Double régularisation des polyzêtas en les multi-indices négatifs et extensions rationnelles

Quoc Hoan Ngo

==

THÈSE DE DOCTORAT

Double régularisation des polyzêtas en les multiindices négatifs et extensions rationnelles

=======================*****=======================
=====================***=====================

Présenté le 09 Decembre 2016
au LIPN
pour l'obtention du grade de Docteur science
par
NGO Quoc Hoan

Le jury :

M. Prof. Karol PENSON, président du jury
M. Prof. Gérard H. E. DUCHAMP, directeur de thèse
M. Prof. HOANG Ngoc Minh, directeur de thèse
Mme. Prof. Sylvie PAYCHA, rapporteur
M. Prof. Dominique MANCHON, rapporteur
M. Prof. Loïc FOISSY, examinateur
M. Prof. Vincent RIVASSEAU, examinateur
M. Prof. Christophe TOLLU, examinateur

Villetaneuse, France, 2016

Double régularisation des polyzêtas en les multiindices négatifs et extensions rationnelles

Résumé : Dans ce travail, nous nous intéressons aux problèmes relatifs aux polylogarithmes et aux sommes harmoniques pris en les multiindices négatifs (au sens large, appelés dans la suite non-positifs) et en les indices mixtes. Notre étude donnera des résultats généraux sur ces objets en relation avec les algèbres de Hopf. Les techniques utilisées sont basées sur la combinatoire des séries formelles noncommutatives, formes linéaires sur l'algèbre de Hopf de $\varphi-$shuffle. Notre travail donnera aussi un processus global pour renormaliser les polyzetas divergents. Enfin, nous appliquerons les structures mises en évidence aux systèmes dynamiques non linéaires avec entrées singulières.

Mots-clefs : Algèbre de Hopf de $\varphi-$shuffle, Polynômes de Bernoulli, Polynômes Eulériens, Sommes harmoniques, Polylogarithmes, Différentiation fonctionnelle.

Double regularization of polyzetas at negative multi-indices and rational extensions

Abstract : In this memoir are studied the polylogarithms and the harmonic sums at non-positive (*i.e.* weakly negative) multi-indices. General results about these objects in relation with Hopf algebras are provided. The technics exploited here are based on the combinatorics of noncommmutative generating series relative to the Hopf $\varphi-$shuffle algebra. Our work will also propose a global process to renormalize divergent polyzetas. Finally, we will apply these ideas to non-linear dynamical systems with singular inputs.

Keywords : $\varphi-$shuffle Hopf algebras, Bernoulli polynomials, Eulerian polynomials, Harmonic sums, Polylogarithms, Non-linear differential systems.

Remerciements

Avant tout, je voudrais adresser mes sincères remerciements à mes professeurs, monsieur Gérard H. E. Duchamp de l'Université Paris Nord et monsieur Hoang Ngoc Minh des Universités de Lille Nord et Paris Nord qui sont les directeurs de ce mémoire, pour leurs enseignements, leur soutien et leur contribution à la mise en œuvre de mon mémoire.

Je remercie madame professeur Sylvie Paycha de l'université de Potsdam et monsieur Dominique Manchon (chercheur CNRS, université Blaise Pascal) qui ont bien voulu rapporter sur cette thèse. Je voudrais envoyer mes remerciements sincères pour leurs commentaires et leurs conseils.

Je voudrais remercier aussi messieurs les professeurs Karol Penson de l'Université Paris 6, Vincent Rivasseau de l'Université Paris 11, Loïc Foissy de l'Université du Littoral Côte d'Opale et Christophe Tollu de l'Université Paris Nord qui ont accepté d'être membres du Jury de ma thèse. Leurs conseils m'ont aidé à compléter cette thèse.

Je voudrais aussi remercier mesdames les professeures Laure Petrucci et Frédérique Bassino, madame Nathalie Tavarès, madame Brigitte Guéveneux et tous les professeurs du LIPN de l'Université Paris 13 pour leur accueil et leur aide tout au long de mon cursus.

Ce travail a été réalisé au sein de l'équipe CALIN (branche Combinatorial Physics). Je veux dire à tous ses membres combien j'ai apprécié l'ambiance chaleureuse et les discussions fort fructueuses que nous avons eues pour nous mettre sur le "bon rail".

Ma gratitude va également à l'endroit de tous ceux qui m'ont aidé d'une façon ou de l'autre dans mes recherches, et plus précisément :

- Aux collègues de LIPN pour leur aide.

- À tous mes amis, collègues et connaissances pour l'appui qu'ils n'ont cessé de m'apporter à travers leurs conseils pour la réalisation de ce travail.

Je souhaite remercier vivement le gouvernement du Viet Nam, l'ambassade de France à Ha Noi et Campus France, tout particulièrement monsieur le professeur Nguyen Quoc Thang et madame la professeur associée Ta Thi Hoai An de l'Institut de Mathématique du Vietnam qui m'ont donné l'occasion d'aller faire cette thèse au LIPN de l'Université Paris 13.

Bonne lecture !

Villetaneuse,

Ngo Quoc Hoan

Table des matières

Chapitre 0

Introduction générale

Au siècle dernier, les developpements fonctionnels étaient étudiés aussi bien en physique que dans l'ingénierie. Ils ont été introduits par Tomonaga, Schwinger et Feynman [Dys49] pour représenter les systèmes dynamiques non-linéaires en électrodynamique quantique.

La principale difficulté de cette approche est la divergence de ces developpements à l'approche des singularités (en 0 ou en $+\infty$, par exemple) [CB99]. Elles conduisent aux problèmes de *régularisation* et de *renormalisation* qui peuvent être résolus par des techniques combinatoires : les diagrammes de Feynman [RF65] et leur analogues [GDG11a, LT96], les séries formelles non commutatives [Fli83], les arbres [AC98], ...

Pour ce mémoire, le même esprit que dans [Fli83, Min07, Min13a, Min13b] se poursuit, c'est-à-dire que, en se basant sur les algèbres de Hopf de mélange et de quasi-mélange [BVCTH15], la combinatoire des séries formelles en variables non commutatives est spécialement développée pour l'analyse asymptotique des systèmes dynamiques non linéaires à trois singularités [1] $\{0,1,+\infty\}$ [Fli83, Min07, Min13a].

En fait, ces techniques conduisent au calcul d'associateurs qui sont des séries formelles non commutatives. Ils régularisent la série de Chen des formes différentielles admettant les singularités simples $0,1$ le long de chemins d'intégration pris dans le domaine simplement connexe suivant [2] [Min13a]

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[).$$

Leurs coefficients sont des polynômes en les polyzêtas, c'est-à-dire, en les va-

1. Chaque équation différentielle avec trois singularités dans $\{a,b,c\}$, par une transformation homographique

$$z \mapsto \frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)},$$

peut être transformée en une équation différentielle avec trois singularités en $\{0,1,+\infty\}$.

2. Plan doublement fendu afin d'éviter la monodromie en 0 et en 1.

leurs de la famille de nombres réels [LT96]

$$\zeta(s_1,\ldots,s_r)=\sum_{n_1>\ldots>n_r>0}\frac{1}{n_1^{s_1}\ldots n_r^{s_r}},\quad\text{pour}\quad r\geq 1, s_1\geq 2, s_2,\ldots,s_r\geq 1,\tag{1}$$

qui généralisent les sommes d'Euler (datant de 1744) [Eul44]

$$\zeta(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s},\quad\text{où}\quad s\in\mathbb{N}_+\backslash\{1\}.\tag{2}$$

Dans [Eul44], Euler a prouvé que

$$\forall j\in\mathbb{N}_+,\quad \frac{\zeta(2j)}{(2i\pi)^{2j}}=-\frac{1}{2}\frac{b_{2j}}{(2j)!}\quad\in\mathbb{Q},$$

où $i^2=-1$ et $\{b_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ sont les nombres de Bernoulli [3]. Euler a prouvé également que [4]

$$\zeta(s_1)\zeta(s_2)=\zeta(s_1,s_2)+\zeta(s_2,s_1)+\zeta(s_1+s_2),\quad\text{pour}\quad s_1,s_2>1,$$

Ce qui lui a permis d'établir des relations entre les $\zeta(s_1,s_2)$ (avec $s_1+s_2\leq 16$) et de prouver que [Eul75]

$$\forall s>1,\qquad \zeta(s,1)=\frac{1}{2}\zeta(s+1)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s-1}\zeta(j+1)\zeta(s-j).\tag{3}$$

En étendant (3), Nielsen a montré que [5] $\zeta(s,\{1\}^{r-1})$ est un polynôme homogène de degré $s+r$ en les $\{\zeta(2),\ldots,\zeta(s+r)\}$ à coefficients rationnels [Nie04c, Nie04a, Nie04b] (voir aussi [Min98, VHNM00a]).

Les relations entre les polyzêtas trouvées par Nielsen [6] (relation de décomposition, relation de réflexion) sont largement reprises dans son livre [7] [Nie06] et sont également citées par nombreux auteurs [Ber85, Min14, Lew58].

Par la suite, Riemann a étendu la somme (2) en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ qui converge (convergence compacte) dans le domaine [Rie59]

$$D=\{s\in\mathbb{C}\mid\mathscr{R}e(s)>1\}.$$

3. Les nombres de Bernoulli sont donnés par leur fonction génératrice exponentielle

$$\sum_{j\geq 0}b_j\frac{z^j}{j!}=\frac{z}{e^z-1},\quad\text{pour}\quad |z|<2\pi.$$

4. Ceci préfigure le produit de quasi-mélange qui sera l'objet principal de l'étude du "deuxième produit" des polyzêtas [Min13a, Min13b], et aussi dans ce mémoire.

5. Nielsen a souhaité établir une identité analogue à (3) pour $\zeta(2p+1)$ sans y parvenir. Ces difficultés sont expliquées dans [VHNMP00, VHNM00c] et l'impossibilité dans [Min13b].

6. Nielsen a aussi utilisé une représentation des fonctions appelées "polylogarithmes de Nielsen" [KK70]. Ceci préfigure la représentation par des intégrales itérées des polyzêtas et Nielsen n'a pas connu le produit de mélange comme déjà remarqué dans [Min98, VHNM00a].

7. Ce livre fait autorité sur la fonction Gamma.

Notons que $\zeta(s)$ converge uniformément sur $D_a = \{s \in \mathbb{C} \mid \mathscr{R}e(s) > a\}$ si $a > 1$, ce qui entraîne que la somme $\zeta(s)$ est une fonction holomorphe sur D.

Maintenant, pour tous $r \in \mathbb{N}_+$ et $(s_1,\ldots,s_r) \in \mathbb{C}^r$, pour $|z| < 1$ et $N \geq 0$, nous définissons la fonction polylogarithme et la somme harmonique multiindicées par [GDQS15, GD16a]

$$\mathrm{Li}_{s_1,\ldots,s_r}(z) = \sum_{n_1>\ldots>n_r>0} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1}\ldots n_r^{s_r}} \quad \text{et} \quad \mathrm{H}_{s_1,\ldots,s_r}(N) = \sum_{N\geq n_1>\ldots>n_r>0} \frac{1}{n_1^{s_1}\ldots n_r^{s_r}}. \tag{4}$$

Alors, pour tout $(s_1,\ldots,s_r) \in \mathbb{C}^r$, la fonction $(1-z)^{-1}\mathrm{Li}_{s_1,\ldots,s_r}(z)$ est une fonction analytique (sur le domaine $|z| < 1$) et son développement de Taylor est

$$\frac{1}{1-z}\mathrm{Li}_{s_1,\ldots,s_r}(z) = \sum_{n\geq 0} \mathrm{H}_{s_1,\ldots,s_r}(N) z^N.$$

Plus précisément, pour tout $r \geq 1$, nous pouvons étendre le polyzêta en une fonction méromorphe sur l'espace complexe $\mathbb{C}^r$. Donc si, pour tout $k = 1,\ldots,r$, on a [8] $\sum_{t=1}^{k} \mathscr{R}e(s_t) > k$, et d'après le théorème de convergence radiale d'Abel [9], le polyzêta $\zeta(s_1,\ldots,s_r)$ peut être obtenu comme la limite de la fonction polylogarithmique pour $z \to 1$. C'est aussi la limite de la somme harmonique pour $N \to +\infty$ [SA01, GDQS15, GD16a] :

$$\zeta(s_1,\ldots,s_r) = \lim_{N\to+\infty} \mathrm{H}_{s_1,\ldots,s_r}(N) = \lim_{z\to 1^-} \mathrm{Li}_{s_1,\ldots,s_r}(z).$$

Toutefois, ce théorème ne s'applique pas aux cas divergents, par exemple

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}_{\{1\}^k,s_{k+1},\ldots,s_r}(z) &= \sum_{n_1>\ldots>n_r>0} \frac{z^{n_1}}{n_1\ldots n_k n_{k+1}^{s_{k+1}}\ldots n_r^{s_r}}, \\
\mathrm{H}_{\{1\}^k,s_{k+1},\ldots,s_r}(N) &= \sum_{N\geq n_1>\ldots>n_r>0} \frac{1}{n_1\ldots n_k n_{k+1}^{s_{k+1}}\ldots n_r^{s_r}}, \\
\mathrm{Li}_{\{1\}^r}(z) &= \sum_{n_1>\ldots>n_r>0} \frac{z^{n_1}}{n_1\ldots n_r} &&= \frac{1}{r!}\log^r \frac{1}{1-z}, \\
\mathrm{H}_{\{1\}^r}(N) &= \sum_{N\geq n_1>\ldots>n_r>0} \frac{1}{n_1\ldots n_r} &&= \sum_{k=0}^{N} \frac{S_1(k,r)}{k!}, \\
\mathrm{Li}_{\{0\}^r}(z) &= \sum_{n_1>\ldots>n_r>0} z^{n_1} &&= \left(\frac{z}{1-z}\right)^r, \\
\mathrm{H}_{\{0\}^r}(N) &= \sum_{N\geq n_1>\ldots>n_r>0} 1 &&= \binom{N}{r},
\end{aligned}$$

8. Il semble que le domaine de convergence complet ait été obtenu par S. Akiyama [SA01] et J. Zhao [Zha99].

9. Soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière (à coefficients complexes) de rayon de convergence égal à R. Si la série $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ converge, alors la limite $\lim_{x\to R^-, x\in\mathbb{R}} f(x)$ existe et est égale à la somme de cette série.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}_{-s_1,\ldots,-s_r}(z) &= \sum_{n_1>\ldots>n_r>0} n_1^{s_1}\ldots n_r^{s_r}\, z^{n_1},\\
\mathrm{H}_{-s_1,\ldots,-s_r}(N) &= \sum_{N\geq n_1>\ldots>n_r>0} n_1^{s_1}\ldots n_r^{s_r},
\end{aligned}$$

où les suites doubles $\{S_1(k,j)\}_{k,j\in\mathbb{N}}$ et $\{S_2(k,j)\}_{k,j\in\mathbb{N}}$ sont respectivement les nombres de Stirling de première espèce et les nombres de Stirling de seconde espèce [10]. En fait, quatre premières formules ont été étudiées par C. Costermans et Hoang Ngoc Minh [CC09, Min07]. Les autres cas ont été complétés par Li Guo et B. Zhang [LG08], D. Manchon et S. Paycha [DM10], Furusho [HFT14]. Alors les questions de régularisation et la renormalisation se posent naturellement ici. Notons que les techniques de régularisation et de renormalisation nous aident à étudier les problèmes divergents. En fait, dans cette thèse, nous avons considéré le problème sous l'angle de la renormalisation de ces séries.

On peut considérer la correspondance (bijective) suivante [11]

$$(\{1\}^k, s_{k+1},\ldots,s_r) \leftrightarrow y_1^k y_{s_{k+1}}\ldots y_{s_r} \underset{\pi_Y}{\overset{\pi_X}{\rightleftharpoons}} x_1^k x_0^{s_{k+1}-1}x_1\ldots x_0^{s_r-1}x_1, \tag{5}$$

entre les compositions combinatoires. Les mots du monoïde [12] X^* (resp. Y^*) engendré par l'alphabet $X=\{x_0,x_1\}$ (resp. $Y=\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}_+}$), équipé de l'ordre $x_1\succ x_0$ (reps. $y_1\succ y_2\succ\ldots$), seront utilisés pour indexer les polylogarithmes, les sommes harmoniques et les polyzêtas *aux multiindices positifs* avec les mots de X^* (resp. Y^*).

De plus, les algèbres des polylogarithmes et des sommes harmoniques aux multiindices positifs sont isomorphes, respectivement, aux algèbres de mélange $(\mathbb{Q}\langle X\rangle, ⧢, 1_{X^*})$ et quasi-mélange $(\mathbb{Q}\langle Y\rangle, \uplus, 1_{Y^*})$ qui admettent les mots de Lyndon $\mathcal{L}ynX$ et $\mathcal{L}ynY$, respectivement, comme base de transcendance pure [CCM05, GDQS15, VHNM00b, VHNM00c, VHNM98].

Avec la base de transcendance $\{S_l\}_{l\in\mathcal{L}ynX}$ (resp. $\{\Sigma_l\}_{l\in\mathcal{L}ynY}$) de $(\mathbb{Q}\langle X\rangle, ⧢, 1_{X^*})$

10. Les nombres de Stirling de seconde espèce (notés $S_2(i,j)$) pour tous $i,j\in\mathbb{N}$, sont déterminés par

$$S_2(i,j)=\frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}(j-k)^i\,.$$

Enfin, dans cette thèse (et de façon classique), le symbole $S_2(i,j)$ se distingue de celui des nombres de Stirling de première espèce $S_1(i,j)$, définis, pour tous $i,j\in\mathbb{N}$, par

$$S_1(0,0)=1,\quad \text{et}\quad \sum_{j=0}^{i} S_1(i,j)x^j = x(x+1)\ldots(x+i-1).$$

11. Ici, π_Y est l'adjoint de π_X (pour les produits scalaires canoniques) où π_X est le morphisme d'AAU $k\langle Y\rangle\to k\langle X\rangle$ défini par $\pi_X(y_k)=x_0^{k-1}x_1$. Notons que $k\langle Y\rangle$ est l'ensemble des polynômes non commutatifs en plusieurs indéterminées à coefficients dans k.

12. L'élément neutre de X^* (resp. Y^*) est désigné par 1_{X^*} (resp. 1_{Y^*}).

(resp. $(\mathbb{Q}\langle Y\rangle, ⧢, 1_{Y^*})$) duale de [13] de $\{P_l\}_{l\in\mathcal{L}ynX}$ (resp. $\{\Pi_l\}_{l\in\mathcal{L}ynY}$) qui est une base de l'algèbre de Lie des éléments primitifs de la bigèbre [14]

$$\mathcal{H}_{⧢} = (\mathbb{Q}\langle X\rangle, \mathtt{conc}, 1_{X^*}, \Delta_{⧢}, \varepsilon) \qquad (\text{resp. } \mathcal{H}_{\uplus} = (\mathbb{Q}\langle Y\rangle, \mathtt{conc}, 1_{Y^*}, \Delta_{\uplus}, \varepsilon))$$

on peut factoriser les séries génératrices non commutatives des polylogarithmes, des sommes harmoniques aux multiindices positifs comme suit

$$\mathrm{L} = \sum_{w\in X^*} \mathrm{Li}_w\, w = \prod_{l\in\mathcal{L}ynX}^{\searrow} \exp(\mathrm{Li}_{S_l} P_l) \quad \text{et} \quad \mathrm{H} = \sum_{w\in Y^*} \mathrm{H}_w\, w = \prod_{l\in\mathcal{L}ynY}^{\searrow} \exp(\mathrm{H}_{\Sigma_l}\Pi_l).$$

Les séries L et H sont des éléments de type groupe , de $\mathcal{H}_{⧢}$ [VHNM98] et $\mathcal{H}_{\uplus}$ [CC09].

Il en est de même pour les polyzêtas aux multiindices positifs [15], c'est-à-dire [16]

$$Z_{⧢} = \prod_{l\in\mathcal{L}ynX-X}^{\searrow} \exp(\zeta(S_l)P_l), \quad Z_{\uplus} = \prod_{l\in\mathcal{L}ynY-\{y_1\}}^{\searrow} \exp(\zeta(\Sigma_l)\Pi_l), \quad Z_\gamma = \exp(\gamma y_1)Z_{\uplus}.$$

On obtient alors une *renormalisation globale* des polyzêtas aux multiindices positifs [Min07]

$$\lim_{z\to 1} \exp\left(-y_1 \log\frac{1}{1-z}\right)\pi_Y \mathrm{L}(z) = \lim_{N\to\infty} \exp\left(\sum_{k\geq 1} \mathrm{H}_{y_k}(N)\frac{(-y_1)^k}{k}\right)\mathrm{H}(N) = \pi_Y Z_{⧢}. \qquad (6)$$

D'une part, les séries $Z_{\uplus}$ et Z_γ sont des éléments de type groupe, de $\mathcal{H}_{\uplus}$ [CC09], et d'autre part, la série $Z_{⧢}$ sont des éléments de type groupe, de $\mathcal{H}_{⧢}$ [VHNM98].

En fait, dans [Min13a, Min13b], les coefficients de $Z_{⧢}$ et $Z_{\uplus}$ sont obtenus comme des parties finies des développements aymptotiques des polylogarithmes $\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in X^*}$, en $z=1$ dans l'échelles de comparaison $\{(1-z)^a \log^b((1-z)^{-1})\}_{a\in\mathbb{N},b\in\mathbb{N}}$, et des sommes harmoniques $\{\mathrm{H}_w\}_{w\in Y^*}$, en $+\infty$ dans l'échelles $\{N^{-a}\mathrm{H}_1^b(N)\}_{a\in\mathbb{N},b\in\mathbb{N}}$, où $\mathrm{H}_1(N)$ est la somme harmonique classique $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{N}$, tandis que ceux de Z_γ sont obtenus comme des parties finies des $\{\mathrm{H}_w\}_{w\in Y^*}$, en $+\infty$ dans l'échelle $\{N^{-a}\log^b(N)\}_{a\in\mathbb{N},b\in\mathbb{N}}$.

On peut donc expliciter les contre-termes éliminant la divergence de $\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in x_1X^*}$ et $\{\mathrm{H}_w\}_{w\in y_1Y^*}$ et cela conduit à une équation reliant les deux structures algébriques [Min13a, Min13b] :

$$\prod_{l\in\mathcal{L}ynY-\{y_1\}}^{\searrow} \exp(\zeta(\Sigma_l)\Pi_l) = \exp\left(\sum_{k\geq 2} -\zeta(k)\frac{(-y_1)^k}{k}\right)\pi_Y \prod_{l\in\mathcal{L}ynX-X}^{\searrow} \exp(\zeta(S_l)P_l). \qquad (7)$$

13. Plus précisément, S et Σ sont "les parties de Lyndon" des bases duales des extensions PBW de P et de Π respectivement.

14. ε est le caractère "terme constant".

15. γ est la constante d'Euler.

16. Il existe également, une série génératrice commutative des polyzêtas (contenant des coefficients divergents), notée $\zeta^{\bullet}_{<}$ par Jean Ecalle ([Eca81], page 429) et il a affirmé que ce moule n'est pas symétrique ([Eca81], page 430).

En identifant les coordonnées locales dans (7), Hoang Ngoc Minh a obtenu des systèmes de relations polynomiales homogènes entre les polyzêtas

$$\{\zeta(\Sigma_l)\}_{l\in\mathscr{L}ynY\setminus\{y_1\}} \text{ (et } \{\zeta(S_l)\}_{l\in\mathscr{L}ynX\setminus X})$$

et en a tiré des familles génératrices spéciales pour l'algèbre des polyzêtas [Min13a, Min13b].

En général, les indices de polyzêtas donnés en (1) admettent une structure $\mathbb{N}-$graduée en poids, les nombres eux-mêmes forment une $\mathbb{Q}$-algèbre dont les opérations se déduisent des aspects combinatoires de l'algèbre de quasi-mélange [Min13a, Min13b].

Ainsi, une implémentation en Maple a été effectué par Bùi [BVC13] permettant de vérifier la conjecture des dimensions de Zagier [Zag94] jusqu'au poids 12.

Les séries génératrices $Z_{\sqcup\!\sqcup}, Z_{\uplus}$ et Z_γ, construites dans [Min13a, Min13b] et étudiées préalablement dans [CC09, VHNMP00, VHNMP01], induisent trois morphismes d'algèbres de mélange et quasi-mélange

$$\begin{aligned}\zeta_{\sqcup\!\sqcup}: \quad (\mathbb{Q}\langle X\rangle, \sqcup\!\sqcup, 1_{X^*}) &\longrightarrow (\mathbb{R}, ., 1_{\mathbb{R}}),\\ \zeta_{\uplus}: \quad (\mathbb{Q}\langle Y\rangle, \uplus, 1_{Y^*}) &\longrightarrow (\mathbb{R}, ., 1_{\mathbb{R}}),\\ \gamma_\bullet: \quad (\mathbb{Q}\langle Y\rangle, \uplus, 1_{Y^*}) &\longrightarrow (\mathbb{R}, ., 1_{\mathbb{R}}),\end{aligned} \tag{8}$$

qui satisfont, pour tout $u = x_0^{s_1-1}x_1\ldots x_0^{s_r-1}x_1 \in x_0X^*x_1$ et $v = \pi_Y(u)$,

$$\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(u) = \zeta_{\uplus}(v) = \gamma_v = \zeta(s_1,\ldots,s_r)$$

et les générateurs algébriques de longueur 1 pour X^*, ou de poids 1 pour Y^*, vérifient

$$\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(x_0) = \zeta_{\sqcup\!\sqcup}(x_1) = \zeta_{\uplus}(y_1) = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_{y_1} = \gamma. \tag{9}$$

Ainsi,

- $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(x_0) = 0$ car $\mathrm{Li}_{x_0}(1) = \log(1) = 0$.
- $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(x_1) = 0$ car la partie finie de $\mathrm{Li}_{x_1}(1)$ est 0 (développement singulier complet, dans l'échelle $\{(1-z)^a\log^b(1-z)\}_{(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ de $\mathrm{Li}_{x_1}(z) = -\log(1-z)$ en $z=1$).

Tandis que

- $\gamma_{y_1} = \gamma$ car la partie finie de $\mathrm{H}_{y_1}(+\infty)$ est γ (développement asymptotique complet, dans l'échelle $\{N^{-a}\log^b(N)\}_{(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ de H_{y_1} en $N=+\infty$),
- $\zeta_{\uplus}(y_1) = 0$ car la partie finie de $\mathrm{H}_{y_1}(+\infty)$ est 0 (développement asymptotique complet, dans l'échelle $\{N^{-a}\mathrm{H}_{y_1}^b(N)\}_{(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ de H_{y_1} en $N=+\infty$).

Par conséquent, $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}, \zeta_{\boxplus}$ et $\gamma_\bullet$ sont des caractères des algèbres de Hopf de mélange et quasi-mélange et leur graphes, en tant que séries, sont respectivement [CC09, VHNMP01]

$$\sum_{w\in X^*} \zeta_{\sqcup\!\sqcup}(w)w = Z_{\sqcup\!\sqcup}, \quad \sum_{w\in Y^*} \zeta_{\boxplus}(w)w = Z_{\boxplus}, \quad \sum_{w\in Y^*} \gamma_w\, w = Z_\gamma.$$

Nous allons poursuivre le précédent travail en étudiant les propriétés des sommes harmoniques et des polylogarithmes aux multiindices non positifs, *c'est-à-dire,*

$$\mathrm{H}_{-s_1,\ldots,-s_r}(N) = \sum_{N\geq n_1>\ldots>n_r>0} n_1^{s_1}\ldots n_r^{s_r}, \quad \mathrm{Li}_{-s_1,\ldots,-s_r}(z) = \sum_{n_1>\ldots>n_r>0} n_1^{s_1}\ldots n_r^{s_r} z^{n_1} \tag{10}$$

via le codage par les mots du monoïde Y_0^* engendré par l'alphabet $Y_0 = Y\cup\{y_0\}$, dont l'ordre total prolonge celui de Y par $y_0 \succ y_1$,

$$\mathrm{Li}^-_{y_{s_1}\ldots y_{s_r}} := \mathrm{Li}_{-s_1,\ldots,-s_r} \quad \text{et} \quad \mathrm{H}^-_{y_{s_1}\ldots y_{s_r}} := \mathrm{H}_{-s_1,\ldots,-s_r}. \tag{11}$$

En particulier, suivant [Min96, Min03a], nous construirons (11) à l'aide de la combinatoire des mots, des intégrations par rapport aux formes différentielles et des actions des dérivations fonctionnelles suivantes [17] [Fli83]

$$\begin{aligned} \omega_0(z) = z^{-1}dz \quad &\text{et} \quad \omega_1(z) = (1-z)^{-1}dz,\\ \theta_0 = zd/dz \quad &\text{et} \quad \theta_1 = (1-z)d/dz \end{aligned} \tag{12}$$

à partir de l'algèbre différentielle unitaire de fonctions rationnelles sur Ω suivante

$$\mathscr{C} := \mathbb{C}[z, z^{-1}, (1-z)^{-1}]$$

Cette algèbre contient $\lambda(z) := z/(1-z)$ et son élément neutre est la fonction suivante

$$1_{\mathscr{C}} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto 1.$$

Puisque $\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in X^*}$ est libre sur $\mathscr{C}$, nous avons [Min03a] $\mathscr{C}\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in X^*} = \mathscr{C}\otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in X^*}$. Ce qui permet de construire une algèbre unitaire bi-intégro-différentielle, $\mathscr{C}\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in X^*}$ [Min03a], car elle est stable par [18] ω_0, ω_1 et que les opérateurs intégraux définis, pour tout $f\in\mathscr{C}\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in X^*}$ par,

$$\iota_0(f)(z) = \int_{z_0}^z \omega_0(s)f(s) \quad \text{et} \quad \iota_1(f)(z) = \int_{z_0}^z \omega_1(s)f(s). \tag{13}$$

où $z_0 = 0$ si $\iota_0(f)$ (resp. $\iota_1(f)$) existe [19] sinon $z_0 = 1$.

Il n'est pas difficile de prouver que, pour tout $u = y_{t_1}\ldots y_{t_r} \in Y_0^*$, [GDQS15, GD16a]

$$\begin{aligned} \theta_0\,\mathrm{Li}_{x_0\pi_X(u)} = \mathrm{Li}_{\pi_X(u)} \quad &\text{et} \quad \theta_1\,\mathrm{Li}_{x_1\pi_X(u)} = \mathrm{Li}_{\pi_X(u)},\\ \iota_0\,\mathrm{Li}_{\pi_X(u)} = \mathrm{Li}_{x_0\pi_X(u)} \quad &\text{et} \quad \iota_1\,\mathrm{Li}_{\pi_X(u)} = \mathrm{Li}_{x_1\pi_X(u)},\\ \mathrm{Li}_{\pi_X(u)} = (\iota_0^{t_1-1}\iota_1\ldots\iota_0^{t_r-1}\iota_1)1_\Omega \quad &\text{et} \quad \mathrm{Li}^-_u = (\theta_0^{t_1+1}\iota_1\ldots\theta_0^{t_r+1}\iota_1)1_\Omega, \end{aligned}$$

17. Il est à noter que $\theta_0+\theta_1 = [\theta_0,\theta_1] = d/dz$ [GDQS15].
18. Car $\theta_0\iota_0 = \theta_1\iota_1 = \mathrm{Id}$ [GDQS15, GD16a].
19. Nous donnerons un sens précis à ce terme dans le corps du texte.

et les opérateurs $\iota_0\theta_1$ et $\iota_1\theta_0$ admettent respectivement les fonctions λ et $1/\lambda$ comme valeurs propres (les espaces propres sont $\mathscr{C}\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in X^*}$) [GDQS15, GD16a]. C'est-à-dire que, pour tout $f \in \mathscr{C}\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in X^*}$, $(\theta_0\iota_1)f = \lambda f$ et $(\theta_1\iota_0)f = f/\lambda$.

Revenons aux sommes harmoniques et considérons, tout d'abord, le cas le plus simple, c'est-à-dire pour $r = 1$.

Les sommes harmoniques aux indices négatifs ont été introduites, au dix-septième siècle, pour la première fois par Faulhaber. Il a décelé que $\mathrm{H}_{-s}, s \in \mathbb{N}_+$ est un polynôme de degré [20] $s+1$. De plus, en notant $u = N(N+1)/2$ et en donnant les 17 premières expressions, il a affirmé sans démonstration que, pour tout s impair, $\mathrm{H}_{-s}(N)$ est un polynôme en u. Par exemple [Fau31, Knu93],

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_{-1}(N) &= N(N+1)/2 = 2u/2,\\
\mathrm{H}_{-3}(N) &= (N(N+1))^2/4 = 4u^2/4,\\
\mathrm{H}_{-5}(N) &= (N(N+1))^2(2N(N+1)-1)/12 = 4u^2(4u-1)/12,\\
\mathrm{H}_{-7}(N) &= (N(N+1))^2(3N^4+6N^3-N^2-4N+2)/24 = 8u^2(6u^2-4u+1)/24,\\
\mathrm{H}_{-9}(N) &= (N(N+1))^2(N^2+N-1)(2N^4+4N^3-N^2-3N+3)/20\\
&= 4u^2(16u^3-20u^2+12u-3)/20,\\
\mathrm{H}_{-11}(N) &= (N(N+1))^2(2N^8+8N^7+4N^6-16N^5-5N^4+26N^3-3N^2\\
&\quad -20N+10)/24\\
&= 8u^2(16u^4-32u^3+34u^2-20u+5)/24,\\
\mathrm{H}_{-13}(N) &= (N(N+1))^2(30N^{10}+150N^9+125N^8-400N^7-326N^6+1052N^5\\
&\quad +367N^4-1786N^3+202N^2+1382N-691)/420\\
&= 4u^2(960u^5-2800u^4+4592u^3-4720u^2+2764u-691)/420,\\
\mathrm{H}_{-15}(N) &= (N(N+1))^2(3N^{12}+18N^{11}+21N^{10}-60N^9-83N^8+226N^7\\
&\quad +203N^6-632N^5-226N^4+1084N^3-122N^2-840N+420)/48\\
&= 16u^2(48u^6-192u^5+448u^4-704u^3+718u^2-420u+105)/48,\\
\mathrm{H}_{-17}(N) &= (N(N+1))^2(10N^{14}+70N^{13}+105N^{12}-280N^{11}-565N^{10}\\
&\quad +1410N^9+2165N^8-5740N^7-5271N^6+16282N^5+5857N^4\\
&\quad -27996N^3+3147N^2+21702N-10851)/180\\
&= 4u^2(1280u^7-6720u^6+21120u^5-46880u^4+72912u^3-74220u^2\\
&\quad +43404u-10851)/180.
\end{aligned}$$

Faulhaber a prouvé également, et plus tard Bernoulli [Knu93], que, pour tout $N, s \in \mathbb{N}_+$,

$$\mathrm{H}_{-s}(N) = \frac{1}{s+1}\left(b_0N^{s+1} - \binom{s+1}{1}b_1N^s + \ldots + (-1)^s\binom{s+1}{s}b_sN\right).$$

Bernoulli a donné aussi une formule explicite, pour $N \in \mathbb{N}_+, n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{H}_{-n}(N) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n+1}{j}b_jN^{n+1-j} = \frac{B_{n+1}(N+1)-b_{n+1}}{n+1}, \tag{14}$$

20. En fait, Faulhaber les a étudiées jusqu'à l'ordre 17. De plus, il devait connaître les $\mathrm{H}_{-19}, \ldots, \mathrm{H}_{-25}$ qui sont donnés comme exercices à la fin de [Fau31].

où les B_n sont les polynômes de Bernoulli [21] et nous rappelons que $B_n(1) = b_n$.

Nous obtenons [GDQS15], pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Li}_{-n}(z) = \theta_0^n \lambda(z). \tag{15}$$

Puis, en utilisant les nombres de Stirling de seconde espèce , nous déduisons alors que

$$\mathrm{Li}_{-n}(z) = \frac{1}{1-z}\sum_{k=1}^{n} k! S_2(n,k)(\lambda(z))^k.$$

Nous rappelons aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, nous avons en général

$$\mathrm{Li}_{-n}(z) = zA_n(z)(1-z)^{-n-1} \quad \text{et} \quad \mathrm{Li}_0(z) = \lambda(z),$$

où A_n est le polynôme Eulérien [22] d'indice n.

Dans cette thèse, nous étendrons les formules (14), (15) et les polynômes Eulériens pour établir des propriétés analogues pour les sommes harmoniques $\mathrm{H}_{-s_1,\ldots,-s_r}(N)$ et pour les polylogarithmes $\mathrm{Li}_{-s_1,\ldots,-s_r}(z)$ qui sont des polynômes, en N et $(1-z)^{-1}$, respectivement, de valuation égale à 1 et avec des coefficients rationnels dont nous préciserons les termes de tête (voir Théorèmes 7 et 9).

Ces extensions nous conduiront à une renormalisation des polyzêtas aux multiindices non positifs analogue à celle donnée en (6) (voir Théorème 10) et le fait que les polylogarithmes aux multiindices non positifs soient des polynômes, en $(1-z)^{-1}$, nous amènera à prolonger les morphismes de régularisation $\zeta_{⧢}$ et $\gamma_\bullet$ à [23] $\mathbb{C}\langle X\rangle[x_1^*]$ et $\mathbb{C}\langle Y\rangle[y_1^*]$, respectivement (voir Proposition 18).

Ce prolongement est rendu possible par le codage suivant [Min96], pour $t, z \in \mathbb{C}$ et $|t|, |z| < 1$,

$$\mathrm{Li}_{(tx_0)^*}(z) = z^t \quad \text{et} \quad \mathrm{Li}_{(tx_1)^*}(z) = (1-z)^{-t}. \tag{16}$$

21. Les B_j sont données par la fonction génératrice exponentielle

$$\sum_{j\ge 0} B_j(x)\frac{z^j}{j!} = \frac{ze^{xz}}{e^z - 1}.$$

22. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est défini par, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$A_n(z) = \sum_{k=0}^{n} A_{n,k} z^k, \quad \text{avec, pour } k = 0,\ldots,n, \quad A_{n,k} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n+1}{j}(k-j)^n$$

et les coefficients $\{A_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ sont les nombres Eulériens [DF70].

23. Pour toute série S propre, c'est-à-dire $\langle S \mid 1_{X^*}\rangle = 0$, S^* représente la somme $1_{X^*} + S + S^2 + S^3 + \ldots$. En particulier, pour tout $x \in X$, on a $x^* = \exp^{⧢}(x) = 1 + x + \ldots + x^{⧢ n}/n! + \ldots$ et x^* est transcendante sur $(\mathbb{C}\langle X\rangle, ⧢, 1_{X^*})$.

et [24] par l'identité de type Newton-Girard [25] utilisée dans (6) [Min07], pour $t \in \mathbb{C}$ et $|t| < 1$,

$$\mathrm{H}_{(ty_1)^*} = \sum_{k\geq 0} \mathrm{H}_{y_1^k}\, t^k = \exp\left(- \sum_{k\geq 1} \mathrm{H}_{y_k} \frac{(-t)^k}{k} \right). \tag{17}$$

Le plan de ce mémoire est le suivant

1. Dans le premier chapitre, nous établissons des propriétés importantes des algèbres de Hopf : l'algèbre de mélange, l'algèbre de quasi-mélange et leurs généralisations. Particulièrement, dans ce chapitre, nous étudions le sous-ensemble des éléments de type groupe. Ceux-ci sont exactement les caractères de l'algèbre de quasi-mélange $(\mathbb{C}\langle Y_0\rangle, \text{⧢}, 1_{Y_0^*})$ (voir Proposition 4).

