w) = 0$  lorsque  $w$  termine par  $x_0$ . Nous allons maintenant établir une représentation matricielle, par poids, de l'application linéaire  $\pi_Y$  suivant les bases  $\{P_u\}_{u \in X^* x_1}$  et  $\{\Pi_v\}_{v \in Y^*}$ . Remarquons que pour tout  $n > 0$ , il y a  $2^{n-1}$  mots dans  $Y_n$  ou dans  $X_n$  et pour tout  $u_i^{(n)} \in X_n$ , nous avons  $\pi_Y(P'_{u_i^{(n)}}) = \pi_Y(P_{u_i^{(n)}})$ . Appelons  $M^{(n)}$ ,  $2^{n-1} \times 2^{n-1}$  la représentation matricielle de  $\pi_Y : span_{\mathbb{Q}}(X_n) \longrightarrow span_{\mathbb{Q}}(Y_n)$  sur les deux

bases  $(P_{u_i^{(n)}})_{1 \leq i \leq 2^{n-1}}$  et  $(\Pi_{v_i^{(n)}})_{1 \leq i \leq 2^{n-1}}$  de l'ordre croissant des mots  $u_1^{(n)} < \dots < u_{2^{n-1}}^{(n)}$  et  $v_1^{(n)} < \dots < v_{2^{n-1}}^{(n)}$ . Par exemple, pour  $n = 2$ , on arrange les deux bases en l'ordre croissant de mots  $(P'_{x_0x_1}, P'_{x_1^2})$  et  $(\Pi_{y_2}, \Pi_{y_1^2})$ . Alors,

$$\begin{matrix} \Pi_{y_2} & \Pi_{y_1^2} \\ \pi_Y P'_{x_0x_1} & \left( \begin{array}{cc} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \\ \pi_Y P'_{x_1^2} & \end{matrix} \implies M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De la même façon, nous pouvons établir les représentations matricielles  $M^{(3)}$  ce qui fait correspondre les bases  $\{P'_{x_0^2x_1}, P'_{x_0x_2}, P'_{x_1x_0x_1}, P'_{x_1^3}\}$  et  $\{\Pi_{y_3}, \Pi_{y_2y_1}, \Pi_{y_1y_2}, \Pi_{y_1^3}\}$  :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 & 1/6 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et  $M^{(4)}$  ce qui fait correspondre les bases  $\{P'_{x_0^3x_1}, P'_{x_0^2x_2}, P'_{x_0x_1x_0x_1}, P'_{x_0x_1^3}, P'_{x_1x_0^2x_1}, P'_{x_1x_0x_1^2}, P'_{x_1^2x_0x_1}, P'_{x_1^4}\}$  et  $\{\Pi_{y_4}, \Pi_{y_3y_1}, \Pi_{y_2^2}, \Pi_{y_1y_3}, \Pi_{y_1y_2y_1}, \Pi_{y_1^2y_2}, \Pi_{y_1^4}\}$  :

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/6 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/24 \\ 0 & 1 & -2 & -1/2 & 1 & -1/2 & -1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1 & 1/2 & 0 & 1/12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En posant

$$N_n := ({}^t(M_n))^{-1}, \quad (3.18)$$

nous pouvons représenter, par dualité,

$$\begin{pmatrix} \pi_Y P'_{u_1^{(n)}} \\ \vdots \\ \pi_Y P'_{u_{2^{n-1}}^{(n)}} \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} \Pi_{v_1^{(n)}} \\ \vdots \\ \Pi_{v_{2^{n-1}}^{(n)}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \pi_Y S_{u_1^{(n)}} \\ \vdots \\ \pi_Y S_{u_{2^{n-1}}^{(n)}} \end{pmatrix} = N_n \begin{pmatrix} \Sigma_{v_1^{(n)}} \\ \vdots \\ \Sigma_{v_{2^{n-1}}^{(n)}} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Autrement dit, nous avons les correspondances (commutatives) suivantes

$$\begin{array}{ccc}
 (\text{span}_{\mathbb{Q}}(X_n), (P'_{u_i^{(n)}})_{1 \leq i \leq 2^{n-1}}) & \xrightarrow{\frac{\pi_Y}{M_n}} & (\text{span}_{\mathbb{Q}}(Y_n), (\Pi_{v_i^{(n)}})_{1 \leq i \leq 2^{n-1}}) \\
 \downarrow \text{dualité} & & \downarrow \text{dualité} \\
 (\text{span}_{\mathbb{Q}}(X_n), (S_{u_i^{(n)}})_{1 \leq i \leq 2^{n-1}}) & \xrightarrow{(\frac{\pi_Y}{M_n})^{-1}} & (\text{span}_{\mathbb{Q}}(Y_n), (\Sigma_{v_i^{(n)}})_{1 \leq i \leq 2^{n-1}})
 \end{array}$$

Grâce à la proposition 2.7.i), l'étude de la monodromie des polylogarithmes (prolongement analytique sur un chemin fermé) fournit un autre moyen pour calculer les relations entre polyzêtas [Rac00 ; Min+00b ; Min13a ; Min13b],

$$Z_{\sqcup} = B'(y_1) \pi_Y Z_{\sqcup}, \quad (3.20)$$

où [Cos+09],

$$B'(y_1) = \exp \left( \sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^{k-1} \zeta(k)}{k} y_1^k \right). \quad (3.21)$$

Le paragraphe prochain va suivre cette formule, grâce à la dualité, nous allons récrire sur un même base et puis, identifier les coefficients pour trouver les représentations de relations polynomiales des polyzêtas.

Pour terminer la section, nous remarquons que, par les propriétés de mélange et de quasi-mélange des polyzêtas et en suivant l'identité (3.20), on obtient les égalités suivantes, pour tous  $l \in (\mathcal{L}ynX) \setminus X$  et  $l' \in (\mathcal{L}ynY) \setminus \{y_1\}$ ,

1.  $\zeta_{\sqcup}(x_1 \sqcup l - x_1 l) = -\zeta_{\sqcup}(x_1 l) = -\langle Z_{\sqcup} | x_1 l \rangle$ ,
2.  $\zeta_{\sqcup}(y_1 \sqcup l' - y_1 l') = -\zeta_{\sqcup}(y_1 l') = -\langle Z_{\sqcup} | y_1 l' \rangle$ ,
3.  $\langle B'(y_1) | y_1 \rangle = 0$ .

### 3.3.2. Relations entre polyzêtas grâce à des séries génératrices

Pour trouver des relations entre polyzêtas par identification les coordonnées locales suivant la formule (3.20), nous allons d'abord déterminer les coefficients du développement de  $B'(y_1)$  à la forme d'une série génératrice ordinaire de  $y_1$ .

**Lemme 3.6.** *On a l'expression*

$$B'(y_1) = 1 + \sum_{m \geq 2} B^{(m)} y_1^m, \quad \text{où} \quad B^{(m)} = \sum_{i=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{1}{i!} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_i \geq 2 \\ k_1 + \dots + k_i = m}} (-1)^{m-i} \frac{\zeta(k_1) \dots \zeta(k_i)}{k_1 \dots k_i},$$

où  $\lfloor m/2 \rfloor$  est le plus grand entier inférieur ou égal à  $m/2$ .

*Démonstration.* En développant en séries les exponentielles dans  $B'(y_1)$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}
B'(y_1) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left( \sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^{k-1} \zeta(k)}{k} y_1^k \right)^n \\
&= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{k_1, \dots, k_n \geq 2} \frac{(-1)^{k_1 + \dots + k_n - n} \zeta(k_1) \dots \zeta(k_n)}{k_1 \dots k_n} y_1^{k_1 + \dots + k_n} \\
&= 1 + \sum_{m \geq 2} \left( \sum_{n=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \geq 2 \\ k_1 + \dots + k_n = m}} \frac{(-1)^{m-n} \zeta(k_1) \dots \zeta(k_n)}{k_1 \dots k_n} \right) y_1^m \\
&= 1 + \sum_{m \geq 2} B^{(m)} y_1^m.
\end{aligned}$$

□

### Exemple 3.7.

$$\begin{aligned}
B^{(2)} &= -\frac{\zeta(2)}{2}, & B^{(3)} &= \frac{\zeta(3)}{3}, \\
B^{(4)} &= -\frac{\zeta(4)}{4} + \frac{1}{2} \frac{\zeta(2)^2}{2^2}, & B^{(5)} &= \frac{\zeta(5)}{5} - \frac{\zeta(2)}{2} \frac{\zeta(3)}{3}.
\end{aligned}$$

### Identification sur la base $\{\Pi_w\}_{w \in Y^*}$

En utilisant la dualité des bases, nous récrivons (3.20) comme suit

$$\sum_{v \in Y^*} \zeta_{\sqcup}(\Sigma_v) \Pi_v = B'(y_1) \sum_{v \in Y^*} \zeta_{\sqcup}(\pi_X(\Sigma_v)) \Pi_v, \quad (3.22)$$

Par ailleurs, d'après le lemme 3.6, on exprime  $B'(y_1)$  comme série génératrice ordinaire de  $y_1$ . De plus,

$$y_1^k \Pi_v = \Pi_{y_1^k} \Pi_v = \Pi_{y_1^k v}, \quad \forall k \geq 1, v \in Y^*.$$

Nous pouvons alors identifier les coefficients de deux expressions de (3.22) et obtenir que :

**Proposition 3.7.** *i) Pour tout*<sup>8</sup>  $v = l_1^{i_1} \dots l_k^{i_k}$ ,  $l_1, \dots, l_k \in \mathcal{Lyn}Y \setminus \{y_1\}$ ,  $l_1 > \dots > l_k$ ,  $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{\zeta(\Sigma_{l_1})^{i_1} \dots \zeta(\Sigma_{l_k})^{i_k}}{i_1! \dots i_k!} = \zeta(\pi_X \Sigma_v).$$

8. Nous utilisons la même notation  $\zeta(P)$  au lieu de  $\zeta_{\sqcup}(P)$  ou  $\zeta_{\sqcup}(P)$  lorsque  $P$  ne contient que les mots convergents, i.e. les mots dans  $x_0 X^* x_1$  ou  $Y^* \setminus y_1 Y^*$ .

ii) Pour tout mot  $v = y_1^k w \in Y^*$  avec  $k \geq 1, w \in Y^* \setminus y_1 Y^*$ ,

$$\zeta_{\sqcup}(\pi_X \Sigma_v) + \sum_{m=2}^k B^{(m)} \zeta_{\sqcup}(\pi_X \Sigma_{y_1^{k-m} w}) = 0.$$

*Démonstration.* D'après le lemme 3.6, on peut voir que  $\langle B'(y_1) \mid 1_{Y^*} \rangle = 1, \langle B'(y_1) \mid y_1 \rangle = 0$  et

$$\forall m \geq 2, \quad \langle B'(y_1) \mid y_1^m \rangle = B^{(m)}.$$

En regardant la base  $\{\Pi_w\}_{w \in Y^*}$  comme un système de coordonnées locales, nous identifions les coefficients des deux côtés de (3.22) et le résultat s'ensuit.  $\square$

**Exemple 3.8.** 1. Pour  $v = y_2$ ,

$$\zeta(\Sigma_{y_2}) = \zeta(S_{x_0 x_1}).$$

2. Pour  $v = y_2 y_3$ ,

$$\zeta(\Sigma_{y_2 y_3}) = \zeta(S_{x_0 x_1 x_0^2 x_1}) - 2\zeta(S_{x_0^2 x_1 x_0 x_1}) - 2\zeta(S_{x_0^3 x_1^2}) + \zeta(S_{x_0^4 x_1}).$$

3. Pour  $v = y_1^3$ ,

$$-\frac{1}{2}\zeta(S_{x_0 x_1^2}) + \frac{1}{6}\zeta(S_{x_0^2 x_1}) + B^{(3)} = 0.$$

4. Pour  $v = y_1^2 y_2$ ,

$$\zeta(S_{x_0 x_1^3}) - \zeta(S_{x_0^2 x_1^2}) + \frac{1}{2}\zeta(S_{x_0^3 x_1}) + B^{(2)} = 0.$$

**Identification sur la base  $\{P_w\}_{w \in X^*}$**

En appliquant l'application  $\pi_X$  aux deux côtés de (3.22) et grâce à la dualité des bases, nous pouvons récrire l'identité (3.22) comme suit

$$B'(x_1) \sum_{u \in X^* x_1} \zeta_{\sqcup}(S_u) P'_u = \sum_{u \in X^* x_1} \zeta_{\sqcup}(\pi_Y S_u) P'_u. \quad (3.23)$$

Remarquons que  $B'(x_1)$  est une série d'une seule lettre,  $x_1$ , et

$$x_1^k P_u = P_{x_1^k} P_u = P_{x_1^k u}, \quad \forall k \geq 1, u \in X^*,$$

Nous trouvons, par même manière, les assertions suivantes.

**Proposition 3.8.** i) Pour tout mot  $u = l_1^{i_1} \dots l_k^{i_k}, l_1, \dots, l_k \in \mathcal{Lyn} X \setminus X, l_1 > \dots > l_k, i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{\zeta(S_{l_1})^{i_1} \dots \zeta(S_{l_k})^{i_k}}{i_1! \dots i_k!} = \zeta(\pi_Y S_u).$$



ii) Pour tout mot  $u \in x_1 X^* \setminus x_1^2 X^*$ ,

$$\zeta_{\sqcup}(\pi_Y S_u) = 0.$$

iii) Pour tout mot  $u = x_1^k w \in X^*$  avec  $k \geq 2$ ,  $w \in X^* \setminus x_1 X^*$ ,

$$B^{(k)}\zeta(S_w) = \zeta_{\sqcup}(\pi_Y S_u).$$

*Démonstration.* De la même façon qu'à la proposition 3.7, nous regardons  $\{P_w\}_{w \in X^*}$  comme un système de coordonnées locales, nous identifions les coefficients des deux côtés de la formule (3.23) et alors le résultat s'ensuit.  $\square$

**Exemple 3.9.** 1. Pour  $u = x_0 x_1$ ,

$$\zeta(S_{x_0 x_1}) = \zeta(\Sigma_{y_2}).$$

2. Pour  $u = x_0 x_1 x_0^2 x_1$ ,

$$\zeta(S_{x_0 x_1 x_0^2 x_1}) = \zeta(\Sigma_{y_2 y_3}) + 2\zeta(\Sigma_{y_3 x_2}) + 6\zeta(\Sigma_{y_4 x_1}) - 5\zeta(\Sigma_{y_5}).$$

3. Pour  $u = x_1 x_0 x_1$ ,

$$\zeta(\Sigma_{y_2 y_1}) - \frac{3}{2}\zeta(\Sigma_{y_3}) = 0.$$

4. Pour  $u = x_1^2 x_0 x_1$ ,

$$B^{(2)}\zeta(S_{x_0 x_1}) = 2\zeta(\Sigma_{y_4}) - \zeta(\Sigma_{y_2})^2 - \zeta(\Sigma_{y_3 y_1}).$$

### 3.3.3. Algorithmes pour l'exploration de la structure des polyzêtas

Comme on l'a vu dans les propositions 3.7 et 3.8, il y a des relations entre polyzêtas indexés aux bases  $\{S_w\}_{w \in X^*}$  et  $\{\Sigma_w\}_{w \in Y^*}$ . En fait, grâce à la proposition 1.23.iv), nous pouvons représenter également ces relations sur les bases de transcendance,  $\{S_l\}_{l \in \mathcal{L}_{ym}X}$  et  $\{\Sigma_l\}_{l \in \mathcal{L}_{ym}Y}$  respectivement. Dans ce paragraphe, nous allons introduire deux algorithmes, l'un grâce à ces formules et l'autre grâce aux structures différentes induites par les produits de mélange et de quasi-mélange. Puis, les relations vont être formées par une réduction en poids, et donner des indications sur la structure des polyzêtas en termes d'éléments irréductibles indexés aux bases  $\{S_l\}_{l \in \mathcal{L}_{ym}X}$  et  $\{\Sigma_l\}_{l \in \mathcal{L}_{ym}Y}$ . Un résultat semblable apparaîtra dans le prochain paragraphe.

**Algorithme 3.** Cet algorithme utilise la proposition 3.7 et l'algorithme 1 pour établir des relations polynomiales entre polyzêtas sur la base  $\{S_l\}_{l \in \mathcal{L}_{ym}X}$  ou utilise la proposition 3.8 et l'algorithme 1 pour établir des relations polynomiales entre polyzêtas sur la base  $\{\Sigma_l\}_{l \in \mathcal{L}_{ym}Y}$ . Nous montrons ici le deuxième cas.

**ENTREE :** Un entier positif  $n$ .

**SORTIE :** Représentations des polyzêtas de poids  $n$  en termes d'éléments irréductibles des polyzêtas indexés à la base  $\{\Sigma_l\}_{l \in \mathcal{L}_{yn}Y}$ .

**Étape 1.** Lister les mots de poids  $n$  de  $X^*x_1$ , ma liste est notée par  $X_n$ .

**Étape 2.** Pour chaque  $w \in X_n$ , déterminer un polynôme  $\mathcal{P} := \pi_Y(S_w)$  dans  $\mathbb{Q}\langle Y \rangle$  et, grâce à l'algorithme 1, représenter  $\zeta(\mathcal{P})$  en termes des  $\{\zeta_{\Sigma_l}\}_{l \in \mathcal{L}_{yn}Y}$  des données de poids inférieurs, et établir une relation polynomiale comme suit :

- i) Si  $w = x_1u$ ,  $u \in x_0X^*x_1$ , créer la relation  $\zeta(S_w) = 0$  (comme  $\zeta(S_w) = \zeta(x_1 \sqcup S_u) = 0$ ).
- ii) Si  $w \in x_0X^*x_1 \setminus \mathcal{L}_{yn}X$ , récrire  $w$  sous forme de sa factorisation de Lyndon,  $w = l_1^{i_1} \dots l_k^{i_k}$ . Obtenir les  $\zeta(S_{l_j})$ ,  $1 \leq j \leq k$  à partir des données de poids inférieurs et établir la relation

$$\zeta(S_w) = \frac{1}{i_1! \dots i_k!} \zeta(S_{l_1})^{i_1} \dots \zeta(S_{l_k})^{i_k}$$

**Étape 3.** Réduire toutes ces relations aux représentations des polyzêtas en termes d'éléments irréductibles.

Le lemme suivant va donner une autre façon pour trouver des relations entre polyzêtas indexés par les bases  $\{S_l\}_{l \in \mathcal{L}_{yn}X}$  et  $\{\Sigma_l\}_{l \in \mathcal{L}_{yn}Y}$ .