   Après, nous établissons des résultats sur l'algèbre des séries non commutatives rationnelles échangeables sur l'alphabet X. Ces résultats seront utilisés pour considérer les polylogarithmes et les sommes harmoniques aux multiindices entiers non positifs. En fait, dans cette partie, nous prouvons que la série $x^*, \forall x \in X$, est transcendante sur $(\mathbb{C}\langle X\rangle, ⧢, 1_{X^*})$ (voir Lemme 8), et alors, nous construisons l'algèbre de mélange

$$(\mathbb{C}\langle X\rangle[x_1^*, x_0^*, (-x_0)^*], ⧢, 1_{X^*}).$$

2. Le deuxième chapitre est consacré aux solutions des systèmes dynamiques non linéaires avec singularités et à leur différentiations (ordinaires et fonctionnelles) [GDQS15]. Il va reprendre les résultats obtenus par Fliess sur les séries formelles en variables non commutatives lors de l'étude des équations différentielles non-linéaires. Ensuite, nous présentons l'algorithme fondamental pour déterminer les solutions d'une équation différentielle en appliquant la théorie des séries formelles en variables non commutatives. En fait, c'est une adaptation de l'algorithme de Picard et il donne un joli résultat *i.e.* les polylogarithmes avec multiindices à partir de l'équation différentielle.
3. Dans le troisième chapitre, nous donnerons des résultats combinatoires pour les polylogarithmes et les sommes harmoniques aux multiindices non positifs [GDQS15, GD16a] :
   - Pour les sommes harmoniques, nous étendons la formule de Faulhaber qui a exprimé la somme harmonique $\mathrm{H}_{-p}(N)$ pour $p \geq 0$ comme un polynôme (de degré $p+1$) en N avec les coefficients qui impliquent les nombres de Bernoulli.

     En fait, dans ce chapitre, nous considérons aussi les séries génératrices non commutatives

$$\mathrm{H}^- := \sum_{w\in Y_0^*} \mathrm{H}_w^-\, w, \quad \mathrm{L}^- := \sum_{w\in Y_0^*} \mathrm{Li}_w^-\, w, \quad C^- := \sum_{w\in Y_0^*} C_w^-\, w,$$

24. Rappelons que $\{\mathrm{H}_{(ty_1)^*}(N)\}_{N\geq 0}$ sont des coefficients de Taylor de $(1-z)^{-1}\mathrm{Li}_{(tx_1)^*}(z)$.
25. L'identité de type Newton-Girard de l'algèbre quasi-mélange, permet de comprendre le Théorème 2 de [dM04].

où, pour tout mot [26] $w \in Y_0^*$, $C_w^- = \prod_{w=uv, v\neq 1_{Y^*}} ((v)+|v|)^{-1}$. Nous établissons, par l'analyse asymptotique, le résultat à la Abel suivant [27]

$$\lim_{N\to+\infty} \Theta^{\odot -1}(N) \odot \mathrm{H}^-(N) = \lim_{z\to 1} \Lambda^{\odot -1}((1-z)^{-1}) \odot \mathrm{L}^-(z) = C^- \ ,$$

avec

$$\begin{aligned} \Theta(t) &:= \sum_{w\in Y_0^*} t^{|w|+(w)} w = \Big(\sum_{y\in Y_0} t^{(y)+1} y\Big)^* , \\ \Lambda(t) &:= \sum_{w\in Y_0^*} (|w|+(w))! t^{|w|+(w)} w \,. \end{aligned}$$

Nous nous intéressons aussi aux structures des sommes harmoniques et des polylogarithmes. Nous prouvons que l'ensemble des sommes harmoniques et des constantes $\{C_w^-\}_{w\in Y_0^*}$ satisfont le produit de (quasi-)mélange. De plus, nous avons construit une nouvelle loi, $\top$, telle que

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_\bullet^- : (\mathbb{Q}\langle Y_0\rangle, ⧢) &\longrightarrow (\mathbb{Q}\{\mathrm{H}_w^-\}_{w\in Y_0^*}, .), \qquad w \longmapsto \mathrm{H}_w^- \ , \\ \mathrm{Li}_\bullet^- : (\mathbb{Q}\langle Y_0\rangle, \top) &\longrightarrow (\mathbb{Q}\{\mathrm{Li}_w^-\}_{w\in Y_0^*}, .), \qquad w \longmapsto \mathrm{Li}_w^- \ . \end{aligned}$$

soient des morphismes d'algèbres surjectifs et nous décrivons complètement leurs noyaux. Ensuite, nous généralisons les résultats de [GD16b],

- Premièrement, nous construisons une base de

$$\mathbb{C}\langle X\rangle ⧢ \mathbb{C}[x_0^*, (-x_0)^*] ⧢ \mathbb{C}[x_1^*] \,.$$

- Deuxièmement, en se basant sur l'indépendance linéaire de $\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in X^*}$ et sur les résultats du premier chapitre, nous étendons la définition des polylogarithmes en les indices mixtes aux séries

$$\mathbb{C}\langle X\rangle ⧢ \mathbb{C}[x_0^*, (-x_0)^*] ⧢ \mathbb{C}[x_1^*] \,.$$

- Enfin, utilisant l'analyse asymptotique en $z=1$, nous donnons quelques résultats sur les polylogarithmes divergents en 1. C'est-à-dire que nous étendons les constantes C_w^- et B_w^- aux indices mixtes.
- En utilisant (16), nous obtenons le prolongement de $\zeta_{⧢}$ comme suit $\zeta_{⧢}((tx_1)^*) = 1$. Puis, en utilisant (17), nous effectuons le prolon-

26. Pour tout mot $v = y_{s_1}\ldots y_{s_r} \in Y_0^*$, nous notons $|v| = r$ sa longueur et $(v) = s_1+\ldots+s_r$ son poids.
27. Ou, de manière équivalente, $\mathrm{H}^-(N) \underset{N\to+\infty}{\widetilde{}} C^- \odot \Theta(N)$ et $\mathrm{L}^-(z) \underset{z\to 1}{\widetilde{}} C^- \odot \Lambda((1-z)^{-1})$, où, $\Theta^{\odot -1}, \Lambda^{\odot -1}$ désignent l'inverse dans le produit de Hadamard (noté par $\odot$) de Θ, Λ respectivement (les signes asymptotiques s'entendent terme à terme).

gement[28] de $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}$, pour $|t|<1$, comme suit[29]

$$\gamma_{(ty_1)^*} = \exp\left(\gamma t - \sum_{k\geq 1} \zeta(k)\frac{(-t)^k}{k}\right) = \frac{1}{\Gamma(1+t)} \ . \tag{18}$$

Notons que, ensemble, les identités (17) et (18) ne permettent pas de comparer les deux régularisations obtenues dans [Min13a, Min13b] :

$$Z_\gamma = \exp\left(\gamma y_1 - \sum_{k\geq 1} \zeta(k)\frac{(-y_1)^k}{k}\right)\pi_Y Z_{\sqcup\!\sqcup} \ . \tag{19}$$

Par simplification, cette dernière identité redonne (7).

28. La deuxième identité est classique pour la fonction Gamma et permet de comprendre le Théorème 1 de [dM04].

29. La fonction Gamma, notée par $\Gamma(t)$, sera définie ici par

$$\forall z \in \mathbb{C}, z \notin \{\ldots,-3,-2,-1,0\}, \Gamma(t) := \frac{\exp(-\gamma t)}{t}\prod_{n>0}(1+\frac{t}{n})^{-1}\exp(\frac{t}{n}) \ .$$

Chapitre 1

Combinatoire des algèbres de Hopf

Dans ce chapitre, mes travaux sont basés sur les algèbres qui sont engendrées par des alphabets . Nous donnerons les propriétés des bigèbres de φ-shuffle qui sont utilisées dans cette thèse. Premièrement, les propriétés importantes des algèbres de φ-shuffle générales sont résumés de façon concise dans la section 1.1.1. Ensuite, nous considèrerons deux spécialisations (le “shuffle” et le “stuffle”) qui font partie de tous nos travaux. Les résultats de cette section figurent dans le papier [BVCTH15]. Enfin, nous présenterons une étude de l'algèbre [1] $\mathbb{C}\langle X\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}[x_0^*,(-x_0)^*] \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}[x_1^*]$ où pour toute $x \in X = \{x_0, x_1\}$, nous désignons par le symbole x^* l'étoile de Kleene de x (dans [2] $\mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle$), c'est-à-dire que $x^* = \sum_{n\geq 0} x^n$. La structure de l'algèbre $\mathbb{C}\langle X\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}[x_0^*,(-x_0)^*] \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}[x_1^*]$ est utilisée pour étendre la définition des polylogarithmes aux multiindices négatifs [GD16b].

1.1 Les bigèbres de φ-mélange

1.1.1 La bigèbre de φ-mélange

Soit un alphabet $Y = \{y_k\}_{k\in I}$ où I est un ensemble d'indices (fini ou infini). Nous noterons Y^* le monoïde (muni de la concaténation) qui est engendré par l'alphabet Y et 1_{Y^*} est l'unité de Y^* . Toute “opération” $\varphi: \quad Y\times Y \to \mathbb{C}Y$ peut être définie par ses constantes de structure

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & Y\times Y & \to & \mathbb{C}Y \\ & (y_i, y_j) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k\in I} \gamma_{i,j}^k y_k\ , \end{array} \tag{1.1}$$

1. Notons que $\mathbb{C}[x,y]$ est l'ensemble des polynômes commutatifs en indéterminées $\{x,y\}$ à coefficients dans $\mathbb{C}$.

2. Notons que $\mathbb{C}\langle\langle Y\rangle\rangle$ est l'ensemble des séries formelles non commutatives en plusieurs indéterminées à coefficients dans $\mathbb{C}$.

où $\mathbb{C}Y = span_{\mathbb{C}}\{y \mid y \in Y\} \subsetneq \mathbb{C}\langle Y\rangle$ et la famille $\{\gamma_{i,j}^{k} \in \mathbb{C} \mid i,j,k \in I\}$ dépend de φ.

Elle s'étend aussitôt en une application (bi-)linéaire

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & \mathbb{C}Y \otimes \mathbb{C}Y & \to & \mathbb{C}Y \\ & (y_i, y_j) & \mapsto & \sum_{k \in I} \gamma_{i,j}^{k} y_k , \end{array} \tag{1.2}$$

que nous continuerons à noter φ.

Maintenant, pour chaque application qui est définie comme dans l'équation (1.2), on considérera une loi

$$\begin{array}{rrcl} \uplus_{\varphi} : & Y^* \times Y^* & \to & \mathbb{C}\langle Y\rangle \\ & (u,v) & \mapsto & u \uplus_{\varphi} v , \end{array} \tag{1.3}$$

telle que

i. pour tout $w \in Y^*$,

$$(Unit) \quad 1_{Y^*} \uplus_{\varphi} w = w \uplus_{\varphi} 1_{Y^*} = w \ . \tag{1.4}$$

ii. pour tous les $a, b \in Y$ et $u, v \in Y^*$,

$$(Rec) \quad au \uplus_{\varphi} bv = a(u \uplus_{\varphi} bv) + b(au \uplus_{\varphi} v) + \varphi(a,b)(u \uplus_{\varphi} v) \ . \tag{1.5}$$

Exemple 1

Nom	*Formule*	φ
Shuffle	$au \sqcup\!\sqcup bv = a(u \sqcup\!\sqcup bv) + b(au \sqcup\!\sqcup v)$	$\varphi \equiv 0$
Quasi-shuffle	$x_i u \uplus x_j v = x_i(u \uplus x_j v) + x_j(x_i u \uplus v)$ $+ x_{i+j}(u \uplus v)$	$\varphi(x_i, x_j) = x_{i+j}$
Min-shuffle	$x_i u \boxminus x_j v = x_i(u \boxminus x_j v) + x_j(x_i u \boxminus v)$ $- x_{i+j}(u \boxminus v)$	$\varphi(x_i, x_j) = -x_{i+j}$
Muffle	$x_i u \boxdot x_j v = x_i(u \boxdot x_j v) + x_j(x_i u \boxdot v)$ $+ x_{i\times j}(u \boxdot v)$	$\varphi(x_i, x_j) = x_{i\times j}$
q-stuffle	$x_i u \uplus_q x_j v = x_i(u \uplus_q x_j v) + x_j(x_i u \uplus_q v)$ $+ q x_{i+j}(u \sqcup\!\sqcup v)$	$\varphi(x_i, x_j) = q x_{i+j}$
q-shuffle	$x_i u \sqcup\!\sqcup_q x_j v = x_i(u \sqcup\!\sqcup_q x_j v) + x_j(x_i u \sqcup\!\sqcup_q v)$ $+ q^{i\times j} x_{i+j}(u \sqcup\!\sqcup v)$	$\varphi(x_i, x_j) = q^{i\times j} x_{i+j}$
$\mathtt{LDIAG}(1, q_s)$ *non-crossed,* *non-shifted*	$au * bv = a(u * bv) + b(au * v)$ $+ q_s^{\lvert a\rvert \lvert b\rvert}(a.b)(u * v)$	$\varphi(a,b) = q_s^{\lvert a\rvert \lvert b\rvert}(a.b)$ $(a.b)$ *assoc.*
B-shuffle	$au \sqcup\!\sqcup_B bv = a(u \sqcup\!\sqcup_B bv) + b(au \sqcup\!\sqcup_B v)$ $+ \langle a,b\rangle(u \sqcup\!\sqcup_B v)$	$\varphi(a,b) = \langle a,b\rangle$ $= \langle b,a\rangle$
Semigroup- *-shuffle*	$x_t u \sqcup\!\sqcup_{\perp} x_s v = x_t(u \sqcup\!\sqcup_{\perp} x_s v) + x_s(x_t u \sqcup\!\sqcup_{\perp} v)$ $+ x_{t\perp s}(u \sqcup\!\sqcup_{\perp} v)$	$\varphi(x_t, x_s) = x_{t\perp s}$
q-Infiltration	$au \uparrow_q bv = a(u \uparrow_q bv) + b(au \uparrow_q v)$ $+ q\delta_{a,b} a(u \uparrow_q v)$	$\varphi(a,b) = q\delta_{a,b} a$

Remarque 1 *On remarque que la loi* (1.3) *existe (et est unique) pour chaque application* φ. *De plus, il existe une extension bilinéaire à* $\mathbb{C}\langle Y\rangle \times \mathbb{C}\langle Y\rangle$ *unique, c'est-à-dire, qu'on a la loi (linéaire),*

$$\begin{array}{rcl} ⧢_\varphi : \mathbb{C}\langle Y\rangle \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\langle Y\rangle & \to & \mathbb{C}\langle Y\rangle \\ P \otimes_{\mathbb{C}} Q & \mapsto & P ⧢_\varphi Q\,. \end{array} \tag{1.6}$$

PREUVE – *Soit une application* φ *qui est définie comme l'équation* (1.2). *On suppose qu'il y ait deux lois* $⧢_\varphi^{(1)}$ *et* $⧢_\varphi^{(2)}$ *qui satisfont les conditions* (1.4) *et* (1.5). *On doit montrer que*

$$u ⧢_\varphi^{(1)} v = u ⧢_\varphi^{(2)} v \tag{1.7}$$

pour tous $u, v \in Y^*$. *En fait,*

i. quel que soit $w \in Y^*$, *on a* (1.4)

$$1_{Y^*} ⧢_\varphi^{(1)} w = w ⧢_\varphi^{(1)} 1_{Y^*} = w = 1_{Y^*} ⧢_\varphi^{(2)} w = w ⧢_\varphi^{(2)} 1_{Y^*}\,.$$

ii. supposons que

$$u ⧢_\varphi^{(1)} v = u ⧢_\varphi^{(2)} v$$

pour tous les mots $u, v \in Y^*$ *tels que* $|u| + |v| \le n$. *Ensuite, nous avons besoin de prouver l'équation* (1.7) *pour tout* $(u, v) \in Y^* \times Y^*$ *tels que* $|u| + |v| = n+1$. *Donc, soit un des deux mots est vide et nous sommes ramenés au cas précédent, soit* $(u, v) \in (Y^+)^2$ *et on écrit* $u = au_1, v = bv_1$ *où* $a, b \in Y$ *et* $u_1, v_1 \in Y^*$. *On a alors,*

$$\begin{aligned} u ⧢_\varphi^{(1)} v = au_1 ⧢_\varphi^{(1)} bv_1 &= a(u_1 ⧢_\varphi^{(1)} bv_1) + b(au_1 ⧢_\varphi^{(1)} v_1) + \varphi(a,b)(u_1 ⧢_\varphi^{(1)} v_1) \\ &= a(u_1 ⧢_\varphi^{(2)} bv_1) + b(au_1 ⧢_\varphi^{(2)} v_1) + \varphi(a,b)(u_1 ⧢_\varphi^{(2)} v_1) \\ &= u ⧢_\varphi^{(2)} v\,. \end{aligned}$$

Ceci prouve la remarque 1.

□

Le triplet $(\mathbb{C}\langle Y\rangle, ⧢_\varphi, 1_{Y^*})$ est une $\mathbb{C}$-algèbre qui est dite "une algèbre de φ-shuffle". Cette algèbre est unifère (unitaire dans la suite), mais ni associative ni commutative en général.

Lemme 1 ([BVCTH15]) *Pour chaque application* φ *qui est définie comme dans* (1.2), *l'algèbre* $(\mathbb{C}\langle Y\rangle, ⧢_\varphi)$ *est associative (resp. commutative) si seulement si* φ *est associative (resp. commutative).*

Dans la suite, sauf mention explicite du contraire, tous les produits tensoriels sont sur le corps de base.

Définition 1 ([BVCTH15]) *Une loi $\mu : \mathbb{C}\langle Y\rangle \otimes \mathbb{C}\langle Y\rangle \to \mathbb{C}\langle Y\rangle$ est dite duale s'il y a une application linéaire $\Delta_\mu : \mathbb{C}\langle Y\rangle \to \mathbb{C}\langle Y\rangle \otimes \mathbb{C}\langle Y\rangle$ telle que*

$$\forall u,v,w \in Y^*, \qquad \langle \mu(u\otimes v) \mid w\rangle = \langle u\otimes v \mid \Delta_\mu(w)\rangle \ .$$

L'application (unique) Δ_μ est appellée coproduit associé au (ou bien dual du) produit μ.

Exemple 2 *Soit $q \in \mathbb{C}$, dans cet exemple $\varphi(y_i, y_j) = q\delta_{y_i,y_j} y_i$ où δ est le symbole de Kronecker*

$$\delta_{y_i,y_j} = \begin{cases} 1 & si \quad y_i = y_j \\ 0 & dans\ l'autre\ cas \end{cases}, \quad \forall y_i, y_j \in Y^* \ .$$

Alors, on définit le produit de $q - infiltration$ sur Y^* par

$$\begin{aligned} w \uparrow_q 1_{Y^*} &= 1_{Y^*} \uparrow_q w = w \\ y_i u \uparrow_q y_j v &= y_i(u \uparrow_q y_j v) + y_j(y_i u \uparrow_q v) + q\delta_{y_i,y_j} y_i (u \uparrow_q v) \ . \end{aligned} \tag{1.8}$$

On peut en calculer la loi duale par

$$\Delta_{\uparrow_q}(w) = \sum_{I\cup J = [1..|w|]} q^{|I\cap J|} w[I] \otimes w[J] \ .$$

D'autre part, si on se restreint à l'alphabet $X = \{x\}$, on a

$$\Delta_{\uparrow_q}(x) \quad = \quad x \otimes 1_{X^*} + 1_X^* \otimes x + q(x\otimes x) \ .$$

Pour chaque application $\varphi : Y \times Y \to \mathbb{C}Y$ et $x,y,z \in Y$, on note $\gamma_{x,y}^z = \langle \varphi(x,y) \mid z\rangle$ ses constantes de structure. C'est-à-dire que

$$\varphi(x,y) = \sum_{z\in Y} \gamma_{x,y}^z z \ .$$

On a

Lemme 2 ([BVCTH15]) *On suppose φ associative. Si on définit le morphisme Δ : $\mathbb{C}\langle Y\rangle \to \mathbb{C}\langle\langle Y^* \otimes Y^*\rangle\rangle$ par*

$$\Delta(y_s) = y_s \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes y_s + \sum_{i,j\in I} \gamma_{y_i,y_j}^{y_s} y_i \otimes y_j \ ,$$

alors, quels que soient $u,v,w \in Y^*$, on a

$$\langle u ⧢_\varphi v \mid w\rangle = \langle u\otimes v \mid \Delta(w)\rangle.$$

PREUVE – Tout d'abord, on a

$$u \uplus_{\varphi} v = \sum_{w \in Y^*} \langle u \uplus_{\varphi} v \mid w \rangle w, \qquad \forall u, v \in Y^* .$$

On construit l'application $S : Y^* \times Y^* \to \mathbb{C}\langle Y \rangle$ telle que

$$S(u,v) = \sum_{w \in Y^*} \langle \Delta(w) \mid u \otimes v \rangle w,$$

pour tout $(u,v) \in Y^* \times Y^*$. Alors, on a besoin de montrer que

$$S(u,v) = u \uplus_{\varphi} v, \forall u, v \in Y^* .$$

En fait, on voit facilement que

$$S(u, 1_{Y^*}) = S(1_{Y^*}, u) = u, \forall u \in Y^* .$$

Soit $y_i, y_j \in Y$ et $u, v \in Y^*$. On a que

$$\begin{aligned}
S(y_i u, y_j v) &= \sum_{w \in Y^*} \langle \Delta(w) \mid y_i u \otimes y_j v \rangle w = \sum_{w \in Y^+} \langle \Delta(w) \mid y_i u \otimes Y_j v \rangle w \\
&= \sum_{y_s \in Y, w' \in Y^*} \langle \Delta(y_s w') \mid y_i u \otimes y_j v \rangle y_s w' \\
&= \sum_{y_s \in Y, w' \in Y^*} \langle (y_s \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes y_s + \sum_{n,m \in I} \gamma_{y_n, y_m}^{y_s} y_n \otimes y_m) \Delta(w') \mid y_i u \otimes y_j v \rangle y_s w' \\
&= \sum_{w' \in Y^*} \langle \Delta(w') \mid u \otimes y_j v \rangle y_i w' + \sum_{w' \in Y^*} \langle \Delta(w') \mid y_i u \otimes v \rangle y_j w' \\
&\quad + \sum_{y_s \in Y, w' \in Y^*} \langle \gamma_{y_i, y_j}^{y_s} \Delta(w') \mid u \otimes v \rangle y_s w' \\
&= y_i \sum_{w' \in Y^*} \langle \Delta(w') \mid u \otimes y_j v \rangle w' + y_j \sum_{w' \in Y^*} \langle \Delta(w') \mid y_i u \otimes v \rangle w' \\
&\quad + \sum_{y_s \in Y} \gamma_{y_i, y_j}^{y_s} y_s \sum_{w' \in Y^*} \langle \Delta(w') \mid u \otimes v \rangle w' \\
&= y_i S(u, y_j v) + y_j S(y_i u, v) + \gamma(y_i, y_j) S(u, v) .
\end{aligned}$$

La dernière équation implique $S = \uplus_{\varphi}$. $\square$

À partir de maintenant, φ sera supposée associative.

On caractérise maintenant l'existence d'une loi duale par la proposition suivante

Proposition 1 ([BVCTH15]) *La loi $\uplus_{\varphi}$ admet une loi duale (i.e. est dualisable) si seulement si φ est dualisable aussi, c'est-à-dire que, si les coefficients $\{\gamma_{x,y}^{z}\}_{x,y,z \in Y}$ satisfont à la condition suivante*

$$\forall z \in Y, \qquad \sharp\{(x,y) \in Y \times Y \mid \gamma_{x,y}^{z} \neq 0\} < +\infty .$$

Nous remarquons que si φ est une application associative, nous pouvons étendre l'application φ à Y^+ par

$$\begin{cases} \varphi(y) = y, & \forall y \in Y. \\ \varphi(yw) = \varphi(y, \varphi(w)), & \forall y \in Y, w \in Y^+ . \end{cases}$$

Dans ce cas, pour $y_1, \ldots, y_l \in Y^+$, nous notons

$$\varphi^{y}_{y_1,\ldots,y_l} \quad = \quad \langle y \mid \varphi(y_1,\ldots,y_l)\rangle = \sum_{t_1,\ldots,t_{l-2}\in Y} \gamma^{y}_{y_1,t_1}\gamma^{t_1}_{y_2,t_2}\ldots\gamma^{t_{l-2}}_{y_{l-1},y_l} .$$

On peut alors réécrire la proposition 1 par : "l'application $\varphi : \mathbb{C}Y^2 \to \mathbb{C}Y$ admet un adjoint (pour les produits scalaires standards) si seulement si la condition suivante est satisfaite"

$$(\forall y \in Y), (\{w \in Y^2 \mid \gamma^y_w \neq 0\} \quad \text{est fini}) . \tag{1.9}$$

Pour pouvoir appliquer le théorème de Cartier-Milnor-Moore [JM65] aux bigèbres nouvellement construites, nous avons besoin d'une condition plus forte

Définition 2 ([BVCTH15]) *Soit Y un alphabet. Une loi (associative) $\varphi : Y \times Y \to \mathbb{C}Y$ est modérée si elle satisfait à la condition suivante*

$$(\forall y \in Y), (\{w \in Y^* \mid \gamma^y_w \neq 0\} \quad \textit{est fini}) . \tag{1.10}$$

On peut voir facilement que une loi moderée est dualisable mais que l'inverse n'est pas vrai (c'est le cas de l'infiltration dans l'équation (1.8)). C'est-à-dire que, pour une loi (associative), la modération est plus forte que la dualisabilité. En fait, nous avons un théorème de structure pour des lois modérées.

Théorème 1 ([BVCTH15]) *Supposons que la loi φ dans $\mathbb{C}Y$ soit dualisable, commutative (et associative). Alors $\mathscr{B}_\varphi = \left(\mathbb{C}\langle Y\rangle, conc, 1_{Y^*}, \Delta_{⧢_\varphi}, \varepsilon\right)$ est une bigèbre. De plus, si la loi φ est commutative, les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *$\mathscr{B}_\varphi$ est une bigèbre enveloppante.*
2. *$\mathscr{B}_\varphi$ est isomorphe à la bigèbre $\left(\mathbb{C}\langle Y\rangle, conc, 1_{Y^*}, \Delta_{⧢}, \varepsilon\right)$ (comme bigèbre).*
3. *Pour chaque $w \in Y^*$, la série*

$$(P) \qquad w + \sum_{l\geq 2} \frac{(-1)^{l-1}}{l} \sum_{y_1,\ldots y_l \in Y} \langle w \mid \varphi(y_1,\ldots,y_l)\rangle y_1 \ldots y_l .$$

est un polynôme.

4. *φ est modérée .*

À partir de maintenant, φ sera supposée commutative (et associative).

Nous remarquons qu'un problème important de la théorie des algèbres de Hopf est la question des éléments primitifs. En fait, nous savons déjà que si A est une bigèbre, alors l'ensemble de ses éléments primitifs forme une algèbre de Lie. De plus, si A est graduée alors l'algèbre de Lie de ses éléments primitifs est aussi graduée. D'autre part, si A est une bigèbre (sur un corps de caractéristique 0) filtrée, cocommutative et connexe alors un théorème de Cartier, Quillen, Milnor et Moore [JM65] montre que l'algèbre enveloppante universelle de l'algèbre de Lie de ses éléments primitifs est isomorphe à l'algèbre A.

Définition 3 ([BVCTH15]) *Soit Y un alphabet et $S \in \mathbb{C}\langle\langle Y\rangle\rangle$. Le coproduit en S étant étendu par*

$$\Delta_{\text{⧢}_\varphi}(S) = \sum_{w\in Y^*} \langle S \mid w\rangle \Delta_{\text{⧢}_\varphi}(w) .$$

Nous dirons que

1. *S est primitive si seulement si $\Delta_{\text{⧢}_\varphi}(S) = S \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes S$.*
2. *S est de type groupe si seulement si $\Delta_{\text{⧢}_\varphi}(S) = S \otimes S$ et $\varepsilon(S) = 1$.*

Exemple 3 *Soit $Y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}_+}$. Revenons à la bigèbre de q-infiltration*

$$\mathscr{H}_{q-infiltr} = (\mathbb{C}\langle Y\rangle, conc, 1_{Y^*}, \Delta_{\uparrow_q}, \varepsilon).$$

Pour chaque de $y \in Y$, $1_{Y^*} + qy$ est de type groupe parce que nous avons $\varepsilon(1_{Y^*} + qy) = 1$ et

$$\begin{aligned} \Delta_{\uparrow_q}(1+qy) &= 1_{Y^*} \otimes 1_{Y^*} + q(y \otimes 1_{Y^*}) + q(1_{Y^*} \otimes y) + q^2(y \otimes y) \\ &= (1_{Y^*} + qy) \otimes (1_{Y^*} + qy) . \end{aligned}$$

On dira qu'une famille $(S_i)_{i\in I}$ est *sommable* [Reu93] si, pour tout w, l'application $i \to \langle S_i \mid w\rangle$ est à support fini. En ce cas, sa somme est la série $T \in R\langle\langle M\rangle\rangle$ telle que, pour tout w

$$\langle T \mid w\rangle = \sum_{i\in I} \langle S_i \mid w\rangle . \tag{1.11}$$

Remarque 2 *Soit $\mathbb{K}$ une $\mathbb{C}-$algèbre avec une norme $||\,.||$ et I un ensemble dénombrable d'indices. Une famille des éléments $\{u_i\}_{i\in I}$ de complexes indexée par I dans $\mathbb{K}$ est dite* **sommable** *(ou, plus précisément, normalement sommable) lorsqu'il existe un élément $S \in \mathbb{K}$ tel que*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists J_\varepsilon \underset{fini}{\subset} I)(\forall J \underset{fini}{\subset} I)(J \cap J_\varepsilon = \varnothing \Longrightarrow || \sum_{j\in J} u_j || \leq \varepsilon) . \tag{1.12}$$

Notons que si $I \subseteq \mathbb{N}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, nous avons

$$\{u_i\}_{i\in I} \text{ est sommable } \iff \sum_{i\in I} u_i \text{ est absolument convergente.} \tag{1.13}$$

Exemple 4 *Par exemple, soit* $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \forall n \in \mathbb{N}_+$. *Alors nous avons*

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log(2)\ .$$

Mais la famille $\{\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ *n'est pas sommable. En fait, supposons que* $\{\frac{(-1)^{n-1}}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+\}$ *est sommable.*

1. *Nous avons* $\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log(2)$.
2. *D'autre part, supposons que la famille* $\{v_n \mid n \in \mathbb{N}_+\}$ *est définie par*

   $$v_{3k} = -\frac{1}{2k}, v_{3k+1} = \frac{1}{4k+1}, v_{3k+2} = \frac{1}{4k+3}\ ,$$

   alors

   $$\sum_{k=1}^{3n} v_k = \sum_{k=1}^{p} (\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k}) = \sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\ ,$$

   et alors $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k = \frac{3}{2}\log(2)$. *Toutefois, nous avons*

   $$\log(2) = \sum_{n\in\mathbb{N}_+} u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \ldots = \sum_{n\geq 1} v_n = \frac{3}{2}\log(2)\ .$$

   C'est implique la famille $\{\frac{(-1)^{n-1}}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+\}$ *n'est pas sommable.*

Commentaire 1 *En fait, le théorème de Cartier-Milnor-Moore a donné la structure de l'algèbre des éléments primitifs dans une bigèbre* $\mathbb{N}$*-filtrée cocommutative connexe (sur un corps de caractéristique zéro) [BVCTH15, Bou06]. Notons* $\mathrm{Prim}(\mathscr{B})$ *l'ensemble des éléments primitifs dans la bigèbre* $\mathscr{B}$.

Théorème 2 ([BVCNT14, BVCTH15, Bou06, JM65]) *Soit* $\mathscr{B}$ *une* A*-bigèbre cocommutative où* A *est une* $\mathbb{Q}$*-algèbre commutative associative avec unité. Notons* $\mathscr{A}$, *la sous-algèbre de* $\mathscr{B}$ *qui est engendrée par* $\mathrm{Prim}(\mathscr{B})$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathscr{B} = \mathscr{A}$.
2. *Il y a une filtration croissante*

   $$\mathscr{B}_0 = A.1_{\mathscr{B}} \subset \mathscr{B}_1 \subset \ldots \subset \mathscr{B}_n \subset \mathscr{B}_{n+1} \subset \ldots$$

   qui satisfait

   $$\begin{aligned} & \mathscr{B} = \cup_{n\geq 0}\mathscr{B}_n\ , \\ \forall p,q \in \mathbb{N}, \quad & \mathscr{B}_p\mathscr{B}_q \subset \mathscr{B}_{p+q}\ , \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad & \Delta(\mathscr{B}_n) \subset \sum_{p+q=n} \mathscr{B}_p \otimes \mathscr{B}_q\ . \end{aligned}$$

3. *La famille* $\{(Id^+)^{*n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est sommable dans* $\mathrm{End}(\mathscr{B})$*, c'est-à-dire que pour tout* $b \in \mathscr{B}$*, il y a un nombre* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\forall i \geq n_0, \qquad (Id^+)^{*i}(b) = 0 \, .$$

Remarque 3 *Ce théorème est validé sur l'anneau des scalaires qui est une* $\mathbb{Q}$*-algèbre. Il stipule la nilpotence locale de la famille* $\{(Id^+)^{*n}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Dans [Bou06, JM65], on supposa que A *est un corps en caractéristique* 0*. Ensuite, dans la part des exercices de [Bou06], on supposa aussi que* A *est une* $\mathbb{Q}$*-algèbre, mais* $\mathrm{Prim}(\mathscr{B})$ *est* A*-libre.*

En effet, dans la méthode analytique de φ*-mélange, il suffit que* A *est une* $\mathbb{Q}$*-algèbre et* $\mathscr{B}$ *est une* A*-bigèbre* $\mathbb{N}$*-filtrée [BVCNT14, BVCTH15].*

La preuve de ce théorème (énoncé avec différents scalaires) est citée dans les références [BVCNT14, Bou06] et [JM65]. Maintenant, nous utiliserons ce théorème pour étudier l'algèbre de q*-stuffle.*

Exemple 5 *Soit* $X = \{x\}$ *un alphabet réduit à une lettre et*

$$\mathscr{B} = (K\langle X\rangle = K[x], \mathrm{conc}, 1_{X^*}, \Delta_q, \varepsilon)$$

une K*-bigèbre (*K *est une* $\mathbb{Q}$*-algèbre commutative associative avec unité). On définit* Δ_q *par sa valeur sur* x *comme suit*

$$\Delta_q(x) = 1_{X^*} \otimes x + x \otimes 1_{X^*} + q\, x \otimes x \, .$$

Soit $q = \alpha$ *avec* $\alpha^2 = 0$ *et* $K = \mathbb{Q}[\alpha]$ *(les nombres duaux). Alors l'espace des éléments primitifs dans* $\mathscr{B}$ *est un sous-module de* $K[x]$ *égal à* $\mathrm{Prim}(\mathscr{B}) = \mathbb{Q}.(\alpha x)$.

En fait, dans la presque totalité de notre travail, pour montrer qu'une série est primitive, nous utilisons l'extension d'un résultat de O. Friedrichs qui est dit "critère de Friedrichs".

Lemme 3 ([MBP00, BVCTH15, Fri53, Reu93]) *(Extension du critère de Friedrichs au* φ*-stuffle)*

Nous notons $\Delta_{\uplus_\varphi} : \mathbb{C}\langle\langle Y\rangle\rangle \to \mathbb{C}\langle\langle Y^* \otimes Y^*\rangle\rangle$ *le produit dual de* $\uplus_\varphi$ *appliqué aux séries, il est défini*[3]

$$\Delta_{\uplus_\varphi}(S) = \sum_{u,v\in Y^*} \langle S \mid u \uplus_\varphi v\rangle\, u \otimes v \, .$$

Soit $S \in \mathbb{C}\langle\langle Y\rangle\rangle$*. Nous avons*

3. La famille $(\langle S \mid u \uplus_\varphi v\rangle\, u \otimes v)_{u,v\in Y^*}$ est sommable parce que $u \uplus_\varphi v$ est un polynôme.

1. *Si $\langle S \mid 1_{Y^*}\rangle = 0$ alors S est primitive si seulement si pour tous $u, v \in Y^+$, nous obtenons que $\langle S \mid u \uplus_\varphi v\rangle = 0$.*
2. *Si $\langle S \mid 1_{Y^*}\rangle = 1$ alors S est de type groupe si seulement si pour tous $u, v \in Y^+$, nous avons que $\langle S \mid u \uplus_\varphi v\rangle = \langle S \mid u\rangle\langle S \mid v\rangle$.*

PREUVE –

1. Soit $S \in \mathbb{C}\langle\langle Y\rangle\rangle$ telle que $\langle S \mid 1_{Y^*}\rangle = 0$. Nous voyons facilement que

$$\begin{aligned}\Delta_{\uplus_\varphi}(S) &= S \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes S - \langle S \mid 1_{Y^*}\rangle 1_{Y_0^*} \otimes 1_{Y^*} + \sum_{u,v \in Y^+} \langle S \mid u \uplus_\varphi v\rangle u \otimes v \\ &= S \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes S + \sum_{u,v \in Y^+} \langle S \mid u \uplus_\varphi v\rangle\, u \otimes v\ .\end{aligned}$$

   Donc nous obtenons la condition première.

2. Soit $S \in \mathbb{C}\langle\langle Y\rangle\rangle$ telle que $\langle S \mid 1_{Y^*}\rangle = 1$. Avec la notation

$$S_+ = S - 1 = \sum_{w \in Y^+} \langle S \mid w\rangle\, w\ ,$$

   nous avons

$$\begin{aligned}\Delta_{\uplus_\varphi}(S) &= \sum_{u,v \in Y^*} \langle S \mid u \uplus_\varphi v\rangle u \otimes v \\ &= \sum_{u,v \in Y^+} \langle S \mid u \uplus_\varphi v\rangle u \otimes v + \sum_{u \in Y^+} \langle S \mid u\rangle u \otimes 1_{Y^*} + \sum_{v \in Y^+} \langle S \mid v\rangle 1_{Y^*} \otimes v + 1_{Y^*} \otimes 1_{Y^*} \\ &= (S_+ \otimes S_+) + (S_+ \otimes 1_{Y^*}) + (1_{Y^*} \otimes S_+) + 1_{Y^*} \otimes 1_{Y^*} = S \otimes S\ .\end{aligned}$$

   Et alors la seconde condition est montrée.

□

D'un autre côté, pour tous les $P \in \mathbb{C}\langle\langle Y\rangle\rangle$ tels que $\langle P \mid 1_{Y^*}\rangle = 0$, nous définissons $\log(1_{Y^*} + P)$ et $\exp(P)$ comme les séries formelles non commutatives suivantes :

$$\log(1_{Y^*} + P) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} P^n \quad et \quad \exp(P) = \sum_{n \geq 0} \frac{P^n}{n!}\ .$$

Par [BVCNT14], ces séries sont bien définies. Donc nous obtenons que

$$\log(\exp(P)) = P \quad et \quad \exp(\log(1_{Y^*} + P)) = 1_{Y^*} + P\ .$$

De plus, nous pouvons utiliser ces définitions pour établir une belle relation entre les éléments de type groupe et les éléments primitifs.