**Lemme 3.9.** Pour tous mots  $l_1, l_2 \in (\mathcal{L}_{yn}X) \setminus X$  (resp.  $l_1, l_2 \in \mathcal{L}_{yn}Y \setminus \{y_1\}$ ), on a

$$\begin{aligned} \zeta(S_{l_1 \sqcup S_{l_2}}) &= \zeta(\pi_Y(S_{l_1}) \boxplus \pi_Y(S_{l_2})) \\ (\text{resp. } \zeta(\Sigma_{l_1} \boxplus \Sigma_{l_2})) &= \zeta(\pi_X(\Sigma_{l_1}) \sqcup \pi_X(\Sigma_{l_2})). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Remarquons, pour chaque  $w \in X^*$ ,  $S_w = w + \sum_{v < w} \alpha_v v$  et si  $l \in (\mathcal{L}_{yn}X) \setminus X$ ,  $l \in x_0X^*x_1$  et que l'on a  $\zeta(l_1 \sqcup l_2) = \zeta(\pi_Y(l_1) \boxplus \pi_Y(l_2))$  et  $\zeta_{\sqcup}(x_1 \sqcup l) = \zeta_{\boxplus}(y_1 \boxplus \pi_Y(l))$  [Min+00a]. Le résultat s'obtient donc par soustraction.  $\square$

**Exemple 3.10.** Pour  $l_1 = x_0x_1$ ,  $l_2 = x_0^2x_1^2$  (dans  $\mathcal{L}_{yn}X$ ) et  $l_1 = y_2$ ,  $l_2 = y_3y_1$  (dans  $\mathcal{L}_{yn}Y$ ), on a

$$\begin{aligned} \zeta(S_{x_0x_1})\zeta(S_{x_0^2x_1^2}) &= \zeta(\Sigma_{y_2})\zeta(\Sigma_{y_3y_1}) - \frac{1}{2}\zeta(\Sigma_{y_2})\zeta(\Sigma_{y_4}), \\ \zeta(\Sigma_{y_2})\zeta(\Sigma_{y_3y_1}) &= \zeta(S_{x_0x_1})\zeta(S_{x_0^2x_1^2}) + \frac{1}{2}\zeta(S_{x_0x_1})\zeta(S_{x_0^3x_1}). \end{aligned}$$

**Algorithme 4.** Cet algorithme utilise le lemme 3.9 et l'algorithme 1 pour établir des relations polynomiales entre polyzêtas sur la base  $\{S_l\}_{l \in \mathcal{L}_{yn}X}$  ou la base  $\{\Sigma_l\}_{l \in \mathcal{L}_{yn}Y}$ . Nous proposons ici le deuxième cas.

**ENTREE :** Un entier positif  $n$ .

**SORTIE :** Représentations des polyzêtas de poids  $n$  en termes d'éléments irréductibles entre polyzêtas indexés à la base  $\{\Sigma_l\}_{l \in \mathcal{L}_{yn}Y}$ .

**Étape 1.** Lister les mots de longueur  $n$  dans  $x_0X^*x_1$  ou  $x_1x_0X^*x_1$ , leur ensemble sera noté  $X_n$ .

**Étape 2.** Établir des relations polynomiales de poids  $n$  comme suit. Pour chaque  $w \in X_n$ , déterminer un polynôme, désigné par  $\mathcal{P}_w$ , dans  $\mathbb{Q}\langle Y \rangle$  de la manière suivante :

i) Si  $w \in \mathcal{Lyn}X$ , prendre  $\mathcal{P}_w := \pi_Y(S_{l_1}) \boxplus \pi_Y(S_{l_2}) - \pi_Y(S_{l_1} \sqcup S_{l_2})$ , où  $(l_1, l_2)$  est la factorisation standard de  $w$ .

ii) Si  $w = x_1w_1$ , prendre  $\mathcal{P}_w := \pi_Y(S_{x_1}) \boxplus \pi_Y(S_{w_1}) - \pi_Y(S_{x_1} \sqcup S_{w_1})$ .

iii) Si  $w = l_1^{i_1} \dots l_k^{i_k}$ ,  $l_1, \dots, l_k \in \mathcal{Lyn}X, l_1 > \dots > l_k$ , prendre  $\mathcal{P}_w := \pi_Y(S_{l_1}) \boxplus^{i_1} \boxplus \dots \boxplus \pi_Y(S_{l_k}) \boxplus^{i_k} - \pi_Y(S_{l_1} \sqcup \dots \sqcup S_{l_k})$ .

Grâce à l'algorithme 1, représenter  $\zeta(\Sigma_{\mathcal{P}_w})$  en fonction des  $\{\zeta(\Sigma_l)\}_{l \in \mathcal{Lyn}Y}$  (ici, les  $\zeta(\Sigma_l)$  sont pris dans les données de poids inférieurs). En fin, établir la relation  $\zeta(\Sigma_{\mathcal{P}}) = 0$ .

**Étape 3.** Enfin établir la relation entre représentations des polyzêtas en termes d'éléments irréductibles.

Ces algorithmes donnent des relations polynomiales homogènes entre les coordonnées locales  $\{\Sigma_l\}_{l \in \mathcal{Lyn}Y}$  (resp.  $\{S_l\}_{l \in \mathcal{Lyn}X}$ ). Chaque identité est indexé par un mot de Lyndon et n'est pas un tautologie de la forme suivante

$$\zeta(\Sigma_l) = \zeta(\Sigma_l) \quad \text{et} \quad \zeta(S_l) = \zeta(S_l). \quad (3.24)$$

Remplaçant “=” par “ $\longrightarrow$ ” dans ces relations polynomiales homogènes, nous obtenons un système de réécriture noethérien dans l'ensemble  $\{\Sigma_l\}_{l \in \mathcal{Lyn}Y}$  (resp.  $\{S_l\}_{l \in \mathcal{Lyn}X}$ ). Ce système a pour termes irréductibles les polyzêtas donnant une tautologie comme en (3.24) (éléments finaux), ils sont considérés comme générateurs algébriques de l'algèbre des polyzêtas convergents [Rac00 ; Min13a ; Min13b].

### 3.3.4. Exemples obtenus par programme en Maple

Les résultats suivants sont calculés par notre package en Maple [Bui+15a ; Bui+16a] grâce à l'algorithme 3 (ou l'algorithme 4).

**Représentations des polyzêtas en termes des polyzêtas irréductibles sur la base  $\{\Sigma_l\}_{l \in \mathcal{Lyn}Y}$**

Poids 3

$$\zeta(\Sigma_{y_2y_1}) = \frac{3}{2}\zeta(\Sigma_{y_3})$$

Poids 4

$$\begin{aligned}\zeta(\Sigma_{y_4}) &= \frac{2}{5}\zeta(\Sigma_{y_2})^2 \\ \zeta(\Sigma_{y_3y_1}) &= \frac{3}{10}\zeta(\Sigma_{y_2})^2 \\ \zeta(\Sigma_{y_2y_1^2}) &= \frac{2}{3}\zeta(\Sigma_{y_2})^2\end{aligned}$$

Poids 5

$$\begin{aligned}\zeta(\Sigma_{y_3y_2}) &= 3\zeta(\Sigma_{y_3})\zeta(\Sigma_{y_2}) - 5\zeta(\Sigma_{y_5}) \\ \zeta(\Sigma_{y_4y_1}) &= -\zeta(\Sigma_{y_3})\zeta(\Sigma_{y_2}) + \frac{5}{2}\zeta(\Sigma_{y_5}) \\ \zeta(\Sigma_{y_2^2y_1}) &= \frac{3}{2}\zeta(\Sigma_{y_3})\zeta(\Sigma_{y_2}) - \frac{25}{12}\zeta(\Sigma_{y_5}) \\ \zeta(\Sigma_{y_3y_1^2}) &= \frac{5}{12}\zeta(\Sigma_{y_5}) \\ \zeta(\Sigma_{y_2y_1^3}) &= \frac{1}{4}\zeta(\Sigma_{y_3})\zeta(\Sigma_{y_2}) + \frac{5}{4}\zeta(\Sigma_{y_5})\end{aligned}$$

Poids 6

$$\begin{aligned}\zeta(\Sigma_{y_6}) &= \frac{8}{35}\zeta(\Sigma_{y_2})^3 \\ \zeta(\Sigma_{y_4y_2}) &= \zeta(\Sigma_{y_3})^2 - \frac{4}{21}\zeta(\Sigma_{y_2})^3 \\ \zeta(\Sigma_{y_5y_1}) &= \frac{2}{7}\zeta(\Sigma_{y_2})^3 - \frac{1}{2}\zeta(\Sigma_{y_3})^2 \\ \zeta(\Sigma_{y_3y_1y_2}) &= -\frac{17}{30}\zeta(\Sigma_{y_2})^3 + \frac{9}{4}\zeta(\Sigma_{y_3})^2 \\ \zeta(\Sigma_{y_3y_2y_1}) &= 3\zeta(\Sigma_{y_3})^2 - \frac{9}{10}\zeta(\Sigma_{y_2})^3 \\ \zeta(\Sigma_{y_4y_1^2}) &= \frac{3}{10}\zeta(\Sigma_{y_2})^3 - \frac{3}{4}\zeta(\Sigma_{y_3})^2 \\ \zeta(\Sigma_{y_2^2y_1^2}) &= \frac{11}{63}\zeta(\Sigma_{y_2})^3 - \frac{1}{4}\zeta(\Sigma_{y_3})^2 \\ \zeta(\Sigma_{y_3y_1^3}) &= \frac{1}{21}\zeta(\Sigma_{y_2})^3 \\ \zeta(\Sigma_{y_2y_1^4}) &= \frac{17}{50}\zeta(\Sigma_{y_2})^3 + \frac{3}{16}\zeta(\Sigma_{y_3})^2\end{aligned}$$

Poids 7

$$\zeta(\Sigma_{y_4y_3}) = \frac{35}{2}\zeta(\Sigma_{y_7}) - 10\zeta(\Sigma_{y_2})\zeta(\Sigma_{y_5})$$

$$\begin{aligned}
\zeta(\Sigma_{y_5 y_2}) &= 5\zeta(\Sigma_{y_2})\zeta(\Sigma_{y_5}) - \frac{21}{2}\zeta(\Sigma_{y_7}) + \frac{4}{5}\zeta(\Sigma_{y_2})^2\zeta(\Sigma_{y_3}) \\
\zeta(\Sigma_{y_6 y_1}) &= -\zeta(\Sigma_{y_2})\zeta(\Sigma_{y_5}) - \frac{2}{5}\zeta(\Sigma_{y_2})^2\zeta(\Sigma_{y_3}) + \frac{7}{2}\zeta(\Sigma_{y_7}) \\
\zeta(\Sigma_{y_3 y_2^2}) &= \frac{3}{2}\zeta(\Sigma_{y_2})^2\zeta(\Sigma_{y_3}) - \frac{217}{48}\zeta(\Sigma_{y_7}) \\
\zeta(\Sigma_{y_3^2 y_1}) &= \frac{7}{24}\zeta(\Sigma_{y_7}) \\
\zeta(\Sigma_{y_4 y_1 y_2}) &= \frac{1}{10}\zeta(\Sigma_{y_2})^2\zeta(\Sigma_{y_3}) + \frac{7}{48}\zeta(\Sigma_{y_7}) \\
\zeta(\Sigma_{y_4 y_2 y_1}) &= \frac{6}{5}\zeta(\Sigma_{y_2})^2\zeta(\Sigma_{y_3}) - \frac{175}{48}\zeta(\Sigma_{y_7}) \\
\zeta(\Sigma_{y_5 y_1^2}) &= -\frac{3}{10}\zeta(\Sigma_{y_2})^2\zeta(\Sigma_{y_3}) + \frac{7}{6}\zeta(\Sigma_{y_7}) \\
\zeta(\Sigma_{y_2^3 y_1}) &= \frac{17}{20}\zeta(\Sigma_{y_2})^2\zeta(\Sigma_{y_3}) + \frac{5}{12}\zeta(\Sigma_{y_2})\zeta(\Sigma_{y_5}) - \frac{301}{96}\zeta(\Sigma_{y_7}) \\
\zeta(\Sigma_{y_3 y_1^2 y_2}) &= 2\zeta(\Sigma_{y_2})^2\zeta(\Sigma_{y_3}) - \frac{371}{96}\zeta(\Sigma_{y_7}) - \frac{5}{4}\zeta(\Sigma_{y_2})\zeta(\Sigma_{y_5}) \\
\zeta(\Sigma_{y_3 y_1 y_2 y_1}) &= \frac{87}{20}\zeta(\Sigma_{y_2})^2\zeta(\Sigma_{y_3}) - \frac{5}{2}\zeta(\Sigma_{y_2})\zeta(\Sigma_{y_5}) - \frac{301}{32}\zeta(\Sigma_{y_7}) \\
\zeta(\Sigma_{y_3 y_2 y_1^2}) &= \frac{9}{5}\zeta(\Sigma_{y_2})^2\zeta(\Sigma_{y_3}) + \frac{5}{4}\zeta(\Sigma_{y_2})\zeta(\Sigma_{y_5}) - \frac{749}{96}\zeta(\Sigma_{y_7}) \\
\zeta(\Sigma_{y_4 y_1^3}) &= -\frac{2}{3}\zeta(\Sigma_{y_2})^2\zeta(\Sigma_{y_3}) + \frac{5}{12}\zeta(\Sigma_{y_2})\zeta(\Sigma_{y_5}) + \frac{49}{32}\zeta(\Sigma_{y_7}) \\
\zeta(\Sigma_{y_2 y_1 y_2 y_1^2}) &= -\frac{3}{20}\zeta(\Sigma_{y_2})^2\zeta(\Sigma_{y_3}) + \frac{721}{480}\zeta(\Sigma_{y_7}) \\
\zeta(\Sigma_{y_2^2 y_1^3}) &= -\frac{1}{40}\zeta(\Sigma_{y_2})^2\zeta(\Sigma_{y_3}) + \frac{5}{4}\zeta(\Sigma_{y_2})\zeta(\Sigma_{y_5}) - \frac{1757}{960}\zeta(\Sigma_{y_7}) \\
\zeta(\Sigma_{y_3 y_1^4}) &= \frac{49}{480}\zeta(\Sigma_{y_7}) \\
\zeta(\Sigma_{y_2 y_1^5}) &= \frac{33}{200}\zeta(\Sigma_{y_2})^2\zeta(\Sigma_{y_3}) + \frac{29}{144}\zeta(\Sigma_{y_2})\zeta(\Sigma_{y_5}) + \frac{161}{180}\zeta(\Sigma_{y_7})
\end{aligned}$$

### Poids 8

$$\begin{aligned}
\zeta(\Sigma_{y_8}) &= \frac{24}{175}\zeta(\Sigma_{y_2})^4 \\
\zeta(\Sigma_{y_5 y_3}) &= \frac{126}{25}\zeta(\Sigma_{y_2})^4 - 720\zeta(\Sigma_{y_3 y_1^5}) \\
\zeta(\Sigma_{y_6 y_2}) &= -\frac{282}{125}\zeta(\Sigma_{y_2})^4 + 2\zeta(\Sigma_{y_3})\zeta(\Sigma_{y_5}) + 288\zeta(\Sigma_{y_3 y_1^5}) \\
\zeta(\Sigma_{y_7 y_1}) &= \frac{6}{25}\zeta(\Sigma_{y_2})^4 - \zeta(\Sigma_{y_3})\zeta(\Sigma_{y_5})
\end{aligned}$$

### 3.3. Représentations explicites des polyzêtas sur des éléments générateurs algébriques 09

$$\begin{aligned}
\zeta(\Sigma_{y_3^2 y_2}) &= \frac{9}{2} \zeta(\Sigma_{y_3})^2 \zeta(\Sigma_{y_2}) - \frac{44}{5} \zeta(\Sigma_{y_2})^4 - 15 \zeta(\Sigma_{y_3}) \zeta(\Sigma_{y_5}) + 1440 \zeta(\Sigma_{y_3 y_1^5}) \\
\zeta(\Sigma_{y_4 y_1 y_3}) &= \zeta(\Sigma_{y_3})^2 \zeta(\Sigma_{y_2}) + \frac{5524}{525} \zeta(\Sigma_{y_2})^4 - 5 \zeta(\Sigma_{y_3}) \zeta(\Sigma_{y_5}) - 1440 \zeta(\Sigma_{y_3 y_1^5}) \\
\zeta(\Sigma_{y_4 y_2^2}) &= -\frac{688}{75} \zeta(\Sigma_{y_2})^4 + 3 \zeta(\Sigma_{y_3})^2 \zeta(\Sigma_{y_2}) - 10 \zeta(\Sigma_{y_3}) \zeta(\Sigma_{y_5}) + 1440 \zeta(\Sigma_{y_3 y_1^5}) \\
\zeta(\Sigma_{y_4 y_3 y_1}) &= \frac{2224}{175} \zeta(\Sigma_{y_2})^4 - \frac{5}{2} \zeta(\Sigma_{y_3}) \zeta(\Sigma_{y_5}) - 1800 \zeta(\Sigma_{y_3 y_1^5}) + \frac{1}{2} \zeta(\Sigma_{y_3})^2 \zeta(\Sigma_{y_2}) \\
\zeta(\Sigma_{y_5 y_1 y_2}) &= -\frac{5}{2} \zeta(\Sigma_{y_3})^2 \zeta(\Sigma_{y_2}) + \frac{288}{175} \zeta(\Sigma_{y_2})^4 + 10 \zeta(\Sigma_{y_3}) \zeta(\Sigma_{y_5}) - 360 \zeta(\Sigma_{y_3 y_1^5}) \\
\zeta(\Sigma_{y_5 y_2 y_1}) &= -\frac{4591}{2625} \zeta(\Sigma_{y_2})^4 - \zeta(\Sigma_{y_3})^2 \zeta(\Sigma_{y_2}) + \frac{13}{2} \zeta(\Sigma_{y_3}) \zeta(\Sigma_{y_5}) + 144 \zeta(\Sigma_{y_3 y_1^5}) \\
\zeta(\Sigma_{y_6 y_1^2}) &= -\frac{617}{875} \zeta(\Sigma_{y_2})^4 + \frac{1}{2} \zeta(\Sigma_{y_3})^2 \zeta(\Sigma_{y_2}) - \frac{5}{2} \zeta(\Sigma_{y_3}) \zeta(\Sigma_{y_5}) + 144 \zeta(\Sigma_{y_3 y_1^5}) \\
\zeta(\Sigma_{y_3 y_1 y_2^2}) &= \frac{25}{4} \zeta(\Sigma_{y_3}) \zeta(\Sigma_{y_5}) + \frac{1453}{200} \zeta(\Sigma_{y_2})^4 - 1200 \zeta(\Sigma_{y_3 y_1^5}) \\
\zeta(\Sigma_{y_3 y_2 y_1 y_2}) &= 5 \zeta(\Sigma_{y_3})^2 \zeta(\Sigma_{y_2}) - \frac{133}{12} \zeta(\Sigma_{y_3}) \zeta(\Sigma_{y_5}) - \frac{84053}{21000} \zeta(\Sigma_{y_2})^4 + 624 \zeta(\Sigma_{y_3 y_1^5}) \\
\zeta(\Sigma_{y_3 y_2^2 y_1}) &= \frac{9}{2} \zeta(\Sigma_{y_3})^2 \zeta(\Sigma_{y_2}) - \frac{27}{2} \zeta(\Sigma_{y_3}) \zeta(\Sigma_{y_5}) - \frac{12143}{1000} \zeta(\Sigma_{y_2})^4 + 1884 \zeta(\Sigma_{y_3 y_1^5}) \\
\zeta(\Sigma_{y_3^2 y_1^2}) &= -\frac{163}{200} \zeta(\Sigma_{y_2})^4 + 120 \zeta(\Sigma_{y_3 y_1^5}) \\
\zeta(\Sigma_{y_4 y_1^2 y_2}) &= -\frac{73}{40} \zeta(\Sigma_{y_2})^4 - \frac{5}{4} \zeta(\Sigma_{y_3}) \zeta(\Sigma_{y_5}) + 300 \zeta(\Sigma_{y_3 y_1^5}) \\
\zeta(\Sigma_{y_4 y_1 y_2 y_1}) &= -\frac{3}{2} \zeta(\Sigma_{y_3})^2 \zeta(\Sigma_{y_2}) + \frac{6483}{1000} \zeta(\Sigma_{y_2})^4 + \frac{29}{4} \zeta(\Sigma_{y_3}) \zeta(\Sigma_{y_5}) - 1044 \zeta(\Sigma_{y_3 y_1^5}) \\
\zeta(\Sigma_{y_4 y_2 y_1^2}) &= -\frac{5357}{3000} \zeta(\Sigma_{y_2})^4 + \frac{1}{3} \zeta(\Sigma_{y_3}) \zeta(\Sigma_{y_5}) + 252 \zeta(\Sigma_{y_3 y_1^5}) \\
\zeta(\Sigma_{y_5 y_1^3}) &= -\frac{67}{200} \zeta(\Sigma_{y_2})^4 + 60 \zeta(\Sigma_{y_3 y_1^5}) - \frac{5}{12} \zeta(\Sigma_{y_3}) \zeta(\Sigma_{y_5}) \\
\zeta(\Sigma_{y_2^2 y_1 y_2 y_1}) &= \frac{5}{4} \zeta(\Sigma_{y_3})^2 \zeta(\Sigma_{y_2}) + \frac{2242}{7875} \zeta(\Sigma_{y_2})^4 - \frac{15}{4} \zeta(\Sigma_{y_3}) \zeta(\Sigma_{y_5}) \\
\zeta(\Sigma_{y_2^3 y_1^2}) &= -\frac{14107}{2625} \zeta(\Sigma_{y_2})^4 + \frac{3}{8} \zeta(\Sigma_{y_3})^2 \zeta(\Sigma_{y_2}) + 810 \zeta(\Sigma_{y_3 y_1^5}) - \frac{15}{8} \zeta(\Sigma_{y_3}) \zeta(\Sigma_{y_5}) \\
\zeta(\Sigma_{y_3 y_1^3 y_2}) &= \frac{12767}{2625} \zeta(\Sigma_{y_2})^4 + \frac{3}{8} \zeta(\Sigma_{y_3})^2 \zeta(\Sigma_{y_2}) - 810 \zeta(\Sigma_{y_3 y_1^5}) + \frac{15}{4} \zeta(\Sigma_{y_3}) \zeta(\Sigma_{y_5}) \\
\zeta(\Sigma_{y_3 y_1^2 y_2 y_1}) &= \frac{114049}{7875} \zeta(\Sigma_{y_2})^4 + \frac{5}{4} \zeta(\Sigma_{y_3})^2 \zeta(\Sigma_{y_2}) - 2430 \zeta(\Sigma_{y_3 y_1^5}) + \frac{45}{4} \zeta(\Sigma_{y_3}) \zeta(\Sigma_{y_5}) \\
\zeta(\Sigma_{y_3 y_1 y_2 y_1^2}) &= \frac{23927}{2625} \zeta(\Sigma_{y_2})^4 + \frac{3}{2} \zeta(\Sigma_{y_3})^2 \zeta(\Sigma_{y_2}) - 1620 \zeta(\Sigma_{y_3 y_1^5}) + \frac{75}{8} \zeta(\Sigma_{y_3}) \zeta(\Sigma_{y_5}) \\
\zeta(\Sigma_{y_3 y_2 y_1^3}) &= -\frac{18856}{7875} \zeta(\Sigma_{y_2})^4 + \zeta(\Sigma_{y_3})^2 \zeta(\Sigma_{y_2}) + 270 \zeta(\Sigma_{y_3 y_1^5}) + \frac{5}{4} \zeta(\Sigma_{y_3}) \zeta(\Sigma_{y_5})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta(\Sigma_{y_4 y_1^4}) &= 270\zeta(\Sigma_{y_3 y_1^5}) - \frac{12641}{7875}\zeta(\Sigma_{y_2})^4 - \frac{5}{4}\zeta(\Sigma_{y_3})\zeta(\Sigma_{y_5}) - \frac{1}{8}\zeta(\Sigma_{y_3})^2\zeta(\Sigma_{y_2}) \\
\zeta(\Sigma_{y_2 y_1 y_2 y_1^3}) &= 227\zeta(\Sigma_{y_3 y_1^5}) - \frac{188}{125}\zeta(\Sigma_{y_2})^4 + \frac{1}{8}\zeta(\Sigma_{y_3})\zeta(\Sigma_{y_5}) \\
\zeta(\Sigma_{y_2^2 y_1^4}) &= \frac{233}{5}\zeta(\Sigma_{y_3 y_1^5}) - \frac{309}{1250}\zeta(\Sigma_{y_2})^4 - \frac{57}{80}\zeta(\Sigma_{y_3})\zeta(\Sigma_{y_5}) + \frac{3}{16}\zeta(\Sigma_{y_3})^2\zeta(\Sigma_{y_2}) \\
\zeta(\Sigma_{y_3 y_1^5}) &= \zeta(\Sigma_{y_3 y_1^5}) \\
\zeta(\Sigma_{y_2 y_1^6}) &= \frac{59887}{330750}\zeta(\Sigma_{y_2})^4 + \frac{29}{96}\zeta(\Sigma_{y_3})\zeta(\Sigma_{y_5}) + \frac{1}{30}\zeta(\Sigma_{y_3})^2\zeta(\Sigma_{y_2})
\end{aligned}$$

### Représentations des polyzêtas en termes de polyzêtas irréductibles sur la base $\{S_l\}_{l \in \mathcal{L}_{yn}X}$

Poids 3

$$\zeta(S_{x_0 x_1^2}) = \zeta(S_{x_0^2 x_1})$$

Poids 4

$$\begin{aligned}
\zeta(S_{x_0^3 x_1}) &= \frac{2}{5}\zeta(S_{x_0 x_1})^2 \\
\zeta(S_{x_0^2 x_1^2}) &= \frac{1}{10}\zeta(S_{x_0 x_1})^2 \\
\zeta(S_{x_0 x_1^3}) &= \frac{2}{5}\zeta(S_{x_0 x_1})^2
\end{aligned}$$

Poids 5

$$\begin{aligned}
\zeta(S_{x_0^3 x_1^2}) &= -\zeta(S_{x_0^2 x_1})\zeta(S_{x_0 x_1}) + 2\zeta(S_{x_0^4 x_1}) \\
\zeta(S_{x_0^2 x_1 x_0 x_1}) &= -\frac{3}{2}\zeta(S_{x_0^4 x_1}) + \zeta(S_{x_0^2 x_1})\zeta(S_{x_0 x_1}) \\
\zeta(S_{x_0^2 x_1^3}) &= -\zeta(S_{x_0^2 x_1})\zeta(S_{x_0 x_1}) + 2\zeta(S_{x_0^4 x_1}) \\
\zeta(S_{x_0 x_1 x_0 x_1^2}) &= \frac{1}{2}\zeta(S_{x_0^4 x_1}) \\
\zeta(S_{x_0 x_1^4}) &= \zeta(S_{x_0^4 x_1})
\end{aligned}$$

Poids 6

$$\begin{aligned}
 \zeta(S_{x_0^5 x_1}) &= \frac{8}{35} \zeta(S_{x_0 x_1})^3 \\
 \zeta(S_{x_0^4 x_1^2}) &= \frac{6}{35} \zeta(S_{x_0 x_1})^3 - \frac{1}{2} \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \\
 \zeta(S_{x_0^3 x_1 x_0 x_1}) &= \frac{4}{105} \zeta(S_{x_0 x_1})^3 \\
 \zeta(S_{x_0^3 x_1^3}) &= \frac{23}{70} \zeta(S_{x_0 x_1})^3 - \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \\
 \zeta(S_{x_0^2 x_1 x_0 x_1^2}) &= \frac{2}{105} \zeta(S_{x_0 x_1})^3 \\
 \zeta(S_{x_0^2 x_1^2 x_0 x_1}) &= -\frac{89}{210} \zeta(S_{x_0 x_1})^3 + \frac{3}{2} \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \\
 \zeta(S_{x_0^2 x_1^4}) &= \frac{6}{35} \zeta(S_{x_0 x_1})^3 - \frac{1}{2} \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \\
 \zeta(S_{x_0 x_1 x_0 x_1^3}) &= \frac{8}{21} \zeta(S_{x_0 x_1})^3 - \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \\
 \zeta(S_{x_0 x_1^5}) &= \frac{8}{35} \zeta(S_{x_0 x_1})^3
 \end{aligned}$$

Poids 7

$$\begin{aligned}
 \zeta(S_{x_0^5 x_1^2}) &= -\zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0 x_1}) - \frac{2}{5} \zeta(S_{x_0 x_1})^2 \zeta(S_{x_0^2 x_1}) + 3 \zeta(S_{x_0^6 x_1}) \\
 \zeta(S_{x_0^4 x_1 x_0 x_1}) &= -5 \zeta(S_{x_0^6 x_1}) + 3 \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0 x_1}) \\
 \zeta(S_{x_0^4 x_1^3}) &= -\frac{23}{60} \zeta(S_{x_0 x_1})^2 \zeta(S_{x_0^2 x_1}) - 2 \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0 x_1}) + 5 \zeta(S_{x_0^6 x_1}) \\
 \zeta(S_{x_0^3 x_1 x_0^2 x_1}) &= 2 \zeta(S_{x_0^6 x_1}) - \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0 x_1}) \\
 \zeta(S_{x_0^3 x_1 x_0 x_1^2}) &= -\frac{1}{20} \zeta(S_{x_0 x_1})^2 \zeta(S_{x_0^2 x_1}) - \frac{1}{2} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0 x_1}) + \frac{19}{16} \zeta(S_{x_0^6 x_1}) \\
 \zeta(S_{x_0^3 x_1^2 x_0 x_1}) &= 7 \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0 x_1}) - \frac{3}{10} \zeta(S_{x_0 x_1})^2 \zeta(S_{x_0^2 x_1}) - \frac{173}{16} \zeta(S_{x_0^6 x_1}) \\
 \zeta(S_{x_0^3 x_1^4}) &= \frac{251}{720} \zeta(S_{x_0 x_1})^2 \zeta(S_{x_0^2 x_1}) + 5 \zeta(S_{x_0^6 x_1}) - \frac{371}{108} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0 x_1}) \\
 \zeta(S_{x_0^2 x_1 x_0^2 x_1^2}) &= 2 \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0 x_1}) - \frac{9}{20} \zeta(S_{x_0 x_1})^2 \zeta(S_{x_0^2 x_1}) - 2 \zeta(S_{x_0^6 x_1}) \\
 \zeta(S_{x_0(x_0 x_1^3)}) &= -\frac{3}{2} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0 x_1}) + \frac{1}{2} \zeta(S_{x_0 x_1})^2 \zeta(S_{x_0^2 x_1}) + \frac{17}{16} \zeta(S_{x_0^6 x_1}) \\
 \zeta(S_{x_0^2 x_1 x_0 x_1^3}) &= -\frac{83}{27} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0 x_1}) - \frac{25}{72} \zeta(S_{x_0 x_1})^2 \zeta(S_{x_0^2 x_1}) + \frac{99}{16} \zeta(S_{x_0^6 x_1}) \\
 \zeta(S_{x_0^2 x_1^2 x_0 x_1^2}) &= -\frac{61}{16} \zeta(S_{x_0^6 x_1}) + \frac{17}{30} \zeta(S_{x_0 x_1})^2 \zeta(S_{x_0^2 x_1}) + \frac{31}{18} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0 x_1})
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\zeta(S_{x_0^2 x_1^3 x_0 x_1}) &= -\frac{73}{360} \zeta(S_{x_0 x_1})^2 \zeta(S_{x_0^2 x_1}) + \frac{557}{108} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0 x_1}) - \frac{109}{16} \zeta(S_{x_0^6 x_1}) \\
\zeta(S_{x_0^2 x_1^5}) &= \frac{523}{3960} \zeta(S_{x_0 x_1})^2 \zeta(S_{x_0^2 x_1}) - \frac{5593}{2376} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0 x_1}) + 3 \zeta(S_{x_0^6 x_1}) \\
\zeta(S_{(x_0 x_1)^3 x_1}) &= -\frac{17}{30} \zeta(S_{x_0 x_1})^2 \zeta(S_{x_0^2 x_1}) - \frac{31}{18} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0 x_1}) + \frac{65}{16} \zeta(S_{x_0^6 x_1}) \\
\zeta(S_{x_0 x_1 x_0 x_1^4}) &= -\frac{519}{880} \zeta(S_{x_0 x_1})^2 \zeta(S_{x_0^2 x_1}) + 4 \zeta(S_{x_0^6 x_1}) - \frac{28}{11} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0 x_1}) \\
\zeta(S_{x_0 x_1^2 x_0 x_1^3}) &= -\frac{937}{1320} \zeta(S_{x_0 x_1})^2 \zeta(S_{x_0^2 x_1}) + 3 \zeta(S_{x_0^6 x_1}) - \frac{56}{33} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0 x_1}) \\
\zeta(S_{x_0 x_1^6}) &= \frac{815}{2376} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0 x_1}) - \frac{503}{990} \zeta(S_{x_0 x_1})^2 \zeta(S_{x_0^2 x_1}) + \zeta(S_{x_0^6 x_1})
\end{aligned}$$