Proposition 2 *Soit $S \in \mathbb{C}\langle\langle Y\rangle\rangle$ telle que $\langle S \mid 1_{Y^*}\rangle = 1$. Alors S est de type groupe si seulement si $\log S$ est primitive.*

PREUVE – Tout d'abord, nous écrivons $S = 1_{Y^*} + S_+$ où $S_+ \in \mathbb{C}\langle\langle Y\rangle\rangle$ telle que $\langle S_+ \mid 1_{Y^*}\rangle = 0$. Maintenant, nous avons

$\Rightarrow$ Supposons que soit de type groupe (soit $\Delta_{⧢_\varphi}(S) = S \otimes S$, et $\langle S \mid 1_{Y^*}\rangle = 1$) nous avons besoin de démontrer que $\log S$ est primitive. Effectivement, nous avons que

$$\begin{aligned}
\Delta_{⧢_\varphi}(\log S) &= \Delta_{⧢_\varphi} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(S_+)^n = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\Delta_{⧢_\varphi}(S_+)^n \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(S\otimes S - 1_{Y^*}\otimes 1_{Y^*})^n = \log(S\otimes S) \\
&= \log\Big((S\otimes 1_{Y^*})(1_{Y^*}\otimes S)\Big) = \log(S\otimes 1_{Y^*}) + \log(1_{Y^*}\otimes S) \\
&= \log(S)\otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*}\otimes \log(S),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire, $\log S$ est primitive.

$\Leftarrow$ Réciproquement, si $\log S$ est primitive, alors nous pouvons conclure que

$$\Delta_{⧢_\varphi}(S) = \exp(\Delta_{⧢_\varphi}(\log S)) = \exp(\log S \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*}\otimes \log S) = S\otimes S\ .$$

Ceci, avec $\langle S \mid 1_{Y^*}\rangle = 1$, implique que S est de type groupe.

□

Nous remarquons que l'ensemble des séries de type groupe de $\mathbb{C}\langle\langle Y\rangle\rangle$, noté $\mathscr{G}$, forme un groupe pour le produit de concaténation.

1.1.2 La bigèbre de mélange

Soit $X = \{x_0, x_1\}$ un alphabet. On note X^* le monoïde (libre) des mots [4] qui sont formés par l'alphabet X et 1_{X^*} son élément neutre . Son produit est la concaténation [5]. On dit, comme précédemment, que $\mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle$ est l'algèbre des séries formelles sur X.

Définition 4 *Soit X un alphabet. Le produit de shuffle sur $\mathbb{C}\langle X\rangle$ est l'application linéaire $⧢ : \mathbb{C}\langle X\rangle \otimes \mathbb{C}\langle X\rangle \longrightarrow \mathbb{C}\langle X\rangle$ telle que*

$$\begin{aligned}
\forall w \in X^* &\qquad w ⧢ 1_{X^*} = 1_{X^*} ⧢ w = w, \\
\forall x, y \in X; u, v \in X^* &\qquad xu ⧢ yv = x(u ⧢ yv) + y(xu ⧢ v)\ .
\end{aligned}$$

Exemple 6 *Soit $X = \{x_0, x_1\}$ un alphabet à deux lettres. Alors le monoïde X^* est l'ensemble des mots $w = x_{i_1}\ldots x_{i_r}$ où $r \in \mathbb{N}, i_1, \ldots, i_r \in \{0,1\}$. Supposons que $u = x_0x_1$ et $v = x_1x_0$, alors*

$$\begin{aligned}
u ⧢ v &= x_0x_1 ⧢ x_1x_0 = x_0(x_1 ⧢ x_1x_0) + x_1(x_0x_1 ⧢ x_0) \\
&= x_0x_1^2x_0 + x_0x_1(x_1 ⧢ x_0) + x_1x_0(x_1 ⧢ x_0) + x_1x_0^2x_1 \\
&= 2x_0x_1^2x_0 + x_0x_1x_0x_1 + x_1x_0x_1x_0 + 2x_1x_0^2x_1\ .
\end{aligned}$$

4. Chaque élément de X^* est formé comme une suite $x_1\ldots x_r$ où $x_1,\ldots,x_r \in X$ et $r \in \mathbb{N}$.
5. C'est-à-dire que le produit de deux mots u est v dans X^* est le mot uv.

Supposons que $\circ$ soit un produit (bilinéaire) sur $\mathbb{C}\langle X\rangle$ et $w,u,v \in X^*$. On notera, comme précédemment, $\langle w \mid u\circ v\rangle$ le coefficient de w dans $u\circ v$.

Remarque 4 ([GDT15]) *i) On dit que le produit $\circ$ est dualisable sur $\mathbb{C}\langle X\rangle$ si seulement si pour chaque mot $w \in X^*$, le nombre des couples $(u,v) \in X^* \times X^*$ pour lesquels on a $\langle w \mid u\circ v\rangle \neq 0$ est fini. Dans ce cas on peut déterminer le coproduit dual.*

ii) Les coproduits

$$\Delta_{\sqcup\!\sqcup} : \mathbb{C}\langle X\rangle \to \mathbb{C}\langle X\rangle \otimes \mathbb{C}\langle X\rangle \quad \textit{et} \quad \Delta_{conc} : \mathbb{C}\langle X\rangle \to \mathbb{C}\langle X\rangle \otimes \mathbb{C}\langle X\rangle,$$

vérifient par définition

$$\begin{aligned}\langle \Delta_{conc}(w) \mid u\otimes v\rangle &= \langle w \mid uv\rangle,\\ \langle \Delta_{\sqcup\!\sqcup}(w) \mid u\otimes v\rangle &= \langle w \mid u \sqcup\!\sqcup v\rangle, \forall u,v,w \in X^* .\end{aligned}$$

pour tous les $u,v,w \in X^*$.

Exemple 7

$$\begin{aligned}\Delta_{conc}(1_{X^*}) &= \Delta_{\sqcup\!\sqcup}(1_{X^*}) = 1_{X^*}\otimes 1_{X^*},\\ \Delta_{conc}(x) &= \Delta_{\sqcup\!\sqcup}(x) = 1_{X^*}\otimes x + x\otimes 1_{X^*}, \forall x\in X,\\ \Delta_{conc}(x_0x_1) &= 1_{X^*}\otimes x_0x_1 + x_0\otimes x_1 + x_0x_1\otimes 1_{X^*},\\ \Delta_{\sqcup\!\sqcup}(x_0x_1) &= 1_{X^*}\otimes x_0x_1 + x_0\otimes x_1 + x_1\otimes x_0 + x_0x_1\otimes 1_{X^*} .\end{aligned}$$

Par définition, pour tout $w \in X^*$,

$$\Delta_{conc}(w) = \sum_{u,v\in X^*; uv=w} u\otimes v,$$
$$\Delta_{\sqcup\!\sqcup}(w) = \sum_{u,v\in X^*} \langle w \mid u\sqcup\!\sqcup v\rangle\, u\otimes v .$$

On obtient alors deux bigèbres en dualité (séparante)

$$\mathcal{H}_{\sqcup\!\sqcup} = (\mathbb{Q}\langle X\rangle, \mathtt{conc}, 1_{X^*}, \Delta_{\sqcup\!\sqcup}, \varepsilon), \qquad \mathcal{H}^{\vee}_{\sqcup\!\sqcup} = (\mathbb{Q}\langle X\rangle, \sqcup\!\sqcup, 1_{X^*}, \Delta_{\mathtt{conc}}, \varepsilon),$$

où la counité $\varepsilon : \mathbb{C}\langle X\rangle \to \mathbb{C}$ est définie par $\varepsilon(P) = \langle P \mid 1_{X^*}\rangle$ pour tous $P \in \mathbb{C}\langle X\rangle$.

Maintenant, on suppose $x_0 \prec x_1$. Pour tous les mots $u,v \in X^*$, on dit que $u \prec v$ si seulement si une des conditions suivantes est vérifiée

i. $v = uw$ où $w \in X^+ = X^* \setminus \{1_{X^*}\}$.

ii. Il existe des mots w,w_1,w_2 et des lettres a,b tels que $a \prec b$, $u = waw_1$ et $v = wbw_2$.

Alors $\prec$ est un ordre total sur X^*.

Définition 5 ([VHNM00c, Min13b]) *Un mot $w \in X^+$ est dit mot de Lyndon si seulement si $w = uv$ avec $u,v \in X^+$ implique $w \prec v$. L'ensemble des mots de Lyndon dans X^* est noté par $\mathcal{L}yn(X)$.*

Exemple 8 • *x_0x_1 est un mot de Lyndon dans X^* parce que toutes les factorisations propres (en deux facteurs) pour la concaténation sont $x_0x_1 = x_0.x_1$ et $x_0x_1 \prec x_1$.*

- *$x_0x_1x_0$ n'est pas un mot de Lyndon dans X^* parce que l'on a $x_0x_1x_0 = x_0x_1.x_0$ mais $x_0x_1x_0 \not\prec x_0$.*

Un théorème de Radford [Min13a] affirme que $\mathcal{L}yn(X)$ forme une base de transcendance (pure) de l'algèbre $(\mathbb{C}\langle X\rangle, ⧢, 1_{X^*})$. Elle est incluse dans la base linéaire $\{w\}_{w\in X^*}$ qui est auto-duale, c'est-à-dire que

$$\text{Pour tout } u,v \in X^*,\text{ on a } \langle u \mid v\rangle = \delta_u^v\ ,$$

où $\delta_u^v = 1$ si $u = v$, sinon, $\delta_u^v = 0$. Mais les éléments $l \in \mathcal{L}yn(X)\setminus X$ ne sont pas primitifs pour le coproduit $\Delta_{⧢}$.

Commentaire 2 *En fait, $l \in \mathcal{L}yn(X)\backslash X$ implique que $l = xu$ où $x \in X$ et $u \in X^+$. On a que $\langle l \mid x ⧢ u\rangle \neq 0$ et $\langle l \mid xu\rangle \neq 0$, alors on obtient que*

$$\Delta_{⧢}(l) = l\otimes 1_{X^*} + 1_{X^*}\otimes l + x\otimes u + \ldots \neq l\otimes 1_{X^*} + 1_{X^*}\otimes l,$$
$$\Delta_{conc}(l) = l\otimes 1_{X^*} + 1_{X^*}\otimes l + x\otimes u + \ldots \neq l\otimes 1_{X^*} + 1_{X^*}\otimes l\ .$$

Mais, on peut prouver facilement que toutes les lettres dans l'alphabet $X = \{x_0, x_1\}$ sont primitives pour les coproduits $\Delta_{⧢}$ et Δ_{conc}. De plus, la série $S = \sum_{x\in X} x$ est primitive aussi pour le coproduit $\Delta_{⧢}$, parce que

$$\Delta_{⧢}(S) = \sum_{x\in X}\Delta_{⧢}(x) = \sum_{x\in X} x\otimes 1_{X^*} + \sum_{x\in X} 1_{X^*}\otimes x = S\otimes 1_{X^*} + 1_{X^*}\otimes S\ .$$

L'ensemble des mots de Lyndon $\mathcal{L}yn(X)$ n'est pas une base de $\mathcal{L}ie_{\mathbb{Q}}\langle X\rangle$. Alors, pour étudier l'algèbre enveloppante de $\mathcal{L}ie_{\mathbb{Q}}\langle X\rangle$, nous allons construire une base de Poincaré-Birkhoff-Witt, que l'on notera par $\{P_w\}_{w\in X^*}$ (base de de $\mathcal{U}(\mathcal{L}ie_{\mathbb{Q}}\langle X\rangle)$) et qui est définie par les conditions suivantes

$$\begin{aligned} P_x &= x && \text{pour } x\in X,\\ P_l &= [P_s, P_r] && \text{pour } l \in \mathcal{L}ynX, \text{ la factorisation standard de } l = (s,r),\\ P_w &= P_{l_1}^{i_1}\ldots P_{l_k}^{i_k} && \text{pour } w = l_1^{i_1}\ldots l_k^{i_k}, l_1 \succ \ldots \succ l_k, l_1,\ldots,l_k \in \mathcal{L}ynX. \end{aligned} \tag{1.14}$$

où l'ordre $\succ$ est l'ordre lexicographique (voir la définition 5)[VHNM00c]. Ensuite, Schützenberger définit la base $\{S_w\}_{w\in X^*}$ de $(\mathbb{Q}\langle X\rangle, ⧢)$ par dualité, *c'est-à-dire que* $\langle S_u \mid P_v\rangle = \delta_{u,v}$ pour tout $u,v \in X^*$. En fait, il a aussi obtenu la base de transcendance $\{S_l\}_{l\in\mathcal{L}ynX}$ et la base linéaire $\{S_w\}_{w\in X^*}$ par les formules combinatoires

$$\begin{aligned} S_l &= xS_u, && \text{for } l = xu \in \mathcal{L}ynX,\\ S_w &= \frac{S_{l_1}^{⧢ i_1} ⧢ \ldots ⧢ S_{l_k}^{⧢ i_k}}{i_1!\ldots i_k!} && \text{for } w = l_1^{i_1}\ldots l_k^{i_k}, l_1, \succ \ldots \succ l_k\ . \end{aligned}$$

Exemple 9 (De $\{P_w\}_{w\in X^*}$ de de $\{S_w\}_{w\in X^*}$, [VHNM91]) *Soit* $X=\{x_0,x_1\}$ *avec* $x_0 \prec x_1$.

l	P_l	S_l
x_0	x_0	x_0
x_1	x_1	x_1
x_0x_1	$[x_0,x_1]$	x_0x_1
$x_0^2x_1$	$[x_0,[x_0,x_1]]$	$x_0^2x_1$
$x_0x_1^2$	$[[x_0,x_1],x_1]$	$x_0x_1^2$
$x_0^3x_1$	$[x_0,[x_0,[x_0,x_1]]]$	$x_0^3x_1$
$x_0^2x_1^2$	$[x_0,[[x_0,x_1],x_1]]$	$x_0^2x_1^2$
$x_0x_1^3$	$[[[x_0,x_1],x_1],x_1]$	$x_0x_1^3$
$x_0^4x_1$	$[x_0,[x_0,[x_0,[x_0,x_1]]]]$	$x_0^4x_1$
$x_0^3x_1^2$	$[x_0,[x_0,[[x_0,x_1],x_1]]]$	$x_0^3x_1^2$
$x_0^2x_1x_0x_1$	$[[x_0,[x_0,x_1]],[x_0,x_1]]$	$2x_0^3x_1^2+x_0^2x_1x_0x_1$
$x_0^2x_1^3$	$[x_0,[[[x_0,x_1],x_1],x_1]]$	$x_0^2x_1^3$
$x_0x_1x_0x_1^2$	$[[x_0,x_1],[[x_0,x_1],x_1]]$	$3x_0^2x_1^3+x_0x_1x_0x_1^2$
$x_0x_1^4$	$[[[[x_0,x_1],x_1],x_1],x_1]$	$x_0x_1^4$
$x_0^5x_1$	$[x_0,[x_0,[x_0,[x_0,[x_0,x_1]]]]]$	$x_0^5x_1$
$x_0^4x_1^2$	$[x_0,[x_0,[x_0,[[x_0,x_1],x_1]]]]$	$x_0^4x_1^2$
$x_0^3x_1x_0x_1$	$[x_0,[[x_0,[x_0,x_1]],[x_0,x_1]]]$	$2x_0^4x_1^2+x_0^3x_1x_0x_1$
$x_0^3x_1^3$	$[x_0,[x_0,[[[x_0,x_1],x_1],x_1]]]$	$x_0^3x_1^3$
$x_0^2x_1x_0x_1^2$	$[x_0,[[x_0,x_1],[[x_0,x_1],x_1]]]$	$3x_0^3x_1^3+x_0^2x_1x_0x_1^2$
$x_0^2x_1^2x_0x_1$	$[[x_0,[[x_0,x_1],x_1]],[x_0,x_1]]$	$6x_0^3x_1^3+3x_0^2x_1x_0x_1^2+x_0^2x_1^2x_0x_1$
$x_0^2x_1^4$	$[x_0,[[[[x_0,x_1],x_1],x_1],x_1]]$	$x_0^2x_1^4$
$x_0x_1x_0x_1^3$	$[[x_0,x_1],[[[x_0,x_1],x_1],x_1]]$	$4x_0^2x_1^4+x_0x_1x_0x_1^3$
$x_0x_1^5$	$[[[[[x_0,x_1],x_1],x_1],x_1],x_1]$	$x_0x_1^5$

Mélançon et Reutenauer ont montré que pour tout $w\in X^*$,

$$P_w = w + \sum_{v\succ w,|v|_X=|w|_X} c_v^w v \quad \text{and} \quad S_w = w + \sum_{v\prec w,|v|_X=|w|_X} d_v^w v\,, \tag{1.15}$$

où $|w|_X=(|w|_x)_{x\in X}$ est la famille des degrés partiels ($|w|_x$ est défini par le nombre de fois où la lettre $x\in X$ apparait dans le mot $w\in X^*$). Maintenant, nous divisons X^* en classes par les degrés partiels des mots, *c'est-à-dire que* deux mots $u,v\in X^*$ se trouvent dans une même classe si $|u|_X=|v|_X$. En utilisant la formule (1.15), pour chaque classe si nous disposons encore les éléments de X^* en ordre $\succ$ alors les bases $\{S_w\}_{w\in X^*}$ et $\{P_w\}_{w\in X^*}$ sont triangulaires. C'est-à-dire qu'il y a des matrices triangulaires $M,N\in Mat_{d(\alpha)}(\mathbb{Z}),\alpha\in\mathbb{N}^{(X)}$ (et $d(\alpha)$ est le nombre [6] de mots satisfaisant $|w|_X=\alpha$) et telles que

$$(S_w)_{w\in X^*,|w|_X=\alpha}=M(w)_{w\in X^*,|w|_X=\alpha} \quad \text{et} \quad (P_w)_{w\in X^*,|w|_X=\alpha}=N(w)_{w\in X^*,|w|_X=\alpha}\,.$$

De plus, nous pouvons démontrer que $M=(N^t)^{-1}$.

Exemple 10 *Ici, pour simplifier, les matrices sont indexées par l'ordre lexicographique par longueur et donc,* $n=|w|$

6. On peut aussi classer les mots par ordre lexicographique par longueur, l'aphabet X étant fini on obtient des matrices finies, mais plus grandes ce qui est moins intéressant algorithmiquement.

- *Si* $n = 1$, *nous avons que* $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = N$. *Alors nous obtenons que*

$$\begin{pmatrix} S_{x_0} \\ S_{x_1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} P_{x_0} \\ P_{x_1} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

- *Si* $n = 2$, *nous avons que* $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Donc nous pouvons conclure que*

$$\begin{pmatrix} S_{x_0^2} \\ S_{x_0x_1} \\ S_{x_1x_0} \\ S_{x_1^2} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_0^2 \\ x_0x_1 \\ x_1x_0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} P_{x_0^2} \\ P_{x_0x_1} \\ P_{x_1x_0} \\ P_{x_1^2} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} x_0^2 \\ x_0x_1 \\ x_1x_0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, nous considérons la série diagonale qui est définie par $\mathscr{D}_X := \sum_{w \in X^*} w \otimes w$. La factorisation de Schützenberger se formule alors comme ci-dessous

$$\mathscr{D}_X = \sum_{w \in X^*} S_w \otimes P_w = \prod_{l \in \mathscr{L}ynX}^{\searrow} \exp(S_l \otimes P_l). \tag{1.16}$$

1.1.3 La bigèbre de quasi-mélange

Soit $Y = \{y_k\}_{k \geq 1}$ (c'est un alphabet infini).

Nous définissons un produit commutatif μ sur $\mathbb{C}\langle Y \rangle$ par

$$\forall y_n, y_m \in Y, \qquad \mu(y_n, y_m) = y_{n+m},$$

alors ce produit est dualisable. Donc nous pouvons déterminer son coproduit associatif $\Delta_\mu : \mathbb{C}\langle Y \rangle \to \mathbb{C}\langle Y \rangle \otimes \mathbb{C}\langle Y \rangle$ par

$$\forall y_n \in Y, \qquad \Delta_\mu(y_n) = \sum_{i=1}^{n-1} y_i \otimes y_{n-i}.$$
$$\forall x, y, z \in Y, \qquad \langle \Delta_\mu(x) \mid y \otimes z \rangle = \langle x \mid \mu(y, z) \rangle.$$

Maintenant, nous supposons que $\mathbb{Q}\langle Y \rangle$ est équipé

1. de la concaténation (ou par son coproduit associatif Δ_{conc}).
2. du produit de mélange (ou le shuffle), noté par $ш$, *c'est-à-dire que* le produit sur $\mathbb{C}\langle Y \rangle$ qui est défini par

$$\forall w \in Y^*, \qquad w ш 1_{Y^*} = 1_{Y^*} ш w = w,$$
$$\forall x, y \in Y, u, v \in Y^*, \qquad xu ш yv = x(u ш yv) + y(xu ш v).$$

Ce produit est dualisable et il se trouve que son coproduit est déterminé sur $\mathbb{C}\langle Y\rangle$ par un morphisme tel que $\forall y_k \in Y, \Delta_{\sqcup\sqcup} y_k = y_k \otimes 1 + 1 \otimes y_k$. Nous avons $\forall u,v,w \in Y^*, \langle \Delta_{\sqcup\sqcup} w \mid u \otimes v\rangle = \langle w \mid u \sqcup\sqcup v\rangle$.

3. **Définition 6 ([BVCTH15, GDQS15, GD16a])** *Le stuffle, qui sera noté* $\uplus$, *est le produit sur* $\mathbb{C}\langle Y\rangle$ *défini par*

$$\begin{aligned} \forall w \in Y^*, &\qquad w \uplus 1_{Y^*} = 1_{Y^*} \uplus w = w, \\ \forall x,y \in Y, u,v \in Y^*, &\qquad y_i u \uplus y_j v = y_j(y_i u \uplus v) + y_i(u \uplus y_j v) + y_{i+j}(u \uplus v). \end{aligned}$$

Son coproduit est un morphisme $\mathbb{C}\langle Y\rangle \to \mathbb{C}\langle Y\rangle \otimes \mathbb{C}\langle Y\rangle$ tel que

$$\forall y_k \in Y, \qquad \Delta_{\uplus}(y_k) = \Delta_{\sqcup\sqcup}(y_k) + \Delta_\mu(y_k).$$

On démontre que $\forall u,v,w \in Y^*, \langle \Delta_{\uplus}(w) \mid u \otimes v\rangle = \langle w \mid u \uplus v\rangle$.

Ensuite, nous noterons $\mathtt{e}$ la counité définie par $\mathtt{e}(P) = \langle P \mid 1_{Y^*}\rangle$. Alors nous obtenons deux paires d'algèbres de Hopf.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\sqcup\sqcup} = (\mathbb{Q}\langle Y\rangle, \mathtt{conc}, 1_{Y^*}, \Delta_{\sqcup\sqcup}, \mathtt{e}) &\quad \text{et} \quad [\mathcal{H}_{\sqcup\sqcup}^{\vee} = (\mathbb{Q}\langle Y\rangle, \sqcup\sqcup, 1_{Y^*}, \Delta_{\mathtt{conc}}, \mathtt{e}), \\ \mathcal{H}_{\uplus} = (\mathbb{Q}\langle Y\rangle, \mathtt{conc}, 1_{Y^*}, \Delta_{\uplus}, \mathtt{e}) &\quad \text{et} \quad \mathcal{H}_{\uplus}^{\vee} = (\mathbb{Q}\langle Y\rangle, \uplus, 1_{Y^*}, \Delta_{\mathtt{conc}}, \mathtt{e}). \end{aligned}$$

Alors, en appliquant le théorème CQMM (voir [BVCTH15]), nous voyons que la bigèbre cocommutative $\mathbb{N}$-graduée connexe $\mathcal{H}_{\sqcup\sqcup}$ est isomorphe à l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}ie_{\mathbb{Q}}\langle Y\rangle$ de ses éléments primitifs. C'est-à-dire que

$$\mathcal{H}_{\sqcup\sqcup} \cong \mathcal{U}(\mathcal{L}ie_{\mathbb{Q}}\langle Y\rangle).$$

Ensuite, nous considérons

1. La base de PBW $\{p_w\}_{w\in Y^*}$ de $\mathcal{U}(\mathcal{L}ie_{\mathbb{Q}}\langle Y\rangle)$, construite par

$$\begin{cases} p_y &= y & \text{pour } y \in Y, \\ p_l &= [p_s, p_r] & \text{pour } l \in \mathcal{L}ynY \setminus Y, \text{de factorisation standard } l = (s,r), \\ p_w &= p_{l_1}^{i_1} \dots p_{l_k}^{i_k} & \text{pour } w = l_1^{i_1} \dots l_k^{i_k}, l_1 \succ \dots \succ l_k, l_1 \dots, l_k \in \mathcal{L}ynY, \end{cases}$$

2. La base linéaire $\{s_w\}_{w\in Y^*}$ de $(\mathbb{Q}\langle Y\rangle, \sqcup\sqcup, 1_{Y^*})$ construite par dualité, *c'est-à-dire que,* $\forall u,v \in Y^*, \langle p_u \mid s_v\rangle = \delta_{u,v}$. En général, la famille duale d'une base appartient à l'espace dual (ici, c'est l'espace des séries non commutatives), mais l'algèbre enveloppante en question est graduée en dimensions finies (par le multidegré), ce qui fait que les séries s_w sont des polynômes. De plus, nous pouvons calculer cette base par [Reu93]

$$\begin{cases} s_y &= y, & \text{pour } y \in Y, \\ s_l &= y s_u, & \text{pour } l = yu \in \mathcal{L}ynY, \\ s_w &= \dfrac{s_{l_1}^{\sqcup\sqcup i_1} \sqcup\sqcup \dots \sqcup\sqcup s_{l_k}^{\sqcup\sqcup i_k}}{i_1! \dots i_k!} & \text{pour } w = l_1^{i_1} \dots l_k^{i_k}, l_1 \succ \dots \succ l_k \in \mathcal{L}ynY. \end{cases}$$

Donc nous avons aussi la factorisation de Schützenberger pour la série diagonale $\mathcal{D}_Y$,

$$\mathcal{D}_Y := \sum_{w\in Y^*} w \otimes w = \sum_{w\in Y^*} s_w \otimes p_w = \prod_{l\in\mathcal{L}ynY}^{\searrow} \exp(s_l \otimes p_l).$$

Avec une méthode semblable, grâce au théorème de CQMM, nous pouvons prouver que l'algèbre de Hopf cocommutative, $\mathbb{N}$-graduée (par le poids) [7] et connexe $\mathcal{H}_{⊎}$ est isomorphe à l'algèbre enveloppante de

$$\mathrm{Prim}(\mathcal{H}_{⊎}) = \mathrm{Im}(\pi_1) = \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{\pi_1(w)|w \in Y^*\},$$

où pour tout les mots $w \in Y^*$, la valeur $\pi_1(w)$ est définie par [BVCTH15, Min13a]

$$\pi_1(w) = w + \sum_{k\geq 2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{u_1,\ldots,u_k \in Y^+} \langle w \mid u_1 ⊎ \ldots ⊎ u_k\rangle\, u_1 \ldots u_k. \tag{1.17}$$

Notons que l'équation (1.17) est équivalente à l'identité suivante [BVCTH15, Min13a, Min13b]

$$w = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{u_1,\ldots,u_k \in Y^*} \langle w \mid u_1 ⊎ \ldots ⊎ u_k\rangle\, \pi_1(u_1)\ldots\pi_1(u_k). \tag{1.18}$$

En particulier, pour chaque lettre $y_k \in Y$, nous obtenons que [BVCTH15, Min13a, Min13b]

$$\begin{aligned} \pi_1(y_k) &= y_k + \sum_{l\geq 2} \frac{(-1)^{l-1}}{l} \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_l \geq 1 \\ j_1+\ldots+j_l = k}} y_{j_1}\ldots y_{j_l}, && (1.19)\\ y_n &= \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!} \sum_{s'_1+\cdots+s'_k = n} \pi_1(y_{s'_1})\ldots\pi_1(y_{s'_k}) && (1.20)\end{aligned}$$

Nous introduisons un alphabet nouveau, noté par $\bar{Y} = \{\bar{y}\}_{y\in Y} = \{\pi_1(y)\}_{y\in Y}$, et alors

$$(\mathbb{Q}\langle\bar{Y}\rangle, \mathtt{conc}, 1_{\bar{Y}^*}, \Delta_{⊔⊔}) \;\cong\; (\mathbb{Q}\langle Y\rangle, \mathtt{conc}, 1_{Y^*}, \Delta_{⊎}),$$

en fait, grâce aux équations (1.19)-(1.20), l'application $y \mapsto \bar{y}$ définit un automorphisme de $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ et donc nous pouvons conclure que

$$\mathcal{H}_{⊎} \cong \mathcal{U}(\mathcal{L}ie_{\mathbb{Q}}\langle\bar{Y}\rangle) \cong \mathcal{U}(\mathrm{Prim}(\mathcal{H}_{⊎})).$$

Alors nous pouvons, comme dans l'algèbre de mélange :

1. obtenir la base PBW-Lyndon $\{\Pi_w\}_{w\in Y^*}$ dans $\mathcal{U}(\mathrm{Prim}(\mathcal{H}_{⊎}))$ qui est définie par [Min13a]

$$\begin{cases} \Pi_y = \pi_1(y) & \text{pour } y \in Y,\\ \Pi_l = [\Pi_s, \Pi_r] & \text{pour } l \in \mathcal{L}ynY, \text{la factorisation standarde de } l = (s,r),\\ \Pi_w = \Pi_{l_1}^{i_1}\ldots\Pi_{l_k}^{i_k} & \text{pour } w = l_1^{i_1}\ldots l_k^{i_k}, l_1 \succ \ldots \succ l_k, l_1\ldots,l_k \in \mathcal{L}ynY,\end{cases}$$

2. utiliser la dualité : la base linéaire $\{\Sigma_w\}_{w\in Y^*}$ dans $(\mathbb{Q}\langle Y\rangle, ⊎, 1_{Y^*})$ étant calculée par

$$\forall u,v \in Y^*, \qquad \langle \Pi_u \mid \Sigma_v\rangle = \delta_{u,v}.$$

7. Dans la suite, on note $⊎$ le q-stuffle. Les résultats s'appliquent aussi au φ-stuffle dans le cas où φ est modérée (directement ou bien avec la version filtrée du CQMM).

De plus, cette base est déterminée par la récurrence suivante [BVC13, Min13a]

$$\begin{cases} \Sigma_y = y, & \text{pour } y \in Y, \\ \Sigma_l = \sum_{(!)} \frac{y_{s_{k_1}+\cdots+s_{k_i}}}{i!} \Sigma_{l_1 \ldots l_n}, & \text{pour } l = y_{s_1} \ldots y_{s_w} \in \mathscr{L}ynY, \\ \Sigma_w = \frac{\Sigma_{l_1}^{\text{⊎} i_1} \text{⊎} \ldots \text{⊎} \Sigma_{l_k}^{\text{⊎} i_k}}{i_1! \ldots i_k!}, & \text{pour } w = l_1^{i_1} \ldots l_k^{i_k}, \text{ avec} \\ & l_1 \succ \ldots \succ l_k \in \mathscr{L}ynY. \end{cases} \tag{1.21}$$

Notons que, dans (1.21), le signe (!) sous la somme indique que celle-ci est prise sur tous les sous-ensembles $\{k_1, \ldots, k_i\}$ de $\{1, \ldots, k\}$ et tous des mots de Lyndon $l_1 \succeq \cdots \succeq l_n$ tels que $(y_{s_1}, \ldots, y_{s_k}) \stackrel{*}{\Leftarrow} (y_{s_{k_1}}, \ldots, y_{s_{k_i}}, l_1, \ldots, l_n)$ où $\stackrel{*}{\Leftarrow}$ désigne la clôture transitive de la relation sur les suites standards, notée par $\Leftarrow$ (voir [BVCTH15]).

Exemple 11 (De $\{\Pi_w\}_{w \in Y^*}$ et de $\{\Sigma_w\}_{w \in Y^*}$, [GDQS15, GD16a])

l	Π_l	Σ_l
y_2	$y_2 - \frac{1}{2}y_1^2$	y_2
y_1^2	y_1^2	$\frac{1}{2}y_2 + y_1^2$
y_3	$y_3 - \frac{1}{2}y_1y_2 - \frac{1}{2}y_2y_1 + \frac{1}{3}y_1^3$	y_3
y_2y_1	$y_2y_1 - y_2y_1$	$\frac{1}{2}y_3 + y_2y_1$
y_1y_2	$y_2y_1 - \frac{1}{2}y_1^3$	y_1y_2
y_1^3	y_1^3	$\frac{1}{6}y_3 + \frac{1}{2}y_2y_1 + \frac{1}{2}y_1y_2 + y_1^3$
y_4	$y_4 - \frac{1}{2}y_1y_3 - \frac{1}{2}y_2^2 - \frac{1}{2}y_3y_1$ $+\frac{1}{3}y_1^2y_2 + \frac{1}{3}y_1y_2y_1 + \frac{1}{3}y_2y_1^2 - \frac{1}{4}y_1^4$	y_4
y_3y_1	$y_3y_1 - \frac{1}{2}y_2y_1^2 - y_1y_3 + \frac{1}{2}y_1^2y_2$	$\frac{1}{2}y_4 + y_3y_1$
y_2^2	$y_2^2 - \frac{1}{2}y_2y_1^2 - \frac{1}{2}y_1^2y_2 + \frac{1}{4}y_1^4$	$\frac{1}{2}y_4 + y_2^2$
$y_2y_1^2$	$y_2y_1^2 - 2y_1y_2y_1 + y_1^2y_2$	$\frac{1}{6}y_4 + \frac{1}{2}y_3y_1 + \frac{1}{2}y_2^2 + y_2y_1^2$
y_1y_3	$y_1y_3 - \frac{1}{2}y_1^2y_2 - \frac{1}{2}y_1y_2y_1 + \frac{1}{3}y_1^4$	$y_4 + y_3y_1 + y_1y_3$
$y_1y_2y_1$	$y_1y_2y_1 - y_1^2y_2$	$\frac{1}{2}y_4 + \frac{1}{2}y_3y_1 + y_2^2$ $+y_2y_1^2 + \frac{1}{2}y_1y_3 + y_1y_2y_1$
$y_1^2y_2$	$y_1^2y_2 - \frac{1}{2}y_1^4$	$\frac{1}{2}y_4 + y_3y_1 + y_2^2 + y_2y_1^2$ $+y_1y_3 + y_1y_2y_1 + y_1^2y_2$
y_1^4	y_1^4	$\frac{1}{24}y_4 + \frac{1}{6}y_3y_1 + \frac{1}{4}y_2^2 + \frac{1}{2}y_2y_1^2$ $+\frac{1}{6}y_1y_3 + \frac{1}{2}y_1y_2y_1 + \frac{1}{2}y_1^2y_2 + y_1^4$

En fait, nous voyons aussi que pour tous $w \in Y^*$, [BVCTH15, Min13a, Min13b],

$$\Pi_w = w + \sum_{v \succ w, (v)=(w)} e_v v \quad \text{et} \quad \Sigma_w = w + \sum_{v \prec w, (v)=(w)} f_v v\,. \tag{1.22}$$

Les éléments des bases $\{\Sigma_w\}_{w \in Y^*}$ et $\{\Pi_w\}_{w \in Y^*}$ sont triangulaires et ils sont homogènes en poids. C'est-à-dire que, pour chaque $n \in \mathbb{N}_+$, il y a des matrices triangulaires $M, N \in Mat(\mathbb{Q})$, de taille $n \times n$ (les familles ordonnées étant notées comme des vecteurs colonne) telles que

$$\begin{aligned} \Big(\{\Pi_w\}_{w \in Y^*, (w)=n}\Big) &= M\Big(\{w \in Y^*, (w) = n\}\Big) \\ \Big(\{\Sigma_w\}_{w \in Y^*, (w)=n}\Big) &= N\Big(\{w \in Y^*, (w) = n\}\Big)\,. \end{aligned}$$

et [8] $M = (N^t)^{-1}$. Nous pouvons alors écrire la factorisation de Schützenberger pour la série diagonale $\mathscr{D}_Y$, [GDQS15, Min13a]

$$\mathscr{D}_Y = \sum_{w \in Y^*} \Sigma_w \otimes \Pi_w = \prod_{l \in \mathscr{L}ynY}^{\searrow} \exp(\Sigma_l \otimes \Pi_l).$$

Pour finir cette sous-section, nous remplaçons l'alphabet Y par l'alphabet $Y_0 = Y \sqcup \{y_0\}$. Supposons que le stuffle ait été construit sur $\mathbb{C}\langle Y_0\rangle$ comme sur $\mathbb{C}\langle Y\rangle$, nous avons

$$\begin{aligned} \Delta_{\uplus}(y_0^k) &= (\Delta(y_0))^k = (y_0 \otimes 1 + 1 \otimes y_0 + y_0 \otimes y_0)^k \\ &= \sum_{n_1+n_2+n_3=k} \frac{k!}{n_1!n_2!n_3!}(y_0 \otimes 1)^{n_1}(1 \otimes y_0)^{n_3}(y_0 \otimes y_0)^{n_2} \\ &= \sum_{n_1+n_2+n_3=k} \frac{k!}{n_1!n_2!n_3!} y_0^{n_1+n_2} \otimes y_0^{n_2+n_3}, \end{aligned}$$

et donc

$$\Delta_{\uplus}(y_0^k) = \sum_{n_1+n_2+n_3=k} \frac{k!}{n_1!n_2!n_3!} y_0^{n_1+n_2} \otimes y_0^{n_2+n_3}.$$

D'un autre côté, pour l'ensemble des éléments de type groupe, nous pouvons démontrer que

Proposition 3 *1. Quel que soit $t \in \mathbb{C}$, $g(t) := 1_{Y_0^*} + \sum_{s \geq 0} t^s y_s$ est de type groupe.*

2. En particulier, $1_{Y_0^*} + y_0$ ($t = 0$) et $1_{Y_0^*} + y_0 + y_1 + \ldots$ ($t = 1$) sont des éléments de type groupe de $\mathbb{C}\langle\langle Y_0\rangle\rangle$.

PREUVE – Le premier point se démontre par calcul direct, le second par spécialisation du premier. □

Toutefois, à part $1_{Y_0^*} + y_0$, on ne peut pas obtenir un élément comme $g(t)$ avec une somme finie [9], *c'est-à-dire que,* une somme $S = 1_{Y_0^*} + \sum_{r=1}^{s} \alpha_r y_r \in \mathbb{C}\langle Y_0\rangle$ où $\alpha_s \neq 0, s \geq 2$, n'est jamais de type groupe. Cela se voit facilement parce que

$$\langle \Delta_{\uplus}(S) \mid y_s \otimes y_s \rangle = 0 \neq \alpha_s^2 = \langle S \otimes S \mid y_s \otimes y_s \rangle.$$

Proposition 4 *Ici $Y_0 = \{y_k\}_{k \geq 0}$. Le sous-ensemble des éléments du type groupe de $\mathbb{C}\langle Y_0\rangle$ (que nous notons ici $Haus(\mathbb{C}\langle Y_0\rangle)$) est*

$$Haus(\mathbb{C}\langle Y_0\rangle) = \{(1_{Y_0^*} + y_0)^k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

C'est un monoïde.

8. Pour toute matrice A, A^t est la matrice transposée de A.
9. C'est à dire une $1_{Y_0^*}$ plus une combinaison linéaire des lettres

Nous utiliserons deux lemmes suivants pour compléter la preuve de la proposition 4.

Lemme 4 *Soit* $(\mathscr{B},\mu,1_{\mathscr{B}},\Delta,\varepsilon)$ *une bigèbre, alors l'ensemble* $Haus(\mathscr{B})$ *des éléments du type groupe de* $\mathscr{B}$ *(par* Δ*) est un sous-monoïde du monoïde* $(\mathscr{B},\mu,1_{\mathscr{B}})$.