Poids 8

$$\begin{aligned}
\zeta(S_{x_0^7 x_1}) &= \frac{24}{175} \zeta(S_{x_0 x_1})^4 \\
\zeta(S_{x_0^6 x_1^2}) &= \frac{6}{35} \zeta(S_{x_0 x_1})^4 - \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0^2 x_1}) \\
\zeta(S_{x_0^5 x_1 x_0 x_1}) &= -\frac{6638}{30625} \zeta(S_{x_0 x_1})^4 - \frac{149753}{4725} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0^2 x_1}) \\
&\quad - \frac{29026}{1575} \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \zeta(S_{x_0 x_1}) + \frac{2}{5} \zeta(S_{x_0 x_1^2 x_0 x_1^4}) \\
\zeta(S_{x_0^5 x_1^3}) &= -\frac{11}{4} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0^2 x_1}) + \frac{1}{2} \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \zeta(S_{x_0 x_1}) + \frac{61}{175} \zeta(S_{x_0 x_1})^4 \\
\zeta(S_{x_0^4 x_1 x_0^2 x_1}) &= -\frac{149753}{9450} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0^2 x_1}) - \frac{2794}{30625} \zeta(S_{x_0 x_1})^4 \\
&\quad - \frac{14513}{1575} \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \zeta(S_{x_0 x_1}) + \frac{1}{5} \zeta(S_{x_0 x_1^2 x_0 x_1^4}) \\
\zeta(S_{x_0^4 x_1 x_0 x_1^2}) &= -\frac{79939}{1350} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0^2 x_1}) - \frac{7144}{225} \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \zeta(S_{x_0 x_1}) \\
&\quad + \frac{7}{10} \zeta(S_{x_0 x_1^2 x_0 x_1^4}) - \frac{2741}{13125} \zeta(S_{x_0 x_1})^4 \\
\zeta(S_{x_0^4 x_1^2 x_0 x_1}) &= -\frac{127597}{91875} \zeta(S_{x_0 x_1})^4 - \frac{125723}{1575} \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \zeta(S_{x_0 x_1}) \\
&\quad + \frac{17}{10} \zeta(S_{x_0 x_1^2 x_0 x_1^4}) - \frac{2470201}{18900} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0^2 x_1}) \\
\zeta(S_{x_0^4 x_1^4}) &= \frac{1553}{4200} \zeta(S_{x_0 x_1})^4 + \frac{19}{12} \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \zeta(S_{x_0 x_1}) \\
&\quad - \frac{251}{48} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0^2 x_1}) \\
\zeta(S_{x_0^3 x_1 x_0^2 x_1^2}) &= -\frac{1053}{30625} \zeta(S_{x_0 x_1})^4 + \frac{6469}{1575} \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \zeta(S_{x_0 x_1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{10} \zeta(S_{x_0 x_1^2 x_0 x_1^4}) + \frac{45707}{4725} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0^2 x_1}) \\
 \zeta(S_{x_0^3 x_1 (x_0 x_1)^3}) &= \frac{61492}{91875} \zeta(S_{x_0 x_1})^4 + \frac{29026}{525} \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \zeta(S_{x_0 x_1}) \\
 & + \frac{310531}{3150} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0^2 x_1}) - \frac{6}{5} \zeta(S_{x_0 x_1^2 x_0 x_1^4}) \\
 \zeta(S_{x_0^3 x_1 x_0 x_1^3}) &= \frac{284807}{735000} \zeta(S_{x_0 x_1})^4 - \frac{8567}{350} \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \zeta(S_{x_0 x_1}) \\
 & - \frac{339931}{6300} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0^2 x_1}) + \frac{3}{5} \zeta(S_{x_0 x_1^2 x_0 x_1^4}) \\
 \zeta(S_{x_0^3 x_1^2 x_0^2 x_1}) &= -\frac{323131}{9450} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0^2 x_1}) - \frac{56477}{3150} \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \zeta(S_{x_0 x_1}) \\
 & + \frac{4212}{30625} \zeta(S_{x_0 x_1})^4 + \frac{2}{5} \zeta(S_{x_0 x_1^2 x_0 x_1^4}) \\
 \zeta(S_{x_0^3 x_1^2 x_0 x_1^2}) &= -\frac{19763}{1050} \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \zeta(S_{x_0 x_1}) - \frac{390331}{12600} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0^2 x_1}) \\
 & - \frac{225817}{367500} \zeta(S_{x_0 x_1})^4 + \frac{3}{10} \zeta(S_{x_0 x_1^2 x_0 x_1^4}) \\
 \zeta(S_{x_0^3 x_1^3 x_0 x_1}) &= -\frac{66739}{1575} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0^2 x_1}) - \frac{627643}{735000} \zeta(S_{x_0 x_1})^4 \\
 & - \frac{5071}{175} \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \zeta(S_{x_0 x_1}) + \frac{3}{5} \zeta(S_{x_0 x_1^2 x_0 x_1^4}) \\
 \zeta(S_{x_0^3 x_1^5}) &= \frac{1173}{12250} \zeta(S_{x_0 x_1})^4 + \frac{18383}{840} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0^2 x_1}) \\
 & + \frac{1406}{105} \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \zeta(S_{x_0 x_1}) \\
 \zeta(S_{(x_0^2 x_1)^2 x_0 x_1}) &= \frac{7201}{18375} \zeta(S_{x_0 x_1})^4 + \frac{7414}{315} \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \zeta(S_{x_0 x_1}) \\
 & - \frac{1}{2} \zeta(S_{x_0 x_1^2 x_0 x_1^4}) + \frac{149753}{3780} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0^2 x_1}) \\
 \zeta(S_{(x_0^2 x_1)^2 x_1^2}) &= -\frac{77041}{735000} \zeta(S_{x_0 x_1})^4 + \frac{442831}{12600} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0^2 x_1}) \\
 & + \frac{14863}{1050} \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \zeta(S_{x_0 x_1}) - \frac{3}{10} \zeta(S_{x_0 x_1^2 x_0 x_1^4}) \\
 \zeta(S_{x_0^2 x_1 (x_0 x_1)^2 x_1}) &= \frac{421831}{12600} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0^2 x_1}) + \frac{19763}{1050} \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \zeta(S_{x_0 x_1}) \\
 & + \frac{56848}{91875} \zeta(S_{x_0 x_1})^4 - \frac{3}{10} \zeta(S_{x_0 x_1^2 x_0 x_1^4}) \\
 \zeta(S_{x_0^2 x_1 x_0 x_1^2 x_0 x_1}) &= \frac{32267}{183750} \zeta(S_{x_0 x_1})^4 + \frac{32701}{1050} \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \zeta(S_{x_0 x_1}) \\
 & - \frac{3}{5} \zeta(S_{(x_0 x_1^2)^2 x_1^2}) + \frac{895637}{12600} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0^2 x_1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta(S_{x_0^2 x_1 x_0 x_1^4}) &= -\frac{544931}{8400} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0^2 x_1}) - \frac{17963}{700} \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \zeta(S_{x_0 x_1}) \\
&\quad + \frac{7}{10} \zeta(S_{(x_0 x_1^2)^2 x_1^2}) + \frac{279437}{367500} \zeta(S_{x_0 x_1})^4 \\
\zeta(S_{x_0^2 x_1^2 (x_0 x_1)^2}) &= \frac{12487}{15000} \zeta(S_{x_0 x_1})^4 + \frac{7019}{75} \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \zeta(S_{x_0 x_1}) \\
&\quad - \frac{21}{10} \zeta(S_{x_0 x_1^2 x_0 x_1^4}) + \frac{77689}{450} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0^2 x_1}) \\
\zeta(S_{x_0^2 x_1^2 x_0 x_1^3}) &= \frac{112163}{367500} \zeta(S_{x_0 x_1})^4 + \frac{3}{10} \zeta(S_{x_0 x_1^2 x_0 x_1^4}) \\
&\quad - \frac{69011}{2100} \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \zeta(S_{x_0 x_1}) - \frac{190223}{2800} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0^2 x_1}) \\
\zeta(S_{x_0^2 x_1^3 x_0 x_1^2}) &= -\frac{14697}{12250} \zeta(S_{x_0 x_1})^4 + \frac{2417}{210} \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \zeta(S_{x_0 x_1}) \\
&\quad + \frac{41173}{840} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0^2 x_1}) - \frac{3}{2} \zeta(S_{x_0 x_1^2 x_0 x_1^4}) \\
\zeta(S_{x_0^2 x_1^4 x_0 x_1}) &= -\frac{63199}{2100} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0^2 x_1}) - \frac{24187}{1050} \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \zeta(S_{x_0 x_1}) \\
&\quad - \frac{11359}{30625} \zeta(S_{x_0 x_1})^4 - \frac{3}{10} \zeta(S_{x_0 x_1^2 x_0 x_1^4}) \\
\zeta(S_{x_0^2 x_1^6}) &= \frac{4}{245} \zeta(S_{x_0 x_1})^4 + \frac{134}{7} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0^2 x_1}) \\
&\quad + \frac{76}{7} \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \zeta(S_{x_0 x_1}) \\
\zeta(S_{(x_0 x_1)^3 x_1}) &= \frac{4}{5} \zeta(S_{x_0 x_1^2 x_0 x_1^4}) + \frac{242579}{183750} \zeta(S_{x_0 x_1})^4 \\
&\quad - \frac{82877}{4200} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0^2 x_1}) + \frac{3487}{1050} \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \zeta(S_{x_0 x_1}) \\
\zeta(S_{x_0 x_1 (x_0 x_1^2)^2}) &= -\frac{98377}{122500} \zeta(S_{x_0 x_1})^4 - \frac{11}{10} \zeta(S_{x_0 x_1^2 x_0 x_1^4}) \\
&\quad + \frac{42857}{2100} \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \zeta(S_{x_0 x_1}) + \frac{464053}{8400} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0^2 x_1}) \\
\zeta(S_{(x_0 x_1)^2 x_1^4}) &= \frac{2937}{30625} \zeta(S_{x_0 x_1})^4 + \frac{67957}{2100} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0^2 x_1}) \\
&\quad + \frac{2}{5} \zeta(S_{x_0 x_1^2 x_0 x_1^4}) + \frac{9833}{525} \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \zeta(S_{x_0 x_1}) \\
\zeta(S_{(x_0 x_1^2)^2 x_1^2}) &= \zeta(S_{x_0 x_1^2 x_0 x_1^4}) \\
\zeta(S_{x_0 x_1^7}) &= \frac{358}{1225} \zeta(S_{x_0 x_1})^4 - \frac{141}{7} \zeta(S_{x_0^4 x_1}) \zeta(S_{x_0^2 x_1}) \\
&\quad - \frac{76}{7} \zeta(S_{x_0^2 x_1})^2 \zeta(S_{x_0 x_1})
\end{aligned}$$

### Conclusions pour ces résultats

En désignant par  $\mathcal{Z}_n$  le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel quotient des polynômes par les relations issues de l'identification des cordonnées locales de poids  $n$ . Posons  $\dim(\mathcal{Z}_n) = d_n$ . De représentations calculées précédemment, nous obtenons les bases de ces espaces comme suit :

- $n = 2, d_2 = 1,$

$$\mathcal{Z}_2 = \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\zeta(\Sigma_{y_2})\} = \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\zeta(S_{x_0x_1})\}$$

- $n = 3, d_3 = 1,$

$$\mathcal{Z}_3 = \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\zeta(\Sigma_{y_3})\} = \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\zeta(S_{x_0^2x_1})\}$$

- $n = 4, d_4 = 1,$

$$\mathcal{Z}_4 = \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\zeta(\Sigma_{y_2})^2\} = \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\zeta(S_{x_0x_1})^2\}$$

- $n = 5, d_5 = 2,$

$$\mathcal{Z}_5 = \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\zeta(\Sigma_{y_5}), \zeta(\Sigma_{y_2})\zeta(\Sigma_{y_3})\} = \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\zeta(S_{x_0^4x_1}), \zeta(S_{x_0x_1})\zeta(S_{x_0^2x_1})\}$$

- $n = 6, d_6 = 2,$

$$\mathcal{Z}_6 = \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\zeta(\Sigma_{y_2})^3, \zeta(\Sigma_{y_3})^2\} = \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\zeta(S_{x_0x_1})^3, \zeta(S_{x_0^2x_1})^2\}$$

- $n = 7, d_7 = 3,$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_7 &= \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\zeta(\Sigma_{y_7}), \zeta(\Sigma_{y_2})\zeta(\Sigma_{y_5}), \zeta(\Sigma_{y_2})^2\zeta(\Sigma_{y_3})\} \\ &= \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\zeta(S_{x_0^6x_1}), \zeta(S_{x_0x_1})\zeta(S_{x_0^4x_1}), \zeta(S_{x_0x_1})^2\zeta(S_{x_0^2x_1})\} \end{aligned}$$

- $n = 8, d_8 = 4,$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_8 &= \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\zeta(\Sigma_{y_2})^4, \zeta(\Sigma_{y_3y_1^5}), \zeta(\Sigma_{y_3})\zeta(\Sigma_{y_5}), \zeta(\Sigma_{y_3})^2\zeta(\Sigma_{y_2})\} \\ &= \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\zeta(S_{x_0x_1})^4, \zeta(S_{x_0^2x_1})\zeta(S_{x_0^4x_1}), \zeta(S_{x_0x_1})\zeta(S_{x_0^2x_1})^2, \\ &\quad \zeta(S_{x_0x_1^2x_0x_1^4})\} \end{aligned}$$

- $n = 9, d_9 = 5,$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_9 &= \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\zeta(\Sigma_{y_9}), \zeta(\Sigma_{y_2})^2\zeta(\Sigma_{y_5}), \zeta(\Sigma_{y_2})\zeta(\Sigma_{y_7}), \zeta(\Sigma_{y_2})^3\zeta(\Sigma_{y_3}), \\ &\quad \zeta(\Sigma_{y_3})^3\} \\ &= \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\zeta(S_{x_0^8x_1}), \zeta(S_{x_0x_1})^2\zeta(S_{x_0^4x_1}), \zeta(S_{x_0^2x_1})^3, \zeta(S_{x_0x_1})\zeta(S_{x_0^6x_1}), \\ &\quad \zeta(S_{x_0x_1})^3\zeta(S_{x_0^2x_1})\} \end{aligned}$$

- $n = 10, d_{10} = 7,$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{10} &= \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\zeta(\Sigma_{y_2})^5, \zeta(\Sigma_{y_5})^2, \zeta(\Sigma_{y_3 y_1^7}), \zeta(\Sigma_{y_2})\zeta(\Sigma_{y_3})\zeta(\Sigma_{y_5}), \\ &\quad \zeta(\Sigma_{y_2})^2\zeta(\Sigma_{y_3})^2, \zeta(\Sigma_{y_3})\zeta(\Sigma_{y_7}), \zeta(\Sigma_{y_2})\zeta(\Sigma_{y_3 y_1^5})\} \\ &= \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\zeta(S_{x_0^4 x_1})^2, \zeta(S_{x_0^4 x_1})\zeta(S_{x_0^2 x_1})\zeta(S_{x_0 x_1}), \zeta(S_{x_0 x_1})^2\zeta(S_{x_0^2 x_1})^2, \\ &\quad \zeta(S_{x_0 x_1})^5, \zeta(S_{x_0 x_1^3 x_0 x_1^5}), \zeta(S_{x_0^6 x_1})\zeta(S_{x_0^2 x_1}), \zeta(S_{x_0 x_1})\zeta(S_{x_0 x_1^2 x_0 x_1^4})\} \end{aligned}$$

- $n = 11, d_{11} = 9,$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{11} &= \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\zeta(\Sigma_{y_{11}}), \zeta(\Sigma_{y_2})^2\zeta(\Sigma_{y_7}), \zeta(\Sigma_{y_2})\zeta(\Sigma_{y_9}), \zeta(\Sigma_{y_2})^3\zeta(\Sigma_{y_5}), \\ &\quad \zeta(\Sigma_{y_2 y_1^9}), \zeta(\Sigma_{y_3})^2\zeta(\Sigma_{y_5}), \zeta(\Sigma_{y_2})\zeta(\Sigma_{y_3})^3, \zeta(\Sigma_{y_2})^2\zeta(\Sigma_{y_7}), \\ &\quad \zeta(\Sigma_{y_3})\zeta(\Sigma_{y_3 y_1^5})\} \\ &= \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\zeta(S_{x_0^{10} x_1}), \zeta(S_{x_0^4 x_1})\zeta(S_{x_0^2 x_1})^2, \zeta(S_{x_0^2 x_1})\zeta(S_{x_0 x_1})^3\zeta(S_{x_0 x_1}), \\ &\quad \zeta(S_{x_0^2 x_1})\zeta(S_{x_0 x_1})^4, \zeta(S_{x_0^4 x_1})\zeta(S_{x_0 x_1})^3, \zeta(S_{x_0^2 x_1})\zeta(S_{x_0 x_1^2 x_0 x_1^4}), \\ &\quad \zeta(S_{x_0 x_1^2 x_0 x_1^2 x_0 x_1^4}), \zeta(S_{x_0^6 x_1})\zeta(S_{x_0 x_1})^2, \zeta(S_{x_0^8 x_1})\zeta(S_{x_0 x_1})\} \end{aligned}$$

- $n = 12, d_{12} = 12,$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{12} &= \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\zeta(\Sigma_{y_2})^6, \zeta(\Sigma_{y_3})^4, \zeta(\Sigma_{y_2})\zeta(\Sigma_{y_5})^2, \zeta(\Sigma_{y_3} \Sigma_{y_1^9}), \zeta(\Sigma_{y_2}^2 \Sigma_{y_1^8}), \\ &\quad \zeta(\Sigma_{y_2})^3\zeta(\Sigma_{y_3})^2, \zeta(\Sigma_{y_3})\zeta(\Sigma_{y_9}), \zeta(\Sigma_{y_2})\zeta(\Sigma_{y_3} \Sigma_{y_1^7}), \zeta(\Sigma_{y_5})\zeta(\Sigma_{y_7}), \\ &\quad \zeta(\Sigma_{y_2})\zeta(\Sigma_{y_3})\zeta(\Sigma_{y_7}), \zeta(\Sigma_{y_2})^2\zeta(\Sigma_{y_3})\zeta(\Sigma_{y_5}), \zeta(\Sigma_{y_2})^2\zeta(\Sigma_{y_3} \Sigma_{y_1^5})\} \\ &= \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\zeta(S_{x_0 x_1})^6, \zeta(S_{x_0^2 x_1})^4, \zeta(S_{(x_0 x_1)^2 x_1^8}), \zeta(S_{x_0 x_1})^2\zeta(S_{x_0 x_1^2 x_0 x_1^4}), \\ &\quad \zeta(S_{x_0^4 x_1})\zeta(S_{x_0^6 x_1}), \zeta(S_{x_0 x_1})^3\zeta(S_{x_0^2 x_1})^2, \zeta(S_{x_0 x_1})^2\zeta(S_{x_0^2 x_1})\zeta(S_{x_0^4 x_1}), \\ &\quad \zeta(S_{x_0 x_1})\zeta(S_{x_0^2 x_1})\zeta(S_{x_0^6 x_1}), \zeta(S_{x_0^2 x_1})\zeta(S_{x_0^8 x_1}), \zeta(S_{x_0 x_1})\zeta(S_{x_0^4 x_1})^2, \\ &\quad \zeta(S_{x_0 x_1})\zeta(S_{x_0 x_1^3 x_0 x_1^5}), \zeta(S_{x_0^3 x_1 x_0 x_1^7})\}. \end{aligned}$$

On peut voir que, les dimensions satisfont la formule  $d_1 = 0, d_2 = d_3 = 1$  et  $\forall n \geq 4, d_n = d_{n-2} + d_{n-3}$  jusqu'au poids 12. C'est-à-dire que les résultats vérifient encore la conjecture des dimensions de Zagier sur les polyzêtas (ce qui est remarquable parce que cette algèbre - produite différemment de celle du double mélange - est a priori, "au dessus" de l'algèbre des polyzêtas). Par conséquent, la conjecture va être confirmée jusqu'au poids 12 si et

### 3.3. Représentations explicites des polyzêtas sur des éléments générateurs algébriques 17

seulement si chacune de deux familles suivantes est algébriquement indépendante.

$n$	$i_n$	Polyzêtas irréductibles sur la base $\{\Sigma_l\}_{l \in \mathcal{L}_{ynY} \setminus \{y_1\}}$	Polyzêtas irréductibles sur la base $\{S_l\}_{l \in (\mathcal{L}_{ynX}) \setminus X}$
2	1	$\zeta(\Sigma_{y_2})$	$\zeta(S_{x_0x_1})$
3	1	$\zeta(\Sigma_{y_3})$	$\zeta(S_{x_0^2x_1})$
4	0		
5	1	$\zeta(\Sigma_{y_5})$	$\zeta(S_{x_0^4x_1})$
6	0		
7	1	$\zeta(\Sigma_{y_7})$	$\zeta(S_{x_0^6x_1})$
8	1	$\zeta(\Sigma_{y_3y_1^5})$	$\zeta(S_{x_0x_1^2x_0x_1^4})$
9	1	$\zeta(\Sigma_{y_9})$	$\zeta(S_{x_0^8x_1})$
10	1	$\zeta(\Sigma_{y_3y_1^7})$	$\zeta(S_{x_0x_1^2x_0x_1^6})$
11	2	$\zeta(\Sigma_{y_{11}}), \zeta(\Sigma_{y_2y_1^9})$	$\zeta(S_{x_0^{10}x_1}), \zeta(S_{x_0x_1^2x_0x_1^2x_0x_1^4})$
12	2	$\zeta(\Sigma_{y_2^2y_1^8}), \zeta(\Sigma_{y_3y_1^9})$	$\zeta(S_{x_0x_1x_0x_1^9}), \zeta(S_{x_0^3x_1x_0x_1^7})$



# Conclusion

La thèse utilise l'outil combinatoire pour approcher certains problèmes en théorie des nombres. Notre contribution se situe dans les quelques résultats suivants :

Dans le chapitre 1, nous étudions systématiquement des déformations du produit de mélange par ajoutant un terme de superposition paramétré. Ceci permet de construire une structure d'algèbre de Hopf de quasi-mélange  $q$ -déformée. Des bases duales (et en dualité) sont également construites grâce à des formules de calcul récursives, l'une suivant le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt à partir d'une base de l'algèbre de Lie des éléments primitifs et l'autre suivant le théorème MRS (et qui en constitue une déformation à un paramètre). Avec ces bases de transcendance indexées par les mots de Lyndon, nous avons établi un système de coordonnées locales pour le groupe de Lie (de dimension infinie) des séries de type groupe.

Dans le chapitre 2, comme vérification la structure de mélange ou de quasi-mélange, les séries génératrices des polylogarithmes ou des sommes harmoniques sont des types groupe pour les coproduits  $\Delta_{\sqcup}$  et  $\Delta_{\sqcap}$  respectivement. Ceci nous permet de représenter ces séries en factorisations infini associées des mots de Lyndon. Nous avons effectué déterminer les développements asymptotiques de ces sommes harmoniques sur l'échelle des  $\{N^{-i} \log(N)^j\}_{i,j \in \mathbb{N}}$  grâce à la série génératrice et à la formule d'Euler Maclaurin.

Comme les polyzêtas apparaissent dans les développements asymptotiques des polylogarithmes et des sommes harmoniques, nous établissons l'équation du pont des polyzêtas reliant entre deux structures d'algébriques de mélange et de quasi-mélange. De cette façon, nous identifions les relations polynomiales des polyzêtas indexées par les mots de Lyndon. Ces résultats donnent les relations polynomiales entre polyzêtas qui donnent les éléments irréductibles et les éléments de la base, par poids, des polyzêtas jusqu'au poids 12 qui vérifie encore la conjecture des dimensions de Zagier sur les polyzêtas.

Par ailleurs, pour accompagner cette étude théorique, nous avons écrit un package en Maple qui implante les algorithmes et permet de calculer des exemples de la thèse. Ce package est un outil effectif pour nos recherches en combinatoire.

Concernant ces recherches, plusieurs questions restent en suspens.

1. L'équation du pont peut-elle donner toutes les relations entre polyzêtas ?



2. En suivant les formules de relations entre polyzêtas données dans les propositions 3.7, 3.8, peut-on montrer la conjecture des dimensions de Zagier ?
3. Peut-on déterminer complètement les développements des polylogarithmes et des sommes harmoniques ?

# Chapitre 4

## Annexes

### Sommaire

---

<b>4.1. Annexe A : Séries doubles, graphes, convolution et limites . . . . .</b>	<b>121</b>
4.1.1. Séries et polynômes . . . . .	122
4.1.2. Séries doubles et calculs sur les graphes . . . . .	122
4.1.3. Limites . . . . .	124
4.1.4. Partitionnement des indices . . . . .	126
4.1.5. Factorisation des produits infinis et des caractères . . . . .	126
4.1.6. Développements asymptotiques . . . . .	127
<b>4.2. Annexe B : Programme en Maple . . . . .</b>	<b>130</b>
4.2.1. Calculs sur des mots . . . . .	130
4.2.2. Calculs dans l'algèbre de quasi-mélange $q$ -déformé . . . . .	131
4.2.3. Calculs sur les bases en dualité . . . . .	134
4.2.4. Élimination structure des polyzêtas . . . . .	138
4.2.5. Développement asymptotique des sommes harmoniques . . . . .	143

---

### 4.1. Annexe A : Séries doubles, graphes, convolution et limites

Les sommes et produits infinis de séries s'emploient couramment en informatique théorique [Ber+85 ; Sch65 ; Luq99] et en combinatoire [Sch65 ; Reu93 ; Las90]. Nous donnons ici les définitions utiles.

### 4.1.1. Séries et polynômes

**Définition 4.1.** Soit  $M$  un monoïde et  $R$  un ensemble de coefficients (anneau, semi-anneau ou corps, commutatifs ou non). On notera  $R\langle\langle M \rangle\rangle \simeq R^M$ , l'ensemble des fonctions de  $M$  dans  $R$  (séries) et  $R[M] = R\langle M \rangle = R^{(M)}$ , l'ensemble des fonctions à support fini (polynômes)<sup>1</sup>. On a alors un produit scalaire<sup>2</sup> (“pairing” en anglais)  $R\langle\langle M \rangle\rangle \otimes_R R\langle M \rangle \rightarrow R$  donné par

$$\langle S | P \rangle = \sum_{m \in M} \langle S | m \rangle \langle P | m \rangle \quad (4.1)$$

où, pour une série  $T$ ,  $\langle T | m \rangle$  désigne  $T(m)$ , appelé *coefficient* de  $m$  dans  $T$ .

On dira qu'une famille  $(S_i)_{i \in I}$  est *sommable* [Reu93] si, pour tout  $w$ , l'application  $i \rightarrow \langle S_i | w \rangle$  est à support fini. En ce cas, sa somme est la série  $T \in R\langle\langle M \rangle\rangle$  telle que, pour tout  $w$

$$\langle T | w \rangle = \sum_{i \in I} \langle S_i | w \rangle \quad (4.2)$$

*Remarque(s).* On remarque que, pour toute série  $S \in R\langle\langle M \rangle\rangle$ , la famille  $(\langle S | m \rangle m)_{m \in M}$  est sommable, c'est ce qui justifie la notation

$$S = \sum_{m \in M} \langle S | m \rangle m$$

### 4.1.2. Séries doubles et calculs sur les graphes

Soient  $X, Y$  deux alphabets. Les séries doubles sont les séries sur le monoïde  $X^* \times Y^*$ . Une telle série s'écrit<sup>3</sup>

$$T = \sum_{(u,v) \in X^* \times Y^*} \langle T | u \otimes v \rangle u \otimes v. \quad (4.3)$$

Comme l'application canonique  $(u, v) \mapsto R\langle X \rangle \otimes_R R\langle Y \rangle$  est injective, on notera ce monoïde indifféremment  $X^* \times Y^*$  ou  $X^* \otimes Y^*$ . Ces séries s'écrivent donc

$$T = \sum_{u,v \in X^*} \langle T | u \otimes v \rangle u \otimes v. \quad (4.4)$$

1. Le même polymorphisme existe aussi dans le monde commutatif puisque  $R[Z]$  désigne tout à la fois l'espace des polynômes d'alphabet  $Z$  et, si  $Z$  est un monoïde, son algèbre et, si  $Z$  est un élément, une extension.

2. Le produit tensoriel de deux modules sur un semi-anneau a été résolu par D. Krob [Kro00; Kro91]. Les semi-anneaux ne permettant plus d'utiliser la soustraction (les modules sont des monoïdes additifs), la construction repose que la notion de congruence. Cette construction permet, par exemple de montrer que les séries rationnelles sont stables par produit de Hadamard, de shuffle et d'infiltration et de construire automatiquement leurs automates.

3. Ceci, à cause de l'isomorphisme  $R\langle X \rangle \otimes_R R\langle Y \rangle \rightarrow R\langle X^* \times Y^* \rangle$  qui identifie la base  $\{u \otimes v\}_{(u,v) \in X^* \times Y^*}$  avec la base  $\{(u, v)\}_{(u,v) \in X^* \times Y^*}$  (comme dans le cas d'un monoïde général, les éléments sont identifiés à la fonction caractéristique du singleton associé).

On définit un calcul avec les produits tensoriels complétés comme suit :

D'abord, si  $(S_i)_{i \in I}$ ;  $(T_j)_{j \in J}$  sont des familles sommables de polynômes, la famille double  $(S_i \otimes T_j)_{(i,j) \in I \times J}$  (qui est dans  $R\langle X \rangle \otimes R\langle X \rangle$ ) est sommable et sa somme vérifie

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} S_i \otimes T_j = \sum_{(u,v) \in X^* \times Y^*} \left\langle \sum_{i \in I} S_i \mid u \right\rangle \left\langle \sum_{j \in J} T_j \mid v \right\rangle u \otimes v .$$

Elle ne dépend donc que des sommes  $\sum_{i \in I} S_i$  et  $\sum_{j \in J} T_j$ .

Ceci construit une correspondance

$$R\langle X \rangle \otimes R\langle X \rangle \rightarrow R\langle X^* \otimes X^* \rangle \quad (4.5)$$

que l'on notera provisoirement  $\hat{\otimes}$ .

À tout homomorphisme (linéaire)  $f \in Hom_R(R\langle X \rangle, R\langle Y \rangle)$ , on peut faire correspondre son graphe

$$\Gamma(f) := \sum_{u \in X^*} u \hat{\otimes} f(u) . \quad (4.6)$$

Une telle application  $f$  admet un adjoint  $f^\vee \in Hom_R(R\langle Y \rangle, R\langle X \rangle)$  (au sens des deux produits scalaires canoniques) si

$$(\forall (u, v) \in X^* \times Y^*) (\langle f(u) \mid v \rangle_Y = \langle u \mid f^\vee(v) \rangle_X) \quad (4.7)$$

on a alors

$$\sum_{u \in X^*} u \hat{\otimes} f(u) = \sum_{v \in Y^*} f^\vee(v) \hat{\otimes} v \quad (4.8)$$

**Exemple 4.1.** Ceci permet de vérifier par exemple que  $\pi_X$  et  $\pi_Y$  sont adjoints l'un de l'autre.

Les graphes permettent un calcul particulièrement simple sur les convolutions. On rappelle qu'étant donnés

- Une cogèbre  $(C, \Delta)$
- Une algèbre  $(\mathcal{A}, \mu)$

la convolution de deux éléments  $f, g \in Hom(C, \mathcal{A})$  se définit par

$$f \star g = \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta \quad (4.9)$$

si l'algèbre est associative avec unité (AAU)  $1_{\mathcal{A}}$  et la cogèbre est coassociative avec coïunité  $\epsilon_C$ , alors  $Hom(C, \mathcal{A})$  est une AAU d'unité  $1_{\mathcal{A}} \circ \epsilon_C$ . On a

$$\Gamma(f \star g) = \Gamma(f) \otimes \Gamma(g) \quad (4.10)$$

où  $\otimes$  est la loi définie sur les séries doubles par [Reu93]

$$S \otimes T = \sum_{u_i \in X^*; v_i \in Y^*} \langle S \mid u_1 \otimes v_1 \rangle \langle T \mid u_2 \otimes v_2 \rangle (u_1 \sqcup u_2) \otimes v_1 v_2 \quad (4.11)$$

(on vérifie que la famille ci-dessus est bien sommable).

Ces opérations permettent de manipuler facilement le projecteur eulérien  $\pi_1$  et son adjoint  $\pi_1^\vee$  par

$$\log(\mathcal{D}_X) = \sum_{w \in X^*} w \otimes \pi_1(w) = \sum_{w \in X^*} \pi_1^\vee(w) \otimes w \quad (4.12)$$

### 4.1.3. Limites

On peut donner le critère de convergence d'une suite généralisée<sup>4</sup> qui correspond à la sommabilité définie plus haut (cf 4.1.1.). Soit  $(S_\alpha)_{\alpha \in A}$  une telle suite. Elle converge vers  $T$  (la limite se fait coefficient par coefficient<sup>5</sup>)  $\lim_\alpha (S_\alpha) = T$  ssi, pour tout  $w \in X^*$ , on a  $\lim_\alpha (\langle S_\alpha | w \rangle) = \langle T | w \rangle$ .

Soit maintenant une famille  $\mathcal{F} = (S_i)_{i \in I}$  ( $I$  est totalement ordonné) de séries. Pour tout  $F = \{i_1 < \dots < i_n\} \subset I$ , on note

$$\mathcal{F}_\uparrow(F) = \prod_{i \in F}^{\nearrow} S_i = S_{i_1} \cdots S_{i_n} \quad ; \quad \mathcal{F}_\downarrow(F) = \prod_{i \in F}^{\searrow} S_i = S_{i_n} \cdots S_{i_1} \quad (4.13)$$

La famille  $(\mathcal{F}_\downarrow(F))_{F \subset_{\text{fini}} I}$  forme une suite généralisée<sup>6</sup> et sa limite, si elle existe, est notée

$$\prod_{i \in I}^{\searrow} S_i \quad (4.14)$$

Les produits infinis sont utilisés en Informatique Théorique pour le traitement des algorithmes des factorisations et de leurs logarithmes (cf le théorème de Schützenberger [Sch65] sur les codes circulaires et son extension à d'autres monoïdes par J-G. Luque [Luq99]).

Les notions développées ici peuvent être rapprochées de celle d'algèbre topologique ([Rac00], Préliminaires) en effet, il s'agit ici d'une topologie faible (i.e. initiale), l'ensemble des coefficients étant muni de la topologie discrète. Avec la même construction (topologie faible i.e. convergence coefficient par coefficient), mais en conservant aux scalaires  $(\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathcal{H}(\Omega))$  leur topologie d'origine, on obtient la topologie de Treves [Tre67], utile quand on veut faire varier continûment les coefficients dans la factorisation MRS.

Lorsque l'alphabet est fini (comme ici  $Z = X$  qui a deux lettres) ou infini (comme ici  $Z = Y$  qui est infini), on met un poids<sup>7</sup> sur le monoïde libre  $Z^*$  (longueur dans le cas de

4. Une *suite généralisée* ou *filet* est une famille indexée à un ensemble ordonné *filtrant supérieurement*  $(A, <)$ . C'est à dire tel que

$$(\forall \alpha_1, \alpha_2 \in A)(\exists \beta \in A)(\alpha_i \leq \beta \quad i = 1, 2)$$

5. Ici la limite est stationnaire

6. L'ensemble des parties finies de  $I$  est ordonné par inclusion

7. [Rac00] Définition 3.4 et suiv.

$X$  et poids dans le cas de  $Y$ ) de façon que  $\mathbb{k}\langle Z \rangle$  ait pour complété  $\mathbb{k}\langle\langle Z \rangle\rangle$ . Nous donnons les définitions ci-dessous.

**Définition 4.2** ([Rac00] def 3.4). Soit  $M$  un monoïde. Un poids sur  $M$  est un morphisme  $|\bullet| : M \rightarrow \mathbb{N}$ .

*Remarque(s)*. En particulier, si le monoïde est libre ( $M = X^*$ ), les poids sur  $M$  sont en bijection avec les *distributions de poids* sur  $X$  i.e. les applications  $X \rightarrow \mathbb{N}$  (on prendra garde qu'il peut y avoir des lettres de poids 0, comme dans l'alphabet  $Y_0 = \{y_k\}_{k \geq 0}$  avec  $y_k \mapsto k$ ).

Un poids induit aussitôt la partition  $M = \sqcup_{n \geq 0} M_n$  du monoïde avec  $M_n = \{m \in M \mid |m| = n\}$ , une graduation de  $R\langle M \rangle$  et la filtration décroissante associée ([Bou07a], Ch III)

$$R_n\langle Z \rangle = \text{span}_R(M_n) ; R_{\geq N}\langle\langle Z \rangle\rangle = \text{span}_R(\cup_{n \geq N} M_n) \quad (4.15)$$

cette filtration forme un base de voisinages de zéro dans  $R_{\geq N}\langle\langle Z \rangle\rangle$  et induit une structure d'anneau topologique sur  $R\langle\langle Z \rangle\rangle$ . Cette filtration est toujours séparée<sup>8</sup>, mais les complétés que l'on obtient ne sont pas toujours les espaces de séries correspondants comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 4.2.** i) Si on munit  $Y^*$  ( $Y = \{y_k\}_{k \geq 1}$ ) du poids usuel ( $y_k = k$ ), on a

$$\widehat{R\langle Y \rangle}^{(\bullet)} = R\langle\langle Y \rangle\rangle \quad (4.16)$$

ii) Avec la longueur usuelle  $|\bullet|$ , on a seulement

$$\widehat{R\langle Y \rangle}^{|\bullet|} = \{S \in R\langle\langle Y \rangle\rangle \mid (\forall n \in \mathbb{N}) (\sum_{|w|=n} \langle S \mid w \rangle w \in R\langle Y \rangle)\} \quad (4.17)$$

en particulier, la somme des lettres n'est plus dans le complété et on ne peut pas traiter correctement les éléments de type groupe comme  $g = 1 + \sum_{n \geq 0} y_n \in R\langle\langle Y_0 \rangle\rangle$ .

*Remarque(s)*. i) La notion de sommabilité développée dans [Reu93] correspond, pour un alphabet  $Z$  et son espace de séries  $R\langle\langle Z \rangle\rangle$ , au système de voisinages de zéro

$$R_{\geq \alpha}\langle\langle Z \rangle\rangle = \left\{ S \in R\langle\langle Z \rangle\rangle \mid (\forall w \in Z^*) (\exists x \in Z) (|w|_x < \alpha(x)) \implies \langle S \mid w \rangle = 0 \right\} \quad (4.18)$$

avec  $\alpha \in \mathbb{N}^{(Z)}$ . Cette topologie coïncide avec celle donnée par la longueur ordinaire lorsque l'alphabet est fini et est différente dans le cas d'un alphabet infini (voir l'exemple ci-dessus).

ii) Dans le cas où  $R$  n'est pas un anneau, la construction ci-dessus n'est plus valable, c'est pourquoi, en Informatique Théorique, la notion de sommabilité est définie indépendamment de celle de voisinages de zéro. Elle correspond à la topologie produit  $R\langle\langle M \rangle\rangle \simeq R^M$  ( $R$  est alors muni de la topologie discrete).

<sup>8</sup>. Et munit donc  $R\langle Z \rangle$  d'une structure d'anneau topologique ([Bou07c] Ch III §6.3), ce qui permet d'écrire les limites avec des égalités.