PREUVE – En fait, nous savons que l'unité $1_{\mathscr{B}}$ est un élément de type groupe par Δ. Supposons que $a,b\in Haus(\mathscr{B})$. $\mathrm{Haus}(\mathscr{B})$ est l'intersection du monoïde d'équation $\varepsilon(g)=1$ et du sous-monoïde $\Delta^{-1}(Diag_{\mathscr{B}})$, la diagonale $Diag_{\mathscr{B}}\subset\mathscr{B}\otimes\mathscr{B}$ étant définie par

$$Diag_{\mathscr{B}}=\{x\otimes x\}_{x\in\mathscr{B}}.$$

Donc, nous pouvons conclure que $(\mathrm{Haus}(\mathscr{B}),\mu,1_{\mathscr{B}})$ est un sous-monoïde du monoïde $(\mathscr{B},\mu,1_{\mathscr{B}})$. $\square$

Lemme 5 *Soit* $(\mathscr{B}=\oplus_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{B}_n,\mu,1_{\mathscr{B}},\Delta,\varepsilon)$, *une bigèbre (sur un corps),* $\mathbb{N}$*-graduée (mais pas nécessairement connexe), c'est-à-dire que*

1. $(\forall i,j\in\mathbb{N})(\mu(\mathscr{B}_i\otimes\mathscr{B}_j)\subset\mathscr{B}_{i+j})$
2. $(\forall n\in\mathbb{N})(\Delta(\mathscr{B}_n)\subset\oplus_{i+j=n}\mathscr{B}_i\otimes\mathscr{B}_j)$.

alors

$$\mathrm{Haus}(\mathscr{B})\subset\mathscr{B}_0.$$

PREUVE – Soit $g\in\mathrm{Haus}(\mathscr{B})$, un élément du type groupe de $\mathscr{B}$. Écrivons

$$g=\sum_{n\geq 0}^{N}g_n$$

la décomposition de g en ses composantes homogènes ($g_k\in\mathscr{B}_k$) avec $g_N\neq 0$ (un élément de type groupe est toujours non nul). De

$$\Delta(g)=\sum_{n\geq 0}^{N}\Delta(g_n)$$

on déduit, comme Δ est gradué, que $\Delta(g)\in\oplus_{n\leq N}(\mathscr{B}\otimes\mathscr{B})_n$ (graduation totale), mais, d'autre part

$$\Delta(g)=g\otimes g=\sum_{p+q\leq N}g_p\otimes g_q,$$

en considérant que $g_N\otimes g_N\neq 0$ [10], ceci montre que $N=0$. Nous avons donc la propriété désirée. $\square$

Maintenant, nous retournons à la preuve de la proposition 4.

PREUVE – [Preuve de la proposition 4.] Nous considérons la bigèbre

$$(\mathbb{C}\langle Y_0\rangle,\mathrm{conc},1_{Y_0^*},\Delta_{\sqcup\!\sqcup},\varepsilon).$$

10. On est sur un corps.

- Tout d'abord, nous appliquons le lemme 4 à $\mathscr{B} = \mathbb{C}\langle Y_0\rangle$. Remarquons que

$$\Delta_{⧢}(1_{Y^*} + y_0) = (1_{Y^*} + y_0) \otimes (1_{Y^*} + y_0),$$

  et que $\varepsilon(1_{Y^*} + y_0) = 1$ donc $(1_{Y^*} + y_0) \in \mathrm{Haus}(\mathbb{C}\langle Y_0\rangle)$. Ensuite, nous remarquons encore que $E = (\{(1_{Y_0^*} + y_0)^k\}_{k\in\mathbb{N}}, \mathrm{conc}, 1_{Y_0^*})$ est le plus petit monoïde qui contient $1_{Y_0^*} + y_0$. Donc, $E \subset \mathrm{Haus}(\mathscr{B})$.
- Ensuite, nous utilisons le lemme 5 pour $\mathscr{B} = \mathbb{C}\langle Y_0\rangle$ et la graduation par le poids

$$\mathscr{B}_i := span_{\mathbb{C}}\{w | w \in Y_0^*, (w) = i\},$$

  $\mathscr{B}_i$ est la sous-bigèbre qui est engendrée par l'ensemble $\{w | w \in Y_0^*, (w) = i\}$. Alors, nous obtenons que

$$\mathrm{Haus}(\mathbb{C}\langle Y_0\rangle) \subset (\mathbb{C}\langle Y_0^*\rangle)_0,$$

  où $(\mathbb{C}\langle Y_0^*\rangle)_0$ est le sous-espace engendré par les mots dont le poids est 0. C'est-à-dire que

$$\mathrm{Haus}(\mathbb{C}\langle Y_0\rangle) \subset \mathbb{C}\langle y_0\rangle.$$

- Enfin, nous remarquons bien que la famille $\{(1 + y_0)^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une base ($\mathbb{C}$-linéaire) de $\mathbb{C}\langle y_0\rangle$. Donc, tout $P \in \mathbb{C}\langle Y_0\rangle$, P est présenté comme une combinaison $\mathbb{C}$-linéaire d'un nombre fini d'éléments de la famille $\{(1 + y_0)^k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Maintenant, supposons que le polynôme $P \neq 0$ soit un élément de type groupe (par $\Delta_{⧢}$) de $\mathbb{C}\langle Y_0\rangle$. Nous avons alors

$$P := \sum_{k=0}^{n} a_k (1_{Y_0^*} + y_0)^k \in \mathbb{C}\langle y_0\rangle, a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}_+,$$

  et donc,

$$\Delta_{⧢}(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Delta_{⧢}((1_{Y_0^*} + y_0)^k) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, (1_{Y_0^*} + y_0)^k \otimes (1_{Y_0^*} + y_0)^k \, .$$

  D'un autre côté, nous avons que

$$P \otimes P = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_i a_j \, (1_{Y_0^*} + y_0)^i \otimes (1_{Y_0^*} + y_0)^j \, .$$

  Parce que, P est un élément de type groupe (par $\Delta_{⧢}$) de $\mathbb{C}\langle Y_0\rangle$, nous avons

$$\Delta_{⧢}(P) = P \otimes P.$$

  De ce qui précède, nous obtenons que $a_0 = \ldots = a_{n-1} = 0$ et $a_n = 1$. Donc, nous avons $P = (1_{Y_0^*} + y_0)^n, n \in \mathbb{N}_+$ et la proposition 4 est prouvée.

□

Enfin, nous remarquons que si S est de type groupe alors $\log S$ est primitive. Par la définition du logarithme, nous avons

1. $\log(1_{Y_0^*}) = 0$.

2. $\log(1_{Y_0^*} + y_0) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} y_0^n$.
3. Pour déterminer $\log(1_{Y_0^*} + \sum_{s\geq 0} y_s)$, nous considérons la série $g(t) = 1 + \sum_{k\geq 0} t^k y_k$ où $t \in \mathbb{C}$. Alors

$$\log(g(t)) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\sum_{k_1\geq 0} t^{k_1} y_{k_1})^n = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} [\sum_{k\geq 0} t^k (\sum_{m_1+\ldots m_n=k} y_{m_1} \ldots y_{m_n})]$$
$$= \sum_{k\geq 0} t^k (\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{m_1+\ldots m_n=k} y_{m_1} \ldots y_{m_n}) \ .$$

Maintenant, nous choisissons $t = 1$, alors nous pouvons conclure que

$$\log(1_{Y_0^*} + \sum_{s\geq 0} y_s) = \sum_{k\geq 0} (\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{m_1+\ldots m_n=k} y_{m_1} \ldots y_{m_n}) \ .$$

1.2 L'algèbre de mélange $\mathbb{C}\langle X\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}[x_0^*, (-x_0)^*] \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}[x_1^*]$

1.2.1 Définition

Dans la dernière section de ce chapitre, pour étendre la définition des polylogarithmes à l'algèbre de mélange

$$(\mathbb{C}\langle X\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}[x_0^*, (-x_0)^*] \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}[x_1^*], \sqcup\!\sqcup, 1_{X^*})$$

nous commençons par étudier les propriétés de cette algèbre. En fait, nous utilisons le produit de mélange sur l'ensemble $\mathbb{C}\langle X\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}[x_0^*, (-x_0)^*] \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}[x_1^*]$ et nous y construisons une base adaptée. Ensuite, nous étendons la définition des polylogarithmes à l'algèbre des séries (non commutatives) rationnelles échangeables

$$\mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_0\rangle\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_1\rangle\rangle$$

et à son extension

$$\mathbb{C}\langle X\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_0\rangle\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_1\rangle\rangle \ .$$

Définition 7 *i) Un anneau différentiel $(R, (d_i)_{i\in I})$ est un anneau R équipé d'une ou plusieurs dérivation $d_i : R \to R$ (ici, ce sera une).*

ii) Une constante d'un anneau différentiel (R, d) est un élément $c \in R$ tel que $d(c) = 0$. Ces constantes forment un sous-anneau de R.

Par exemple, l'anneau commutatif $\mathbb{C}(z)$ des fractions rationnelles complexes en z est un anneau différentiel avec la dérivation

$$\phi(F) := \frac{d}{dz}(F).$$

Lemme 6 ([GD16b]) *Soit* $(\mathscr{A},d)$ *un anneau différentiel sans diviseur de zéro et* $R=\ker(d)$ *le sous-anneau de ses constantes. Soit* $z\in\mathscr{A}$ *tel que* $d(z)=1$ *et soit* $S=\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *un ensemble d'éléments propres de* d*, c'est-à-dire que*

i. $e_\alpha\neq 0$ *pour tous les* $\alpha\in I$*.*

ii. $d(e_\alpha)=\alpha e_\alpha$ *et* $\alpha\in I\subset R$*.*

Alors la famille $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ *est linéairement indépendante sur* $R[z]$ [11].

PREUVE – Supposons qu'il y ait une relation $R[z]$-linéaire entre les éléments de S, *c'est-à-dire que*, nous avons

$$\sum_{j=1}^{N} P_j(z)e_{\alpha_j}=0\ , \tag{1.23}$$

où $P_j(z)\in R[z]$ tels que, $P_j(z)\neq 0$ pour tous $j=1,\dots,N$.

Maintenant, nous supposons que N est le plus petit entier où la relation (1.23) est vérifiée. De plus, pour ce cas, nous choisissons les polynômes $\{P_j(z)\}_{1\leq j\leq N}$ tels que les nombres $\deg(P_N(z))$ et ensuite $\sum_{j<N}\deg(P_j)$ sont minimaux (i.e. par ordre de priorité).

Remarquons que $d(P(z))=P'(z)$ (parce que $d(z)=1$), nous appliquons alors l'opérateur

$$d-\alpha_N Id$$

à la relation (1.23), et nous obtenons

$$\sum_{j=1}^{N}(P_j'(z)+(\alpha_j-\alpha_N)P_j(z))e_{\alpha_j}=0\ . \tag{1.24}$$

Mais le fait que les quantités $[\deg(P_N(z)),\sum_{j<N}\deg(P_j)]$ soient minimales dans la relation (1.23) suffit à montrer que l'équation (1.24) est triviale, c'est-à-dire que tous ses coefficients sont nuls, soit

$$P_N'(z)=0;\qquad (\forall j=1..N-1),\ (P_j'(z)+(\alpha_j-\alpha_N)P_j(z)=0)\ . \tag{1.25}$$

D'un autre côté, la relation (1.23) implique

$$\Big(\prod_{1\leq k\leq n-1}(\alpha_N-\alpha_k)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{N}P_j(z)e_{\alpha_j}\Big)=0\ .$$

Par ailleurs, l'équation (1.25) montre que, pour tout $k<N$, nous obtenons

$$\prod_{1\leq j\leq n-1}(\alpha_N-\alpha_j)P_k(z)=\prod_{1\leq j\leq n-1,j\neq k}(\alpha_N-\alpha_j)P_k^{'}(z),$$

et alors quand $N\geq 2$, nous pouvons construire un autre triplet de nombres

$$(N,\deg(P_N(z)),\sum_{j<N}\deg(P_j))$$

11. Ici $R[z]$ désigne l'adjonction de z à R, c'est à dire le plus petit sous-anneau engendré par $R\cup\{z\}$.

qui est moindre que le premier triplet. Comme c'est impossible, nous avons $N \leq 1$. Donc, de $P_N(z)e_N = 0$ et de $e_N \neq 0$, nous pouvons conclure $P_N(z) = 0$ que parce que $\mathscr{A}$ est intègre. Nous avons donc $N = 0$, ce qui suffit à démontrer que la famille $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ est linéairement independante sur $R[z]$. $\square$

Ensuite, nous considérons l'algèbre $(\mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle^{\mathrm{rat}}, ⧢, 1_{X^*})$ où $X = \{x_0, x_1\}$ est un alphabet fini. En fait, nous avons besoin de construire des familles libres dans cette algèbre. Tout d'abord, nous avons un lemme général.

Lemme 7 *Soit k un corps de caractéristique nulle*[12] *et Z un alphabet. Alors $(k\langle\langle Z\rangle\rangle, ⧢, 1_{Z^*})$ est une k-algèbre qui ne possède aucun diviseur de zéro.*

Preuve –

Soit $B = (b_i)_{i \in I}$ une base totalement ordonnée de l'algèbre $\mathscr{L}ie_k\langle Z\rangle$ et $\{B^\alpha/\alpha!\}_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}}$ est la base de PBW correspondante. Alors nous avons que

$$\Delta_{⧢}(\frac{B^\alpha}{\alpha!}) = \sum_{\alpha = \alpha_1 + \alpha_2} \frac{B^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \otimes \frac{B^{\alpha_2}}{\alpha_2!}.$$

Maintenant, si $S, T \in (k\langle\langle Z\rangle\rangle, ⧢, 1_{Z^*})$, nous avons

$$\langle S ⧢ T \mid \frac{B^\alpha}{\alpha!}\rangle = \langle S \otimes T \mid \Delta_{⧢}(\frac{B^\alpha}{\alpha!})\rangle = \sum_{\alpha = \alpha_1 + \alpha_2} \langle S \mid \frac{B^{\alpha_1}}{\alpha_1!}\rangle \langle T \mid \frac{B^{\alpha_2}}{\alpha_2!}\rangle,$$

nous obtenons $(k\langle\langle Z\rangle\rangle, ⧢, 1_{Z^*}) \simeq (k[[I]], ., 1)$ où $k[[I]]$ est est l'algèbre (classique) des séries formelles commutatives . Cette dernière ne possède aucun diviseur de zéro. Ceci implique le lemme 7. $\square$

Nous dirons qu'un réel est algébrique s'il est racine d'un polynôme (non nul) à coefficients entiers. Dans le cas contraire, il est dit transcendant. Plus généralement, nous obtenons la définition d'un élément transcendant sur un sous-anneau.

Définition 8 *Soit A un anneau commutatif et $B \subset A$, un sous-anneau de A.*

1. *Nous dirons qu'un élément $z \in A$ est algébrique sur B s'il est racine d'un polynôme (non nul) à coefficients dans B. Dans le cas contraire, il est dit transcendant sur B.*
2. *Nous dirons qu'un ensemble $S \subset A$ est algébriquement libre sur B, ou que ses éléments sont algébriquement indépendants sur B si, pour toute suite finie $(s_1, \ldots, s_n)$ d'éléments distincts de S et tout polynôme non nul $P(x_1, \ldots, x_n)$ à coefficients dans B, nous avons $P(s_1, \ldots, s_n) \neq 0$.*

Remarque 5 *Soit A un anneau commutatif, $B \subset A$ un sous-anneau de A et $Z \subset A$.*

12. Le lemme reste vrai k est un anneau intègre, il suffit pour le voir en utiliant la preuve précédente, de tensoriser avec le corps des fractions de l'anneau de base.

- *Cas où* $Z = \{z\} \subset A$. *Nous construisons l'homomorphisme canonique*

$$\begin{aligned} p \quad : \quad & B[x] \to A, \\ & x \mapsto z. \end{aligned}$$

Si z *est algébrique sur* B*, alors il y a un polynôme* $P \in (B[x] \setminus \{0\})$ *tel que* $P(z) = 0$. *Alors l'homomorphisme* p *a un noyau non nul. Inversement, si* z *est transcendant sur* B*, c'est-à-dire que l'élément* z *n'est racine d'aucun polynôme non nul dans* $B[x]$*, alors, l'homomorphisme* p *est injectif.*

- *Soit* $Z = \{z_i\}_{i=1,\ldots,n}, n \in \mathbb{N}$ *(tous distincts) un sous-ensemble fini de* A*. Nous construisons l'homomorphisme*

$$\begin{aligned} p_1 \quad : \quad & B[x_1, \ldots, x_n] \to A \\ & x_i \mapsto z_i \in A, \end{aligned}$$

qui envoie x_i *sur* z_i *pour tout* $i = 1, 2, \ldots, n$*. Alors* Z *est algébriquement indépendant sur* B*, si seulement si* p_1 *est un monomorphisme (ici un homomorphisme injectif).*

La proposition suivante résume ces observations.

Proposition 5 ([GD16b]) *Soit* A *un anneau commutatif et* $B \subset A$*, un sous-anneau de* A*. Soit* $F = (b_i)_{i \in I}$ *une famille d'éléments de* A*. On note* $\phi : B[I] \to A$ *le morphisme de* B*-AAU (uniquement déterminé) tel que*

$$(\forall i \in I)(\phi(i) = b_i),$$

alors

1. F *est algébriquement indépendante sur* B *si seulement si* ϕ *est injectif.*
2. F *est algébriquement génératrice sur* B *si* ϕ *est surjectif.*
3. F *est une* B*-base algébrique de* A *si seulement si* ϕ *est bijectif.*

Exemple 12 *Nous savions que toutes les fonctions* $f(z) = \exp(nz), n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ *sont transcendantes sur* $\mathbb{C}$*. Supposons que* $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset \mathbb{C}$ *soient* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants. Le théorème permet de voir dans ces conditions que l'ensemble des fonctions*

$$\{z, \exp(t_1 z), \ldots, \exp(t_n z)\}$$

est algébriquement indépendant sur $\mathbb{C}$*.*

Maintenant, soit $X = \{x_0 < x_1\}$ un alphabet. Nous construisons la bigèbre

$$(\mathbb{C}\langle X \rangle, \mathtt{conc}, \Delta_{\sqcup\!\sqcup}, 1_{X^*}, \varepsilon),$$

où le coproduit $\Delta_{\sqcup\!\sqcup}$ est déterminé par $\Delta_{\sqcup\!\sqcup}(x_i) = x_i \otimes 1_{X^*} + 1_{X^*} \otimes x_i$. Notons $\mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle X\rangle\rangle$ la clôture de $\mathbb{C}\langle X\rangle$ par les opérations $\{+, \mathtt{conc}, {}^*\}$[JB88]. Il resulte du théorème de Kleene-Schützenberger [JB88, Sch61], que la série S est rationnelle (i.e. $S \in \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle X\rangle\rangle$) si seulement si il y a deux matrices $\beta \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \rho \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ et un morphisme multiplicatif $\mu : X^* \mapsto \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ tels que pour tout $w \in X^*$, nous avons $\langle S \mid w\rangle = \beta\mu(w)\rho$ [JB88, GD97]. Nous dirons que la série S est *reconnaissable* par l'automate donné par *la représentation linéaire* (β, μ, ρ) de dimension n. De plus, pour chaque série rationnelle S sur X, il y a un réel $K > 0$ et un morphisme réel positif $\chi : (X^*, conc, 1_{X^*}) \mapsto (\mathbb{R}_+, \times, 1_{\mathbb{R}})$ tel que, pour tout $w \in X^*$, nous avons [GD97, GDQS15, Min07, Min13a],

$$|\langle S \mid w\rangle| < K\chi(w).$$

Maintenant, pour chaque $x \in X$, nous notons que la famille $(\frac{x^{\sqcup\!\sqcup n}}{n!})_{n\geq 0}$ est sommable et que

$$x^* = \sum_{n\geq 0} x^n := \sum_{n\geq 0} \frac{x^{\sqcup\!\sqcup n}}{n!} := \exp_{\sqcup\!\sqcup}(x).$$

Commençons par le lemme suivant.

Lemme 8 ([GD16b]) *Soit $\mathscr{A}$ une $\mathbb{Q}$-algèbre (associative, unitaire, commutative) sans diviseur de zéro et z une indéterminée, alors $\exp(z) \in \mathscr{A}[[z]]$ est transcendant sur $\mathscr{A}[z]$.*

Preuve – C'est une conséquence directe du lemme 6, appliqué à l'anneau différentiel $(\mathscr{A}[[z]], \frac{d}{dz})$ qui est sans diviseur de zéro. □

Dans la théorie des extensions transcendantes, Lindemann et Weierstrass ont prouvé que si $z \neq 0$ est un élément algébrique sur $\mathbb{Q}$ alors $\exp(z)$ est transcendant sur $\mathbb{Q}$. Par exemple, si $z = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ alors $\exp(\frac{a}{b})$ est un nombre transcendant. Mais la réciproque n'est pas vraie. Par exemple, Gelfond et Schneider ont prouvé que $\exp(\pi)$ est transcendant, mais nous savons que π est aussi transcendant.

Le lemme 8 reste vrai dans les algèbres de shuffle. On peut considérer alors la chaîne d'extensions dans $(\mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle, \sqcup\!\sqcup, 1_{X^*})$ (ici $X = \{x_0, x_1\}$)

$$\begin{aligned}&\mathbb{C}[x_0] \subset_{(1)} \mathbb{C}[x_0, \exp_{\sqcup\!\sqcup}(x_0)] \subset \mathbb{C}[x_0, \exp_{\sqcup\!\sqcup}(x_0), x_1] \subset_{(2)} \\ &\mathbb{C}[x_0, \exp_{\sqcup\!\sqcup}(x_0), x_1, \exp_{\sqcup\!\sqcup}(x_1)] \subset \mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle\end{aligned} \tag{1.26}$$

où les crochets signifient ici des adjonctions et en remarquant que, pour $x \in X$,

$$exp_{\sqcup\!\sqcup}(x) = x^* \ .$$

Dans l'inclusion $\subset_{(1)}$ on utilise $d = x_0^{-1}$ alors que dans $\subset_{(2)}$, on utilise $d = x_1^{-1}$, toutes deux des dérivations de $(\mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle, \sqcup\!\sqcup, 1_{X^*})$.

On vérifie facilement que

$$(a_0x_0+a_1x_1)^* \quad = \quad (a_0x_0)^* \sqcup\!\sqcup (a_1x_1)^* ,$$

et que $\mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle X\rangle\rangle$ est fermé pour le shuffle.

Maintenant, soit $\mathscr{A}$ une $\mathbb{Q}$-AAU sans diviseur de zéro et considérons l'anneau différentiel $(\mathscr{A}[[z]], d = \dfrac{d}{dz})$. Alors $d(z)=1$ implique z est transcendant sur $R = ker(d)$. D'autre part, nous notons

$$\exp(z) := \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \in \mathscr{A}[[z]],$$

alors nous pouvons prouver facilement que $\{z, \exp(z)\}$ est algébriquement libre sur $\mathscr{A}$. Plus généralement, nous avons la propriété suivante. Soient $Z = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un alphabet. Grâce au lemme 6, nous pouvons démontrer par récurrence que

$$\{\exp(z_0), \exp(z_1), \cdots, \exp(z_k), z_0, z_1, \cdots, z_k\},$$

est algébriquement libre sur $\mathbb{C}$. Ceci implique, en particulier, que

$$\{\exp(z_0), \exp(z_1), \cdots, \exp(z_k)\}$$

est algébriquement libre sur $\mathbb{C}[Z]$.

Proposition 6 *Soient $Z = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un alphabet. Alors $\{\exp(z_0), \exp(z_1)\} \subset \mathbb{C}[[Z]]$ est algébriquement libre sur $\mathbb{C}[Z]$.*

En utilisant les lemmes ci-dessus, nous obtenons le résultat suivant important dans l'algèbre $(\mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle^{\mathrm{rat}}, \sqcup\!\sqcup, 1_{X^*})$.

Corollaire 1 ([GD16b])
1. *La famille $\{x_0^*, x_1^*\}$ est algébriquement libre sur $(\mathbb{C}\langle X\rangle, \sqcup\!\sqcup, 1_{X^*})$.*
2. *$(\mathbb{C}\langle X\rangle, \sqcup\!\sqcup, 1_{X^*})[x_0^*, x_1^*, (-x_0)^*]$ est un module libre sur $\mathbb{C}\langle X\rangle$ et la famille*

$$\{(x_0^*)^{\sqcup\!\sqcup\, k} \sqcup\!\sqcup (x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, l}\}_{(k,l)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}},$$

en est une $\mathbb{C}\langle X\rangle$-base.

3. *La famille $\{w \sqcup\!\sqcup (x_0^*)^{\sqcup\!\sqcup\, k} \sqcup\!\sqcup (x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, l}\}_{\substack{w\in X^*\\ (k,l)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}}$, est une $\mathbb{C}$-base de l'espace*

$$(\mathbb{C}\langle X\rangle, \sqcup\!\sqcup, 1_{X^*})[x_0^*, x_1^*, (-x_0)^*].$$

1.2.2 L'algèbre de mélange $SP_{\mathbb{C}}(X)$

Ensuite, nous notons que l'ensemble $\{(a_0x_0+a_1x_1)^*\}_{a_0,a_1\in\mathbb{C}}$ est un monoïde pour le shuffle car pour tous les nombres $a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbb{C}$, on a

$$(a_0x_0+a_1x_1)^* \sqcup\!\sqcup (b_0x_0+b_1x_1)^* := ((a_0+b_0)x_0 + (a_1+b_1)x_1)^*. \tag{1.27}$$

Alors nous étudierons l'espace engendré par ces vecteurs

$$\mathrm{SP}_{\mathbb{C}}(X) := \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{(a_0x_0 + a_1x_1)^*\}_{a_0,a_1\in\mathbb{C}}.$$

Il n'est pas difficile de voir que l'espace de ces vecteurs est une sous-algèbre de shuffle (unitaire) de l'algèbre $\mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_0\rangle\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_1\rangle\rangle$. En fait, elle est aussi une sous-algèbre de shuffle de l'algèbre des séries échangeables $(\mathbb{C}^{exch}\langle\langle X\rangle\rangle, \sqcup\!\sqcup, 1_{X^*})$ dont nous allons donner la définition maintenant .

Définition 9 *Une série $S \in \mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle$ est échangeable si seulement si pour tous les mots $u, v \in X^*$, nous avons*

$$(\forall x \in X, |u|_x = |v|_x) \quad \Longrightarrow \quad \langle S \mid u\rangle = \langle S \mid v\rangle.$$

En fait, pour toute série $S \in \mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle$, nous pouvons écrire $S = \sum_{n\geq 0} P_n$, où $P_n \in \mathbb{C}[X]$ satisfait $\deg(P_n) = n, \forall n \in \mathbb{N}$. Ceci implique que S est échangeable si seulement si tous les polynômes $P_n, n \in \mathbb{N}$ sont symétriques pour les permutations des places. D'où le fait que $S = \sum_{n\geq 0} P_n$ est échangeable ssi,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, P_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{n,i} x_0^i \sqcup\!\sqcup x_1^{n-i},$$

où $\alpha_{n,i} \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq n$.

Théorème 3 ([GD16b, Min98]) *La série $S \in \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle X\rangle\rangle$ est échangeable si seulement si*

$$S \in \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_0\rangle\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_1\rangle\rangle \ .$$

Définition 10 ([GDQS15, Min13a, Min90]) *Soit $S \in \mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle$ (resp. $\mathbb{C}\langle X\rangle$) et $P \in \mathbb{C}\langle X\rangle$ (resp. $\mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle$). Le résidu à gauche et le résidu à droite de S par P sont les séries formelles (resp. polynômes) $P \triangleright S$ et $S \triangleleft P$ dans $\mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle$ qui définies par*

$$\forall w \in X^*, \langle P \triangleright S \mid w\rangle = \langle S \mid wP\rangle \quad \textit{et} \quad \langle S \triangleleft P \mid w\rangle = \langle S \mid Pw\rangle \ .$$

Exemple 13 *Soient $S = \sum_{n\geq 0} (x_0x_1)^n \in \mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle$ et $P = x_0$ alors*

$$\begin{aligned}
S \triangleleft P &= \sum_{n\geq 0} (x_0x_1)^n \triangleleft x_0 = \sum_{n\geq 0} x_1(x_0x_1)^n = x_1S. \\
P \triangleright S &= x_0 \triangleright (\sum_{n\geq 0} (x_0x_1)^n) = 0_{\mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle} \ .
\end{aligned}$$

En fait, pour toute $S \in \mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle$ (resp. $\mathbb{C}\langle X\rangle$) et tout $P, Q \in \mathbb{C}\langle X\rangle$ (resp. $\mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle$), nous pouvons prouver facilement que

$$P \triangleright (Q \triangleright S) = PQ \triangleright S, \quad (S \triangleleft P) \triangleleft Q = S \triangleleft PQ, \quad (P \triangleright S) \triangleleft Q = P \triangleright (S \triangleleft Q) \ .$$

En particulier, pour toutes lettres $x, y \in X$ et tout mot $w \in X^*$, nous avons $x \triangleright (wy) = \delta_x^y w$, and $xw \triangleleft y = \delta_x^y w$, où δ désigne le symbole de Kronecker , c'est-à-dire que pour tous les mots $u, v \in X^*$, si $u = v$ alors $\delta_u^v = 1$ sinon 0.

Nous avons la propriété remarquable suivante :

Proposition 7 ([GD16b, Min13a]) *L'opérateur résidu à gauche (et le résidu à droite) par une lettre $x \in X$ sont des dérivations de l'algèbre $(\mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle, ⧢)$, c'est-à-dire que, pour $S, T \in \mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle$, on a*

$$x \triangleright (S ⧢ T) = (x \triangleright S) ⧢ T + S ⧢ (x \triangleright T)\ .$$
$$(S ⧢ T) \triangleleft x = (S \triangleleft x) ⧢ T + S ⧢ (T \triangleleft x)\ .$$

PREUVE – En fait, ce résultat est la conséquence du théorème beaucoup général suivant dont la preuve explique que ce phénomène est dû à la primitivité des lettres. □

Maintenant, nous définissons plus généralement les décalages des fonctions sur un monoïde [13] M, cet espace, à coefficients dans $\mathbb{C}$, sera encore noté $\mathbb{C}\langle\langle M\rangle\rangle$ (et l'espace des fonctions à support fini noté $\mathbb{C}\langle M\rangle$). On peut toujours définir les décalages à gauche et à droite de $S \in \mathbb{C}\langle\langle M\rangle\rangle$ (resp. $S \in \mathbb{C}\langle M\rangle$) par $P \in \mathbb{C}\langle M\rangle$ (resp. $P \in \mathbb{C}\langle\langle M\rangle\rangle$) par

$$\langle P \triangleright S \mid w\rangle = \langle S \mid wP\rangle \quad \text{et} \quad \langle S \triangleleft P \mid w\rangle = \langle S \mid Pw\rangle\ .$$

où $w \in M$ et le couplage est défini par $\langle S \mid P\rangle = \sum_{w\in M} S(w)P(w)$.

Théorème 4 ([Min13a]) *Soit $L \in \mathcal{L}ie_{\mathbb{C}}\langle\langle X\rangle\rangle$, c'est-à-dire que $\Delta_{⧢}(L) = L\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}L$ [Reu93]. Notons δ_L^{right} et δ_L^{left} respectivement les résidus par L,*

$$\delta_L^{\text{right}}(P) := P \triangleleft L \quad \textit{et} \quad \delta_L^{\text{left}}(P) := L \triangleright P, \forall P \in \mathbb{C}\langle X\rangle\ .$$

δ_L^{right} et δ_L^{left} sont des dérivations localement nilpotentes [14] de $(\mathbb{C}\langle X\rangle, ⧢, 1_{X^*})$. Et donc, $\exp(t\delta_L^{\text{right}})$ et $\exp(t\delta_L^{\text{left}})$ sont des sous-groupes à un paramètre de $Aut(\mathbb{C}\langle X\rangle, ⧢, 1_{X^*})$. De plus, nous avons aussi que

$$\exp(t\delta_L^{\text{right}})P = P \triangleleft \exp(tL) \quad \textit{et} \quad \exp(t\delta_L^{\text{left}})P = \exp(tL) \triangleright P\ .$$

PREUVE – Pour faire cette preuve, nous allons utiliser le monoïde $M = X^* \otimes X^*$ qui est localement fini et dont les décalages seront notés $\triangleright^{(2)}$ et $\triangleleft^{(2)}$.
Commençons par le décalage à gauche (c'est-à-dire la multiplication à droite

13. Ici, le monoïde est supposé *localement fini* c'est à dire que l'application produit $M^* \to M$ est à fibres finies [Eil74]

14. Dans un module V, un endomorphisme $\phi \in End(V)$ est dit localement nilpotent si

$$(\forall u \in V)(\exists N \geq 0)(\phi^N(u) = 0)\ .$$

des arguments), la preuve pour le décalage à droite se fait de même. Avec les hypothèses du théorème nous avons pour tout $L \in \mathscr{L}ie_{\mathbb{C}}\langle\langle X\rangle\rangle$ et $P, Q \in \mathbb{C}\langle X\rangle$,

$$\begin{aligned}
\langle L \triangleright (P \sqcup\!\sqcup Q) \mid w\rangle &= \langle P \sqcup\!\sqcup Q \mid wL\rangle = \langle P \otimes Q \mid \Delta_{\sqcup\!\sqcup}(wL)\rangle = \langle P \otimes Q \mid \Delta_{\sqcup\!\sqcup}(w)\Delta_{\sqcup\!\sqcup}(L))\rangle \\
&= \langle P \otimes Q \mid \Delta_{\sqcup\!\sqcup}(w)(L\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}L)\rangle \\
&= \langle (L\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}L) \triangleright^{(2)} (P \otimes Q) \mid \Delta_{\sqcup\!\sqcup}(w)\rangle \\
&= \langle (L \triangleright P) \otimes Q + P \otimes (L \triangleright Q) \mid \Delta_{\sqcup\!\sqcup}(w)\rangle \\
&= \langle (L \triangleright P) \sqcup\!\sqcup Q + P \sqcup\!\sqcup (L \triangleright Q) \mid w\rangle \,.
\end{aligned}$$

Comme l'égalité est vraie pour tout w, on a

$$L \triangleright (P \sqcup\!\sqcup Q) = (L \triangleright P) \sqcup\!\sqcup Q + P \sqcup\!\sqcup (L \triangleright Q)\,.$$

Le calcul est le même lorsque P et Q sont des séries et que L est un polynôme de Lie (mais alors $\delta_L^{\mathrm{right}}, \delta_L^{\mathrm{left}}$ ne sont plus localement nilpotentes).

Pour montrer que $\delta_L^{\mathrm{right}}, \delta_L^{\mathrm{left}}$ sont localement nilpotentes il suffit de remarquer que L est sans terme constant (car primitive) et donc que, pour $P \neq 0$, $deg(\delta_L^{\mathrm{left}}(P)) \leq deg(P) - 1$.
Le dernier point résulte du lemme général suivant

Lemme 9 *Soit* A *une* $\mathbb{Q}$*-algèbre (associative) et* $\phi \in End(\mathrm{A})$ *un endomorphisme localement nilpotent de* A*, c'est à dire*

$$(\forall P \in \mathrm{A})(\exists N \in \mathbb{N})(\phi^N(P) = 0)$$

alors

1. *La famille* $((t\phi)^n/n!)_{n\geq 0}$ *est sommable*[15] *dans* $End(\mathrm{A})$ *et sa somme* $\exp(t\phi)$ *est un groupe à un paramètre de* $GL(\mathrm{A})$
2. *Si, de plus,* $\phi \in \mathfrak{Der}(\mathrm{A})$ *les exponentielles* $\exp(t\phi)$ *sont des automorphismes de* A.

□

Nous pouvons voir que

$$\begin{aligned}
&\delta_{x_0}^{\mathrm{left}}(\mathbb{C}\langle X\rangle) = \mathbb{C}\langle X\rangle; \delta_{x_0}^{\mathrm{left}}(\mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_0\rangle\rangle) = \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_0\rangle\rangle \quad \text{et} \quad \delta_{x_0}^{\mathrm{left}}(\mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_1\rangle\rangle) = 0. \\
&\delta_{x_1}^{\mathrm{left}}(\mathbb{C}\langle X\rangle) = \mathbb{C}\langle X\rangle; \delta_{x_1}^{\mathrm{left}}(\mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_1\rangle\rangle) = \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_1\rangle\rangle \quad \text{et} \quad \delta_{x_1}^{\mathrm{left}}(\mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_0\rangle\rangle) = 0\,.
\end{aligned}$$

Ces équations impliquent que l'algèbre $\mathbb{C}\langle X\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_0\rangle\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_1\rangle\rangle$ est fermée par les dérivations $\delta_{x_0}^{\mathrm{left}}, \delta_{x_1}^{\mathrm{left}}$. En particulier, pour tout $x \in X$, ces derivations commutent avec les opérateurs $\delta_{x_0}^{\mathrm{right}}$ et $\delta_{x_1}^{\mathrm{right}}$, dans l'algèbre $\mathbb{C}\langle x\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_0\rangle\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_1\rangle\rangle$. De plus, pour toute série $S \in \mathbb{C}\langle x\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_0\rangle\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_1\rangle\rangle$, nous avons

$$\delta_x^{\mathrm{left}}(S) = \delta_x^{\mathrm{right}}(S)\,.$$

15. Pour la topologie de la convergence simple stationnaire.

Nous avons aussi que

$$(\alpha\delta_{x_0}^{\text{left}}+\beta\delta_{x_1}^{\text{left}})[(a_0x_0+a_1x_1)^*]=(\alpha a_0+\beta a_1)[(a_0x_0+a_1x_1)^*],$$

donc la famille $\{(a_0x_0+a_1x_1)^*\}_{a_0,a_1\in\mathbb{C}}$ est linéairement $\mathbb{C}$-libre sur

$$\mathrm{SP}_{\mathbb{C}}(X)=\bigoplus_{(a_0,a_1)\in\mathbb{C}}\mathbb{C}\{(a_0x_0+a_1x_1)^*\}.$$

Remarque 6 *Notons que les opérateurs $\{\delta_x^{\text{left}}\}_{x\in X}$ sont exactemant les décalages de l'analyse harmonique, ils sont donc définis par*

$$\forall S\in\mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle,\langle\delta_x^{\text{left}}(S)\mid w\rangle=\langle S\mid xw\rangle\ .$$

L'opérateur δ_x^{left} est l'opérateur $S\mapsto x^{(-1)}S$ dans [GDG11b], et aussi le x^{-1} de la théorie de langages et $\circ$ dans [JB88, Reu93].

1.2.3 L'algèbre des séries rationnelles $\mathbb{C}\langle X\rangle ш \mathbb{C}^{\text{rat}}\langle\langle x_0\rangle\rangle ш \mathbb{C}^{\text{rat}}\langle\langle x_1\rangle\rangle$

Nous commencerons cette sous-section par l'algèbre des séries rationnelles sur $\mathbb{C}$ qui est engendrée par l'alphabet unaire $\{x\}$. Notons que $\mathscr{A}=(\mathbb{C}^{\text{rat}}\langle\langle x\rangle\rangle,ш,1_{x^*})$ est équipée de la dérivation $d=\delta_x^{\text{left}}$; et que $e_\alpha=(\alpha x)^*,\alpha\in\mathbb{C}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{A}$, vecteurs propres de la dérivation d. Maintenant, nous utilisons les conditions du lemme 6, nous en déduisons que $((\alpha x)^*)_{\alpha\in\mathbb{C}}$ est $\mathbb{C}[x]$-linéairement libre. Cette remarque implique que

$$B_0=(x^{ш k}ш(\alpha x)^*)_{k\in\mathbb{N},\alpha\in\mathbb{C}}$$

est $\mathbb{C}$-linéairement libre dans $\mathbb{C}^{\text{rat}}\langle\langle x\rangle\rangle$.