#### 4.1.4. Partitionnement des indices

Soit  $I = \sqcup_{j \in J} I_j$  une partition de  $I$  et  $(S_i)_{i \in I}$  une famille de séries (dans  $R\langle\langle X \rangle\rangle$ ). Pour que  $(S_i)_{i \in I}$  soit sommable il faut et il suffit que

1. pour tout  $j \in J$   $(S_i)_{i \in I_j}$  soit sommable
2. la famille  $\left( \sum_{i \in I_j} S_i \right)_{j \in J}$  soit sommable

dans ce cas

$$\sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I_j} S_i \right) = \sum_{i \in I} S_i . \quad (4.19)$$

De même pour les produits infinis, si la partition  $I = \sqcup_{j \in J} I_j$  correspond à une somme ordinale, on a :

Pour que  $(S_i)_{i \in I}$  soit multipliable il faut et il suffit que

1. pour tout  $j \in J$   $(S_i)_{i \in I_j}$  soit multipliable
2. la famille  $\left( \prod_{i \in I_j} S_i \right)_{j \in J}$  soit multipliable

dans ce cas

$$\prod_{j \in J} \left( \prod_{i \in I_j} S_i \right) = \prod_{i \in I} S_i . \quad (4.20)$$

#### 4.1.5. Factorisation des produits infinis et des caractères

Pour pouvoir appliquer les caractères à la factorisation MRS des séries diagonales  $\mathcal{D}_X$ ;  $\mathcal{D}_Y$ , on construit les sous algèbres  $Iso(R, X)$  (resp.  $Iso(R, Y)$ ) de  $R\langle X^* \otimes X^* \rangle$  (resp.  $R\langle Y^* \otimes Y^* \rangle$ ).

Soit  $U \in R\langle\langle X \rangle\rangle$  un caractère de  $(R\langle X \rangle, \sqcup, 1_{X^*})$ , on remarque que  $U \otimes Id$  est un morphisme

$$(R\langle X \rangle, \sqcup, 1_{X^*}) \otimes (R\langle X \rangle, conc, 1_{X^*}) \rightarrow (R\langle X \rangle, conc, 1_{X^*}) \quad (4.21)$$

(moyennant l'identification usuelle  $R \otimes_R R\langle X \rangle \simeq R\langle X \rangle$ ) et on souhaite l'appliquer à la factorisation MRS.

Malheureusement, ce morphisme n'est pas continu en général : si, par exemple,  $l$  est un mot de Lyndon pour lequel  $\langle U \mid l \rangle = 1$ , alors  $(U \otimes Id)$  envoie constamment la suite  $l^{\sqcup n} \otimes 1_{X^*}$  (qui tend vers zero) sur  $1_{X^*}$ . On remarque toutefois que  $\mathcal{D}_X$  et toutes ses métamorphoses usuelles (i.e. les facteurs de la factorisation MRS) vivent dans l'adhérence de la sous  $\otimes$ -algèbre

$$Iso(R, X) = \{T \in R\langle X^* \otimes X^* \rangle \mid supp(T) \subset Isomon(X)\} \quad (4.22)$$

où  $Isomon(X)$  est le sous monoïde de  $X^* \otimes X^*$  défini par

$$Isomon(X) = \{u \otimes v \mid |u| = |v|\} \quad (4.23)$$

On vérifie que, pour tout caractère  $U$  de  $(R\langle X \rangle, \sqcup, 1_{X^*})$ , le morphisme (4.21) est continu sur  $Iso(R, X)$ , que l'adhérence de  $Iso(R, X)$  est

$$\overline{Iso}(R, X) = \{T \in R\langle\langle X^* \otimes X^* \rangle\rangle \mid \text{supp}(T) \subset Isomon(X)\} . \quad (4.24)$$

et que  $\mathcal{D}_X$  ainsi que tous les facteurs de MRS sont bien dans  $\overline{Iso}(R, X)$ . Par suite

$$U = \sum_{w \in X^*} \langle U \mid w \rangle w = U \hat{\otimes} Id(\mathcal{D}_X) = \prod_{l \in \text{Lyn}(X)} e^{(U|S_l)P_l} \quad (4.25)$$

Ces constructions s'adaptent à  $R\langle\langle Y \rangle\rangle$ , pour le stuffle, en remplaçant la longueur par le poids.

#### 4.1.6. Développements asymptotiques

Nous n'utiliserons que trois systèmes de voisinages (ou plutôt de parties) parmi lesquels

— soit les voisinages de l'infini dans  $\mathbb{N}$

$$V_N = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq N\} = [N, +\infty[_{\mathbb{N}} \quad (4.26)$$

— soit les voisinages fendus de 0

$$W_R = \{z \mid |z| < R, z \notin ]-\infty, 0[ \}_{0 < R < 1} \quad (4.27)$$

Ces systèmes de parties (notés  $\mathcal{B}$ ) possèdent en commun les propriétés suivantes

1.  $\emptyset \neq \mathcal{B} \subset \mathbb{C}$
2.  $\emptyset \notin \mathcal{B}$
3.  $(\forall U, V \in \mathcal{B})(\exists W \in \mathcal{B})(W \subset U \cap V)$

autrement dit,  $\mathcal{B}$  est une base de filtre dans  $\mathbb{C}$  [Bou07b ; Den+11 ; E R91 ; Die80]. Nous noterons  $\mathcal{F}(\mathcal{B}, \mathbb{C})$  l'ensemble des fonctions à valeurs complexes dont le domaine de définition contient un élément de  $\mathcal{B}$  et suivrons [Bou07b ; E R91 ; Die80]<sup>9</sup> pour poser la définition suivante adaptée à notre contexte<sup>10</sup>.

9. Sans la multiplicativité de [Die80] dans un premier temps.

10. Ces théories ont des points de contact avec [Hoe97 ; Hoe06]



Voisins de	Base	Fonctions
$+\infty$	$\{[B, +\infty[_{\mathbb{N}}\}_{B \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$	$(\log^k(N) N^{-l})_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2}$
”	$\{[B, +\infty[_{\mathbb{N}}\}_{B \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$	$(H_1^k(N) N^{-l})_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2}$
1	$(B_r(1) \cap \Omega)_{0 < r < 1} =$ $\{z \in \mathbb{C} \mid  z - 1  < r \text{ et } z \notin [1, +\infty[ \}$	$(\log(1 - z)^k (1 - z)^l)_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2}$

TABLE 4.1 – Test Table

**Définition 4.3.** Soit  $\mathcal{B}$  une base de filtre sur  $\mathbb{C}$ . On appellera *échelle de comparaison* (relative à  $\mathcal{B}$ ) un ensemble  $\mathcal{E}$  de fonctions telles que

1.  $f \in \mathcal{E} \implies f \in \mathcal{F}(\mathcal{B}, \mathbb{C})$  et  $f \neq 0$
2.  $\mathcal{E}$  est totalement ordonnée par la relation

$$(f < g) \iff (\exists D \in \mathcal{B})(\exists \varepsilon \in \mathbb{C}^D)(\lim_{\mathcal{B}} \varepsilon(z) = 0 \text{ et } f \equiv_{|D} \varepsilon g) \quad (4.28)$$

*Remarque(s).* La relation  $f < g$  se note aussi  $f = o_s(g)$  (où  $s$  est un indice visant à distinguer ces fonctions lors du calcul).

Dans ce mémoire, nous utilisons les échelles de comparaison suivantes

**Définition 4.4.** Soit  $f$  une fonction à valeurs complexes telle que  $\text{Dom}(f) \supset D \in \mathcal{B}$ . On appelle développement asymptotique de  $f$ , selon  $\mathcal{E}$  et à la précision  $\varphi$ , une expression (si elle existe)

$$f \equiv_X \left( \sum_{g \geq \varphi} a_g g \right) + o_s(\varphi) \quad (4.29)$$

où  $X \in \mathcal{B}$ ;  $\varphi \in \mathcal{E}$  et  $(a_g)_{g \in \mathcal{E}; g \geq \varphi}$  est à support fini.

Par abus de langage, une telle expression sera souvent notée avec l'égalité

$$f = \left( \sum_{g \geq \varphi} a_g g \right) + o_s(\varphi) \quad (4.30)$$

étant convenu que la restriction se fait sur l'intersection des domaines des fonctions en présence ou même un domaine plus petit, mais dans  $\mathcal{B}$  (par exemple si on a à manipuler plusieurs développements asymptotiques).

Cette définition induit les propriétés usuelles (unicité, troncature).

On utilisera plusieurs fois le lemme suivant

**Lemme 1.** Soit  $\mathcal{E}^-$ , une échelle de comparaison (strictement) dominée par  $\mathbb{1}_X$  pour un certain  $X \in \mathcal{B}$  et  $u \in \mathcal{F}(\mathcal{B}, \mathbb{C})$  tel que  $u > \mathbb{1}_X$  et  $v = o_n(u^n)$  pour tout  $n$  et  $v \in \mathcal{E}^-$ , alors

1.  $\{u^n\}_{n \geq 0} \cup \mathcal{E}^- = \mathcal{E}$  est une échelle de comparaison

2. Soit  $\mathcal{A}(\mathcal{E})$  l'ensemble des  $f \in \mathcal{F}(\mathcal{B}, \mathbb{C})$  qui admettent un développement de la forme

$$f = P(u) + O_s(v) \quad (4.31)$$

pour une certaine  $v \in \mathcal{E}^-$ .

Alors  $f \rightarrow P$  induit un caractère<sup>11</sup> de  $\mathcal{A}(\mathcal{E})/R_\infty$  à valeurs dans  $\mathbb{C}[X]$ .

$\mathcal{E}^-$	$\mathbf{u}$
$(\log^k(N) N^{-l})_{k \geq 0; l \geq 1}$	$\log(N)$
$(H_1^k(N) N^{-l})_{k \geq 0; l \geq 1}$	$H_1^k(N)$
$(\log(1-z)^k (1-z)^{-l})_{k \geq 0; l \geq 1}$	$\log(1-z)$

TABLE 4.2 – Installation du lemme.

---

11. La relation  $R_\infty$  est celle de la construction des germes [Bou07b; Den+11; E R91].

## 4.2. Annexe B : Programme en Maple

Nous allons introduire ici quelques procédures en Maple dans notre package qui a été utilisé dans le calcul de l'algèbre de quasi-mélange  $q$ -déformé et affichant toutes les exemples dans la thèse. Grâce aux algorithmes dans la thèse, le package est programmé pour représenter la structure des polyzêtas et déterminer les développements asymptotiques des sommes harmoniques.

Dans ce package, on peut définir un certain alphabet dont les lettres sont associées aux nombres totalement ordonnés. Il est une extension du package préexistant *StringTools* de Maple.

### Les notations dans les programmes :

1.  $X$  : nom d'un alphabet qu'on veut utiliser.
2.  $Z$  : l'ordre des indices associées aux lettres de l'alphabet.

### 4.2.1. Calculs sur des mots

Ce programme décompose un mot à la forme de produit décroissant des mots de Lyndon (par la théorème de Chen-Fox-Lyndon [Che+58]) :

---

```

LyndonFact:=proc(word1, Z)
local indice, res;
option remember;
res := map(element -> [element], [op(word1)]);
indice := nops(res) - 1;
while evalb(0 < indice) do
  while evalb(indice < nops(res)) and [lessLex](
    op(indice, res), op(indice + 1, res), Z) do
    res := [op(1 .. indice - 1, res),
            [op(op(indice, res)), op(op(indice + 1, res))],
            op(indice + 2 .. nops(res), res)];
    if indice < nops(res) - 1 then indice := indice + 1
    end if
  end do;
  indice := indice - 1
end do;
op(0, word1)[op(res)]
end proc;

```

---

Ce programme détermine la factorisation standard d'un mot de Lyndon (défini dans le paragraphe 1.1.2.) :

---

```

StandFact := proc (Lyndonword, Z)
local indice, res, i, temp, X;
option remember;
    X:=op(0, Lyndonword);
    res := [op(Lyndonword)]; indice := nops(res)-1;
while evalb(1 < indice) do
    while evalb(indice < nops(res)) and
        [lessLex](X[op(op(indice, res))], X[op(op(indice+1,
res))]), Z)
    do
        res := [op(1 .. indice-1, res), [op(op(indice, res)),
            op(op(indice+1, res))], op(indice+2 .. nops(res), res)];
        indice := indice+1
    end do;
    indice := indice-1
end do;
if nops(res)=1 then res:=X[[op(Lyndonword)]]
else
    temp:=[op(op(1, res))];
    for i from 2 to nops(res)-1 do
        temp:=[op(temp), op(op(i, res))] end do;
        temp:=[[op(temp)], [op(op(nops(res), res))]];
        res:=op(0, Lyndonword) [op(temp)] ;
    end if;
    res;
end proc;

```

---

### 4.2.2. Calculs dans l'algèbre de quasi-mélange $q$ -déformé

Ce programme détermine le produit de quasi-mélange  $q$ -déformé,  $\boxplus_q$ , de deux polynômes.

---

```

q_StuffleProduct:=proc(poly1, poly2, q, X, length)
local res, indicel1, indice2, poly1_e, poly2_e, lenp1, lenp2,
Lp1, Lp2, mn;
    poly1_e := expand(poly1);
    poly2_e := expand(poly2);
    if nargs = 4 then
        [x_poly_stuffle_q](poly1_e, poly2_e, q, X)
    elif 4 < nargs then
        lenp1 := min([xdegree](poly1_e, X), length);

```

```

Lp1 := map((list1, X, pol1) ->
  [homogeneousPart](pol1, X, list1),
  ['$`(0 .. lenp1)], X, poly1_e);
lenp2 := min([xdegree](poly2_e, X), length);
Lp2 := map((list1, X, pol1) ->
  [homogeneousPart](pol1, X, list1),
  ['$`(0 .. lenp2)], X, poly2_e);
res := 0;
for indice1 to lenp1 + 1 do
  mn := min(lenp2 + 1, length + 2 - indice1);
  for indice2 to mn do res := res +
    [x_poly_stuffle_q](Lp1[indice1],
    Lp2[indice2],q, X)
  end do
end do;
res
end if
end proc;

```

---

Ce programme détermine le produit de concaténation de deux polynômes.

---

```

ConcaProduct:=proc(poly1, poly2,length)
local res, indice1, indice2, poly1_e, poly2_e, lenp1, lenp2,X,
Lp1, Lp2, mn;
  poly1_e := expand(poly1);
  poly2_e := expand(poly2);
  if type(poly1, '+') then X:=op(0,op(1,poly1)) else
  X:=op(0,poly1) end if;
  if nargs = 2 then
    [poly_cat](poly1_e, poly2_e,X)
  elif 2 < nargs then
    lenp1 := min([xdegree](poly1_e, X), length);
    Lp1 := map((list1, X, pol1) ->
      [homogeneousPart](pol1, X, list1),
      ['$`(0 .. lenp1)], X, poly1_e);
    lenp2 := min([xdegree](poly2_e, X), length);
    Lp2 := map((list1, X, pol1) ->
      [homogeneousPart](pol1, X, list1),
      ['$`(0 .. lenp2)], X, poly2_e);
    res := 0;
    for indice1 to lenp1 + 1 do
      mn := min(lenp2 + 1, length + 2 - indice1);
      for indice2 to mn do res := res +

```

```

        [poly_cat] (Lp1[indice1],
        Lp2[indice2], X)
    end do
end do;
res
end if
end proc;

```

---

Ce programme détermine le coproduit, la loi duale de produit  $\boxtimes_q$ , de deux polynômes.

---

```

DeltaStuffle_q:=proc(poly,q)
local DeltaLetter,res,j,list,temp,DeltaWord,coeff,word,deltalet;
res:=0;
if type(poly,`+`) then list:=convert(poly,list) else
list:=[poly]
end if;
for temp in list do
DeltaWord:=L[*]R[*];
coeff:=1;
if type(temp,`*`) then
for j to nops(temp)-1 do coeff := coeff*op(j,temp) end do;
word:=op(nops(temp),temp);
else
word:=temp;
end if;
for j to nops(word) do
deltalet:=[DeltaLetter] (Y[op(j,word)],q);
DeltaWord:=[ProductTensorPoly] (DeltaWord,deltalet);
end do;
res:=res+coeff*DeltaWord;
end do;
res;
end proc;

```

---

Ce programme détermine le coproduit, la loi duale de produit de concaténation, de deux polynômes.