Maintenant, nous prouvons que l'ensemble B_0 est une base de l'algèbre $\mathscr{A}$. Quel que soit $\alpha\in C$, notons que $(\alpha x)^*=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha x)^n=(1-\alpha x)^{-1}$. Alors nous obtenons que

$$B_1\cup B_2=\{x^k\}_{k\geq 0}\cup\{((\alpha x)^*)^l\}_{\alpha\in\mathbb{C}^*,l\geq 1}$$

est une base de l'algèbre $\mathbb{C}^{\text{rat}}\langle\langle x\rangle\rangle=\{P/Q\}_{P,Q\in\mathbb{C}[x],Q(0)\neq 0}$ (théorème de Kronecker [Zyg02]). Donc nous avons besoin de démontrer que B_2 peut être engendrée par les éléments de B_0. Cette condition est une conséquence directe des égalités suivantes :

Lemme 10 ([GD16b]) *Soient $n\in\mathbb{N}_+$ et $\alpha\in\mathbb{C}$. Nous avons que*

1. $(x^*)^{ш n}=(nx)^*$.
2. $x^n ш(\alpha x)^*=\dfrac{1}{n!}(x^{ш n}ш(\alpha x)^*),\forall n\in\mathbb{N};\alpha\in\mathbb{C}$.

PREUVE –

1. Nous notons que pour tout $x \in X$, $x^* = \exp_{\sqcup\!\sqcup}(x)$. Alors, nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}, (x^*)^{\sqcup\!\sqcup\, n} = (\exp_{\sqcup\!\sqcup}(x))^{\sqcup\!\sqcup\, n} = \exp_{\sqcup\!\sqcup}(nx) = (nx)^*.$$

2. Nous utilisons $x^n = \frac{1}{n!}x^{\sqcup\!\sqcup\, n}$, alors nous obtenons la condition.

□

Ensuite, nous appliquons le lemme 6 encore une fois avec

$$\mathscr{A} = \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_0\rangle\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_1\rangle\rangle \subset \mathbb{C}\langle\langle x_0, x_1\rangle\rangle$$

et $d = \delta_{x_1}^{\mathrm{left}}$, alors nous obtenons que $(x_0^{\sqcup\!\sqcup\, k} \sqcup\!\sqcup (\alpha x_0)^*)_{k\in\mathbb{N},\alpha\in\mathbb{C}}$ est linéairement libre dans $R = \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_0\rangle\rangle$. De plus, pour S échangeable, nous utilisons la décomposition

$$S = \sum_{p\geq 0, q\geq 0} \langle S \mid x_0^p x_1^q\rangle x_0^{\sqcup\!\sqcup\, p} \sqcup\!\sqcup x_1^{\sqcup\!\sqcup\, q},$$

et notons que $\mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_0\rangle\rangle = \ker(d)$, nous pouvons construire un isomorphisme d'algèbres

$$\mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_0\rangle\rangle \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_1\rangle\rangle \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_0\rangle\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_1\rangle\rangle \subset \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_0, x_1\rangle\rangle\ .$$

C'est-à-dire que la famille $(x_0^{\sqcup\!\sqcup\, k_0} \sqcup\!\sqcup (\alpha_0 x_0)^* \sqcup\!\sqcup x_1^{\sqcup\!\sqcup\, k_1} \sqcup\!\sqcup (\alpha_1 x_1)^*)_{k_i\in\mathbb{N},\alpha_i\in\mathbb{C}}$ est une $\mathbb{C}$-base de l'algèbre $\mathscr{A} = \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_0\rangle\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_1\rangle\rangle$.

Chapitre 2

Applications aux systèmes dynamiques

Soit $\mathbb{K}$ une $\mathbb{C}$-algèbre (commutative, associative et avec unité). Dans ce chapitre, nous considérons les propriétés de l'espace des séries formelles non commutatives $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ qui sont engendrées par l'alphabet X. Dans la suite de notre travail, cet espace est équipé d'une norme et nous allons étudier les lois convergentes de ses éléments. Ensuite, ces résultats seront aussi valables pour l'ensemble des séries rationnelles $\mathbb{K}^{rat}\langle\langle X\rangle\rangle$ qui est un sous-ensemble de $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$. Enfin, nous appliquerons ces résultats aux équations différentielles non commutatives. En effet, nous donnerons une méthode pour construction de solutions particulières de ces équations par l'algorithme de Picard.

2.1 Propriétés de monoïdes

Définitions

Soit A un anneau commutatif et M un monoïde. Nous noterons [1] $A[M]$ ou $A\langle M\rangle$ l'algèbre de M. L'ensemble des fonctions $M \to A$ est noté par A^M ou $A\langle\langle M\rangle\rangle$. Nous construisons le produit scalaire $\langle . \mid . \rangle$ entre $A\langle\langle M\rangle\rangle$ et $A[M]$, par

$$\langle | \rangle : A\langle\langle M\rangle\rangle \otimes A[M] \to A \; ; \; \langle f \mid g\rangle = \sum_{w\in M} f(m)g(m) \; .$$

Soit alors une fonction $f : M \to A$, on vérifie que la famille $(f(m)m)_{m\in M}$ est sommable [2] et que sa somme est f. Ce qui permet d'écrire $f = \sum_{m\in M} f(m)m$.

1. La même ambiguité existe aussi dans le monde commutatif puisque $A[Z]$ désigne aussi bien l'espace des polynômes d'alphabet Z et, si Z est un monoïde, son algèbre et, si Z est un élément, une extension.
2. Ici, on identifie $m \in M$ avec la fonction caractéristique de $\{m\}$.

Définition 11 *1. Le monoïde M dit (SSA)*[3] *s'il y a une longueur $l : M \to \mathbb{N}$ qui vérifie pour tout*

$$l^{-1}(0) = \{1_M\};\ l(M_+) \subset \mathbb{N}_+,$$
$$\forall u, v \in M, \quad l(uv) \geq l(u) + l(v).$$

2. *Le monoïde M satisfait la condition (D) [Bou06] si seulement si pour tout $w \in M$, le nombre des solutions de $uv = w; u, v \in M$ est fini.*
3. *Le monoïde $M = 1_M + M_+$ est localement fini (ou (LF)) [Eil74] si seulement si pour tout $x \in M_+$, il y a un nombre fini de factorisations*[4] *de $x = x_1 \ldots x_n$ avec $x_j \in M_+$, $j = 1, \ldots, n$.*

Lemme 11 *Soit $M = \{1_M\} \sqcup M_+$ un monoïde. Alors*

$$\text{(D) et (SSA)} \Longleftrightarrow (LF) \tag{2.1}$$

PREUVE – Il est facile de vérifier que

1. M est (D) ssi $\mu_n : (M_+)^n \to M$ (la fonction produit) est à fibres finies (n étant fixé)
2. M est (SSA) ssi $\bigcap_{n \geq 2} Im(\mu_n) = \emptyset$
3. M est (LF) ssi $\mu : (M_+)^* \to M$ est à fibres finies

d'où le résultat. □

Alors nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
(D) \arrow[dr] & & (SSA) \arrow[dl] \\
& + \arrow[d] & \\
& (LF) \arrow[uul, bend left] \arrow[uur, bend right] &
\end{tikzcd}$$

Propriétés des algèbres de monoïdes

Soit $(\mathscr{A}, \mu, 1_{\mathscr{A}}, \varepsilon)$, une k-AAU augmentée[5], on notera $\mathscr{A}_+$ le noyau $ker(\varepsilon)$, comme il est stable par μ, on notera μ_+ la restriction de μ à $\mathscr{A}_+ \times \mathscr{A}_+$. On dira que la loi est modérée si

$$(\forall w \in \mathscr{A}_+)(\exists N)(w \notin Im(\mu_+^N)) ,$$

ce qui équivalent à $\bigcap_{n \geq 1} (\mathscr{A}_+)^n = (0)$.

3. Séparé Sur-Additif
4. À longueur variable, c'est à dire que l'application produit $M_+^* \to M$ est aux fibres finis.
5. ε est un caractère à valeurs dans k.

Proposition 8 *Soit A un anneau commutatif et M un monoïde. On note $\mu : A[M] \otimes_A A[M] \to A[M]$, la multiplication de $A[M]$. Nous avons alors*

1. *μ est dualisable si et seulement si M satisfait la condition (D).*
2. *μ est modérée si et seulement si M est localement fini.*

PREUVE –

1. Si la loi μ est duale, nous avons besoin de prouver que M satisfait la condition (D). En effet, μ est duale, il y a une application $\Delta_\mu : A[M] \to A[M] \otimes_A A[M]$ telle que
$$\forall w, u, v \in M, \langle \Delta_\mu(w) \mid u \otimes_A v\rangle = \langle w \mid \mu(u,v)\rangle.$$
D'un autre côté, pour tout $w \in M$, nous pouvons écrire
$$\Delta_\mu(w) = \sum_{u,v\in M} \langle w \mid \mu(u,v)\rangle u \otimes_A v \in A[M] \otimes_A A[M].$$
donc à support fini ($(u \otimes_A v)_{u,v\in M}$ est une base de $A[M] \otimes_A A[M]$). C'est-à-dire que $\sharp\{(u,v) \in M \otimes M \mid \langle w \mid \mu(u,v)\rangle \neq 0\} = \sharp\{(u,v) \in M \otimes M \mid \langle \Delta_\mu(w) \mid u \otimes_A v\rangle \neq 0\} < +\infty$. Donc l'ensemble des solutions de l'équation $\mu(u,v) = w$ est fini dans M, c'est-à-dire, M satisfait la condition (D).
Inversement, si le nombre des solutions de l'équation $\mu(u,v) = w$, dans M est fini alors nous construisons l'application $\Delta : A[M] \to A[M] \otimes A[M]$ définie par
$$\forall w \in M, \Delta_\mu(w) \quad = \quad \sum_{u,v\in M} \langle w \mid \mu(u,v)\rangle u \otimes v.$$
Nous avons donc aussi que
$$\forall w, u, v \in M, \langle \Delta_\mu(w) \mid u \otimes v\rangle = \langle w \mid \mu(u,v)\rangle.$$
C'est-à-dire que la loi μ est dualisable.
2. Il est facile de vérifier que, pour $N \geq 2$, $Im(\mu_+^{N-1}) = k.(M_+^N)$, d'où le résultat.

□

Si M est localement fini, nous remarquons que la série $S \in A\langle\langle M\rangle\rangle$ est inversible si seulement s'il en est de même pour $\langle S \mid 1_M\rangle$. En effet, si $S \in A\langle\langle M\rangle\rangle$ est inversible alors il n'est pas difficile de prouver que $\langle S \mid 1_M\rangle$ l'est aussi. Maintenant, nous supposons que $\langle S \mid 1_M\rangle$ est inversible, c'est-à-dire que l'on peut écrire
$$S = \langle S \mid 1_M\rangle(1_M - T),$$
où $\langle T \mid 1_M\rangle = 0$. Nous construisons la série
$$P = (\sum_{n\geq 0} T^n)\langle S \mid 1_M\rangle)^{-1}.$$
Alors nous pouvons vérifier que $SP = PS = 1_M$. Donc S est inversible.

Nous notons $\mathscr{T} = \{S \in A\langle\langle S\rangle\rangle \mid \langle S \mid 1_M\rangle = 1_A\}$. Donc, en vertu de ce qui précède, $\mathscr{T}$ est un groupe appellé groupe de Magnus [Bou06] de $A\langle\langle M\rangle\rangle$. Donc $\mathscr{T}$ est un groupe appellé groupe de Magnus [Bou06] de $A\langle\langle M\rangle\rangle$.

Remarque 7 *Si A est une $\mathbb{Q}$-algèbre alors le groupe de Magnus de $A\langle\langle M\rangle\rangle$ est un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est l'espace des séries sans terme constant.*

2.2 Équations différentielles dans $A\langle\langle M\rangle\rangle$

Rappelons (voir la définition 7) que, dans un anneau A, une dérivation $d : A \to d(A)$ est un morphisme de groupes additifs vérifiant la formule de Leibniz

$$\forall a, b \in A, \qquad d(ab) = d(a)b + ad(b).$$

On dit aussi que (A, d) est un anneau différentiel. En particulier, si A est commutatif, nous dirons que (A, d) est un anneau différentiel commutatif.

Soit (A, d) un anneau différentiel commutatif. Nous étendons d aux séries de $A\langle\langle M\rangle\rangle$ par

$$\mathbf{d}(S) = \sum_{m \in M} d(\langle S \mid m\rangle)m.$$

Si M satisfait la condition (D) alors $(A\langle\langle M\rangle\rangle, \mathbf{d})$ est aussi un anneau différentiel.

Ensuite, soit $T \in A_+\langle\langle M\rangle\rangle$. Nous considérons l'équation différentielle

$$\mathbf{d}(S) \quad = \quad TS;\ \langle S \mid 1_M\rangle = 1_A, \tag{2.2}$$

ainsi que la même équation sans condition sur $\langle S \mid 1_M\rangle$:

$$\mathbf{d}(S) = TS. \tag{2.3}$$

Maintenant, l'anneau différentiel (A, d) est censé posséder une intégrale, c'est-à-dire, une section de la dérivée d, notée par $\int \in End_{\mathbb{Z}}(A)$. C'est à dire que

$$d \circ \int = Id_A \in End_{\mathbb{Z}}(A).$$

L'opérateur $\int$ est, comme d, aussitôt étendu terme à terme aux séries (on continuera à la noter $\int$) pour construire une section de $\mathbf{d}$ sur $A\langle\langle M\rangle\rangle$. On se place toujours dans l'hypothèse où M est localement fini, alors la suite

$$S_0 = 1_M; S_{n+1} = 1_M + \int (TS_n),$$

converge simplement vers une série S_{Pic} qui est une solution de l'équation (2.2).

Donc nous pouvons construire l'ensemble des solutions des équations différentielles (2.2) et (2.3).

Théorème 5 (G-H-M, 2016) *(Orbites de solutions)*

1. *L'ensemble des solutions de l'équation* (2.3) *est*
$$\mathscr{S} = S_{Pic}.G, \quad \textit{(une orbite à droite par un monoïde)}$$
où $const(A) = \ker(d)$ *et* G *est le monoide* $const(A)\langle\langle M\rangle\rangle$.
2. *L'ensemble des solutions inversibles de l'équation* (2.3) *est*
$$\mathscr{S} = S_{Pic}.G_{\times}, \quad \textit{(une orbite à droite par un groupe)}$$
où $G_{\times}$ *est le groupe multiplicatif* $const(A)\langle\langle M\rangle\rangle^{\times}$.
3. *L'ensemble des solutions de l'équation* (2.2) *est*
$$\mathscr{S} = S_{Pic}.G_1, \quad \textit{(une orbite à droite par un groupe)}$$
où G_1 *est le sous-groupe de* $G_{\times}$ *formé des séries* S *telles que* $\langle S \mid 1_M\rangle = 1_A$.

PREUVE – Soit $S = S_{Pic}g$ où $g \in G$. Nous pouvons démontrer facilement que
$$\mathbf{d}(S) = \mathbf{d}(S_{Pic}g) = \mathbf{d}(S_{Pic})g + S_{Pic}\mathbf{d}(g) = TS_{Pic}g = TS.$$
Donc $S = S_{Pic}g$ est une solution de l'équation (2.3), donc $S_{Pic}.G$ est un sous-ensemble de l'ensemble des solutions de (2.3).

Montrons maintenant la réciproque : supposons que S soit une solution de l'équation (2.3) et formons $g = S_{Pic}^{-1}S$, nous avons
$$\begin{aligned}\mathbf{d}(g) &= \mathbf{d}(S_{Pic}^{-1}S) = \mathbf{d}(S_{Pic}^{-1})S + S_{Pic}^{-1}\mathbf{d}(S)\\ &= -S_{Pic}^{-1}\mathbf{d}(S_{Pic})S_{Pic}^{-1}S + S_{Pic}^{-1}\mathbf{d}(S) - S_{Pic}^{-1}TS_{Pic}S_{Pic}^{-1}S + S_{Pic}^{-1}TS = 0\end{aligned} \tag{2.4}$$
donc $g \in const(A)\langle\langle M\rangle\rangle$ et $S = S_{Pic}.g$.

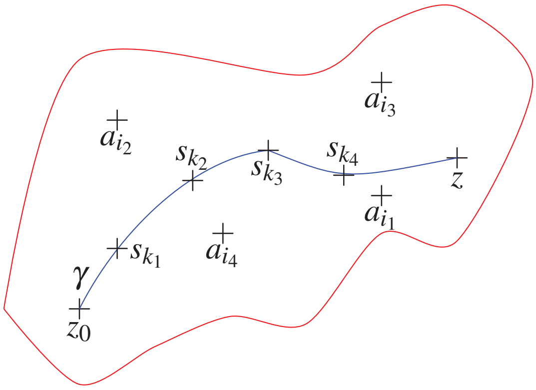
Supposons maintenant que S soit une solution de l'équation (2.2), alors, elle est aussi est une solution de l'équation (2.3) et donc $S = S_{Pic}.g,\ g \in const(A)\langle\langle M\rangle\rangle$ et g est nécessairement inversible. La réciproque est une simple vérification par calcul direct.

La démonstration du dernier point se fait en remarquant que la forme "terme constant" est un caractère. □

Ensuite, nous appliquons le théorème 2.2 aux domaine complexe. Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$.

Soit $\{a_i\}_{i\in I}$ une famille de nombres complexes distincts et distincts de z_0 dans Ω.

Définition 12 ([Che77, Den12])
$$L(a_{i_0},\dots,a_{i_n} \mid z_0 \rightsquigarrow^{\gamma} z) = \int_{z_0}^{z}\int_{z_0}^{s_n}\dots\int_{z_0}^{s_1} \frac{ds_0}{s_0 - a_{i_0}}\dots\frac{ds_n}{s_n - a_{i_n}},$$
où $s_1,\dots,s_n$ *sont choisis sur une courbe* γ *de* z_0 *à* z *(tracée dans* $\mathbb{C}\setminus\{a_i\}_{i\in I}$*).*



On peut reprendre plusieurs fois une forme différentielle donnée. Donc, l'idée est de coder par des mots ces intégrales itérées. On donne une lettre par point $x_i \to a_i$. Ainsi, L devient fonction d'un mot et d'un chemin. On montre facilement que la valeur de L ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin dans $\mathbb{C} \setminus \{a_i\}_{i\in I}$. Autrement dit si $z_0 \overset{\gamma_i}{\rightsquigarrow} z$; $i = 1,2$ sont homotopes

$$L(w|z_0 \overset{\gamma_1}{\rightsquigarrow} z) = L(w|z_0 \overset{\gamma_2}{\rightsquigarrow} z) \ .$$

En ce qui concerne la dépendance par rapport aux mots, on considère la série $S(L,\gamma) = \sum_{w\in X} L(w|\gamma)w$ où $X = \{x_i\}$ est l'alphabet des singularités. Si Ω est simplement connexe (et connexe), la valeur de L ne dépend que de z_0 et z, on la note $\alpha_{z_0}^{z}(w)$ et on considère $S(z) = \sum_{w\in X} \alpha_{z_0}^{z}(w)\, w$.

Alors nous obtenons que S est solution de l'équation différentielle (Ω simplement connexe)

$$\mathbf{d}(S(z)) = M(z)S(z) \text{ avec } M(z) = \sum_{x_i\in X} \frac{1}{z-a_i} x_i.$$

Ce qui rentre dans le cadre de l'équation (2.3) avec $T \in \mathscr{H}(\Omega)_+\langle\langle X\rangle\rangle$. Le théorème suivant se place dans ce cadre (Ω est supposé connexe)

Théorème 6 (G-M-H,2016) *(Solutions tracées sur des groupes (de Lie)) On considère l'équation*

$$\mathbf{d}(S) = TS \ ; \ T \in \mathscr{H}(\Omega)_+\langle\langle X\rangle\rangle. \tag{2.5}$$

i) Le terme constant d'une solution de (2.5) *est constant sur* Ω. *En particulier si une solution est inversible en un point, elle l'est partout.*

ii) Si T *est primitive* ($\Delta_{\sqcup\!\sqcup}(T) = T \otimes 1 + 1 \otimes T$) *et qu'une solution* S *est de type groupe en un point, alors elle est de type groupe partout.*

iii) Inversement si $S(z)$ *est de type groupe en tout point (et différentiable terme à terme) alors* S *est solution d'une équation de type* (2.5) *avec multiplicateur* T *primitif.*

PREUVE –

i) Supposons que S soit une solution de l'équation (2.5) alors

$$d(\varepsilon(S)) = \varepsilon(\mathbf{d}(S)) = \varepsilon(TS) = \varepsilon(T)\varepsilon(S) = 0$$

donc $\varepsilon(S) = \langle S \mid 1_M \rangle$ est une fonction constante (Ω est connexe).
La deuxième condition est un corollaire direct de la première condition parce que S est inversible si seulement si $\langle S \mid 1_{X^*} \rangle$ l'est aussi.

ii) Dans le cas où T est primitive, on a, avec $M = X^* \otimes X^*$,

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(\Delta_{\sqcup\sqcup}(S)) &= \Delta_{\sqcup\sqcup}(\mathbf{d}(S)) = \Delta_{\sqcup\sqcup}(TS) = \Delta_{\sqcup\sqcup}(T)\Delta_{\sqcup\sqcup}(S) \\ &= (T \otimes 1_{X^*} + 1_{X^*} \otimes T)\Delta_{\sqcup\sqcup}(S) \\ \mathbf{d}(S \otimes S) &= \mathbf{d}(S) \otimes S + S \otimes \mathbf{d}(S) = (T \otimes 1_{X^*} + 1_{X^*} \otimes T)\, S \otimes S\, . \end{aligned}$$

Les deux séries $\Delta_{\sqcup\sqcup}(S)$ et $S \otimes S$ sont donc solutions de la même équation différentielle. Comme $S \otimes S$ est inversible, il résulte du théorème (où S_{Pic} est remplacée par $S \otimes S$, mais le raisonnement est le même) que

$$\Delta_{\sqcup\sqcup}(S) = (S \otimes S)g \tag{2.6}$$

où $g \in \mathbb{C}\langle\langle X^* \otimes X^* \rangle\rangle$. Puisque S est de type groupe en un point (disons $z_0 \in \Omega$), on a, par évaluation

$$(S \otimes S)[z_0] = S[z_0] \otimes S[z_0] = \Delta_{\sqcup\sqcup}(S[z_0]) = \Delta_{\sqcup\sqcup}(S)[z_0] = (S \otimes S)[z_0]g \tag{2.7}$$

d'où $g = 1_{X^* \otimes X^*}$ et le résultat.

iii) Posons, pour une telle série, $T = \mathbf{d}(S)S^{-1}$. On a

$$\begin{aligned} \Delta_{\sqcup\sqcup}(T) &= \Delta_{\sqcup\sqcup}(\mathbf{d}(S))\Delta_{\sqcup\sqcup}(S^{-1}) = \mathbf{d}(\Delta_{\sqcup\sqcup}(S))(\Delta_{\sqcup\sqcup}(S))^{-1} \\ &= \mathbf{d}(S \otimes S)(S^{-1} \otimes S^{-1}) = (\mathbf{d}(S) \otimes S + S \otimes \mathbf{d}(S))(S^{-1} \otimes S^{-1}) \\ &= (T \otimes 1_{X^*} + 1_{X^*} \otimes T) \end{aligned}$$

ce qui établit le résultat puisque, par construction, $\mathbf{d}(S) = TS$.

□

Remarque 8 *Pour le point (iii), le multiplicateur peut être très compliqué et non polynomial. En voici un exemple.*
Soit $X = \{x_0, x_1\}$ un alphabet. En prenant l'exemple de $T(z) = L(z)e^{-x_0 log(z)}$, on voit que, si on veut un multiplicateur à gauche, on a $T' = (M + TMT^{-1})T$ ce qui donne un multiplicateur qui n'est pas un polynôme. Si on admet les deux côtés, on a une équation

$$T' = (\frac{x_0}{z} + \frac{x_1}{1-z})T + T(\frac{x_0}{z})$$

et on va considérer des relations du type

$$\mathbf{d}(S) = M_1 S + S M_2 \ ; \ M_i \in A_+\langle\langle X \rangle\rangle$$

Plus précisément, on a le résultat suivant.

Proposition 9 *On considère l'équation différentielle suivante (Ω est toujours simplement connexe)*

$$\mathbf{d}(S) = M_1 S + S M_2 \ ; \ M_i \in A_+\langle\langle X \rangle\rangle \tag{2.8}$$

alors

1. *La suite*

$$S_0 = 1_M ; S_{n+1} = 1_M + \int (M_1 S_n + S_n M_2),$$

   converge simplement vers une série S_{Pic} qui est une solution inversible de l'équation (2.8).
2. *Si S est une solution de l'équation* (2.8), *la fonction $\langle S(z) \mid 1_{X^*} \rangle$ est constante.*
3. *Si deux solutions coincident en un point de Ω alors elles sont égales.*
4. *Si S_1 est une solution de $\mathbf{d}(S) = M_1 S$ et S_2 une solution de $\mathbf{d}(S) = S M_2$ alors $S = S_1 S_2$ est une solution de* (2.8) *et toute solution de* (2.8) *est obtenue de cette manière.*
5. *Si les deux multiplicateurs $M_i, i = 1, 2$ sont primitifs et que S est de type groupe en un point alors elle est de type groupe partout.*

PREUVE – 1-2-3) On utilise des méthodes similaires à celles employées dans les preuves de (2.2) (6).
4) Si S_1 est une solution de $\mathbf{d}(S) = M_1 S$ et S_2 une solution de $\mathbf{d}(S) = S M_2$ alors le fait que $S = S_1 S_2$ soit une solution de (2.8) se vérifie par calcul direct. Inversement soit S une solution de (2.8). On prend une solution (S_1) inversible de $\mathbf{d}(S) = M_1 S$ (par exemple celle donnée par l'algorithme de Picard) et on forme $T = S_1^{-1} S$ alors

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(T) &= -S_1^{-1} \mathbf{d}(S_1) S_1^{-1} S + S_1^{-1} \mathbf{d}(S) = -S_1^{-1} M_1 S + S_1^{-1}(M_1 S + S M_2) \\ &= T M_2 \end{aligned}$$

d'où le résultat.
5) Soit $z_0 \in \Omega$ le point où S, solution de (2.8), est de type groupe. Le raisonnement précédent montre que S peut s'écrire $S_1 S_2$ où S_1 est une solution de $\mathbf{d}(S) = M_1 S$ de type groupe en z_0 (on applique l'algorithme de Picard par intégration de borne inférieure z_0). Toujours d'après raisonnement le précédent $T = S_1^{-1} S$ est solution de $\mathbf{d}(T) = T M_2$ et, comme M_2 est primitif et que $T[z_0]$ est de type groupe, alors T est de type groupe partout. Ceci entraine que $S = S_1 T$ est de type groupe partout.
□

Voyons maintenant un exemple de résolution avec second membre. Rappelons que

$$L(z) = \sum_{w \in X^*} \mathrm{Li}_w(z)\, w \ .$$

Et, soit T la série L restreinte aux fonctions de Jonquière

$$T = L \odot x_0^* x_1 = \sum_{n \geq 0} \langle L \mid x_0^n x_1 \rangle x_0^n \ .$$

T vérifie le système suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbf{d}(T) & = & \dfrac{x_0}{z}T + \dfrac{1}{1-z} \\ \langle T \mid 1_{X^*}\rangle & = & -log(1-z) \end{array}\right. \tag{2.9}$$

qui est du type

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbf{d}(S) & = & MS + \phi' \ ; \ M \in A_+\langle\langle X\rangle\rangle \\ \langle S \mid 1_{X^*}\rangle & = & \phi \end{array}\right. . \tag{2.10}$$

Nous allons montrer comment on résout les systèmes (2.10).

Méthode

1. On résout l'équation homogène $\mathbf{d}(S) = MS$ et on choisit une solution inversible (par exemple avec l'algorithme de Picard), soit S_0 cette solution.
2. (Variation des constantes) Si S est une solution, on pose $S = S_0 H$ (ce qui est toujours possible $H = S_0^{-1}S$). On différentie

$$MS + \phi' = \mathbf{d}(S) = MS_0H + S_0\mathbf{d}(H) = MS + S_0\mathbf{d}(H)$$

   d'où $\mathbf{d}(H) = S_0^{-1}\phi'$ et le choix de $H = \int S_0^{-1}\phi'$ convient (il suffit ici de trouver une solution particulière de l'équation inhomogène).
3. La solution générale de (2.10) est alors $S = S_0G + S_0H$ avec $G \in \mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle$.

On résout $\mathbf{d}(T) = \dfrac{x_0}{z}T$, comme il n'y a qu'une variable, on a la solution $T_0 = e^{x_0 log(z)}$ et la solution générale de (2.9) est

$$e^{x_0 log(z)}\Big(\big(\int_{z_0}^{z} \frac{e^{-x_0 log(s)}}{1-s} ds\big) + G(x_0)\Big)$$

où $G(x_0)$ est une série constante. Mais, comme $\lim_{z\to 0} T(z) = 0$, on a

$$T(z) = \sum_{n\geq 0} \langle L \mid x_0^n x_1\rangle x_0^n = e^{x_0 log(z)}\Big(\int_0^z \frac{e^{-x_0 log(s)}}{1-s} ds\Big) . \tag{2.11}$$

De l'équation (2.11), on déduit

Proposition 10 (G-M-H, 2016) *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *nous avons*

$$Li_{k+1}(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^{k+1}} = \langle T \mid x_0^k\rangle = \sum_{p+q=k} \frac{log(z)^p}{p!} \int_0^z \frac{(-log(s))^q}{(1-s)q!} ds . \tag{2.12}$$

PREUVE –

Nous utilisons l'introduction pour démontrer la formule (2.12).

Tout d'abord, remarquons que la formule (2.12) est vraie pour $k=0$ parce que

$$\mathrm{Li}_1(z) = \int_0^z \frac{ds}{1-s} = \sum_{p+q=0} \frac{log(z)^p}{p!} \int_0^z \frac{(-log(s)^q}{(1-s)q!} ds \,.$$

Supposons maintenant que la formule (2.12) est vraie pour $k \geq 0$ et prouvons qu'elle est aussi vraie pour $k+1$.

Notons que si $f' = g'$ alors $f = g + const$. Soit

$$K_{n+1}(z) = \sum_{p=0}^{n} \frac{log(z)^p}{p!} \int_0^z \frac{(-log(s)^{n-p}}{(1-s)(n-p)!} ds \,.$$

Alors

$$\begin{aligned} K'_{n+1}(z) &= \sum_{p=0}^{n-1} \frac{log(z)^{p-1}}{(p-1)!z} \int_0^z \frac{(-log(s)^{n-p}}{(1-s)(n-p)!} ds + \sum_{p=0}^{n} \frac{log(z)^p}{p!} \frac{(-log(z)^{n-p}}{(1-z)(n-p)!} \\ &= \frac{Li_n(z)}{z} + \frac{\log(z)^n}{1-z} \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^{n-p}}{(n-p)!p!} \\ &= \frac{Li_n(z)}{z} + \frac{\log(z)^n}{n!(1-z)} \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} = \frac{Li_n(z)}{z} \,. \end{aligned}$$

Donc $K_{n+1}(z) = \mathrm{Li}_{n+1}(z) + const$.

Faisons tendre z vers 0, et notons que $\lim_{z\to 0} (z \log^n z) = 0$ pour tous $n \in \mathbb{N}$. Nous obtenons $const = 0$. La formule (2.12) est donc prouvée. □

Chapitre 3

Polylogarithmes et sommes harmoniques aux multiindices non positifs

Dans ce chapitre, nous étudions le problème des sommes harmoniques et des polylogarithmes aux indices non positifs [1]. Nous étendons les définitions des polynômes de Bernoulli, des polynômes Eulériens et de la formule de Faulhaber . Ensuite, nous donnerons des formules combinatoires pour les sommes harmoniques et les polylogarithmes aux indices non positifs et leur structure. Nos techniques sont basées sur la combinatoire des séries formelles non commutatives dans qui sont des caractères de l'algèbre de Hopf de φ-shuffle. Notre travail dans ce chapitre donnera aussi un processus global pour renormaliser les polyzetas divergents.

3.1 Aspects combinatoires de certaines algèbres de Hopf des sommes harmoniques et des polylogarithmes aux multiindices entiers non positifs

Dans cette section, nous étudions la combinatoire des sommes harmoniques et des polylogarithmes aux multiindices entiers non positifs. Le multiindice est codé par un mot w dans Y_0^* où $Y_0 := \{y_s\}_{s\geq 0}$ est un alphabet (infini). Notons que le produit est la concaténation et $1_{Y_0^*}$ est l'unité du monoïde Y_0^* .

1. C'est à dire négatifs au sens large.

3.1.1 Aspects combinatoires de certaines algèbres de Hopf des sommes harmoniques aux multiindices entiers non positifs

Tout d'abord, nous notons que la formule de Faulhaber exprime la somme harmonique $\mathrm{H}^-_{y_k}(N)$ comme un polynôme de degré $k+1$ en N pour tout $y_k \in Y_0$. De plus, ce polynôme s'exprime lui-même en fonction des polynômes de Bernoulli.

Dans le cas général, pour tout $w \in Y_0^*$, nous considérerons une classe de polynômes qui sont définis de la manière suivante.

Définition 13 *Soient $r \geq 1, z \in \mathbb{C}$ et $w = y_{s_1} \ldots y_{s_r} \in Y_0^+$. Le polynôme $B_w(z)$ est défini par*

$$\begin{aligned} & B_{y_{s_1} \ldots y_{s_r}}(0) = b_{y_{s_1} \ldots y_{s_r}}, \\ et \quad & B_{1_{Y_0^*}}(z) = 1\ ; B_{y_{s_1} \ldots y_{s_r}}(z+1) = B_{y_{s_1} \ldots y_{s_r}}(z) + s_1 z^{s_1-1} B_{y_{s_2} \ldots y_{s_r}}(z)\ . \end{aligned}$$

Nous avons défini aussi que,

$$\begin{aligned} & b'_{y_{n_k}} := b_{y_{n_k}}, \\ et \quad & b'_{y_{n_k} \ldots y_{n_r}} := b_{y_{n_k} \ldots y_{n_r}} - \sum_{j=0}^{r-1-k} b_{n_{y_{k+j+1}} \ldots y_{n_r}} b'_{y_{n_k} \ldots y_{n_{k+j}}}\ . \end{aligned}$$

Il n'est pas difficile pour vérifier que pour tout $r \geq 1$ et $s_1 \neq 1$ alors

$$B_{y_{s_1} \ldots y_{s_r}}(0) = B_{y_{s_1} \ldots y_{s_r}}(1) = b_{y_{s_1} \ldots y_{s_r}}\ .$$

Toutefois, les nombres $\{b_w\}_{w \in Y_0^*}$ sont arbitraires. Dans nos travaux, pour tout $y_{s_1} \in Y_0$, nous notons $b_{y_{s_1}} = b_{s_1}$ le s_1-ième nombre de Bernoulli , et donc $B_{y_{s_1}}(z) = B_{s_1}(z)$ est le s_1-ième polynôme de Bernoulli .

Maintenant, supposons que les nombres $\{b_w\}_{w \in Y_0^*}$ ont été choisis.

Proposition 11 ([GD16a]) *Quel que soit $w = y_{n_1} \ldots y_{n_r} \in Y^*$, nous notons*

$$\beta_w(z) := B_w(z) - b_w\ .$$

Nous avons alors

$$\forall N > 0, \qquad \beta_{y_{n_1} \ldots y_{n_r}}(N+1) = \sum_{k=1}^{r} (\prod_{i=1}^{k} n_i) b_{y_{n_{k+1}} \ldots y_{n_r}} \mathrm{H}^-_{y_{n_1-1} \ldots y_{n_k-1}}(N).$$

PREUVE – Tout d'abord, nous avons

$$\begin{aligned} B_{y_{n_1} \ldots y_{n_r}}(N+1) - B_{y_{n_1} \ldots y_{n_r}}(N) &= n_1 N^{n_1-1} B_{y_{n_2} \ldots y_{n_r}}(N), \\ &\vdots \\ B_{y_{n_1} \ldots y_{n_r}}(2) - b_{y_{n_1} \ldots y_{n_r}} &= n_1 1^{n_1-1} B_{y_{n_2} \ldots y_{n_r}}(1). \end{aligned}$$

Alors nous obtenons

$$\begin{aligned}
\beta_{y_{n_1}\dots y_{n_r}}(N+1) &= n_1 \sum_{k_1=1}^{N} k_1^{n_1-1} B_{y_{n_2}\dots y_{n_r}}(k_1)\\
&= n_1 \sum_{k_1=1}^{N} k_1^{n_1-1} \beta_{y_{n_2}\dots y_{n_r}}(k_1) + n_1 \sum_{k_1=1}^{N} k_1^{n_1-1} b_{y_{n_2}\dots y_{n_r}}\\
&\vdots\\
&= \sum_{k=1}^{r} (\prod_{i=1}^{k} n_i) b_{y_{n_{k+1}}\dots y_{n_r}} \mathrm{H}^-_{y_{n_1-1}\dots y_{n_k-1}}(N)\ .
\end{aligned}$$

□

Maintenant, nous utilisons la proposition 11 pour étudier la combinatoire des sommes harmoniques aux multiindices entiers non positifs . Nous obtenons

Théorème 7 ([GD16a])

1. *Pour tout* $w \in Y_0^*, \mathrm{H}^-_w(N)$ *est un polynôme en* N *de degré* $(w) + |w|$.
2. *Plus précisément, si* $w \in Y^+$*, il existe un polynôme* G^-_w*, de degré* $(w) - 1$*, tel que*
$$\mathrm{H}^-_w(N) = (N+1)N(N-1)\dots(N-|w|+1)\mathrm{G}^-_w(N).$$
3. *Pour tout* $N, k \in \mathbb{N}_+$*, nous avons*
$$N^k = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j+k-1} \binom{k}{j} \mathrm{H}^-_{y_j}(N).$$
4. *Enfin, nous avons (quand* $r = 1$*, ceci implique la formule de Faulhaber) :*
$$\mathrm{H}^-_{y_{n_1}\dots y_{n_r}}(N) = \frac{\beta_{y_{n_1+1}\dots y_{n_r+1}}(N+1) - \sum_{k=1}^{r-1} b'_{y_{n_{k+1}+1}\dots y_{n_r+1}} \beta_{y_{n_1+1}\dots y_{n_k+1}}(N+1)}{\prod_{i=1}^{r}(n_i+1)}.$$

Preuve –

1. Tout d'abord, pour tout $y_n \in Y$ et $w = y_n y_m \in Y_0^*$, en posant
$$p = (w) + |w|,$$
nous obtenons que
$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^-_{y_n}(N) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} b_{y_k} (N+1)^{n+1-k}\ ,\\
\mathrm{H}^-_{y_n y_m}(N) &= \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{p-1-k} \sum_{q=0}^{p-k-l} \frac{b_{y_k} b_{y_l}}{(m+1)(p-k)} \binom{m+1}{k} \binom{p-k}{l} \binom{p-k-l}{q} N^q
\end{aligned}$$

où pour tout $y_k \in Y_0$, b_{y_k} est le k-ième nombre de Bernoulli. Ceci implique que $\mathrm{H}^-_{y_n}$ et $\mathrm{H}^-_{y_n y_m}$ sont des polynômes de degrés $n+1$ et $n+m+2$, respectivement. Ensuite, nous notons que pour tout $s \in \mathbb{N}$, $w \in Y_0^*$ et $N \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\mathrm{H}^-_{y_s w}(N+1) - \mathrm{H}^-_{y_s w}(N) = N^s\, \mathrm{H}^-_w(N) .$$

C'est-à-dire que les sommes harmoniques aux indices entiers non positifs sont les solutions de l'équation aux différences

$$f(N+1) - f(N) = N^s\, \mathrm{H}^-_w(N) .$$

Lemme 12 ([GD16a]) *Soit l'équation aux différences suivante*

$$f(x+1) - f(x) = P(x) , \tag{3.1}$$

où A *est une* $\mathbb{Q}$*-ACAU,* $P \in \mathrm{A}[x]$ *et* $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ *est une fonction arithmétique (c'est-à-dire que* f *est définie sur* $\mathbb{N}$ *et à valeurs des* $\mathbb{C}$*). On exprime* P *sur la base binomiale*

$$P(x) = \sum_{j=0}^{d} a_j \binom{x}{j} .$$

Nous avons alors,

(a) l'unique solution f_0 *telle que* $f_0(x) = 0$ *de l'équation* (3.1) *est*

$$f_0(x) = \sum_{j=0}^{d} a_j \binom{x}{j+1}$$

et toutes les solutions de l'équation (3.1) *sont des polynômes.*

(b) si $a_d x^d$ *est le terme dominant d'une solution non nulle* P*, chaque solution de l'équation a comme terme dominant* $a_d \dfrac{x^{d+1}}{(d+1)}$*.*

PREUVE – Nous démontrons maintenant le lemme 12. En fait, il suffit de prouver la première propriété, les autres conditions en seront des conséquences.

(a) Soit

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!} .$$

C'est un polynôme de degré k dans $\mathbb{Q}$ dont le cofficient dominant, dans $\mathbb{Q}$, est inversible. Il en résulte que la famille $\{\binom{x}{k}\}_{k\geq 0}$ est une base de $\mathbb{Q}$-algèbre $A[x]$ des polynômes à cofficients dans A. Alors pour tout $P \in A[x]$, nous pouvons écrire P comme une A-combinaison linéaire de l'ensemble $\{\binom{x}{k}\}_{k\geq 0}$.

(b) Ensuite, si g_0 est la solution générale de l'équation $f(x+1) - f(x) = 0$ et g_1 est une solution de l'équation (3.1), alors $g_0 + g_1$ est la solution générale de l'équation (3.1). Tout d'abord, nous trouvons facilement que la solution générale sur $A[x]$ de l'équation

$$f(x+1)-f(x)=0,$$

est constante. Il suffit donc de chercher une solution de l'équation (3.1). Supposons que

$$P(x)=\sum_{j=0}^{d} a_j \binom{x}{j} \in A[x],$$

nous avons alors

$$P(x)=\sum_{j=0}^{d} a_j \binom{x}{j} = \sum_{j=0}^{d} a_j \left[\binom{x+1}{j+1} - \binom{x}{j+1}\right].$$

C'est-à-dire que le polynôme

$$f_0(x)=\sum_{j=0}^{d} a_j \binom{x}{j+1},$$

est une solution de l'équation (3.1), et donc toutes les solutions de l'équation (3.1) sont de la forme $f=f_0+C, C\in A$. Le lemme est démontré.

□

En utilisant le lemme 12, nous obtenons la première condition du théorèm 7.

2. Pour tout $w=y_{s_1}\ldots y_{s_r}\in Y_0^+$, nous pouvons voir que $\{0,\ldots,r-1\}$ sont les solutions de l'équation $\mathrm{H}^-_w(N)=0$. Si, maintenant, $u=y_s w\in Y^+$, nous remarquons que

$$\mathrm{H}^-_{y_s w}(N+1)-\mathrm{H}^-_{y_s w}(N)=(N+1)^s \mathrm{H}^-_w(N)\ .$$

Nous en concluons que -1 est une racine de l'équation $\mathrm{H}^-_u=0$.

3. Pour cette condition, nous notons que

$$M=\left(m_{i,j}\right)_{j\geq 1}^{i\geq 0}\in Mat_\infty(\mathbb{Q}),$$

est la matrice qui est définie par

$$m_{i,j}=\begin{cases} 0, & \text{si} \quad i<j-1,\\ b_i, & \text{si} \quad j=1, i\neq 1\\ \dfrac{1}{2}, & \text{si} \quad j=i=1\\ \dfrac{i}{j}m_{i-1,j-1}, & \text{si} \quad i>j-1>0.\end{cases} \tag{3.2}$$

Il résulte alors de la formule de Faulhaber que nous avons que

$$\left(\mathrm{H}^-_{y_i}(N)\right)^t_{i\geq 0}=M\left(N^j\right)^t_{j\geq 1}.$$

Ceci entraîne la troisième condition.

4. Maintenant, nous remarquons que la matrice $D=(d_{ij})\in Mat_r(\mathbb{N}), r\geq 1$, définie par

$$d_{i,j}=\begin{cases} 0, & \text{si} \quad 1\leq i<j\leq r,\\ n_1\ldots n_i, & \text{si} \quad 1\leq i=j\leq r,\\ n_1\ldots n_j b_{y_{n_{j+1}}\ldots y_{n_i}}, & \text{si} \quad 1\leq j<i\leq r,\end{cases}$$

est inversible. Sa matrice inverse $D^{-1}=(v_{i,j})$ est alors déterminée par

$$v_{i,j}=\begin{cases} 0, & \text{si} \quad 1\leq i<j\leq r,\\ \dfrac{1}{(n_1\ldots n_i)}, & \text{si} \quad 1\leq i=j\leq r,\\ \dfrac{-b'_{y_{n_{j+1}}\ldots y_{n_i}}}{(n_1\ldots n_i)}, & \text{si} \quad 1\leq j<i\leq r.\end{cases}$$

Notons que

$$H^-:=\left(\mathrm{H}^-_{y_{n_1-1}} \quad \ldots \quad \mathrm{H}^-_{y_{n_1-1}\ldots y_{n_r-1}}\right)^t \quad \text{et} \quad \beta:=\left(\beta_{y_{n_1}} \quad \ldots \quad \beta_{y_{n_1}\ldots y_{n_r}}\right)^t.$$

Donc, $H^-(N)=D^{-1}\beta(N+1)$. Et ainsi, nous obtenons la dernière condition.

□

Exemple 14 *Nous avons les exemples suivants de sommes harmoniques aux multiindices entiers non positifs.*

– *Pour* $r=1$*,*

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^-_{y_0}(N) &= N,\\ \mathrm{H}^-_{y_1}(N) &= N(N+1)/2,\\ \mathrm{H}^-_{y_2}(N) &= N(N+1)(2N+1)/6,\\ \mathrm{H}^-_{y_3}(N) &= N^2(N+1)^2/4,. \end{aligned}$$

– *Pour* $r=2$*,*

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^-_{y_0^2}(N) &= N(N-1)/2,\\ \mathrm{H}^-_{y_1^2}(N) &= N(N-1)(3N+2)(N+1)/24,\\ \mathrm{H}^-_{y_1y_2}(N) &= N(N-1)(N+1)(8N^2+5N-2)/120,\\ \mathrm{H}^-_{y_2y_1}(N) &= N(N-1)(N+1)(12N^2+15N+2)/120. \end{aligned}$$

– *Pour* $r=3$*,*

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^-_{y_0^3}(N) &= N(N-1)(N-2)/6,\\ \mathrm{H}^-_{y_1^3}(N) &= N^2(N-1)(N-2)(N+1)^2/48,\\ \mathrm{H}^-_{y_1^2y_2}(N) &= N(N-1)(N-2)(N+1)(48N^3+19N^2-61N-24)/5040,\\ \mathrm{H}^-_{y_1^2y_3}(N) &= N(N-1)(N-2)(N+1)(7N^2+3N-2)(5N^2-3N-12)/6720. \end{aligned}$$

D'autre part, en partant de la formule de Faulhaber et en procédant par récurrence sur la longueur des mots, nous obtenons une formule pour les sommes harmoniques aux multiindices entiers non positifs

Théorème 8 ([GD16a]) *Pour tout $w = y_{s_1} \dots y_{s_r} \in Y^*$, nous avons que*

$$\mathrm{H}_w^-(N) = \sum_{k_r=0}^{s_r} \dots \sum_{k_1=0}^{r-1+\sum_{i=1}^r s_i - \sum_{i=2}^r k_i} \sum_{k_{r+1}=0}^{r+\sum_{i=1}^r s_i - \sum_{i=1}^r k_i} \frac{\binom{s_r+1}{k_r} \dots \binom{r+\sum_{i=1}^r s_i - \sum_{i=2}^r k_i}{k_1}}{(s_r+1)\dots(r+\sum_{i=1}^r s_i - \sum_{i=2}^r k_i)} \binom{r+\sum_{i=1}^r s_i - \sum_{i=1}^r k_i}{k_{r+1}} (\prod_{i=1}^r b_{y_{k_i}}) N^{k_{r+1}}.$$

Nous savons déjà que les sommes harmoniques aux multiindices entiers non positifs H_w^- sont les polynômes dans $\mathbb{Q}[N]$. Avec $y_s w \in Y_0^*$, nous avons aussi

$$(\mathrm{H}_{y_s w}^-(N+1))' - (\mathrm{H}_{y_s w}^-(N))' = s(N+1)^{s-1}\mathrm{H}_w^-(N) + (N+1)^s(\mathrm{H}_w^-(N))' . \quad (3.3)$$

Définition 14 *Soit $Y_0 = \{y_k\}_{k\geq 0}$ un alphabet infini. Soient $r \in \mathbb{N}_+$ et $s_1, \dots, s_r \in \mathbb{N}$. Nous construisons une famille de polynômes $\{T_w(z)\}_{w\in Y_0^*}$ (où $z \in \mathbb{C}$) par*

$$T_{y_{s_1}\dots y_{s_r}}(z) := \frac{d}{dz}\mathrm{H}^-_{y_{s_1}\dots y_{s_r}}(z-1), \quad (3.4)$$

pour tout $y_{s_1}\dots y_{s_r} \in Y_0^*$. En particulier, pour tout $w \in Y_0^*$, nous notons

$$t_w := T_w(0) .$$

Remarque 9 *Il résulte de* (14) *que $\{T_w(z)\}_{w\in Y_0^*}$ (où $z \in \mathbb{C}$) vérifie*

$$\begin{aligned} T_{y_{s_1}\dots y_{s_r}}(N+1) - T_{y_{s_1}\dots y_{s_r}}(N) &= N^{s_1} T_{y_{s_2}\dots y_{s_r}}(N) + s_1 N^{s_1-1}\mathrm{H}^-_{y_{s_2}\dots y_{s_r}}(N-1). \\ &= N^{s_1} T_{y_{s_2}\dots y_{s_r}}(N) + s_1 N^{s_1-1}\int_0^N T_{y_{s_2}\dots y_{s_r}}(t)\,dt . \end{aligned} \quad (3.5)$$

Exemple 15 *Quel que soit $n \geq 0$, nous avons*

$$\int_0^x B_n(z)dz = \frac{B_{n+1}(x) - b_{n+1}}{n+1} = \mathrm{H}_n^-(x-1) .$$

Donc, nous avons

$$B_{y_n}(x) = T_{y_n}(x) = \frac{d}{dx}\mathrm{H}^-_{y_n}(x-1) \quad (3.6)$$

où $B_{y_n}(x) = B_n(x)$ est le n-ième polynôme de Bernoulli.

Exemple 16 *Soit $r = 2$. Nous avons alors*

$$\begin{aligned} T_{y_{s_1}y_{s_2}}(N+1) - T_{y_{s_1}y_{s_2}}(N) &= N^{s_1} T_{y_{s_2}}(N) + s_1 N^{s_1-1}\,\mathrm{H}^-_{y_{s_2}}(N-1)\;. \\ &= N^{s_1} T_{y_{s_2}}(N) + s_1 N^{s_1-1} \int_0^N T_{y_{s_2}}(t)\,dt\;. \end{aligned} \tag{3.7}$$

D'un autre côté, pour tout $y_n y_m \in Y^*$, nous obtenons

$$T_{y_n y_m} = \frac{1}{m+1} \sum_{t=0}^{m} \binom{m+1}{t} b_{y_t} \sum_{k=0}^{m+n+1-t} \binom{m+n+1-t}{k} b_{y_k} N^{m+n+1-t-k}\;.$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} T_{1,3}(N) &= (1/4)N^5 - (9/8)N^4 + (5/3)N^3 - (7/8)N^2 + (1/12)N + 1/60, \\ T_{2,2}(N) &= (1/3)N^5 - (4/3)N^4 + (31/18)N^3 - (3/2)N^2 + (1/36)N + 1/60, \\ T_{2,4}(N) &= (1/5)N^7 - (6/5)N^6 + (38/15)N^5 - (25/12)N^4 \\ &\quad +(13/45)N^3 + (3/10)N^2 - (7/180)N - 1/84\;. \end{aligned}$$

Donc nous avons, avec $t_{y_n y_m}$ définis comme dans la définition 14,

$$\begin{aligned} t_{y_n y_m} &= \sum_{t=0}^{m} \binom{m+1}{t} \binom{m+n+2-t}{1} \frac{b_{y_t} b_{y_{m+n+1-t}}}{(m+1)(m+n+2-t)} \\ &= \frac{1}{m+1} \sum_{t=0}^{m} \binom{m+1}{t} b_{y_t}\, b_{y_{m+n+1-t}}\;. \end{aligned}$$

$n\diagdown m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{42}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$-\frac{5}{66}$
1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$-\frac{1}{84}$	$-\frac{1}{84}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$-\frac{5}{132}$	$-\frac{5}{132}$
2	0	$-\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$-\frac{1}{420}$	$-\frac{1}{84}$	$\frac{1}{140}$	$\frac{1}{60}$	$-\frac{13}{660}$	$-\frac{5}{132}$	$\frac{4309}{60060}$
3	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{420}$	$-\frac{1}{84}$	$\frac{1}{420}$	$\frac{1}{60}$	$-\frac{7}{660}$	$-\frac{5}{132}$	$\frac{2663}{60060}$	$\frac{691}{5460}$
4	0	$\frac{1}{84}$	$-\frac{1}{84}$	$-\frac{1}{420}$	$\frac{1}{60}$	$-\frac{1}{308}$	$-\frac{5}{132}$	$\frac{1457}{60060}$	$\frac{691}{5460}$	$-\frac{1759}{12012}$
5	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{84}$	$-\frac{1}{140}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{308}$	$-\frac{5}{132}$	$\frac{157}{20020}$	$\frac{691}{5460}$	$-\frac{331}{4004}$	$-\frac{7}{12}$

TABLE 3.1 – La valeur de $t_{y_n y_m}$

Notons que pour tout $w \in Y^*$, nous avons $T_w(1) = T_w(0)$. De plus, pour tous les $u, v \in Y_0^*$, nous avons

$$T_{u \boxplus v}(N) = T_u(N) H^-_v(N-1) + H^-_u(N-1) T_v(N).$$

Donc, nous obtenons que

$$t_{u \boxplus v} = t_u \mathrm{H}^-_v(-1) + \mathrm{H}^-_u(-1)\, t_v\;.$$

Et, en particulier, si $u, v \in Y^* \setminus (Y \cup \{1_{Y_0^*}\})$ alors

$$\mathrm{H}_u^-(-1) = \mathrm{H}_v^-(-1) = 0,$$

donc $t_{u \uplus v} = 0$.

Remarque 10 *Pour finir cette sous-section, nous posons $Y_{entier} = \{y_s\}_{s \in \mathbb{Z}}$ (nouvel alphabet). Nous pouvons trouver que l'ensemble des sommes harmoniques $\{\mathrm{H}_w\}_{w \in Y^*_{entier}}$ satisfait le stuffle, c'est-à-dire que, pour tous les $y_s, y_r \in Y_{entier}$, $u, v \in Y^*_{entier}$, nous avons*

$$\mathrm{H}_{y_s u}\mathrm{H}_{y_r v} = \mathrm{H}_{y_s u \uplus y_r v} = \mathrm{H}_{y_s(u \uplus y_r v)} + \mathrm{H}_{y_r(y_s u \uplus v)} + \mathrm{H}_{y_{s+r}(u \uplus v)}$$

où pour tout $w = y_{s_1} \ldots y_{s_r}$ et $N \in \mathbb{N}_+$,

$$\mathrm{H}_{y_{s_1} \ldots y_{s_r}}(N) := \sum_{k_1=1}^{N} \sum_{k_2=1}^{k_1-1} \cdots \sum_{k_r=1}^{k_{r-1}-1} \frac{1}{k_1^{s_1} \ldots k_r^{s_r}} .$$

Par exemple,

$$\mathrm{H}_{y_3}\mathrm{H}_{y_{-4}} = \mathrm{H}_{y_3 y_{-4}} + \mathrm{H}_{y_{-4} y_3} + \mathrm{H}_{y_{-1}}.$$

Notons que pour tout $s_1, s_2 \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\mathrm{H}_{y_{s_1} y_{-s_2}} = \frac{1}{s_2+1} \sum_{k=0}^{s_2} \binom{s_2+1}{k} b_{y_k} \mathrm{H}_{y_{s_1-s_2+k-1}} .$$

Donc,

$$\mathrm{H}_{y_3}\mathrm{H}_{y_{-4}} = \mathrm{H}_{y_{-4} y_3} + \mathrm{H}_{y_{-1}} + \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{4} \binom{5}{k} b_{y_k} \mathrm{H}_{y_{k-2}} ,$$

soit

$$\mathrm{H}_{y_{-4} y_3} = \mathrm{H}_{y_3}\mathrm{H}_{y_{-4}} - \mathrm{H}_{y_{-1}} - \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{4} \binom{5}{k} b_{y_k} \mathrm{H}_{y_{k-2}} .$$

3.1.2 Aspects combinatoires de certaines algèbres de Hopf des polylogarithmes aux multiindices entiers non positifs

Pour commencer cette sous-section, nous considérons une classe de polynômes où les coefficients de chaque polynôme sont des entiers positifs.

Définition 15 *Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_{y_n} le n-ième polynôme Eulérien. Pour tout $w = y_{s_1} \ldots y_{s_r} \in Y^*$, A_w^- est défini par*

$$A_w^- := \begin{cases} A_{y_{s_1}} & si \quad |w| = 1, \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{s_1} \binom{s_1}{i} A_{y_i}^- A^-_{y_{s_1+s_2-i} y_{s_3} \ldots y_{s_r}} & sinon\,. \end{cases}$$

Exemple 17

$$\begin{aligned}
A^-_{y_0}(z) = 1 \quad &, \quad A^-_{y_1}(z) = 1 \\
A^-_{y_2}(z) = z+1 \quad &, \quad A^-_{y_3}(z) = z^2+4z+1 \\
A^-_{y_4}(z) = z^3+11z^2+11z+1 \quad &, \quad A^-_{y_0^2}(z) = 1 \\
A^-_{y_1y_0}(z) = 2 \quad &, \quad A^-_{y_1y_1}(z) = z+2 \\
A^-_{y_4y_5}(z) \quad &= \quad z^8+517z^7+16603z^6+115759z^5+247615z^4+179659z^3 \\
&\quad +42133z^2+2497z+16 .
\end{aligned}$$

Parce que les nombres Eulériens sont des entiers positifs, les coefficients des polynômes $A^-_w(z), w \in Y_0^*$ sont aussi des entiers positifs. En fait, la classe des polynômes $\{A^-_w\}_{w\in Y_0^*}$ est aussi utilisée pour déterminer la présentation des polylogarithmes aux multiindices entiers non positifs.

Théorème 9 ([GD16a]) *1. Si $r > 1$ alors*

$$\mathrm{Li}^-_{y_{s_1}\ldots y_{s_r}} = \sum_{t=0}^{s_1} \binom{s_1}{t} \mathrm{Li}^-_{y_t} \mathrm{Li}^-_{y_{s_1+s_2-t}y_{s_3}\ldots y_{s_r}} .$$

2. Pour tout $w \in Y_0^*$,

$$\mathrm{Li}^-_w(z) = \lambda^{|w|}(z) A^-_w(z)(1-z)^{-(w)} \in \mathbb{Z}[(1-z)^{-1}],$$

est un polynôme de degré[2] $(w)+|w|$, *en* $(1-z)^{-1}$.

3. On a

$$(1-z)^{-k} = (1-z)^{-1} + \sum_{j=2}^{k} S_1(k,j)\,\mathrm{Li}^-_{y_{j-1}}(z)/(k-1)!.$$

4. On a

$$\mathrm{Li}^-_{y_{s_1}\ldots y_{s_r}}(z) = \lambda(z)^{|w|} \sum_{i=r}^{s_1+\ldots+s_r} \sum_{j=0}^{s_1\ldots+s_{r-1}} l_{i,j} z^{i-1-j}(1-z)^{-i},$$

où $l_{i,j} = 0, \forall i < j+1$ et

$$\forall i \geq j+1, l_{i,j} = \sum_{\substack{1\leq k_t\leq s_t \\ k_1+\ldots+k_r=i}} \left(\prod_{n=1}^{r} (k_n! S_2(s_n,k_n))\right) \sum_{\substack{0\leq t_m\leq k_m \\ 1\leq m\leq r-1}}^{t_1+\ldots+t_{r-1}=j} \prod_{p=1}^{r-1}$$
$$\binom{k_r+\ldots+k_{r-p+1}+p-t_{r-p+1}-\ldots-t_{r-1}}{t_{r-p}} \binom{k_{r-p}+t_{r-p+1}+\ldots t_{r-1}}{k_{r-p}-t_{r-p}}.$$

2. Notons $K_w(1/z) := A^-_w(z)/z^{(w)}$, nous obtenons

$$\mathrm{Li}^-_w(z) = \lambda^{(w)+|w|}(z) K_w(1/z).$$

PREUVE – Pour $w = y_{s_1}\dots y_{s_r} \in Y_0^*$, nous avons [GDQS15]

$$\mathrm{Li}_w^- = (\theta_0^{s_1+1}\iota_1)\dots(\theta_0^{s_{r-1}+1}\iota_1)\,\mathrm{Li}_{y_{s_r}}^- \ . \tag{3.8}$$

Donc,

1. en utilisant les opérateurs θ_i, ι_i, ce résultat s'obtient immédiatement.
2. en utilisant les opérateurs θ_i, ι_i et par récurrence sur la longueur de w, nous pouvons trouver, pour tout $w \in Y_0^*$ que

$$\mathrm{Li}_w^-(z) = \lambda^{|w|}(z) A_w^-(z)\,(1-z)^{-(w)} ,$$

et $\mathrm{Li}_w^- \in \mathbb{Z}[(1-z)^{-1}]$. Donc, Li_w^- est un polynôme de degré $(w) + |w|$ en $(1-z)^{-1}$.

3. Soit $T := (t_{i,j})_{i\geq 1}^{j\geq 0} \in Mat_\infty(\mathbb{Q}_{\geq 0})$ la matrice inverse qui est définie par

$$\text{Si } i > j \quad \text{alors } t_{i,j} = \frac{S_1(i, j+1)}{(i-1)!} \quad \text{sinon } 0 \, . \tag{3.9}$$

Nous pouvons prouver facilement que

$$T\left((1-z)^{-1} \quad (\mathrm{Li}_{y_i}^-(z))_{i\geq 1}\right)^t = \left((1-z)^{-j}\right)_{j\geq 1}^t ,$$

donc, le résultat s'obtient alors immédiatement.

4. en utilisant les formules (15), (3.8) et par induction, nous avons

$$\mathrm{Li}_{y_{s_1}\dots y_{s_r}}^- = \sum_{k_1=0}^{s_1} \sum_{k_2=0}^{s_1+s_2-k_1} \dots \sum_{k_r=0}^{\substack{(s_1+\ldots+s_r)-\\(k_1+\ldots+k_{r-1})}} \binom{s_1}{k_1}\binom{s_1+s_2-k_1}{k_2}\dots$$
$$\binom{s_1+\ldots+s_r-k_1-\ldots-k_{r-1}}{k_r}(\theta_0^{k_r}\lambda)(\theta_0^{k_2}\lambda)\dots(\theta_0^{k_r}\lambda) \, .$$

□

Exemple 18 *Nous remarquons bien que*

$$\mathrm{Li}_{y_m y_n}^- = (\theta_0^{m+1}\iota_1)\mathrm{Li}_{y_n}^- = \theta_0^m(\theta_0\iota_1)\mathrm{Li}_{y_n}^- \quad \textit{et} \quad (\theta_0\iota_1)\mathrm{Li}_{y_n}^- = \mathrm{Li}_0\,\mathrm{Li}_{y_n}^- ,$$

alors nous obtenons

$$\mathrm{Li}_{y_m y_n}^- = \theta_0^m[\mathrm{Li}_0\,\mathrm{Li}_{y_n}^-] = \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \mathrm{Li}_{y_l}^-\,\mathrm{Li}_{y_{m+n-l}}^- \ .$$

Par exemple,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}_{y_1^2}^-(z) &= \mathrm{Li}_{y_0}^-(z)\,\mathrm{Li}_{y_2}^-(z) + (\mathrm{Li}_{y_1}^-(z))^2 \\
&= -(1-z)^{-1} + 5(1-z)^{-2} - 7(1-z)^{-3} + 3(1-z)^{-4} , \\
\mathrm{Li}_{y_2 y_1}^-(z) &= \mathrm{Li}_{y_0}^-(z)\,\mathrm{Li}_{y_3}^-(z) + 3\,\mathrm{Li}_{y_1}^-(z)\,\mathrm{Li}_{y_2}^-(z) \\
&= (1-z)^{-1} - 11(1-z)^{-2} + 31(1-z)^{-3} - 33(1-z)^{-4} + 12(1-z)^{-5} , \\
\mathrm{Li}_{y_1 y_2}^-(z) &= \mathrm{Li}_{y_0}^-(z)\,\mathrm{Li}_{y_3}^-(z) + \mathrm{Li}_{y_1}^-(z)\,\mathrm{Li}_{y_2}^-(z) \\
&= (1-z)^{-1} - 9(1-z)^{-2} + 23(1-z)^{-3} - 23(1-z)^{-4} + 8(1-z)^{-5} .
\end{aligned}$$

3.1.3 Asymptotique des développements singuliers des sommes harmoniques et des polylogarithmes aux multiindices entiers non positifs

Dans les sous-sections précédentes, pour tout $w \in Y_0^*$, nous avons démontré que les sommes harmoniques $\mathrm{H}_w^-(N)$ et polylogarithmes $\mathrm{Li}_w^-(z)$ aux multiindices entiers non positifs sont des polynômes respectivement en N et en $\dfrac{1}{1-z}$ de degré $(w)+|w|$. Alors les limites

$$\lim_{N\to+\infty} N^{-((w)+|w|)}\mathrm{H}_w^-(N) = C_w^-; \lim_{z\to+1}(1-z)^{(w)+|w|}\mathrm{Li}_w^-(z) = B_w^-,$$

existent.

Proposition 12 ([GD16a]) *Soit $w \in Y_0^*$. Il y a des constantes non nulles C_w^-, B_w^- telles que*

$$\mathrm{H}_w^-(N)\underset{N\to\infty}{\widetilde{\quad}}N^{(w)+|w|}\,C_w^- \quad et \quad \mathrm{Li}_w^-(z)\underset{z\to 1}{\widetilde{\quad}}B_w^-\,(1-z)^{-((w)+|w|)}\ .$$

De plus, $C_{1_{Y_0^*}}^- = B_{1_{Y_0^*}}^- = 1$ *et, pour tout* $w \in Y_0^+$,

$$C_w^- = \prod_{w=uv, v\neq 1_{Y^*}} ((v)+|v|)^{-1} \in \mathbb{Q} \quad et \quad B_w^- = ((w)+\mid w\mid)!C_w^- \ \in \mathbb{N}_+\ .$$

Preuve – Par le théorème 7, H_w^- est un polynôme de degré $(w)+\mid w\mid$ et alors C_w^- existe. Par l'induction, il est immédiat que $C_{1_{Y_0^*}}^- = 1$ et $C_{y_s}^- = (s+1)^{-1}$ où le résultat est vrai pour tout $|w| \leq 1$. Supposons qu'il soit vrai pour $|w| = k$, et puis, soient $y_s \in Y_0$ et $w \in Y_0^*$ tels que $|w| = k$. Parce que $\mathrm{H}_{y_sw}^-$ est une solution de

$$f(N+1) - f(N) = (N+1)^s\mathrm{H}_w^-(N),$$

en utilisant la condition $\mathrm{H}_w^-(0) = 0$, nous pouvons déterminer le terme dominant de H_w^-.

Remarquons que $(N+1)^s\mathrm{H}_w^-(N) \not\equiv 0$ est un polynôme et que $C_w^- N^{s+(w)+|w|}$ est son terme dominant. En utilisant le lemme 12, le terme dominant de $\mathrm{H}_{y_sw}^-$ est $C_w^- N^{(y_sw)+|y_sw|}/((y_sw)+|y_sw|)$. Donc nous obtenons l'expression de $C_{y_sw}^-$. Le second résultat est immédiat par le théorème 9. □

Exemple 19 (de C_w^- et B_w^-)

w	C_w^-	B_w^-	w	C_w^-	B_w^-
y_0	1	1	y_1y_2	$\frac{1}{15}$	8
y_1	$\frac{1}{2}$	1	y_2y_3	$\frac{1}{28}$	180
y_2	$\frac{1}{3}$	2	y_3y_4	$\frac{1}{49}$	8064
y_n	$\frac{1}{n+1}$	$n!$	y_my_n	$\frac{1}{(n+1)(m+n+2)}$	$\frac{(m+n+1)!}{(n+1)}$
y_0^2	$\frac{1}{2}$	1	$y_2y_2y_3$	$\frac{1}{280}$	12960
y_0^n	$\frac{1}{n!}$	1	$y_2y_{10}y_1^2$	$\frac{1}{2160}$	9686476800
y_1^2	$\frac{1}{8}$	3	$y_2^2y_4y_3y_{11}$	$\frac{1}{2612736}$	416761182546508800000

Définition 16 *Les séries non commutatives $C^-, B^-, \Theta(t)$ et $\Lambda(t)$ sont définies par*

$$C^- := \sum_{w\in Y_0^*} C_w^-\, w \quad et \quad \Theta(t) := \sum_{w\in Y_0^*} t^{|w|+(w)} w = \left(\sum_{y\in Y_0} t^{(y)+1} y\right)^*,$$
$$B^- := \sum_{w\in Y_0^*} B_w^-\, w \quad et \quad \Lambda(t) := \sum_{w\in Y_0^*} (|w|+(w))!\, t^{|w|+(w)} w.$$

En utilisant les théorèmes 7 et 9, pour tout $w \in Y_0^*$, en posant $p = (w) + |w|$, nous avons

$$\begin{aligned}\Theta(N) &= 1_{Y_0^*} + \sum_{w\in Y_0^+}\left[\sum_{j=0}^{p-1}(-1)^{p+j-1}\binom{p}{j}\mathrm{H}^-_{y_j}(N)\right]w,\\ \Lambda((1-z)^{-1}) &= 1_{Y_0^*} + (\mathrm{Li}^-_{y_0}(z)-1)y_0\\ &+ \sum_{w\in Y_0^+\setminus\{y_0\}}\left[(\mathrm{Li}^-_{y_0}(z)-1) + \sum_{j=2}^{p}\frac{S_1(p,j)}{(p-1)!}\mathrm{Li}^-_{y_{j-1}}(z)\right]w.\end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant la proposition 12, nous avons

Théorème 10 ([GD16a]) *Posons*

$$\mathrm{H}^- := \sum_{w\in Y_0^*}\mathrm{H}^-_w\, w \quad et \quad \mathrm{L}^- := \sum_{w\in Y_0^*}\mathrm{Li}^-_w\, w\,.$$

Alors nous avons

$$\lim_{N\to+\infty}\Theta^{\odot-1}(N)\odot\mathrm{H}^-(N) = \lim_{z\to1}\Lambda^{\odot-1}((1-z)^{-1})\odot\mathrm{L}^-(z) = C^-.$$

Définition 17 *Soit $P \in \mathbb{Q}\langle Y_0\rangle$ tel que $\mathrm{H}^-_P \not\equiv 0$. Les nombres $B^-_P, C^-_P \in \mathbb{Q}$ et $n(P) \in \mathbb{N}$ sont définis respectivement par*

$$\mathrm{Li}^-_P(z) \underset{z\to1}{\widetilde{\quad}} (1-z)^{-n(P)} B^-_P \quad et \quad \mathrm{H}^-_P(N) \underset{N\to\infty}{\widetilde{\quad}} N^{n(P)} C^-_P. \tag{3.10}$$

Il n'est pas difficile de montrer que [3]

$$0 \le n(P) \le \max_{u\in supp(P)}\{(u) + |u|\}.$$

Soit $p_{\max} := \max_{u\in supp(P)}\{(u)+|u|\} < +\infty$. Nous étendons [4] $C^-_\bullet$ à $\mathbb{Q}\langle Y_0\rangle$:

3. Le support de

$$P = \sum_{u\in Y_0^*} x_u u \in \mathbb{Q}\langle Y_0\rangle$$

est défini par

$$supp(P) = \{w \in Y_0^* | \langle P \mid w\rangle \neq 0\},$$

et le produit scalaire, sur $\mathbb{Q}\langle Y_0\rangle$, est défini par $\langle P \mid w\rangle = x_w$.

4. Ce procédé, sur $\mathbb{Q}\langle Y_0\rangle$, se termine après un nombre fini d'étapes.

- La première étape : Calculons

$$C_0 = \sum_{(w)+|w|=p_{\max}} \langle P \mid w \rangle C_w^-.$$

Si $C_0 \neq 0$ alors $C_P^- = C_0$ sinon allons à la prochaine étape.
Exemple 20 *Soient $P = 6y_4y_2 + 12y_3^2 - 9y_5$. Notons que*

$$(y_4y_2) + |y_4y_2| = (y_3^2) + |y_3^2| = 8 > 6 = (y_5) + |y_5|,$$

alors $p_{\max} = 8, C_0 = 6C^-_{y_4y_2} + 12C^-_{y_3^2} = \frac{5}{8}$ et $C_P^- = C_0 = 5/8$.

- La seconde étape : Soit $J_1 = \{v \in supp(P) | (v) + |v| = p_{\max} - 1\}$. Déterminons

$$C_1 = \sum_{c \in J_1} \alpha_c C_c^- \langle \mathrm{H}^-_{\sum_{c\in J}\alpha_c c} \mid N^{p_{\max}-1}\rangle.$$

Si $C_1 \neq 0$ alors $C_0 := C_1$, sinon nous passons à $p_{\max} - 2$.
Exemple 21 *Soient $P = 12y_2y_1^4 - y_2y_3^2 - 9y_4^2$. Notons que*

$$(y_1^4y_2) + |y_1^4y_2| = (y_2y_3^2) + |y_2y_3^2| = 11 > 10 = (y_4^2) + |y_4^2|$$

alors $p_{\max} = 11$ et $C_0 = 12C^-_{y_2y_1^4} - C^-_{y_2y_3^2} = 0$. Nous allons à la prochaine étape. Par exemple, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^-_{y_2y_1^4}(N) &= \frac{1}{4224}N^{11} - \frac{181}{134400}N^{10} + \frac{31}{80640}N^9 + \frac{43}{5376}N^8 - \frac{1}{168}N^7 \\
&- \frac{1087}{57600}N^6 + \frac{47}{3840}N^5 + \frac{323}{16128}N^4 - \frac{1}{126}N^3 - \frac{787}{100800}N^2 + \frac{19}{18480}N, \\
\mathrm{H}^-_{y_2y_3^2}(N) &= \frac{1}{352}N^{11} - \frac{9}{2240}N^{10} - \frac{95}{4032}N^9 + \frac{11}{448}N^8 + \frac{13}{168}N^7 - \frac{149}{2880}N^6 \\
&- \frac{37}{320}N^5 + \frac{173}{4032}N^4 + \frac{71}{1008}N^3 - \frac{59}{5040}N^2 - \frac{53}{4620}N.
\end{aligned}$$

Donc,

$$C_1 = -\frac{2172}{134400} + \frac{9}{2240} - 9C^-_{y_4^2} = -\frac{269}{1400} \neq 0,$$

et alors $C_P^- = -\dfrac{269}{1400}$.

– Supposons que dans la $r-$ième étape, la combinaison linéaire des coefficients de $N^{p_{\max}-r+1}$ dans H_w^- où

$$w \in \{u \in supp(P) \mid (u) + |u| \geq p_{\max} - r + 1\},$$

soit nulle, ce que nous noterons par $C_{r-1} = 0$, alors dans la $(r+1)-$ième étape, nous calculerons la combinaison linéaire des coefficients de $N^{p_{\max}-r}$ dans H_w^- où

$$w \in \{u \in supp(P) | (u) + |u| \geq p_{\max} - r + 1\},$$

et la combinaison linéaire de C_w^- où

$$w \in \{u \in supp(P) | (u) + |u| = p_{\max} - r\}.$$

Si la somme des résultats n'est pas 0 alors c'est C_P^- sinon nous passons à la prochaine étape.

Pour $P = \sum_{w \in Y^*} c_w\, w$, l'algorithme peut être utilisé pour calculer B_P^-

– La premième étape : Soit $J := \{v \in supp(P) | (v) + |v| = p_{\max}\}$. Calculons $B^0 = \sum_{c \in J} \alpha_c B_c^-$. Si $B^0 \neq 0$, alors $B_P^- = B^0$ sinon nous passons à la prochaine étape.
– La deuxième étape : Soit $J_1 = \{v \in supp(P) | (v) + |v| = p_{\max} - 1\}$. Déterminons le coefficient de $(1-z)^{-p_{\max}+1}$ dans $\mathrm{Li}^-_{\sum_{c \in J} \alpha_c c}$, notons par $b_{p_{\max}-1}$. Ensuite, nous calculons
$$B^1 = b_{p_{\max}-1} + \sum_{c \in J_1} \alpha_c B_c^- .$$
Si $B^1 \neq 0$ alors $B_P^- = B^1$ sinon nous allons aux ordres qui sont inférieurs à $p_{\max} - 1$.

3.2 Structure d'algèbre des sommes harmoniques et des polylogarithmes aux multiindices entiers non positifs

Dans cette section, nous étudions la structure des sommes harmoniques et des polylogarithmes aux multiindices entiers non positifs. Nous appliquerons les résultats de la première section pour étudier l'ensemble des sommes harmoniques et l'ensemble des polylogarithmes aux multiindices entiers non positifs.

3.2.1 Structure d'algèbre des sommes harmoniques aux multiindices entiers non positifs

Ici, les sommes harmoniques H_w^- sont définies par les équations (10) et (11). L'alphabet est $Y_0^* = \{y_i\}_{i \geq 0}$ et le stuffle est défini comme un ϕ-stuffle (voir (1.3)) par l'application
$$\phi \ : \ Y_0 \times Y_0 \to \mathbb{C}Y_0 \ ; \ \phi(y_i, y_j) = y_{i+j} \ . \tag{3.11}$$

Proposition 13 ([GD16a]) *Pour tous les mots $w_1, w_2 \in Y_0^*$, nous avons $\mathrm{H}_{w_1}^- \mathrm{H}_{w_2}^- = \mathrm{H}_{w_1 ⧢ w_2}^-$.*

Maintenant, nous utilisons l'extension du critère de Friedrichs pour $⧢$ [Min13a, Min13b], nous avons le résultat suivant.

Théorème 11 ([GD16a])
1. *La série H^- est de type groupe et $\log \mathrm{H}^-$ est primitive.*
2. $\ker(\mathrm{H}_\bullet^-)$ *est un idéal premier de* $(\mathbb{Q}\langle Y_0 \rangle, ⧢, 1_{Y_0^*})$*, c'est-à-dire que* $\mathbb{Q}\langle Y_0 \rangle \setminus \ker(\mathrm{H}_\bullet^-)$ *est stable pour le stuffle* $⧢$.