---

```

DeltaConca:=proc(poly)
local temp,coeff,word,n,i,res;
if type(poly,`+`) then map(procname, poly)
else
if type(poly,fraction) or type(poly,integer) then res:=poly

```

```

else
  temp := [mono_decompose] (poly, Y);
  coeff:= op(1, temp);
  word:= op(2, temp);
  n:=nops(word);
  res:=L[]*R[op(word)]+L[op(word)]*R[];
  if n<>0 then
    for i to n-1 do
      res:=res+L[op(1..i, word)]*R[op(i+1..n, word)]
    end do
  end if;
  res:=coeff*res;
end if;
end if;
end proc;

```

---

### 4.2.3. Calculs sur les bases en dualité

Ce programme calcule  $\pi_1$  (défini dans (1.56)) d'une lettre :

---

```

Compute_pi1:=proc(letter)
local j,l,index,poly,k,Try;
  Try:=proc(l)
  local i,m,temp;
    if j=1 then poly:=op(0,letter)[k]
    else
      temp:=k-sum(op(m,index),m=1..l-1);
      if l=j and temp>0 then if type(j,even) then
        poly:=poly-1/j*Y[op(1..l-1,index),temp] else
        poly:=poly+1/j*op(0,letter)[op(1..l-1,index),temp] end if
      else
        for i to k-j+1 do
          if l=1 then index:=[i]
          else if temp>0 then
            index:=[op(1..l-1,index),i];
            else break
          end if
        end if;
        Try(l+1);
      end do
    end if
  end if
end if

```

```

end proc;
k:=op(letter);
poly=NULL;
for j to k do Try(1) end do;
poly;
end proc;

```

---

Ce programme détermine d'un élément de la base de Poincaré-Birkhoff-Witt,  $\{\Pi_w\}_{w \in Y^*}$ , associé au mot entrée :

---

```

PiOfWord:= proc(word, Z, q)
local res, LyndonFactor, i, temp, X;
X:=op(0, word);
LyndonFactor:=[LyndonFact](word, Z);
res:=[op(LyndonFactor)];
temp:=1;
for i to nops(res) do
temp := [ConcaProduct](temp, [PLynwordStuff_q](X[op(op(i,
res))], X, Z, q))
end do
end proc;

```

---

Ce programme détermine d'un élément de la base duale,  $\{\Sigma_w\}_{w \in Y^*}$ , associé au mot entrée :

---

```

SigmaOfWord:=proc(word, Z, q)
local LyndonWord, L, T, k, s, l, index, res, Lyndonfactor, temp, M,
i, poly, tautology, j, factor, X;
X:=op(0, word);
Lyndonfactor:=[LyndonFact](word, Z);
res:=[op(Lyndonfactor)];
temp:=1;
for i to nops(res) do
poly:=0; LyndonWord:=X[op(op(i, res))];
L:=ListOfStandarSequences(LyndonWord, X, Z);
for T in L do
j:=1;
while j<=nops(T) and nops(op(j, T))=1 do
k:=j+1; index:=[];
while k<=nops(T) do
if k<nops(T) and
greatLex(X[op(op(k+1, T))], X[op(op(k, T))], Z) then
break

```



```

        else
            index:=[op(index),op(op(k,T))];
            k:=k+1;
        end if;
    end do;
    if k > nops(T) then
        s:=0; for l to j do s:=s+op(op(l,T)) end do;
        if nops(index)>0 then
            poly:=poly+ (q^(j-1)/(j!))*
                ConcaProduct(X[s],procname(X[op(index)]),Z,q)
        else
            poly:=poly+ (q^(j-1)/(j!))* X[s]
        end if;
    end if;
    j:=j+1;
end do;
end do;
if poly <>0 then temp:=[q_StuffleProduct](temp,poly,q,X)end
if;
end do;
temp/([TautologicNumber](Lyndonfactor));
end proc;

```

---

Ce programme représente un polynôme sur la base  $\{\Pi_w\}_{w \in Y^*}$  :

---

```

ExpressByPi:=proc(polynom,Z)
local res, poly,temp,word,n, List, mono,i,alpha;
poly:=polynom;
if type(poly, '+' ) then temp:=op(1,poly) else temp:=poly end
if;
mono:=[mono_decompose](temp,Y);
word:=op(2,mono);
n:=0;
for i to nops(word) do n:=n+op(i,word) end do;
List:=[[ListOfWeight](Y,n)];
for temp in List do alpha[op(temp)]:=0 end do;
for temp in List do
i:=1;
if type(poly, '+' ) then
n:=nops(poly);
mono:=[mono_decompose](op(1,poly),Y);
else
n:=1;

```

```

    mono:=[mono_decompose] (poly,Y)
end if;
word:=op(2,mono);
while temp <> word and i<=n do
    i:=i+1;
    if i<=n then mono:=[mono_decompose] (op(i,poly),Y);
        word:=op(2,mono); end if;
end do;
if i<=n then
    alpha[op(word)]:=alpha[op(word)]+op(1,mono);
    poly:=poly-alpha[op(word)]*[PBWL_wordStuff] (word,Y,Z);
end if;
end do;
res:=0;
for temp in List do
    res:=res+alpha[op(temp)]*Pi[op(temp)]
end do;
res;
end proc;

```

---

Ce programme représente un polynôme sur la base  $\{\Sigma_w\}_{w \in Y^*}$  :

---

```

ExpressBySigma:=proc(polynom)
local res, poly,temp,word,n, ListInc, ListDec,
    mono,i,beta,Z,fac,tauto,sig;
poly:=polynom;
if type(poly,`+`) then temp:=op(1,poly) else temp:=poly end
if;
mono:=[mono_decompose] (temp,Y);
word:=op(2,mono);
n:=0;
for i to nops(word) do n:=n+op(i,word) end do;
Z:=[seq(i,i=n..1,-1)];
ListInc:=[[ListOfWeight] (Y,n)];
ListDec:=[seq(op(i,ListInc),i=nops(ListInc)..1,-1)];
for temp in ListDec do beta[op(temp)]:=0 end do;
for temp in ListDec do
    i:=1;
    if type(poly,`+`) then
        n:=nops(poly);
        mono:=[mono_decompose] (op(1,poly),Y);
    else
        n:=1;
    end if;
end do;
end proc;

```

```

    mono:=[mono_decompose] (poly, Y)
end if;
word:=op(2,mono);
while temp <> word and i<=n do
    i:=i+1;
    if i<=n then mono:=[mono_decompose] (op(i,poly), Y);
        word:=op(2,mono); end if;
end do;
if i<=n then
    beta[op(word)]:=beta[op(word)]+op(1,mono);
    poly:=poly-beta[op(word)]*[SigmaOfWord] (word, Z, 1);
end if;
end do;
res:=0;
for temp in ListDec do
    res:=res+beta[op(temp)]*Sigma[op(temp)]
end do;
res;
end proc;

```

---

#### 4.2.4. Élimination structure des polyzêtas

Les programmes dessous sont grâce aux algorithmes 2 et 3 dans la thèse.

Ce programme détermine structure des polyzêtas sur la base  $\{\Sigma_l\}_{l \in \mathcal{L}_{\text{ym}} Y}$  :

---

```

StructurePolyzetaOnSigma:=proc (order)
local res, temp, word, n, Z, ListInc, ListDec,
    ListRelation, i, List, word1, degree, zeta, setsolution, fact,
    polyX, polyY, wordX, equa, ListSolution,
    wordY, mono, beta, fac, tauto, sig;
for degree from 3 to order do
print(`Polyzetas of weight`, degree);
List:=[ListLengthIdentityBetweenZeta_X] (degree);
Z:=[seq(i, i=degree..1, -1)];
ListInc:=NULL;
for temp in List do
    ListInc:= ListInc, [pi_Y] (Y, temp)
end do;
ListInc:=[ListInc];
ListDec:=[seq(op(i, ListInc), i=nops(ListInc)..1, -1)];
ListSolution:=NULL;

```

```

for temp in List do
  if nops([LyndonFact](temp, [0,1]))=1 then
    wordY:=[pi_Y](Y,temp);
    if nops(wordY)>1 or (op(1,wordY) mod 2 =0) then
      ListSolution:=ListSolution,wordY end if;
    end if;
  end do;
ListSolution:=[ListSolution];
ListRelation:=NULL;
for word1 in List do
  if op(1..2,word1) <> (1,1) and op(1..2,word1) <> (0,0) then
    ListRelation:=ListRelation,word1;
    if op(1,word1)=1 then
      wordX:=X[op(2..nops(word1),word1)];
      polyX:=[ShuffleProduct](X[1],wordX,X);
      polyY:=[pi_Y](Y,polyX)-[q_StuffleProduct](Y[1],[pi_Y](Y,wordX),1,Y);
    else
      fact:= [StandFact](word1, [0,1]);
      polyX:=1; polyY:=1;
      for i to nops(fact) do
        wordX:=X[op(op(i,fact))];
        polyX:=[ShuffleProduct](polyX,wordX,X);
        polyY:=[q_StuffleProduct](polyY,[pi_Y](Y,wordX),1,Y);
      end do;
      polyY:=polyY-[pi_Y](Y,polyX);
    end if;
    if type(polyY, '+' ) then temp:=op(1,polyY) else temp:=polyY
    end if;
    mono:=[mono_decompose](temp,Y);
    word:=op(2,mono);
    if nops(word)=1 then n:=op(word)
    else
      n:=0;
      for i to nops(word) do n:=n+ op(i,word) end do;
    end if;
    for temp in ListDec do beta[op(temp)]:=0 end do;
    for temp in ListDec do
      i:=1;
      if type(polyY, '+' ) then
        n:=nops(polyY);
        mono:=[mono_decompose](op(1,polyY),Y);
      else
        n:=1;

```

```

    mono:=[mono_decompose] (polyY,Y)
end if;
word:=op(2,mono);
while temp <> word and i<=n do
    i:=i+1;
    if i<=n then mono:=[mono_decompose] (op(i,polyY),Y);
        word:=op(2,mono); end if;
end do;
if i<=n then
    beta[op(word)]:=beta[op(word)]+op(1,mono);
    polyY:=polyY-beta[op(word)]*[SigmaOfWord] (word,Z,1);
end if;
end do;
equa[word1]:=0;
for temp in ListDec do
    fac:=[LyndonFact] (temp,Z);
    if op(fac)=1 then
        equa[word1]:=equa[word1]+beta[op(temp)]*zeta[Sigma[op(temp)]];
    else
        tauto:=[TautologicNumber] (fac);
        sig:=1;
        for i to nops(fac) do
            sig:=sig*zeta[Sigma[op(op(i,fac))]];
        end do;
        equa[word1]:=equa[word1]+1/tauto*beta[op(temp)]*sig;
    end if;
end do;
end if;
end do;
setsolution:=eliminate({seq(equa[word1],word1 in
    ListRelation)}, {seq(zeta[Sigma[op(wordY)]],wordY in
    ListSolution)});
setsolution:=(op(1,setsolution));
for temp in setsolution do
    zeta[op(op(1,temp))]:=op(2,temp)
end do;
print(setsolution);
end do;
end proc;

```

---

Ce programme détermine structure des polyzêtas sur la base  $\{S_l\}_{l \in \mathcal{L}_{yn}X}$  :

```
StructurePolyzetaOnS:=proc (order)
```

```

local res, polyX, polyY, temp, word, n, Z, ListInc, ListDec,
      mono, i, beta, tauto, sig, LHS, List, word1, wordX, wordY, degree, zeta, Listeqs,
ListSolution, setsolution, lyndonfac, standafac, polyirr;
zeta[S[1]]:=0; zeta[S[0]]:=0;
for degree from 3 to order do
  print(`Polyzetas of weight`, degree);
  Z:= [seq(i, i=degree..1, -1)];
  ListInc:= [ [ListLengthIdentityBetweenZeta_X] (degree) ];
  ListDec:= [seq(op(i, ListInc), i=nops(ListInc)..1, -1)];
  Listeqs:=NULL; ListSolution:=NULL;
  for word1 in ListDec do
    lyndonfac:= [LyndonFact] (word1, [0, 1]);
    if nops(lyndonfac)=1 then
      wordY:= [pi_Y] (Y, word1);
      standafac:= [StandFact] (wordY, Z);
      if nops(standafac)<>1 then
        ListSolution:=ListSolution, word1;
        polyX:= [ShuffleProduct] ([pi_X] (Y[op(op(1, standafac))]), [pi_X] (Y[
        polyY:= [q_StuffleProduct] (Y[op(op(1, standafac))],
          Y[op(op(2, standafac))], 1, Y);
        polyX:=polyX-[pi_X] (polyY);
      else
        if type(op(op(standafac)), even) then
          ListSolution:=ListSolution, word1 end if;
        next;
      end if;
    elif op(1, word1)=1 then
      wordX:=X[op(2..nops(word1), word1)];
      polyX:= [ShuffleProduct] (X[1], wordX, X);
      polyY:= [q_StuffleProduct] (Y[1], [pi_Y] (Y, wordX), 1, Y);
      polyX:=polyX-[pi_X] (polyY);
    else
      polyX:=SigmaOfWord(word1, [0, 1], 0);
      polyY:=SigmaOfWord([pi_Y] (Y, word1), Z, 1);
      polyX:=polyX-[pi_X] (polyY);
    end if;

    if type(polyX, `+`) then temp:=op(1, polyX) else temp:=polyX
      end if;
    mono:= [mono_decompose] (temp, X);
    word:=op(2, mono);
    for temp in ListDec do beta[op(temp)]:=0 end do;
    for temp in ListDec do

```

```

i:=1;
if type(polyX, '+' ) then
  n:=nops(polyX);
  mono:=[mono_decompose](op(1,polyX),X);
else
  n:=1;
  mono:=[mono_decompose](polyX,X)
end if;
word:=op(2,mono);
while temp <> word and i<=n do
  i:=i+1;
  if i<=n then mono:=[mono_decompose](op(i,polyX),X);
    word:=op(2,mono); end if;
end do;
if i<=n then
  beta[op(word)]:=beta[op(word)]+op(1,mono);
  polyX:=polyX-beta[op(word)]*[SigmaOfWord](word,[0,1],0);
end if;
end do;
res[op(word1)]:=0;
for temp in ListDec do
  lyndonfac:=[LyndonFact](temp,[0,1]);
  if nops(lyndonfac)=1 then
    res[op(word1)]:=res[op(word1)]+beta[op(temp)]*zeta[S[op(op(lyndonfac))]];
  else
    tauto:=[TautologicNumber](lyndonfac);
    sig:=1;
    for i to nops(lyndonfac) do
      sig:=sig*zeta[S[op(op(i,lyndonfac))]];
    end do;
    res[op(word1)]:=res[op(word1)]+1/tauto*beta[op(temp)]*sig;
  end if;
end do;
if res[op(word1)]<>0 then Listeqs:=Listeqs,word1 end if;
end do;
setsolution:=eliminate({seq(res[op(word1)],word1 in
  [Listeqs])},{seq(zeta[S[op(wordX)]],wordX in
  [ListSolution])});
setsolution:=(op(1,setsolution));
for temp in setsolution do
  zeta[op(op(1,temp))]:=op(2,temp)
end do;
print(setsolution);

```

```

end do;
end proc;

```

---

### 4.2.5. Développement asymptotique des sommes harmoniques

Les programmes dessous sont grâce à l'algorithme 4 dans la thèse.

---

```

AsymptExpansionH_Sigma:=proc(n,p)
local Listword,Liststand,word,Z,H,
    index,s,j,k,Lyndonfactor,T,l,m;
H[Sigma[2]]:=asympt(sum(1/k^2,k=1..N),N,p)-Zeta(2)+zeta[Sigma[2]];
H[Sigma[1]]:=asympt(sum(1/k,k=1..N),N,p);
Z:=[seq(i,i=n..1,-1)];
Listword:=QuasiShuffleAlgebra[ListOfWeight](Y,n);
for word in Listword do
s:=op(word);
Lyndonfactor:=QuasiShuffleAlgebra[LyndonFact](word,Z);
if nops(word)=1 then
H[Sigma[s]]:=asympt(sum(1/k^s,k=1..N),N,p)-Zeta(s)+zeta[Sigma[s]];
print('H[Sigma[s]]=', H[Sigma[s]]);
elif nops(Lyndonfactor)=1 then
H[Sigma[s]]:=0;
Liststand:=ListOfStandarSequences(word,Y,Z);
for T in Liststand do
j:=1;
while j<=nops(T) and nops(op(j,T))=1 do
k:=j+1;index:=[];
while k<=nops(T) do
if k<nops(T) and
greatLex(Y[op(op(k+1,T))],Y[op(op(k,T))],Z) then
break
else
index:=[op(index),op(op(k,T))];
k:=k+1;
end if;
end do;
if k > nops(T) then
m:=0; for l to j do m:=m+op(op(l,T)) end do;
if nops(index)>0 then
H[Sigma[s]]:=H[Sigma[s]]+ (1/(j!)) *
asympt(H[Sigma[m]] * H[Sigma[op(index)]],N,p)
else

```



```
        H[Sigma[s]]:=H[Sigma[s]]+ (1/(j!))*H[Sigma[m]]
    end if;
end if;
j:=j+1;
end do;
end do;
print("H[Sigma[s]]=", asympt(H[Sigma[s]],N,p));
else
H[Sigma[s]]:=1:
for T in Lyndonfactor do
    H[Sigma[s]]:=asympt(H[Sigma[s]]*H[Sigma[op(T)]],N,p)
end do;
H[Sigma[s]]:=H[Sigma[s]]/(QuasiShuffleAlgebra[TautologicNumber](Lyndonfactor))
print("H",s, H[Sigma[s]]);
end if;
end do;
end proc;
```

---

# Bibliographie

- [Ber+85] Jean BERSTEL et Dominique PERRIN. *Theory of codes*. T. 117. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1985, p. xiv+433. ISBN : 0-12-093420-5.
- [Ber+88] Jean BERSTEL et Christophe REUTENAUER. *Rational series and their languages*. T. 12. EATCS Monographs on Theoretical Computer Science. Springer-Verlag, Berlin, 1988, p. viii+151. ISBN : 3-540-18626-3.
- [Big00] M. BIGOTTE. “Etude symbolique et algorithmique des fonctions polylogarithmes et des nombres d’Euler-Zagier colorés”. Thèse de doct. University of Lille, 2000.
- [Bor+97] J. M. BORWEIN, D. M. BRADLEY et D. J. BROADHURST. “Evaluations of  $k$ -fold Euler/Zagier sums : a compendium of results for arbitrary  $k$ ”. In : *Electron. J. Combin.* 4.2 (1997). The Wilf Festschrift (Philadelphia, PA, 1996), Research Paper 5, approx. 21. ISSN : 1077-8926.
- [Bou+03] Nicolas BOURBAKI et al. *Algebra II*. T. Chapters 4-7. Elements of Mathematics. Springer, 2003. ISBN : 3540007067,9783540007067.
- [Bou00] N. BOURBAKI. *Integration. Chapter VII-IX*. Springer-Verlag, 2000.
- [Bou07a] N. BOURBAKI. *Algèbre commutative. Chapitres I-IV*. Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [Bou07b] N. BOURBAKI. *Fonctions d’une variable réelle Théorie élémentaire. Éléments de mathématique*. Springer Berlin Heidelberg, 2007. ISBN : 9783540340386.
- [Bou07c] N. BOURBAKI. *Topologie générale Chapitres I-IV*. Éléments de mathématique. Springer Berlin Heidelberg, 2007. ISBN : 9783540339823.
- [Bro+10] D. J. BROADHURST, J. A. M. VERMASEREN et J. BLÜMLEIN. “The multiple zeta values data mine”. Anglais. In : *Computer Physics Communications* 181.3 (2010), p. 582–625.