Définition 18 *Soit $n \in \mathbb{N}_+$, on notera*

$$\mathbb{P}_n := \mathrm{span}_{\mathbb{R}_+}\{w \in Y_0^* \mid (w) + |w| = n\} \setminus \{0\}\ ,$$

le cône épointé convexe [Ber09] engendré par l'ensemble $\{w \in Y_0^* \mid (w) + |w| = n\}$.

Presque par définition, $C_\bullet^-$ est linéaire dans l'ensemble $\mathbb{P}_n$, c'est à dire que pour tous $u, v \in Y_0^*$, nous avons

$$u \uplus v = u \sqcup\!\sqcup v + \sum_{(w)+|w|<(u)+|u|+|v|+(v)} x_w w,$$

et les x_w sont positifs. De plus, tous les éléments du support de

$$\sum_{(w)+|w|<(u)+|u|+|v|+(v)} x_w w,$$

satisfont $(w) + |w| < (u) + (v) + |u| + |v|$. Nous obtenons donc que

Corollaire 2 ([GD16a]) *1. Pour tout $w, v \in Y_0^*$, nous avons*

$$C_w^- C_v^- = C_{w \sqcup\!\sqcup v}^- = C_{w \uplus v}^-\ .$$

2. Pour tout $P, Q \notin \ker(\mathrm{H}_\bullet^-)$, nous avons

$$C_P^- C_Q^- = C_{P \uplus Q}^-$$

et $\mathbb{Q}\langle Y_0\rangle \setminus \ker(\mathrm{H}_\bullet^-)$ est un $\uplus$-monoïde qui contient Y_0^* comme sous-monoïde.

Nous démontrerons que $C_\bullet^-$ peut être étendu comme une caractérisation C^-, pour $\sqcup\!\sqcup$ ou de manière équivalente, par le critère de Friedrichs [Reu93], C^- est de type groupe et alors $\log C^-$ est primitive pour $\Delta_{\sqcup\!\sqcup}$.

Lemme 13 *Soit $\mathscr{A}$ une $\mathbb{R}$-algèbre associative avec unité et f, une application*

$$f : \sqcup_{n\geq 0}\mathbb{P}_n \longrightarrow \mathscr{A}$$

qui vérifie les conditions suivantes

1. *Pour tout $u, v \in Y_0^*$, $f(u \sqcup\!\sqcup v) = f(u)f(v)$. En particulier, $f(1_{Y_0^*}) = 1_{\mathscr{A}}$.*
2. *Pour tout $\sum_{i\in I} \alpha_i w_i \in \mathbb{P}_n$, nous avons*

$$f(\sum_{i\in I} \alpha_i w_i) = \sum_{i\in I} \alpha_i f(w_i).$$

Alors f peut être étendue de façon unique comme un caractère de $\mathbb{R}\langle Y_0\rangle$ c'est-à-dire que

$$S_f = \sum_{w\in Y_0^*} f(w)\, w\ ,$$

est de type groupe, pour $\Delta_{\sqcup\!\sqcup}$.

PREUVE – Tout d'abord, nous avons $\langle S_f \mid 1_{Y_0^*}\rangle = 1_{\mathscr{A}}$. De plus, nous pouvons montrer que

$$\Delta_{\sqcup\!\sqcup}(S_f) = S_f \otimes S_f \ .$$

Donc, S_f est de type groupe, pour $\Delta_{\sqcup\!\sqcup}$. □

Corollaire 3 *La série C^- est de type groupe, pour $\Delta_{\sqcup\!\sqcup}$.*

Exemple 22 (des $C^-_{u \sqcup\!\sqcup v} = C^-_{u \uplus v}$)

u	C^-_u	v	C^-_v	$u \sqcup\!\sqcup v$	$C^-_{u\sqcup\!\sqcup v}$
y_0	1	y_0	1	$2y_0^2$	1
y_0^2	$\frac{1}{2}$				
y_1	$\frac{1}{2}$	y_2	$\frac{1}{3}$	$y_1y_2 + y_2y_1$	$\frac{1}{6}$
y_1y_2	$\frac{1}{15}$	y_2y_1	$\frac{1}{10}$		
y_m	$\frac{1}{m+1}$	y_n	$\frac{1}{n+1}$	$y_my_n + y_ny_m$	$\frac{1}{(m+1)(n+1)}$
y_my_n	$\frac{(n+1)^{-1}}{(n+m+2)}$	y_ny_m	$\frac{(m+1)^{-1}}{(m+n+2)}$		
y_1	$\frac{1}{2}$	y_2y_5	$\frac{1}{54}$	$y_1y_2y_5 + y_2y_1y_5 + y_2y_5y_1$	$\frac{1}{108}$
$y_1y_2y_5$	$\frac{1}{594}$	$y_2y_1y_5$	$\frac{1}{528}$		
$y_2y_5y_1$	$\frac{1}{176}$				
y_0y_1	$\frac{1}{6}$	y_2y_3	$\frac{1}{28}$	$y_0y_1y_2y_3 + y_0y_2y_1y_3$ $+y_0y_2y_3y_1 + y_2y_3y_0y_1$ $+y_2y_0y_1y_3 + y_2y_0y_3y_1$	$\frac{1}{168}$
$y_0y_1y_2y_3$	$\frac{1}{2520}$	$y_0y_2y_1y_3$	$\frac{1}{2160}$		
$y_0y_2y_3y_1$	$\frac{1}{1080}$	$y_2y_3y_0y_1$	$\frac{1}{420}$		
$y_2y_0y_1y_3$	$\frac{1}{1680}$	$y_2y_0y_3y_1$	$\frac{1}{840}$		
y_ay_b	$\frac{(b+1)^{-1}}{(a+b+2)}$	y_cy_d	$\frac{(d+1)^{-1}}{(c+d+2)}$	$y_ay_by_cy_d + y_ay_cy_by_d$ $+y_ay_cy_dy_b + y_cy_dy_ay_b$ $+y_cy_ay_by_d + y_cy_ay_dy_b$	$\frac{(b+1)^{-1}(d+1)^{-1}}{(a+b+2)(c+d+2)}$

u	C^-_u	v	C^-_v	$u \uplus v$	$C^-_{u\uplus v}$
y_0	1	y_0	1	$2y_0^2 + y_0$	1
y_1	$\frac{1}{2}$	y_2	$\frac{1}{3}$	$y_1y_2 + y_2y_1 + y_3$	$\frac{1}{6}$
y_m	$\frac{1}{m+1}$	y_n	$\frac{1}{n+1}$	$y_my_n + y_ny_m + y_{n+m}$	$\frac{1}{(m+1)(n+1)}$
y_1	$\frac{1}{2}$	y_2y_5	$\frac{1}{54}$	$y_1y_2y_5 + y_2y_1y_5 + y_2y_5y_1$ $+y_3y_5 + y_2y_6$	$\frac{1}{108}$
y_0y_1	$\frac{1}{6}$	y_2y_3	$\frac{1}{28}$	$y_0y_1y_2y_3 + y_0y_2y_1y_3$ $+y_0y_2y_3y_1 + y_2y_3y_0y_1$ $+y_2y_0y_1y_3 + y_2y_0y_3y_1 + y_0y_2y_4$ $+y_0y_3^2 + y_2y_3y_1 + y_2y_1y_3$ $+y_2y_0y_4 + y_2y_3y_1 + y_2y_4$	$\frac{1}{168}$
y_ay_b	$\frac{(b+1)^{-1}}{(a+b+2)}$	y_cy_d	$\frac{(d+1)^{-1}}{(c+d+2)}$	$y_ay_by_cy_d + y_ay_cy_by_d$ $+y_ay_cy_dy_b + y_cy_dy_ay_b$ $+y_cy_ay_by_d + y_cy_ay_dy_b$ $+y_ay_cy_{b+d} + y_ay_{b+c}y_d$ $+y_cy_ay_{b+d} + y_cy_{a+d}y_b$ $+y_{a+c}y_by_d + y_{a+c}y_dy_b + y_{a+c}y_{b+d}$	$\frac{(b+1)^{-1}(d+1)^{-1}}{(a+b+2)(c+d+2)}$

Il n'est pas difficile de voir que $C^-_\bullet$ est linéaire sur $\mathbb{P}_n$. Par exemple, soient $u = y_1$ et $v = y_2y_5$. Alors $u \sqcup\!\sqcup\, v = y_1y_2y_5 + y_2y_1y_5 + y_2y_5y_1$. Donc nous obtenons que

$$C^-_{y_1y_2y_5} + C^-_{y_2y_1y_5} + C^-_{y_2y_5y_1} = \frac{1}{594} + \frac{1}{528} + \frac{1}{176} = \frac{1}{108} = C^-_{y_1}C^-_{y_2y_5} = C^-_{y_1 \sqcup\!\sqcup\, y_2y_5}.$$

Notons que $y_1y_2y_5, y_2y_1y_5, y_2y_5y_1 \in \mathbb{P}_{11}$. D'un autre côté, nous avons que $u \,\underline{\sqcup\!\!\sqcup}\, v = y_1y_2y_5 + y_2y_1y_5 + y_2y_5y_1 + y_3y_5 + y_2y_6$. Alors, nous pouvons conclure que

$$C^-_{y_1y_2y_5} + C^-_{y_2y_1y_5} + C^-_{y_2y_5y_1} + C^-_{y_3y_5} + C^-_{y_2y_6} = \frac{1}{108} + \frac{13}{420} \neq \frac{1}{108} = C^-_{y_1}C^-_{y_2y_5}.$$

De plus, $y_3y_5, y_2y_6 \in \mathbb{P}_{10}$, donc nous avons

$$C^-_{y_1 \,\underline{\sqcup\!\!\sqcup}\, y_2y_5} = C^-_{y_1y_2y_5+y_2y_1y_5+y_2y_5y_1+y_3y_5+y_2y_6} = C^-_{y_1y_2y_5+y_2y_1y_5+y_2y_5y_1} = 1/108 = C^-_{y_1}C^-_{y_2y_5}.$$

3.2.2 Structure d'algèbre des polylogarithmes aux multiindices entiers non positifs

Dans cette sous section, nous construisons une loi nouvelle sur $\mathbb{Q}\langle Y_0\rangle$ qui est associée aux polylogarithmes aux multiindices entiers non positifs, comme une algèbre. Tout d'abord, nous partons d'un lemme général qui indique un procédé pour construire cette nouvelle loi.

Lemme 14 ([GD16a]) *Soit k un corps, V un k-espace vectoriel, $\mathcal{A}$ une k-AAU et $\phi : V \twoheadrightarrow \mathcal{A}$ une application surjective. Nous considérons les lois sur V telles que, pour tout $x, y \in V$*

$$\phi(x \top y) = \phi(x)\phi(y). \tag{3.12}$$

$$\textit{si} \quad x \top y \in \ker(\phi) \quad \textit{alors} \quad x \top y = 0. \tag{3.13}$$

Alors les conditions suivantes sont vraies

1. *Il existe une solution $\top_0$ pour le système d'équations* (3.12) *et* (3.13)*.*
2. *Soit G_ϕ le groupe d'automorphismes linéaires (sous-groupe de $GL(V)$) défini par*
$$G_\phi := \{\alpha \in GL(V) | \phi \circ \alpha = \phi\}.$$
Alors une loi $\top$ satisfait les équations (3.12) *et* (3.13) *si et seulement si elle est de la forme $\top = \alpha \circ \top_0, \alpha \in G_\phi$ (c'est-à-dire que l'ensemble des solutions est l'orbite à gauche, sous G_ϕ, de $\top_0$).*
3. *L'énoncé précédent reste valable en remplaçant G_ϕ par*
$$G^{(1)}_\phi := \{\alpha \in GL(V) | \phi \circ \alpha = \phi; \alpha_{|\ker(\phi)} = \mathrm{Id}_{\ker(\phi)}\}.$$

PREUVE –

1. Supposons que s soit une section de ϕ, *c'est-à-dire que* $\phi\circ s = \mathrm{Id}_{\mathrm{A}}$. Alors nous définissons $x\top y = s(\phi(x)\phi(y))$ pour tous $x, y \in V$. Il est facile pour démontrer que $\top$ satisfait (3.12). Notons que $x\top y = s(\phi(x)\phi(y)) \in \mathrm{Im}(s)$. Maintenant si $x\top y\in\ker(\phi)$, et parce que $(0) = \mathrm{Im}(s)\cap\ker(\phi)$, nous obtenons que $x\top y = 0$ et donc il satisfait (3.13).
2. Tout d'abord, nous avons que
$$\phi(x\top y) = \phi(\alpha(x\top_0 y)) = \phi(x\top_0 y) = \phi(x)\phi(y).$$
Cela implique (3.12). D'un autre côté, $x\top y\in\ker(\phi)$ est équivalent à $\phi(x\top y) = 0$. Alors
$$0 = \phi(x\top y) = \phi(\alpha(x\top_0 y)) = \phi(x\top_0 y)\ .$$
Donc, $x\top_0 y = 0$ parce que $\top_0$ satisfait (3.13) et alors, $x\top y = \alpha(x\top_0 y) = 0$ qui trouve (3.13) pour $\top$.
Ensuite, nous supposons que $\top$ satisfait (3.12) et (3.13). Alors tout d'abord, nous avons besoin de chercher une identification (pour $\top$) e telle que $\phi(e) = 1_{\mathrm{A}}$. Nous partons d'un dans les éléments e_0 tels que $\phi(e_0) = 1_{\mathrm{A}}$. Notons que $e = e_0\top e_0$. Alors,
$$\phi(e_0\top e_0 - e_0\top e_0\top e_0) = \phi(e_0)\phi(e_0) - \phi(e_0)\phi(e_0)\phi(e_0) = 1 - 1 = 0\ .$$
Donc,
$$e_0\top e_0 - e_0\top e_0\top e_0 = e_0\top(e_0 - e_0\top e_0) \in \ker(\phi)\ ,$$
et alors, en utilisant (3.13), nous avons
$$0 = e_0\top(e_0 - e_0\top e_0) = e_0\top e_0 - e_0\top e_0\top e_0.$$
D'autre part, nous avons que
$$e\top e = (e_0\top e_0)\top(e_0\top e_0) = e_0\top(e_0\top e_0\top e_0) = e_0\top(e_0\top e_0) = e_0\top e_0 = e,$$
et $\phi(e) = \phi(e_0\top e_0) = 1_{\mathrm{A}}1_{\mathrm{A}} = 1_{\mathrm{A}}$.
En la suite, soit $y\in\mathrm{A}$. Il est facile de vérifier que la valeur $x\top e$ n'est pas dépendante du choix de x, la preimage de y. Nous notons $s(y) = x\top e$. Pour $y = \phi(x)$, nous avons
$$s(y) = s(\phi(x)) = x\top e\ . \tag{3.14}$$
L'application s est une section de ϕ comme
$$\phi(s(y)) = \phi(x\top e) = \phi(x)\phi(e) = \phi(x).$$
Enfin, nous avons besoin de montrer que $x\top y = s(\phi(x)\phi(y))$. Notons que
$$s(\phi(x)\phi(y)) = s(\phi(x\top y)) = x\top y\top e\ . \tag{3.15}$$
Puis, $x\top y\top e - x\top y$ a l'image, par ϕ, est nul. Donc $x\top(y\top e - y) = 0$ qui finit la preuve. C'est-à-dire qu'il existe une section s existe et qu'elle satisfait à $x\top y = s(\phi(x)\phi(y))$.

Supposons que s_1, s_2 soient deux sections de ϕ. Il y a $\alpha \in G_{\phi}^{(1)}$ tel que $s_2 = \alpha s_1$. Alors nous considérerons une base de $\mathrm{Im}(s_1)$ telle que

$$\ker(\phi) \oplus \mathrm{Im}(s_1) = \ker(\phi) \oplus \mathrm{Im}(s_2) = V$$

et construisons α par

$$\alpha_{|_{\mathrm{Im}(s_1)}} = s_2\phi_{|_{\mathrm{Im}(s_1)}} \quad \text{et} \quad \alpha_{|_{\ker(\phi)}} = \mathrm{Id}_{\ker(\phi)} \, .$$

Supposons $\top_i$ sont construit par $s_i, i = 1, 2$. Alors

$$x\top_2 y = s_2(\phi(x)\phi(y)) = \alpha s_1(\phi(x)\phi(y)) = \alpha(x\top_1 y).$$

3. C'est une conséquence de la deuxième condition.

□

Corollaire 4 ([GD16a]) *1. Il y a une loi $\top$ telle que, pour tout $P, Q \in \mathbb{Q}\langle Y_0\rangle$,*

$$\mathrm{Li}^-_{P\top Q} = \mathrm{Li}^-_P \mathrm{Li}^-_Q \, . \tag{3.16}$$

$$\textit{si} \quad P\top Q \in \ker(\mathrm{Li}^-_\bullet) \quad \textit{alors} \quad P\top Q = 0. \tag{3.17}$$

Alors nous posons

$$G = \{\alpha \in GL(\mathbb{Q}\langle Y_0\rangle) | \mathrm{Li}^-_\bullet \circ \alpha = \mathrm{Li}^-_\bullet\} \subset GL(\mathbb{Q}\langle Y_0\rangle).$$

2. *Toutes les autres lois qui satisfont* (3.16), (3.17) *sont de la forme $\alpha \circ \top, \alpha \in G$ et réciproquement (une orbite sous G).*
3. *La loi commutative associative $\top$ dans* (3.18) *n'est pas dualisable.*

PREUVE – En appliquant le Lemme 14 pour $\phi = \mathrm{Li}^-_\bullet$, nous obtenons ce corollaire.
□

Maintenant, en utilisant le théorème 9, pour tout $w \in Y_0^*$, le polylogarithme Li^-_w peut être représenté comme une combinaison linéaire de la base

$$\{\mathrm{Li}^-_{y_s}\}_{s\geq 0} \cup \{\mathrm{Li}^-_{1_{Y_0^*}}\} \, .$$

Donc pour tout $u, v \in Y_0^*$,

$$\mathrm{Li}^-_u \mathrm{Li}^-_v \in \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{\mathrm{Li}^-_{y_k}\}_{k\geq 0}.$$

Alors nous avons

$$\mathrm{Li}^-_u \mathrm{Li}^-_v = a(u,v) + \sum_{s=0}^{|u|+(u)+|v|+(v)-1} a_s(u,v) \mathrm{Li}^-_{y_s},$$

et nous définissons

$$u\top v \quad := \quad a(u,v) 1_{Y_0^*} + \sum_{s=0}^{|u|+(u)+|v|+(v)-1} a_s(u,v)\, y_s \, . \tag{3.18}$$

La loi $\top$ est associative et commutative sur $\mathbb{Q}\langle Y_0\rangle$.

Exemple 23 1. *En posant* $\mathrm{Li}^-_{1_{Y_0^*}} = 1_{\mathscr{C}}$, *pour tout* $y \in Y_0$, *on a*

$$y \top 1_{Y_0^*} = 1_{Y_0^*} \top y = y.$$

2. *Soient* $m,n,k \in \mathbb{N}$ *tels que* $0 \le k \le m+n-2$, *notons*

$$A_{m,n,k} = \sum_{t=0}^{k} A_{n,t} A_{m,k-t}$$

où $\forall m,n \in \mathbb{N}, A_{m,n,-1} = A_{m,n,-2} = 0$. *Donc, nous avons*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}^-_{y_m}(z)\,\mathrm{Li}^-_{y_n}(z) &= \frac{z^2}{(1-z)^2}\frac{1}{(1-z)^{m+n}} \sum_{k=0}^{m+n-2} A^-_{m,n,k} z^k \\
&= \sum_{k=0}^{m+n-2} A_{m,n,k} \sum_{t=0}^{k+2} \binom{k+2}{t} \frac{(-1)^t}{(1-z)^{m+n+2-t}} \\
&= \sum_{k=2}^{m+n+2} \sum_{j=m+n-k}^{m+n-2} A_{m,n,j} \binom{j+2}{m+n+2-t} (-1)^{m+n-k} \frac{1}{(1-z)^k},
\end{aligned}$$

où

$$\gamma_{m,n,k} := \sum_{j=m+n-k}^{m+n-2} A_{m,n,j} \binom{j+2}{m+n+2-t} (-1)^{m+n-k}.$$

En appliquant le théorème 9 et en utilisant l'équation $(1-z)^{-1} = \mathrm{Li}^-_{y_0}(z) - 1_{\mathscr{C}}$, *nous avons*

$$\mathrm{Li}^-_{y_m}(z)\,\mathrm{Li}^-_{y_n}(z) = \sum_{k=2}^{m+n+2} \gamma_{m,n,k} \left(\frac{1}{1-z} + \sum_{j=2}^{k} \frac{S_1(k,j)}{k!} \mathrm{Li}^-_{y_{j-1}}(z) \right).$$

Donc nous pouvons définir

$$y_m \top y_n = \sum_{k=2}^{m+n+2} \gamma_{m,n,k} \left(y_0 - 1_{Y_0^*} + \sum_{j=2}^{k} \frac{S_1(k,j)}{k!} y_{j-1} \right). \tag{3.19}$$

Par exemple,

$$\begin{aligned}
y_5 \top y_4 &= -\frac{1}{60} y_2 + \frac{1}{63} y_4 + \frac{1}{1260} y_{10}, \\
y_5 \top y_5 &= -\frac{5}{66} y_1 + \frac{1}{12} y_3 - \frac{1}{126} y_5 + \frac{1}{2772} y_{11}, \\
y_6 \top y_7 &= -\frac{691}{5460} y_2 + \frac{5}{33} y_4 - \frac{1}{40} y_6 + \frac{1}{24024} y_{14}, \\
y_8 \top y_{10} &= \frac{43867}{798} y_1 - \frac{39787}{510} y_3 + \frac{77}{3} y_5 - \frac{11056}{4095} y_7 + \frac{5}{66} y_9 + \frac{1}{831402} y_{19}.
\end{aligned}$$

Corollaire 5 ([GD16a]) 1. *Pour tous* $P,Q \in \mathbb{Q}\langle Y \rangle \oplus \mathbb{Q}y_0$, *nous avons*

$$B^-_P B^-_Q = B^-_{P \top Q}.$$

2. *Soit* $u,v \in Y_0^*$. *Alors* $\langle u \top v \mid 1_{Y_0^*} \rangle \neq 0$ *si et seulement si* $u = v = 1_{Y_0^*}$.

3. *Pour tout* u, v *et* $w = y_{s_1} \dots y_{s_r} \in Y_0^*$*, nous obtenons que*

$$y_0 u \top v = u \top y_0 v = y_0 \top (u \top v) \quad et \quad w \top 1_{Y_0^*} = \sum_{i=0}^{s_1} \binom{s_1}{i} y_i \top y_{s_1+s_2-i} y_{s_3} \dots y_{s_r} \ .$$

4. *L'application* $\top : \mathbb{Q}\langle Y_0 \rangle \times \mathbb{Q}\langle Y_0 \rangle \to \mathbb{Q}Y_0$ *qui est définie comme dans* (3.18)*, est surjective, que ce n'est pas une loi duale et*

$$\ker(\mathrm{H}_\bullet^-) = \ker(\mathrm{Li}_\bullet^-) = \mathbb{Q}\langle \{ w - w \top 1_{Y_0^*} | w \in Y_0^* \} \rangle.$$

PREUVE – Il suffit de démontrer deux premières conditions. Les autres conditions sont immédiates.

1. Soit $P, Q \in \mathbb{Q}\langle Y \rangle \oplus \mathbb{Q} y_0$ tels que

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}_P^- &= a_{k+1}^P \mathrm{Li}_{y_k}^- + \dots + a_0^P 1_{\mathscr{C}} \ , \\ \mathrm{Li}_Q^- &= a_{l+1}^Q \mathrm{Li}_{y_l}^- + \dots + a_0^Q 1_{\mathscr{C}} \ . \end{aligned}$$

Alors

$$\mathrm{Li}_P^- \mathrm{Li}_Q^- = a_{k+1}^P a_{l+1}^Q \mathrm{Li}_{y_l}^- \mathrm{Li}_{y_k}^- + \dots + a_0^P a_0^Q 1_{\mathscr{C}} = a_{k+1}^P a_{l+1}^Q \mathrm{Li}_{y_l \top y_k}^- + \dots + a_0^P a_0^Q 1_{\mathscr{C}}.$$

Parce que $B_P^- = a_{k+1}^P B_{y_k}^-$ and $B_P^- = a_{l+1}^Q B_{y_l}^-$ nous obtenons

$$B_{P \top Q}^- = a_{k+1}^P a_{l+1}^Q B_{y_k \top y_l}^-.$$

Enfin, nous pouvons conclure

$$B_{P \top Q}^- = a_{k+1}^P a_{l+1}^Q B_{y_k}^- B_{y_l}^- = B_P^- B_Q^-.$$

2. Rappelons que la loi $\top$ est définie par (3.18). Ceci implique

$$u \top v = a_{1_{Y_0^*}}(u,v) 1_{Y_0^*} + \sum_{|u|+(u)+|v|+(v)-1 \ge s \ge 0} a_s(u,v) y_s,$$

où $a_{1_{Y_0^*}}(u,v) \in \mathbb{Q}^*$ et $a_s(u,v) \in \mathbb{Q}$, *c'est-à-dire que,*

$$\mathrm{Li}_u^- \mathrm{Li}_v^- = a_{1_{Y_0^*}}(u,v) + \sum_{|u|+(u)+|v|+(v)-1 \ge s \ge 0} a_s(u,v) \mathrm{Li}_{y_s}^- \ .$$

Supposons que $u \neq 1_{Y_0^*}$, par $(1-z)^{|u|+(u)} \mathrm{Li}_u^-(z) = z^{|u|} A_u(z)$, et multiplions les deux membres de l'équation précédente par $(1-z)^{|u|+(u)+|v|+(v)}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} z^{|u|} A_u(z) (1-z)^{|v|+(v)} \mathrm{Li}_v^-(z) &= (1-z)^{|u|+(u)+|v|+(v)} a_{1_{Y_0^*}}(u,v) \\ &+ (1-z)^{|u|+(u)+|v|+(v)} \sum_{s=0}^{|u|+(u)+|v|+(v)-1} a_s(u,v) \mathrm{Li}_{y_s}^-(z) \ . \end{aligned}$$

Notons que pour tout $s = 1, \dots, |u| + (u) + |v| + (v) - 1$, la fonction

$$(1-z)^{|u|+(u)+|v|+(v)} \mathrm{Li}_{y_s}^-(z)$$

s'annule en $z = 0$, et $(1-z)^{(v)+|v|} \mathrm{Li}_v^-(z) \in \mathbb{Q}[(1-z)]$.
Choisissons $z = 0$, alors $0 = a_{1_{Y_0^*}}(u,v)$, c'est impossible. Donc, $u = 1_{Y_0^*}$. De même, nous obtenons aussi que $v = 1_{Y_0^*}$.

3. Nous avons $\mathrm{Li}^-_{y_0u} = (\theta_0 \iota_1)\mathrm{Li}^-_u = \lambda\,\mathrm{Li}^-_u = \mathrm{Li}^-_{y_0}\mathrm{Li}^-_u$. Donc, $\mathrm{Li}^-_{y_0u\top v} = \mathrm{Li}^-_{y_0}\mathrm{Li}^-_{u\top v}$, *i.e.*, $y_0u\top v = y_0\top(u\top v)$. Ensuite, en appliquant le Théorème 9, nous obtenons
$$w\top 1_{Y_0^*} = \sum_{i=0}^{s_1}\binom{s_1}{i} y_i\top y_{s_1+s_2-i}y_{s_3}\ldots y_{s_r}\,.$$
4. En utilisant le Corollaire 4, nous obtenons ce point.

□

3.2.3 Une base (linéaire) pour les sommes harmoniques et les polylogarithmes aux multiindices entiers non positifs

Pour finir ce chapitre, nous considérons les espaces vectoriels qui sont engendrés par les sommes harmoniques et polylogarithmes aux multiindices entiers non positifs respectivement. Alors nous pouvons construire une belle base dans chacun de ces espaces. De plus, nous construisons une application linéaire entre deux espaces vectoriels qui transforme les sommes harmoniques en les polylogarithmes aux multiindices entiers non positifs et inversement. Nous commencerons par le lemme suivant qui présente certaines caractérisations des nombres de Stirling.

Lemme 15 ([GD16a]) *Quels que soient $n,N \in \mathbb{N}_+$, nous avons*
$$\binom{N}{n} = \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i}S_1(n,i)N^i \iff N^n = \sum_{j=1}^{n} j!S_2(n,j)\binom{N}{j}\,.$$
De plus, pour tout $i \geq j \in \mathbb{N}_+$, nous avons
$$S_2(i,j) = \begin{cases} \dfrac{1}{S_1(i,i)}, & si \quad i=j,\\[2ex] \dfrac{1}{S_1(i,i)S_1(j,j)}\displaystyle\sum_{k=1}^{i-j}(-1)^{k+1}\sum_{i>t_1>\ldots>t_k>j}\dfrac{(-1)^{i+j+t_1+\ldots+t_k}S_1(i,t_1)\ldots S_1(t_k,j)}{S_1(t_1,t_1)\ldots S_1(t_k,t_k)} \\ \qquad -\dfrac{S_1(i,j)}{S_1(i,i)S_1(j,j)}, & si \quad i>j. \end{cases}$$

Preuve – Pour tout $i,j \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq i < j$, nous dénotons que $S_1(i,j) = S_2(i,j) = 0$, la première formule peut s'écrire sous forme matricielle
$$\left(\binom{N}{k}\right)^t_{k\geq 1} = \begin{pmatrix} 1/1! & 0 & \ldots \\ 0 & 1/2! & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \left((-1)^{i+j}S_1(i,j)\right)_{i,j\geq 1}\left(N^k\right)^t_{k\geq 1}.$$
Ensuite, en utilisant l'inversion des matrices et la transformation de Stirling [MB95], nous obtenons le premier résultat
$$\left(N^k\right)^t_{k\geq 1} = \left(j!S_2(i,j)\right)_{i,j\geq 1}\left(\binom{N}{k}\right)^t_{k\geq 1}.$$

L'inverse de la matrice $\big(S_1(i,j)\big)_{i,j\geq 1}$, étant bien connu. En appliquant l'inversion des matrices, nous avons la dernière assertion. □

En appliquant le lemme 15, nous obtenons le résultat important suivant.

Théorème 12 ([GD16a]) *1. Soit* $X = (j!S_2(i,j))_{j\geq 1}^{i\geq 1}$. *Alors nous avons*

$$\left(\mathrm{H}^-_{y_i}(N)\right)^t_{i\geq 0} = M\left(N^j\right)^t_{j\geq 1} = MX\left(\binom{N}{k}\right)_{k\geq 1} = MX\left(\mathrm{H}^-_{y_0^k}(N)\right)_{k\geq 1}.$$

2. *Les familles* $\{\mathrm{H}^-_{1_{Y_0^*}}\}\cup\{\mathrm{H}^-_{y_s}\}_{s\geq 0}$ *et* $\{\mathrm{H}^-_{1_{Y_0^*}}\}\cup\{\mathrm{H}^-_{y_0^k}\}_{k\geq 0}$ *(resp.* $\{1_{\mathscr{C}}\}\cup\{\mathrm{Li}^-_{y_s}\}_{s\geq 0}$ *et* $\{1_{\mathscr{C}}\}\cup\{\mathrm{Li}^-_{y_0^k}\}_{k\geq 0}$*) sont des bases de* $\mathbb{Q}[\{\mathrm{H}^-_w\}_{w\in Y_0^*}]$ *(resp.* $\mathbb{Q}[\{\mathrm{Li}^-_w\}_{w\in Y_0^*}]$*).*
   De plus, $\langle \mathrm{H}^-_w \mid \mathrm{H}^-_{1_{Y_0^*}}\rangle \neq 0$ *si et seulement si* $w = 1_{Y_0^*}$.

3. *L'automorphisme* χ *est répresenté par la matrice*[5] $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ M^{-1}U & M^{-1}T\end{pmatrix}^t = T^t$, *sur la base* $\{X^k\}_{k\geq 0}$ *de* $\mathbb{Q}[X]$, *et, pour* $w\in Y_0^*$,

$$\mathrm{Li}^-_w(z) = (\chi\circ \mathrm{H}^-_w)((1-z)^{-1}).$$

   En particulier, en utilisant les théorèmes 7 et 9, nous avons

$$\mathrm{H}^-_w(N) = \sum_{k=0}^{(w)+|w|} m_k N^k \in \mathbb{Q}[N] \iff \mathrm{Li}^-_w(z) = \sum_{k=0}^{(w)+|w|} \frac{n_k}{(1-z)^k} \in \mathbb{Z}[(1-z)^{-1}],$$

   où, pour tout $0\leq k\leq (w)+|w|$, $n_k = \sum_{j=k}^{(w)+|w|} m_j\ t_{j,k}$.

PREUVE –

1. Notons que $n,N\in\mathbb{N}_+$, $\binom{N}{n} = \mathrm{H}^-_{y_0^n}(N)$, alors, en utilisant la définition de M comme (3.2) et le lemme 15, nous obtenons le premier point.
2. Les théorèmes 7, 9 ont prouvé ce point. De plus, pour tout $w\in Y_0^+$, il y a une suite des nombres rationnels $\{\alpha_{w,k}\}_{k=0}^{(w)+|w|-1}$ telle que

$$\mathrm{H}^-_w = \sum_{k=0}^{(w)+|w|-1} \alpha_{w,k}\mathrm{H}^-_{y_k} \iff \mathrm{Li}^-_w = \sum_{k=0}^{(w)+|w|-1} \alpha_{w,k}\,\mathrm{Li}^-_{y_k}.$$

   Parce que nous avons

$$\frac{\mathrm{Li}^-_w(z)}{1-z} = \sum_{N\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{(w)+|w|-1} \alpha_{w,k}\mathrm{H}^-_{y_k}(N)\right)z^N = \sum_{k=0}^{(w)+|w|-1}\alpha_{w,k}\left(\sum_{N\geq 0}\mathrm{H}^-_{y_k}(N)\right)z^N.$$

5. $U := (-1 \quad 0\ldots 0\ldots)^t \in Mat_{\infty\times 1}(\mathbb{Q})$ et la matrice T est définie dans l'équation (3.9).

3. Notons que, pour tout $w \in Y_0^*$, $h_w^- := \left(\mathrm{H}^-_{y_k w}\right)^t_{k\geq 0}$ et $l_w^- := \left(\mathrm{Li}^-_{y_k w}\right)^t_{k\geq 0}$. En utilisant les théorèmes 7, 9, il y a deux matrices $\Xi_w, \Omega_w \in Mat_\infty(\mathbb{Q})$ telles que

$$\begin{aligned} h_w^- = \quad & \Xi_w \begin{pmatrix} 1 \\ \left(N^j\right)^t_{j\geq 1} \end{pmatrix} & = \Xi_w \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ h^-_{1_{Y_0^*}} \end{pmatrix}, \\ l_w^- = \quad & \Omega_w \begin{pmatrix} 1_{\mathscr{C}} \\ \left((1-z)^{-j}\right)^t_{j\geq 1} \end{pmatrix} & = \Omega_w \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U & T^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1_{\mathscr{C}} \\ l^-_{1_{Y_0^*}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Donc nous obtenons

$$\Xi_w \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}^{-1} = \Omega_w \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U & T^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{et} \quad \Xi_w = \Omega_w \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U & T^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ h^-_{1_{Y_0^*}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \left(N^j\right)^t_{j\geq 1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1_{\mathscr{C}} \\ l^-_{1_{Y_0^*}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U & T^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{\mathscr{C}} \\ \left(\left(\dfrac{1}{(1-z)^j}\right)^t\right)_{j\geq 1} \end{pmatrix},$$

et alors le théorème est prouvé.

□

3.3 Prolongement de $\mathrm{Li}_\bullet$ aux séries de $\mathbb{C}\langle X\rangle \sqcup\!\sqcup\, \mathbb{C}[x_0^*, (-x_0)^*] \sqcup\!\sqcup\, \mathbb{C}[x_1^*]$

Dans la première section, nous avons utilisé les opérateurs différentiels θ_0, θ_1 (voir la formule (12)) et les opérateurs intégraux ι_0, ι_1(voir la formule (13)) pour étudier les polylogarithmes. En fait, nous avons prouvé que les polylogarithmes $\mathrm{Li}_w^-(z), z \in \mathbb{C}, |z| < 1$ aux multiindices entiers non positifs sont des polynômes de degré $(w) + |w|$ en $(1-z)^{-1}$ pour tout $w \in Y_0^*$ [GDQS15, GD16a]. C'est-à-dire qu'elles sont des fonctions rationnelles sur $\mathbb{C}$. D'un autre côté, nous savons que la famille des polylogarithmes aux multiindices entiers positifs est libre sur l'algèbre des fonctions rationnelles sur $\mathbb{C}$ [Den12, VHNM00b]. Cela suggère une méthode pour étudier les polylogarithmes aux multiindices entiers.

Nous commencerons par les séries rationnelles sur $\mathbb{C}$. Tout d'abord, l'algèbre nous permet de savoir que l'espace des séries rationnelles est stable par le shuffle. De plus, l'exponentielle de shuffle des lettres et leurs combinations linéaires sont précisément leur étoile de Kleene . Pour tout ensemble $V \subset A^*$, nous définissons une suite d'ensembles $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{aligned} V_0 &= \varnothing, \\ V_{i+1} &= \{wv \mid w \in V_i; v \in V\}, \end{aligned}$$

alors l'étoile de Kleene de l'ensemble V est $V^* = \cup_{i\in\mathbb{N}} V_i$. En particulier, si V est un alphabet, V^* est le monoïde libre d'unité 1_{V^*} (i.e. le mot vide).

Maintenant, nous considérons les formes différentielles $\omega_0(z)=z^{-1}dz$ et $\omega_1(z)=(1-z)^{-1}dz$. Rappelons que

$$\Omega=\mathbb{C}\setminus(]-\infty,0]\cup[1,+\infty[)$$

et $\lambda(z)$ la fraction rationnelle $z(1-z)^{-1}$ qui est un élément de l'anneau différentiel $\mathcal{C}:=\mathbb{C}[z,z^{-1},(1-z)^{-1}]$, dont la dérivation est l'opérateur différentiel $\partial_z:=d/dz$. De plus, l'élément $1_\Omega:\Omega\to\mathbb{C}$, défini pour tout $z\in\Omega$, par $1_\Omega(z)=1$ est l'unité de cet anneau. Alors, nous obtenons que les polylogarithmes aux multiindices entiers positifs sont indexés comme l'images de la bigèbre de mélange par l'isomorphisme

$$\mathrm{Li}_\bullet:(\mathbb{C}\langle X\rangle,⧢,1_{X^*})\longrightarrow(\mathbb{C}\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in X^*},\times,1_\Omega),$$

qui est tel que

$$x_0^n\longmapsto\log^n(z)/n!,\quad x_1^n\longmapsto\log^n((1-z)^{-1})/n!,\quad x_0^{s_1-1}x_1\ldots x_0^{s_r-1}x_1\longmapsto\mathrm{Li}_{x_0^{s_1-1}x_1\ldots x_0^{s_r-1}x_1}.$$

Cet isomorphisme peut être étendu (sous réserve de convergence) à une partie de l'ensemble des séries rationnelles $\mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle X\rangle\rangle$ (ce n'est plus alors un isomorphisme) par

Définition 19 *Quel que soit*

$$S\quad=\quad\sum_{n\ge0}\langle S\mid x_0^n\rangle x_0^n+\sum_{k\ge1}\sum_{w\in(x_0^*x_1)^kx_0^*}\langle S\mid w\rangle\, w,$$

nous définissons (quand la série converge pour la convergence compacte)

$$\mathrm{Li}_S(z)\quad=\quad\sum_{n\ge0}\langle S\mid x_0^n\rangle\frac{\log^n(z)}{n!}+\sum_{k\ge1}\sum_{w\in(x_0^*x_1)^kx_0^*}\langle S\mid w\rangle\,\mathrm{Li}_w.$$

D'un autre côté, le morphisme extension $\mathrm{Li}_\bullet$ n'est pas injectif et les $\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in X^*}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathcal{C}$ [Min03b, Min07].