- [Bui+13a] Van Chien BUI, Gérard H. E. DUCHAMP et Hoang Ngoc MINH. “Schützenberger’s factorization on the (completed) Hopf algebra of  $q$ -shuffle product”. Anglais. In : *Journal of Algebra, Number Theory and Applications* 30.2 (2013), p. 191–215.
- [Bui+13b] Van Chien BUI et al. “Combinatorics of  $\varphi$ -deformed shuffle Hopf algebras”. In : *CoRR* abs/1302.5391 (2013).
- [Bui+15a] Van Chien BUI, Gérard H. E. DUCHAMP et Hoang Ngoc MINH. “Computation tool for the  $q$ -deformed quasi-shuffle algebras and representations of structure of MZVs”. In : *ACM Commun. Comput. Algebra* 49.4 (2015), p. 117–120. ISSN : 1932-2232.
- [Bui+15b] Van Chien BUI, Gérard H. E. DUCHAMP et Hoang Ngoc MINH. “Structure of Polyzetes and Explicit Representation on Transcendence Bases of Shuffle and Stuffle Algebras”. Anglais. In : *P. Symposium on Symbolic and Algebraic Computation* 40.2 (2015), p. 93–100.
- [Bui+15c] Van Chien BUI et al. “(Pure) transcendence bases in  $\varphi$ -deformed shuffle bialgebras”. In : *CoRR* abs/1507.01089 (2015).
- [Bui+16a] Van Chien BUI, Gérard H. E. DUCHAMP et Hoang Ngoc MINH. “Structure of Polyzetes and Explicit Representation on Transcendence Bases of Shuffle and Stuffle Algebras”. In : *J. Symbolic Comput.* (2016), forthcoming publication.
- [Bui+16b] Van Chien BUI et al. “Dual bases for noncommutative symmetric and quasi-symmetric functions via monoidal factorization”. In : *J. Symbolic Comput.* 75 (2016), p. 56–73. ISSN : 0747-7171.
- [Bui12] Van Chien BUI. “Hopf algebras of shuffle and quasi-shuffle & Construction of dual bases”. Anglais. Mém.de mast. Laboratoire LIPN - Université Paris 13, sept. 2012.
- [Car02] Pierre CARTIER. “Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes pro-unipotents”. In : *Astérisque* 282 (2002). Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001, Exp. No. 885, viii, 137–173. ISSN : 0303-1179.
- [Car87] Pierre CARTIER. “Jacobienne généralisées, monodromie unipotente et intégrales intérées”. Anglais. In : *Séminaire BOURBAKI* (1987), p. 31–52.
- [Che+58] K. T. CHEN, R. H. FOX et R. C. LYNDON. “Free differential calculus. IV. The quotient groups of the lower central series”. In : *Ann. of Math. (2)* 68 (1958), p. 81–95. ISSN : 0003-486X.
- [Che09] K. T. CHEN. “Iterated integrals and exponential homomorphisms”. Anglais. In : *Proc. Lond. Mathem. Soc.* 44.7 (2009), p. 801–817.

- [Che71] Kuo-tsai CHEN. “Algebras of iterated path integrals and fundamental groups”. In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 156 (1971), p. 359–379. ISSN : 0002-9947.
- [Che77] Kuo Tsai CHEN. “Iterated path integrals”. In : *Bull. Amer. Math. Soc.* 83.5 (1977), p. 831–879. ISSN : 0002-9904.
- [Cos+05a] Christian COSTERMANS, Jean-Yves ENJALBERT et Hoang Ngoc MINH. “Algorithmic and combinatoric aspects of multiple harmonic sums”. In : *2005 International Conference on Analysis of Algorithms*. Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AD. Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy, 2005, 59–70 (electronic).
- [Cos+05b] C. COSTERMANS et al. “Structure and asymptotic expansion of multiple harmonic sums”. In : *ISSAC’05*. ACM, New York, 2005, 100–107 (electronic).
- [Cos+09] Cristian COSTERMANS et Hoang Ngoc MINH. “Noncommutative algebra, multiple harmonic sums and applications in discrete probability”. Anglais. In : *J. Symbolic Computation* 44.7 (2009), p. 801–817.
- [Cos08] Cristian COSTERMANS. “Calcul symbolique non commutatif : analyse des constantes d’arbre de fouille”. Thèse de doct. Université des Sciences et Technologies de Lille, 2008.
- [Den+11] Matthieu DENEUFCHÂTEL et al. “Independence of hyperlogarithms over function fields via algebraic combinatorics”. In : *Algebraic informatics*. T. 6742. Lecture Notes in Comput. Sci. Springer, Heidelberg, 2011, p. 127–139.
- [Die80] J. DIEUDONNÉ. *Calcul infinitésimal*. Collection Méthodes. Hermann, 1980. ISBN : 9782705659073.
- [Dri89] V. G. DRINFEL’D. “Quasi-Hopf algebras”. In : *Algebra i Analiz* 1.6 (1989), p. 114–148. ISSN : 0234-0852.
- [Dri90] V. G. DRINFEL’D. “On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with  $Gal(\overline{Q}/Q)$ ”. In : *Algebra i Analiz* 2.4 (1990), p. 149–181. ISSN : 0234-0852.
- [Duc+07] G. H. E. DUCHAMP et C. TOLLU. “Sweedler’s duals and Schützenberger’s calculus”. In : *ArXiv e-prints* (déc. 2007).
- [Duc+89] G. H. E. DUCHAMP et J.-Y. THIBON. “Le support de l’algebre de Lie libre”. In : *Discrete Math.* 76.2 (1989), p. 123–129. ISSN : 0012-365X.
- [E R91] J. Odoux E. RAMIS C. Deschamps. *Cours de mathématiques spéciales, Tome 3*. Masson, 1991. ISBN : 2-225-82488-6.

- [Eca03] Jean ECALLE. “ARI/GARI, la dimorphie et l’arithmétique des multizêtas : un premier bilan”. In : *J. Théor. Nombres Bordeaux* 15.2 (2003), p. 411–478. ISSN : 1246-7405.
- [Eca85] Jean ECALLE. *L’équation du pont et la classification analytique des objets locaux*. T. 3. Les fonctions résurgentes. Université de Paris-Sud, Département de Mathématique, 1985.
- [Ehr96] Richard EHRENBORG. “On posets and Hopf algebras”. In : *Adv. Math.* 119.1 (1996), p. 1–25. ISSN : 0001-8708.
- [Esp+03] Marc ESPIE, Jean-Christophe NOVELLI et Georges RACINET. “Formal computations about multiple zeta values”. In : *From combinatorics to dynamical systems*. T. 3. IRMA Lect. Math. Theor. Phys. de Gruyter, Berlin, 2003, p. 1–16.
- [Fla+98] Philippe FLAJOLET et Bruno SALVY. “Euler sums and contour integral representations”. In : *Experiment. Math.* 7.1 (1998), p. 15–35. ISSN : 1058-6458.
- [G92] Wechsung G. *Functional equations of hyperlogarithms*. T. 37. Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, 1992, p. 171–184. ISBN : 9780821816349.
- [Haz08] M. HAZEWINKEL. *Handbook of Algebra*. Handbook of Algebra vol. 5. Elsevier Science, 2008. ISBN : 9780080564999.
- [Hoe06] J. van der HOEVEN. *Transseries and real differential algebra*. T. 1888. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 2006.
- [Hoe97] J. van der HOEVEN. “Automatic asymptotics”. Thèse de doct. Palaiseau, France : École polytechnique, 1997.
- [Hof00] Michael E. HOFFMAN. “Quasi-Shuffle Products”. Anglais. In : *Journal of Algebraic Combinatorics* 11 (2000), p. 49–68.
- [Hof97] Michael E. HOFFMAN. “The algebra of multiple harmonic series”. Anglais. In : *Journal of Algebra* 194 (1997), p. 477–495.
- [Iha+06] Kentaro IHARA, Masanobu KANEKO et Don ZAGIER. “Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values”. In : *Compos. Math.* 142.2 (2006), p. 307–338. ISSN : 0010-437X.
- [Kan+08] Masanobu KANEKO, Masayuki NORO et Ken’ichi TSURUMAKI. “On a conjecture for the dimension of the space of the multiple zeta values”. In : *Software for algebraic geometry*. T. 148. IMA Vol. Math. Appl. Springer, New York, 2008, p. 47–58.
- [Kan14] Ladji KANE. “Combinatoire et algorithmique des factorisations tangentes à l’identité”. Thèse de doct. Université Paris 13, 2014.

- [Kro00] Daniel KROB. “Communication à Gérard Duchamp (1991)”. Anglais. In : *Seminaire Lotharingien de Combinatoire* 43.4 (2000), p. 273–292.
- [Kro91] Daniel KROB. “Complete systems of  $q$ -rational identities”. Anglais. In : *Theoretical Computer Science* 89.2 (1991), p. 207–343.
- [Las90] Alain LASCOUX. “Wronski’s factorization of polynomials”. In : t. 26. Banach Center Publ. PWN, Warsaw, 1990, p. 379–386.
- [Le+96] Thang Tu Quoc LE et Jun MURAKAMI. “Kontsevich’s integral for the Kauffman polynomial”. In : *Nagoya Math. J.* 142 (1996), p. 39–65. ISSN : 0027-7630.
- [Lot83] M. LOTHAIRE. *Combinatorics on Words*. Addison-Wesley Publishing Company, 1983.
- [Luq99] Jean-Gabriel LUQUE. “Monoides et Automates Admettant Un Produit de Mélange”. Thèse de doct. Université de Rouen, 1999.
- [Mal+95] Claudi MALVENUTO et Christophe REUTENAUER. “Duality between quasi-symmetric functions and the Solomon descent algebra”. In : *J. Algebra* 177.3 (1995), p. 967–982. ISSN : 0021-8693.
- [Mel+89] Guy MELANÇON et Christophe REUTENAUER. “Lyndon words, free algebras and shuffles”. In : *Canad. J. Math.* 41.4 (1989), p. 577–591. ISSN : 0008-414X.
- [Min+00a] Hoang Ngoc MINH et Michel PETITOT. “Lyndon words, polylogarithms and the Riemann  $\zeta$  function”. In : *Discrete Math.* 217.1-3 (2000). Formal power series and algebraic combinatorics (Vienna, 1997), p. 273–292. ISSN : 0012-365X.
- [Min+00b] Hoang Ngoc MINH, Michel PETITOT et Joris Van Der HOEVEN. “Shuffle algebra and polylogarithms”. In : *Discrete Math.* 225.1-3 (2000). Formal power series and algebraic combinatorics (Toronto, ON, 1998), p. 217–230. ISSN : 0012-365X.
- [Min+00c] Hoang Ngoc MINH et al. “Aspects combinatoires des polylogarithmes et des sommes d’Euler-Zagier”. In : *Seminaire Lotharingien de Combinatoire* 43 (2000).
- [Min+99] Hoang Ngoc MINH, Michel PETITOT et Joris Van Der HOEVEN. “L’algèbre des polylogarithmes par les séries génératrices”. In : *In formal power series and algebraic combinatorics* (1999).
- [Min03] Hoang Ngoc MINH. “Finite polyzêtas, poly-Bernoulli numbers, identities of polyzêtas and noncommutative rational power series”. In : *Proceedings of WORDS’03*. T. 27. TUCS Gen. Publ. Turku Cent. Comput. Sci., Turku, 2003, p. 232–250.

- [Min04] Hoang Ngoc MINH. “Shuffle algebra and differential Galois group of colored polylogarithms”. In : *Nuclear Phys. B Proc. Suppl.* 135 (2004), p. 220–224. ISSN : 0920-5632.
- [Min07a] Hoang Ngoc MINH. “Algebraic combinatoric aspects of asymptotic analysis of nonlinear dynamical system with singular inputs”. In : *Acta Acad. Abo.* 67 (2007). Ser. B, Math. Phys., p. 117–126.
- [Min07b] Hoang Ngoc MINH. “Algebraic combinatorics aspects of asymptotic analysis of nonlinear dynamical system with singular inputs”. In : *Acta Acad. Abo., Ser. B, Math. Phys* 67 (2007), p. 117–126.
- [Min13a] Hoang Ngoc MINH. “On a conjecture by Pierre Cartier about a group of associators”. In : *Acta Math. Vietnam.* 38.3 (2013), p. 339–398. ISSN : 0251-4184.
- [Min13b] Hoang Ngoc MINH. “Structure of polyzetas and Lyndon words”. In : *Vietnam J. Math.* 41.4 (2013), p. 409–450. ISSN : 2305-221X.
- [Min96] Hoang Ngoc MINH. “Summations of polylogarithms via evaluation transform”. In : *Math. Comput. Simulation* 42.4-6 (1996). Symbolic computation, new trends and developments (Lille, 1993), p. 707–728. ISSN : 0378.
- [Min98] Hoang Ngoc MINH. “Fonctions de Dirichlet d’ordre  $n$  et de paramètre  $t$ ”. In : *Pr. of the 7th Co. on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics*. T. 180. 1-3. 1998, p. 221–241.
- [Mon04] L. Boutet de MONVEL. “Remark on divergent multizeta series”. Anglais. In : *Microlocal Analysis and Asymptotic Analysis, RIMS workshop 1397* (2004), p. 1–9.
- [Rac00] Georges RACINET. “Sésies génératrices non-commutatives de polyzêtas et associateurs de Drinfel’d”. Thèse de doct. École Normale Supérieure, 2000.
- [Rad79] David E. RADFORD. “A natural ring basis for the shuffle algebra and an application to group schemes”. In : *J. Algebra* 58.2 (1979), p. 432–454. ISSN : 0021-8693.
- [Ree58] Rimhak REE. “Lie elements and an algebra associated with shuffles”. Anglais. In : *Annals of Mathematics* 68.2 (1958), p. 210–220.
- [Reu93] Christophe REUTENAUER. *Free Lie algebras*. T. 7. London Mathematical Society Monographs. New Series. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993, p. xviii+269. ISBN : 0-19-853679-8.
- [Ros95] Marc ROSSO. “Groupes quantiques et algèbres de battage quantiques”. In : *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 320.2 (1995), p. 145–148. ISSN : 0764-4442.

- [Sch59] Marcel-Paul SCHÜTZENBERGER. “Sur une propriété combinatoire des algèbres de Lie libres pouvant être utilisée dans un problème de mathématiques appliquées”. In : *Séminaire Dubreil. Algèbre et Théorie des nombres* (1958-1959), p. 1–23.
- [Sch65] M. P. SCHÜTZENBERGER. “On a factorisation of free monoids”. In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 16 (1965), p. 21–24. ISSN : 0002-9939.
- [Sch87] William R. SCHMITT. “Antipodes and incidence coalgebras”. In : *J. Combin. Theory Ser. A* 46.2 (1987), p. 264–290. ISSN : 0097-3165.
- [Tre67] F. TREVES. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*. Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, 1967. ISBN : 9780080873374.
- [War99] El WARDI. “Tables des relations entre les MZVs en  $C^{++}$ ”. Mém.de mast. Lille, 1999.
- [Wei+63] James WEI et Edward NORMAN. “Lie algebraic solution of linear differential equations”. In : *J. Mathematical Phys.* 4 (1963), p. 575–581. ISSN : 0022-2488.
- [Wei+64] J. WEI et E. NORMAN. “On global representations of the solutions of linear differential equations as a product of exponentials”. In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 15 (1964), p. 327–334. ISSN : 0002-9939.
- [Zag94] Don ZAGIER. “Values of zeta functions and their applications”. In : *First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992)*. T. 120. Progr. Math. Birkhäuser, Basel, 1994, p. 497–512.



# Index

$AE_p^{(\infty)}(H_{\Sigma_w}(N))$ , 86

$C_m$ , 37

$AE^{(z_0)}(f(z))$ , 76

$\Delta_{\sqcup_q}$ , 32

$\delta_{u,v}$ , 50

$G^X$ , 75

$\mathcal{H}_{\sqcup}$ , 96

$\mathcal{H}_{\sqcup}^V$ , 96

$\mathcal{H}_{\sqcup}$ , 97

$\mathcal{H}_{\sqcup}^V$ , 97

$id$ , 34

$S \Leftarrow T$ , 54

$S \stackrel{*}{\Leftarrow} T$ , 54

$T = \lambda_i^{-1}(S)$ , 54

$L_{reg}$ , 74

$\mathcal{Lyn}Y$ , 48

$\lambda_i^{-1}(S)$ , 54

$\mathcal{N}(y_{s_1}, \dots, y_{s_k})$ , 55

$\hat{\otimes}$ , 38

$\omega_0, \omega_1$ , 72

$o^{(\infty)}$ , 85

$Prim(K\langle Y \rangle)$ , 46

$K = \mathbb{Q}[q]$ , 31

$T = \rho_i^{-1}(S)$ , 54

$\rho_i^{-1}(S)$ , 54

$S \Rightarrow T$ , 52

$S \stackrel{*}{\Rightarrow} T$ , 52

$\dashv\!\!\dashv u \otimes v \lrcorner \Delta_1(w) \not\cong^{\otimes 2}$ , 32

$\mathcal{D}_Y$ , 41

$\mathcal{S}^{\sqcup_q}$ , 36

$\langle P | w \rangle$ , 26

$\sigma$ , 76

$\star_1$ , 36

$\star_2$ , 38

$\succ, \prec, \succ_{lex}, \prec_{lex}$ , 29

$sig$ , 42

$st(l)$ , 27, 46

$\mathcal{T}(S)$ , 52

$\mathcal{T}^{-1}(S)$ , 54

$(w)$ , 35

$[z^N]G_w^X(z)$ , 83

$X_n, Y_n$ , 98

$\mathcal{Z}$ , 115

Algorithme

A. 1, 61

A. 2, 86

A. 3, 104

A. 4, 105

Application

a. exponentielle, 90

Arbre

a. différentiel, 52

a. différentiel inverse, 54

Composition, 37

Exponentiel formel, 41

Factorisation

f. de Lyndon, 27

f. MRS, 13

f. standard, 27

Fonction

f. symétrique, 67

La descente, 54

La marque, 54

Lettre, 26

## Lie

- exponentielle de Lie, 91

Logarithme formel, 41

## Montée, 52

- m. légal, 52

## Mot

- poids de m., 35

- facteur de m., 26

- longueur de m., 26

- m. convergent, 94

- m. non-trivial, 26

- m. propre, 26

## Nilpotent, 37

## Nombre

- n. de Bernoulli, 65

## Paire d'adjoints, 44

## Polylogarithme

- polylogarithme, 71

## Polynôme

- p. de Bernoulli, 64

- p. quasi-symétrique, 68

- p. symétrique, 67

## Polyzêtas

- polyzêtas, 93

## Série

- s. de Chen, 92

- s. diagonale, 41

- s. double, 73

- s. formelle, 26

- s. génératrice, 64, 72

- s. primitive, 38

- s. régularisée, 74

Sommable, 26, 41

Suite standard, 52