Exemple 24 *i.* $1_\Omega=\mathrm{Li}_{1_{X^*}}=\mathrm{Li}_{x_1^*-x_0^*⧢x_1^*}$.

ii. $\lambda=\mathrm{Li}_{(x_0+x_1)^*}=\mathrm{Li}_{x_0^*⧢x_1^*}=\mathrm{Li}_{x_1^*-1}$.

iii. $\mathcal{C}=\mathbb{C}[\mathrm{Li}_{x_0^*},\mathrm{Li}_{(-x_0)^*},\mathrm{Li}_{x_1^*}]$.

iv. $\mathcal{C}\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in X^*}=\{\mathrm{Li}_S\,|\,S\in\mathbb{C}[x_0^*]⧢\mathbb{C}[(-x_0)^*]⧢\mathbb{C}[x_1^*]⧢\mathbb{C}\langle X\rangle\}$.

Maintenant, nous utilisons les opérateurs θ_0,θ_1 et ι_0,ι_1 pour déterminer les polylogarithmes aux multiindices entiers. Notons que, quel que soit $i=0,1$, ι_i est une section de θ_i, *c'est-à-dire que,* $\theta_i\circ\iota_i=Id$, mais, nous avons $\iota_i\circ\theta_i\neq Id$. Donc pour calculer les polylogarithmes aux multiindices entiers, dans ce chaptre, nous fixerons la valeur de la constante z_0 dans la définition de l'opérateur ι_0. Ensuite, nous étendrons la définitions de la fonction $\mathrm{Li}_\bullet$ à une partie de l'algèbre $\mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle X\rangle\rangle$. Les résultats de ce chapitre sont présentés dans l'article [GD16b].

3.3.1 Prolongement de l'opérateur ι_0

Dans cette section, nous étudions les opérateurs différentiels θ_0, θ_1 définis dans l'espace $\mathscr{H}(\Omega)$ des fonctions analytiques sur Ω. Ensuite, nous leur construirons des sections, c'est-à-dire des opérateurs $\iota_0, \iota_1 \in \mathrm{End}(\mathscr{D})$ (où $\mathscr{D} \subset \mathscr{H}(\Omega)$) tels que $\iota_i \theta_i = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$ pour $i = 0, 1$. En fait, l'opérateur ι_1 sera continu sur $\mathscr{D}$ mais pas l'opérateur ι_0. Donc, nous étudierons les caractéristiques de cet opérateur et expliquerons la raison de sa non-continuité.

Tout d'abord, nous notons très classiquement $\mathscr{H}(\Omega)$ l'algèbre des fonctions analytiques définies sur Ω. De plus, nous munirons cette algèbre de la topologie de la convergence compacte. Cette topologie est la topologie associée à la famille de semi-normes $(\|.\|_K)_{K \subset_{compact} \Omega}$. Ces semi-normes sont définies par,

$$\|f\|_K = \sup_{s \in K} |f(s)|,$$

où K est un sous-ensemble compact de Ω et $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ est une fonction analytique sur Ω. Nous avons les faits suivants

1. L'espace $\mathscr{H}(\Omega)$ est métrisable et complet pour la topologie associée aux semi-normes $\|.\|_K$.

Définition 20 *Un opérateur $\phi \in \mathrm{End}(\mathscr{H}(\Omega))$ est continu ssi*

$$(\forall K_2)(\exists K_1)(\exists M_{12} > 0)(\forall f \in \mathscr{H}(\Omega))(||\phi(f)||_{K_2} \leq M_{12}||f||_{K_1}),$$

où $K_1, K_2 \subset \Omega$ sont compacts.

Maintenant, nous commencerons par les opérateurs θ_0, θ_1. Il est clair que l'espace $\mathscr{C}\{\mathrm{Li}_w\}_{w \in X^*}$ est stable par ces opérateurs, c'est-à-dire que $\theta_i(\mathscr{C}\{\mathrm{Li}_w\}_{w \in X^*}) \subset \mathscr{C}\{\mathrm{Li}_w\}_{w \in X^*}$ pour $i = 0$ ou $i = 1$.

Définition 21 *Soient $z_0 \in \Omega$. Nous définissons l'opérateur $\iota_i^{z_0} \in \mathrm{End}(\mathscr{H}(\Omega))$ par*

$$\iota_0^{z_0}(f) = \int_{z_0}^{z} f(s)\omega_0(s), \qquad \iota_1^{z_0}(f) = \int_{z_0}^{z} f(s)\omega_1(s).$$

Alors nous pouvons démotrer que $\theta_i \iota_i^{z_0} = \mathrm{Id}_{\mathscr{H}(\Omega)}$ et donc $\iota_i^{z_0}$ est une section de θ_i pour tout $i = \{0, 1\}$. En plus, les opérateurs $\iota_0^{z_0}$ et $\iota_1^{z_0}$ sont continus pour la topologie de la convergence compacte parce que

$$\|\iota_i^{z_0}(f)\|_K = \sup_{z \in \mathbb{K}} |\iota_i^{z_0}(f)(z)| \leq \|f\|_K [\sup_{z \in K} |\int_{z_0}^{z} \omega_i(s)|],$$

pour tous les ensembles compacts $K \subset \Omega$. Cela implique que les opérateurs $\iota_0^{z_0}$ et $\iota_1^{z_0}$ sont aussi bien définis sur $\mathscr{C}\{\mathrm{Li}_w\}_{w \in X^*}$ et nous avons

$$\iota_i^{z_0}(\mathscr{C}\{\mathrm{Li}_w\}_{w \in X^*}) \subset \mathscr{C}\{\mathrm{Li}_w\}_{w \in X^*}, \forall i = 0, 1.$$

On peut en déduire que les $\{\theta_i\}_{i=0,1}$ aussi sont continues.

Maintenant, nous remarquons bien que

$$\mathscr{C}\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in X^*} = \mathscr{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in X^*}.$$

Alors nous nous intéressons à une définition de ι_0, dans une $\mathbb{C}$-base de $\mathscr{C}\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in X^*}$. En fait, en utilisant l'identité suivante [Min96]

$$ux_1x_0^n = ux_1 ⧢ x_0^n - \sum_{k=1}^{n}(u ⧢ x_0^k)x_1x_0^{n-k},$$

nous obtenons la décomposition suivante :

$$\mathscr{C}\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in X^*} = \mathscr{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in X^*} = \mathscr{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in X^*x_1} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in x_0^*}.$$

De plus, nous pouvons conclure que l'ensemble

$$\begin{aligned}\mathscr{B} := (z^k \mathrm{Li}_{ux_1}(z)\,\mathrm{Li}_{x_0^n}(z))_{(k,n,u)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\times X^*} \sqcup ((1-z)^{-l}\,\mathrm{Li}_{ux_1}(z)\,\mathrm{Li}_{x_0^n}(z))_{(l,n,u)\in\mathbb{N}^+\times\mathbb{N}\times X^*}\\ \sqcup(z^k\,\mathrm{Li}_{x_0^n}(z))_{(k,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}} \sqcup ((1-z)^{-l}\,\mathrm{Li}_{x_0^n}(z))_{(l,n)\in\mathbb{N}^+\times\mathbb{N}},\end{aligned}$$

est une $\mathbb{C}-$ base de $\mathscr{C}\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in X^*}$. Nous utiliserons cette base pour donner une définition de ι_0 prolongeable à $\mathscr{C}\{Li_w\}$ de l'opérateur ι_0. Tout d'abord, nous construisons l'application $\mathrm{ind}: \mathscr{B} \to \mathbb{Z}$ qui est définie par

$$\mathrm{ind}(z^k(1-z)^{-l}\,\mathrm{Li}_{x_0^n}(z)) = k \quad \text{et} \quad \mathrm{ind}(z^k(1-z)^{-l}\,\mathrm{Li}_{ux_1}(z)\log^n(z)) = k + |ux_1|.$$

Définition 22 *Soit $b \in \mathscr{C}\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in X^*}$. Nous définissons l'image de ι_0 en b par*

$$\iota_0(b) := \begin{cases} \int_0^z b(s)\omega_0(s), & \textit{si} \quad \mathrm{ind}(b) \geq 1, \\ \int_1^z b(s)\omega_0(s), & \textit{si} \quad \mathrm{ind}(b) \leq 0. \end{cases}$$

Ensuite, nous prouvons que l'application ι_0 (dans la définition 22) est discontinue. Pour faire cela, nous choisissons deux suites de fonctions $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{C}\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in X^*}$ telles que $\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n$, et nous montrons que

$$\lim_{n\to\infty} \iota_0(f_n) \neq \lim_{n\to\infty} \iota_0(g_n).$$

Notons d'abord que

$$z = \sum_{n\geq 0} \log^n(z)/n! = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\log^n((1-z)^{-1})/n!.$$

Alors pour chaque $n \in \mathbb{N}_+$, nous choisirons

$$f_n = \sum_{0\leq m\leq n} \log^m(z)/m! \quad \textit{et} \quad g_n = \sum_{1\leq m\leq n} (-1)^{m+1}\log^m((1-z)^{-1})/m!\,.$$

Si ι_0 était continue, alors $\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n$ pour la cc (convergence compacte) entraine $\lim_{n\to\infty} \iota_0(f_n)[z] = \lim_{n\to\infty} \iota_0(g_n)[z]$ pour tout z (en particulier, pour $z \in]0,1[$). Il n'est pas difficile de voir que, pour tout z (en particulier, pour $z \in]0,1[$), nous avons

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} g_n(z) = z\,.$$

(cc dans $\mathscr{H}(\Omega)$). Mais nous avons

1. quel que soit $n \in \mathbb{N}_+$, alors $\iota_0(f_n)(z) = \iota_0(\sum_{0\le m\le n} \log^m(z)/m!) = \sum_{0\le m\le n} \int_1^z \frac{\log^m(s)ds}{m!s}$.

   Ceci implique que

$$\iota_0(f_n)(z) = \sum_{0\le m\le n} \frac{\log^{m+1}(z)}{(m+1)!} = \sum_{0\le m\le n+1} \frac{\log^m(z)}{m!} - 1 = f_{n+1}(z) - 1,$$

   et donc
$$\lim_{n\to+\infty} \iota_0(f_n)(z) = \lim_{n\to+\infty} (f_{n+1}(z) - 1) = z - 1.$$

2. D'un autre côté, nous avons, pour tout $z \in]0,1[$ (voir la première annexe),

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \iota_0(g_n)(z) &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^z g_n(s)\omega_0(s)\\ &= \int_0^z \lim_{n\to+\infty} g_n(s)\frac{ds}{s}\\ &= \int_0^z s\frac{ds}{s} = \int_0^z ds = z.\end{aligned}$$

Soit, pour tout $z \in]0,1[$,

$$z - 1 = \lim_{n\to+\infty} \iota_0(f_n)(z) \neq \lim_{n\to+\infty} \iota_0(g_n)(z) = z,$$

et donc, ι_0 dans la définition 22 n'est pas continue.

3.3.2 Extension de $\mathrm{Li}_\bullet$ aux séries de $\mathbb{C}\langle X\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_0\rangle\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_1\rangle\rangle$ et application aux polylogarithmes aux multiindices entiers

Extension de $\mathrm{Li}_\bullet$ aux séries de $\mathbb{C}\langle X\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_0\rangle\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_1\rangle\rangle$

Tout d'abord, dans le corollaire 1, nous avons vu que la famille $\{x_0^*, x_1^*\}$ est algébriquement libre sur $(\mathbb{C}\langle X\rangle, \sqcup\!\sqcup, 1_{X^*})$. Cela implique que l'anneau

$$(\mathbb{C}\langle X\rangle, \sqcup\!\sqcup, 1_{X^*})[x_0^*, x_1^*, (-x_0)^*]$$

des polynômes en $x_0^*, (-x_0)^*, x_1^*$ sur $\mathbb{C}\langle X\rangle$ est un $\mathbb{C}\langle X\rangle$-module libre. Donc nous construirons un morphisme d'algèbres de

$$(\mathbb{C}\langle X\rangle, \sqcup\!\sqcup, 1_{X^*})[x_0^*, x_1^*, (-x_0)^*]$$

dans $\mathscr{H}(\Omega)$.

Corollaire 6 ([GD16b]) *Il existe un morphisme unique* μ *de* $(\mathbb{C}\langle X\rangle, ⧢, 1_{X^*})[x_0^*, (-x_0)^*, x_1^*]$ *dans* $\mathscr{H}(\Omega)$ *satisfaisant aux deux conditions suivantes :*

i. quel que soit $w \in X^*$*, alors* $\mu(w) = \mathrm{Li}_w$.

ii. $\mu(x_0^*) = z$, $\mu((-x_0)^*) = z^{-1}$ *et* $\mu(x_1^*) = (1-z)^{-1}$.

PREUVE – Immédiat en chassant les dénominateurs. □

Remarque 11 *Cette définition algébrique correspond bien aux extensions analytiques définies précédemment [Car89] :*

$$\mu(x_0^*) = \mathrm{Li}_{\sum_{n\geq 0} x_0^n}(z) = \sum_{n\geq 0} \mathrm{Li}_{x_0^n}(z) = \sum_{n\geq 0} \mathrm{Li}_{\frac{1}{n!} x_0^{⧢ n}}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \mathrm{Li}_{x_0}^n(z) = e^{\mathrm{Li}_{x_0}(z)} = e^{\log(z)} = z.$$

$$\mu(x_1^*) = \mathrm{Li}_{\sum_{n\geq 0} x_1^n}(z) = \sum_{n\geq 0} \mathrm{Li}_{x_1^n}(z) = \sum_{n\geq 0} \mathrm{Li}_{\frac{1}{n!} x_1^{⧢ n}}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \mathrm{Li}_{x_1}^n(z) = e^{\mathrm{Li}_{x_1}(z)} = \frac{1}{1-z}.$$

Définition 23 *Nous définissons* $\mathrm{Li}_\bullet^{(1)}$ *comme étant ce morphisme* μ.

Remarquons que l'image de l'algèbre $(\mathbb{C}\langle X\rangle, ⧢, 1_{X^*})[x_0^*, (-x_0)^*, x_1^*]$ par le morphisme $\mathrm{Li}_\bullet^{(1)}$ est exactement $\mathscr{C}\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in X^*}$. Mais $\mathrm{Li}_\bullet^{(1)}$ n'est plus un isomorphisme.

Proposition 14 ([GD16b]) *Soit* $\mathrm{Li}_\bullet^{(1)} : \mathbb{C}\langle X\rangle[x_0^*, x_1^*, (-x_0)^*] \to \mathscr{H}(\Omega)$ *alors*

i. $\mathrm{Im}(\mathrm{Li}_\bullet^{(1)}) = \mathscr{C}\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in X^*}$.

ii. $\ker(\mathrm{Li}_\bullet^{(1)})$ *est l'idéal engendré par* $x_0^* ⧢ x_1^* - x_1^* + 1_{X^*}$.

PREUVE – i) Tout d'abord, remarquons que $\{(x_0^*)^{⧢ k} ⧢ (x_1^*)^{⧢ l}\}_{k\in\mathbb{Z},\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{C}\langle X\rangle$-module $\mathbb{C}\langle X\rangle[x_0^*, (-x_0)^*, x_1^*]$ et la famille

$$\{\mathrm{Li}^{(1)}_{(x_0^*)^{⧢ k} ⧢ (x_1^*)^{⧢ l}}(z)\}_{k\in Z, l\in\mathbb{N}} \text{ où } \mathrm{Li}^{(1)}_{(x_0^*)^{⧢ k} ⧢ (x_1^*)^{⧢ l}}(z) = z^k(1-z)^{-l}$$

est un système générateur de l'algèbre $\mathscr{C}$. Par suite $\mathrm{Im}(\mathrm{Li}_\bullet^{(1)})$ est engendrée par $\mathscr{C}$ et $\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in X^*}$ et on a $\mathrm{Im}(\mathrm{Li}_\bullet^{(1)}) = \mathscr{C}\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in X^*}$.

ii) Ensuite, nous déterminerons le noyau du morphisme $\mathrm{Li}_\bullet^{(1)}$. Ceci résultera du lemme suivant

Lemme 16 ([GD16b]) *Soient* M_1, M_2 *deux* K*-modules (*K *est un anneau) et* $\phi : M_1 \to M_2$ *une application* K*-linéaire. Supposons que* $N \subset \ker(\phi)$ *soit un sous-module de* M_1*. S'il y a un système générateur* $\{g_i\}_{i\in I}$ *de* M_1 *et un sous ensemble* $J \subset I$ *tels que*

1. *quel que soit $i \in I \setminus J$, il y a des éléments $c_i^j \in K; \forall j \in J$ qui satisfont*

$$g_i \equiv \sum_{j \in J \subset I} c_i^j g_j [\mathrm{mod}\, N];$$

2. *La famille $\{\phi(g_j)\}_{j\in J}$ est K-libre dans M_2 ;*

alors $N = \ker(\phi)$.

PREUVE – Supposons que $P \in \ker(\phi)$, comme $\{g_i\}_{i\in I}$ est génératrice de M_1, on peut écrire

$$P = \sum_{i\in I} p_i g_i = (\sum_{i\in J} p_i g_i) + (\sum_{i\in I\setminus J} p_i g_i) \equiv \sum_{j\in J} q_j g_j [\mathrm{mod}\, N]\ .$$

Donc $0 = \phi(P) = \sum_{j\in J} q_j \phi(g_j)$. D'autre part, nous savons que $\{\phi(g_j)\}_{j\in J}$ est K-libre dans M_2, donc nous obtenons $q_j = 0$ pour tout $j \in J$. Ceci implique $P \in N$. Finalement $\ker(\phi) \subset N$ et comme on avait $N \subset \ker(\phi)$, nous pouvons conclure $N = \ker(\phi)$. Le lemme est prouvé. □

Nous allons utiliser le lemme 16 pour calculer le noyau de $\mathrm{Li}_{\bullet}^{(1)}$. Tout d'abord, nous noterons $\mathscr{J}$ l'idéal engendré par $x_0^* ⧢ x_1^* - x_1^* + 1_{X^*}$. Nous pouvons démontrer facilement les formules suivantes, pour tout $l \geq 1$,

$$\begin{aligned} w ⧢ x_0^* ⧢ (x_1^*)^{⧢ l} &\equiv w ⧢ (x_1^*)^{⧢ l} - w ⧢ (x_1^*)^{⧢ l-1}\ [\mathscr{J}], \\ w ⧢ (-x_0)^* ⧢ (x_1^*)^{⧢ l} &\equiv w ⧢ (-x_0)^* ⧢ (x_1^*)^{⧢ l-1} + w ⧢ (x_1^*)^{⧢ l} [\mathscr{J}]\ . \end{aligned}$$

Ces formules impliquent que nous pouvons récrire chaque monôme $w ⧢ (x_0^*)^{⧢ k} ⧢ (x_1^*)^{⧢ l}$ comme une combinaison linéaire $[\mathrm{mod}\, \mathscr{J}]$ des autres monômes qui satisfont $kl = 0$. Ce que nous pouvons voir dans la figure ci-dessous. Notons que, dans le

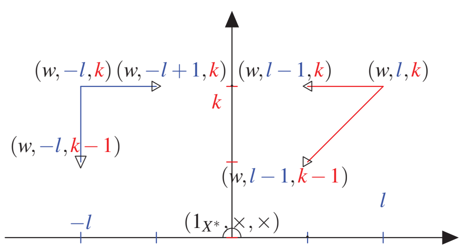


FIGURE 3.1 – Réécriture $\mathrm{mod}\, \mathscr{J}$ de $\{w ⧢ (x_0^*)^{⧢ l} ⧢ (x_1^*)^{⧢ k}\}_{\substack{k\in\mathbb{N}, l\in\mathbb{Z} \\ w\in X^*}}$

graphique 3.3.2, le triple (w, l, k) désigne l'élément $w ⧢ (x_0^*)^{⧢ l} ⧢ (x_1^*)^{⧢ k}$.

Soient maintenant les ensembles

$$\begin{aligned} I &= X^* \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \\ J &= (X^* \times \mathbb{N} \times \{0\}) \sqcup (X^* \times \{0\} \times \mathbb{Z})\ . \end{aligned}$$

Nous considérerons les modules

$$M_1 = \mathbb{C}\langle X\rangle[x_0^*, x_1^*, (-x_0)^*], \quad M_2 = \mathscr{H}(\Omega), \quad N = \mathscr{J},$$

et la famille $\{g_i\} = \{w \sqcup\!\sqcup (x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup n} \sqcup\!\sqcup (x_0^*)^{\sqcup\!\sqcup m}\}_{(w,n,m)\in I}$. En appliquant le lemme 16 à l'application $\phi = \mathrm{Li}_\bullet^{(1)}$, nous obtenons la deuxième condition de la proposition 14. $\square$

Ensuite, nous étendons le morphisme $\mathrm{Li}_\bullet^{(1)}$ à l'algèbre $\mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_0\rangle\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_1\rangle\rangle$. En fait, nous savons que la famille $(x_0^{\sqcup\!\sqcup k_0} \sqcup\!\sqcup (\alpha_0 x_0)^* \sqcup\!\sqcup x_1^{\sqcup\!\sqcup k_1} \sqcup\!\sqcup (\alpha_1 x_1)^*)_{\substack{k_i\in\mathbb{N};\\ \alpha_i\in\mathbb{C}}}$ est une $\mathbb{C}$-base de $\mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_0\rangle\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_1\rangle\rangle$.

Ensuite, nous considérons l'application de $\mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_0\rangle\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_1\rangle\rangle$ à $\mathscr{H}(\Omega)$ qui, à chaque élément

$$T(k_0, k_1, \alpha_0, \alpha_1) = x_0^{\sqcup\!\sqcup k_0} \sqcup\!\sqcup (\alpha_0 x_0)^* \sqcup\!\sqcup x_1^{\sqcup\!\sqcup k_1} \sqcup\!\sqcup (\alpha_1 x_1)^*,$$

fait correspondre

$$\log^{k_0}(z) z^{\alpha_0} \log^{k_1}(1/(1-z))(1/(1-z))^{\alpha_1}$$

et nous notons cette application $\mathrm{Li}_\bullet^{(2)}$. Le problème ici est que nous avons besoin de prouver l'existence de l'application $\mathrm{Li}_\bullet^{(2)}$. Tout d'abord, nous remarquons bien que

$$T(j_0, j_1, \alpha_0, \alpha_1) T(k_0, k_1, \beta_0, \beta_1) = T(j_0 + k_0, j_1 + k_1, \alpha_0 + \beta_0, \alpha_1 + \beta_1).$$

Et puis, par le lemme 6, nous pouvons conclure que la famille $\{(\alpha_0 x_0)^* \sqcup\!\sqcup (\alpha_1 x_1)^*\}_{\alpha_i\in\mathbb{C}}$ est une $(\mathbb{C}\langle X\rangle, \sqcup\!\sqcup, 1)$-base de $\mathbb{C}\langle X\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_0\rangle\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_1\rangle\rangle$, et donc

$$\{w \sqcup\!\sqcup (\alpha_0 x_0)^* \sqcup\!\sqcup (\alpha_1 x_1)^*\}_{\substack{\alpha_i\in\mathbb{C}\\ w\in X^*}}$$

est une $\mathbb{C}$-base de

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\langle X\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_0\rangle\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_1\rangle\rangle &= \mathbb{C}\langle X\rangle[\mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_0\rangle\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_1\rangle\rangle] \\ &= \mathbb{C}\langle X\rangle \sqcup\!\sqcup span_{\mathbb{C}}(SP_{\mathbb{C}}(X)). \end{aligned}$$

D'un autre côté, un corollaire de la proposition 6 est que la famille

$$\{(a_0 x_0)^* \sqcup\!\sqcup (a_1 x_1)^*\}_{a_0, a_1\in\mathbb{C}^2}$$

est linéairement indépendante sur $\mathbb{C}\langle X\rangle \simeq \mathbb{C}[\mathscr{L}yn(X)]$. C'est-à-dire que l'application $\mathrm{Li}^{(2)}$ est bien définie, et de plus elle n'est pas injective.

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}\langle X\rangle, \sqcup\!\sqcup, 1_{X^*}) & \xrightarrow{\mathrm{Li}_\bullet} & \mathbb{C}\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in X^*} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ (\mathbb{C}\langle X\rangle, \sqcup\!\sqcup, 1_{X^*})[x_0^*, (-x_0)^*, x_1^*] & \xrightarrow{\mathrm{Li}_\bullet^{(1)}} & \mathscr{C}\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in X^*} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathbb{C}\langle X\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_0\rangle\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_1\rangle\rangle & \xrightarrow{\mathrm{Li}_\bullet^{(2)}} & \mathscr{H}(\Omega) \end{array}$$

Il n'est pas difficile de démontrer que $(x_0^* \sqcup\!\sqcup x_1^* - x_1^* + 1_{X^*}) \subset \ker(\mathrm{Li}_\bullet^{(2)})$ mais l'inclusion inverse n'est pas simple.

Polylogarithmes aux multiindices entiers

Maintenant nous utiliserons les résultats de la première sous-section pour étudier les polylogarithmes aux multiindices. Tout d'abord, notons $\Im$ et Θ les morphismes d'algèbre (associatives avec unité) $\mathbb{C}\langle X\rangle \to \mathrm{End}(\mathscr{C}\{\mathrm{Li}_w\})$ définis par

$$\Im(x_i) = \iota_i \text{ et } \Theta(x_i) = \theta_i \ .$$

Par exemple, si $w = x_0x_1$ alors

$$\begin{aligned}\Im(x_0x_1)(\mathrm{Li}_2)(z) &= \Im(x_0)\iota_1(\mathrm{Li}_2)(z) = \iota_0(\mathrm{Li}_{1,2}(z)) = \mathrm{Li}_{2,2}(z).\\ \Theta(x_0x_1)(\mathrm{Li}_2)(z) &= \Theta(x_0)\theta_1(\mathrm{Li}_2)(z) = \theta_0(\frac{1-z}{z}\mathrm{Li}_1(z)) = 1 - \frac{\mathrm{Li}_1(z)}{z}\ .\end{aligned}$$

À ce moment, pour tout $y_{s_1}u \in Y^*$, comme nous savions que

$$\mathrm{Li}^-_{y_{s_1}u} = \theta_0^{s_1}(\theta_0\iota_1)\mathrm{Li}^-_u = \theta_0^{s_1}(\lambda\,\mathrm{Li}^-_u) = \sum_{k_1=0}^{s_1}\binom{s_1}{k_1}(\theta_0^{k_1}\lambda)(\theta_0^{s_1-k_1}\mathrm{Li}^-_u)\ .$$

Donc, par la récurrence en $r \in \mathbb{N}_+$, pour tout $y_{s_1}\ldots y_{s_r} \in Y^*$, nous pouvons prouver facilement que

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}^-_{y_{s_1}\ldots y_{s_r}} = \sum_{k_1=0}^{s_1}\sum_{k_2=0}^{s_1+s_2-k_1}\ldots\sum_{k_r=0}^{\substack{(s_1+\ldots+s_r)-\\(k_1+\ldots+k_{r-1})}}\binom{s_1}{k_1}\binom{s_1+s_2-k_1}{k_2}\ldots\\ \binom{s_1+\ldots+s_r-k_1-\ldots-k_{r-1}}{k_r}(\theta_0^{k_1}\lambda)(\theta_0^{k_2}\lambda)\ldots(\theta_0^{k_r}\lambda)\ ,\end{aligned}$$

où $\lambda(z) = \dfrac{z}{1-z} \in \mathscr{C}$. Nous remarquons bien que pour tout $f(z) \in \mathscr{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}_+$,

$$\theta_0^n(f)(z) = \sum_{k=1}^{n} S_2(n,k)z^k(\frac{\partial^k}{\partial z^k})(f(z))\ . \tag{3.20}$$

Ensuite, pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, nous avons $(\dfrac{\partial^k}{\partial z^k})(\lambda(z)) = \dfrac{k!}{(1-z)^{k+1}}$ alors nous appliquons la relation (3.20) à la fonction $f(z) = \lambda(z)$ pour d'obtenir

$$\theta_0^{k_i}\lambda(z) = \begin{cases} \lambda(z), & \text{si } \ k_i = 0,\\ \dfrac{1}{1-z}\displaystyle\sum_{j=1}^{k_i} S_2(k_i,j)j!\lambda^j(z), & \text{si } \ k_i > 0.\end{cases}$$

Nous notons maintenant

$$T_{k_i} = \begin{cases}(x_0+x_1)^*, & \text{si } \ k_i = 0,\\ x_1^* \,⧢ \displaystyle\sum_{j=1}^{k_i} S_2(k_i,j)j!((x_0+x_1)^*)^{⧢ j}, & \text{si } \ k_i > 0,\end{cases}$$

et nous considérons la série

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k_1=0}^{s_1}\sum_{k_2=0}^{s_1+s_2-k_1}\ldots\sum_{k_r=0}^{\substack{(s_1+\ldots+s_r)-\\(k_1+\ldots+k_{r-1})}}\binom{s_1}{k_1}\binom{s_1+s_2-k_1}{k_2}\ldots \\ &\quad \binom{s_1+\ldots+s_r-k_1-\ldots-k_{r-1}}{k_r}T_{k_1}\sqcup\!\sqcup\ldots\sqcup\!\sqcup T_{k_r}, \end{aligned}$$

nous obtenons alors (puisque $T\in Dom(\mathrm{Li}^{(1)})$,

$$\mathrm{Li}^-_{y_{s_1}\ldots y_{s_r}}(z)=\mathrm{Li}^{(1)}_T(z),$$

pour tout $y_{s_1}\ldots y_{s_r}\in Y_0^*$. De plus, nous avons démontré que $\ker(\mathrm{Li}^{(1)}_\bullet)=\langle x_0^*\sqcup\!\sqcup x_1^*-x_1^*+1_{X^*}\rangle$, alors pour tout $y_{s_1}\ldots y_{s_r}\in Y_0^*$, nous obtenons

$$\mathrm{Li}^-_{y_{s_1}\ldots y_{s_r}\in Y_0^*}(z)=\mathrm{Li}_F(z):=\mathrm{Li}^{(1)}_F(z), \tag{3.21}$$

avec

$$\begin{aligned} F &= \sum_{k_1=0}^{s_1}\sum_{k_2=0}^{s_1+s_2-k_1}\ldots\sum_{k_r=0}^{\substack{(s_1+\ldots+s_r)-\\(k_1+\ldots+k_{r-1})}}\binom{s_1}{k_1}\binom{s_1+s_2-k_1}{k_2}\ldots \\ &\quad \binom{s_1+\ldots+s_r-k_1-\ldots-k_{r-1}}{k_r}F_{k_1}\sqcup\!\sqcup\ldots\sqcup\!\sqcup F_{k_r}, \\ F_{k_i} &= \begin{cases} x_1^*-1_{X^*}, & \text{si}\quad k_i=0,\\ x_1^*\sqcup\!\sqcup\displaystyle\sum_{j=1}^{k_i}S_2(k_i,j)\,j!(x_1^*-1_{X^*})^{\sqcup\!\sqcup j}, & \text{si}\quad k_i>0.\end{cases} \end{aligned}$$

Par exemple

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}^-_{1,1}(z) &= \mathrm{Li}_{3(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup 4}-7(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup 3}+5(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup 2}-x_1^*} \\ \mathrm{Li}^-_{2,1}(z) &= \mathrm{Li}_{12(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup 5}-33(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup 4}+31(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup 3}-11(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup 2}+x_1^*} \\ \mathrm{Li}^-_{1,2}(z) &= \mathrm{Li}_{8(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup 5}-23(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup 4}+23(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup 3}-9(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup 2}+x_1^*} \end{aligned}$$

Notons que $\mathrm{Li}^-_0(z)=\lambda(z)=\dfrac{z}{1-z}=\mathrm{Li}_{x_1^*-1_{X^*}}(z)=\mathrm{Li}_{x_1^*x_1}(z)$. Alors il n'est pas difficile de prouver que

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}^-_0(z) &= \lambda(z)=\frac{z}{1-z}=\mathrm{Li}_{x_1^*-1_{X^*}}(z)=\mathrm{Li}_{x_1^*x_1}(z) \\ \mathrm{Li}^-_{\underbrace{0,\ldots0}_{\text{k fois 0}}}(z) &= \lambda^k(z)=(\frac{z}{1-z})^k=\mathrm{Li}_{(x_1^*-1_{X^*})^{\sqcup\!\sqcup k}}(z)=\mathrm{Li}_{\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k}{i}(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup(k-i)}+(-1)^k1_{X^*}}(z). \end{aligned}$$

Proposition 15 ([GD16b]) *Soit* $(s_1,\ldots,s_r)\in\mathbb{N}$. *Alors il existe un polynôme* $P\in\mathbb{C}\langle x_1^*\rangle$ $(=\mathbb{C}[x_1^*])$, *de degré* r, *tel que* $\mathrm{Li}^-_{s_1,\ldots,s_r}(z)=\mathrm{Li}_P(z)$ *et*

i. Si $s_1=\ldots=s_r=0$ *alors* $\langle P\mid(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup k}\rangle=(-1)^{r-k}\binom{r}{r-k}$ *pour tout* $r\geq k\geq 0$.

ii. Si $s_1+\ldots+s_r \neq 0$ *alors* $\langle P \mid 1_{X^*}\rangle = 0$.

Notons que l'ensemble $\{(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, k}\}_{k\geq 0}$ est une base de l'algèbre $\mathbb{C}\langle x_1^*\rangle$. C'est-à-dire que chaque $P \in \mathbb{C}\langle x_1^*\rangle$, peut être écrit

$$P = \sum_{i=0}^{n} \alpha_n (x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, i}, n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall i = 0,\ldots,n; \alpha_i \in \mathbb{C}. \tag{3.22}$$

Notons $Dom(\mathrm{Li}_\bullet) := \{S \in \mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle \mid \mathrm{Li}_S := \sum_{w\in X^*} \langle S \mid w\rangle \mathrm{Li}_w \text{ est convergente}\}$.

Proposition 16 ([GD16b]) *Quels que soient* $P,Q \in Dom(\mathrm{Li}_\bullet)$ *on a* $\mathrm{Li}_{P \sqcup\!\sqcup\, Q} = \mathrm{Li}_P \mathrm{Li}_Q$.

PREUVE – Soit $P = \sum_{w\in X^*} \langle P \mid w\rangle w$, $Q = \sum_{v\in X^*} \langle Q \mid v\rangle v \in Dom(\mathrm{Li}_\bullet)$, nous avons

$$P \sqcup\!\sqcup\, Q = \sum_{w,v\in X^*} \langle P \mid w\rangle\langle Q \mid v\rangle\, w \sqcup\!\sqcup\, v\, .$$

Notons que $\forall w,v \in X^*, \mathrm{Li}_{w \sqcup\!\sqcup\, v} = \mathrm{Li}_w \mathrm{Li}_v$. Donc, nous pouvons prouver que

$$\mathrm{Li}_{P \sqcup\!\sqcup\, Q} = \sum_{w,v\in X^*} \langle P \mid w\rangle\langle Q \mid v\rangle \mathrm{Li}_w \mathrm{Li}_v = \sum_{w\in X^*} \langle P \mid w\rangle \mathrm{Li}_w \sum_{v\in X^*} \langle Q \mid v\rangle \mathrm{Li}_v = \mathrm{Li}_P \mathrm{Li}_Q\, .$$

$\square$

Corollaire 7 *Quel que soit* $P,Q \in (\mathbb{C}[x_1^*], \sqcup\!\sqcup, 1_{X^*})$, *nous avons* $\mathrm{Li}_{P \sqcup\!\sqcup\, Q} = \mathrm{Li}_P \mathrm{Li}_Q$.

Exemple 25

P	Q	$P \sqcup\!\sqcup\, Q$
$x_1^* - 1_{X^*}$	$x_1^* - 1_{X^*}$	$(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, 2} - 2x_1^* + 1_{X^*}$
$x_1^* - 1_{X^*}$	$(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, 2} - x_1^*$	$(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, 3} - 2(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, 2} + x_1^*$
$(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, 2} - x_1^*$	$(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, 2} - x_1^*$	$(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, 4} - 2(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, 3} + (x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, 2}$
$(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, 2} - x_1^*$	$2(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, 3} - 3(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, 2} + x_1^*$	$2(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, 5} - 5(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, 4}$ $+4(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, 3} - (x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, 2}$
$(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, 2} - 2x_1^* + 1_{X^*}$	$(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, 2} - x_1^*$	$(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, 4} - 3(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, 3}$ $+3(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, 2} - x_1^*$
$(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, 2} - 2x_1^* + 1_{X^*}$	$2(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, 3} - 4(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, 2} + 2x_1^*$	$2(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, 5} - 8(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, 4}$ $+12(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, 3} - 8(x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, 2}$

Li_P	Li_Q	$\mathrm{Li}_P \mathrm{Li}_Q$	$\mathrm{Li}_{P \sqcup\!\sqcup Q}$
$\frac{z}{1-z}$ $(=\mathrm{Li}_0^-)$	$\frac{z}{1-z}$ $(=\mathrm{Li}_0^-)$	$\frac{z^2}{(1-z)^2}$ $(=(\mathrm{Li}_0^-)^2)$	$\frac{1}{(1-z)^2}-\frac{2}{1-z}+1=\frac{z^2}{(1-z)^2}$
$\frac{z}{1-z}$ $(=\mathrm{Li}_0^-)$	$\frac{z}{(1-z)^2}$ $(=\mathrm{Li}_1^-)$	$\frac{z^2}{(1-z)^3}$ $(=\mathrm{Li}_0^-\mathrm{Li}_1^-)$	$\frac{1}{(1-z)^3}-\frac{2}{(1-z)^2}+\frac{1}{1-z}=\frac{z^2}{(1-z)^3}$
$\frac{z}{(1-z)^2}$ $(=\mathrm{Li}_1^-)$	$\frac{z}{(1-z)^2}$ $(=\mathrm{Li}_1^-)$	$\frac{z^2}{(1-z)^4}$ $(=(\mathrm{Li}_1^-)^2)$	$\frac{1}{(1-z)^4}-\frac{2}{(1-z)^3}+\frac{1}{(1-z)^2}=\frac{z^2}{(1-z)^4}$
$\frac{z}{(1-z)^2}$ $(=\mathrm{Li}_1^-)$	$\frac{z^2+z}{(1-z)^3}$ $(=\mathrm{Li}_2^-)$	$\frac{z^3+z^2}{(1-z)^5}$ $(=\mathrm{Li}_1^-\mathrm{Li}_2^-)$	$\frac{2}{(1-z)^5}-\frac{5}{(1-z)^4}+\frac{4}{(1-z)^3}-\frac{1}{(1-z)^2}=\frac{z^3+z^2}{(1-z)^5}$
$\frac{z^2}{(1-z)^2}$ $(=\mathrm{Li}_{0,0}^-)$	$\frac{z}{(1-z)^2}$ $(=\mathrm{Li}_1^-)$	$\frac{z^3}{(1-z)^4}$ $(=\mathrm{Li}_{0,0}^-\mathrm{Li}_1^-)$	$\frac{1}{(1-z)^4}-\frac{3}{(1-z)^3}+\frac{3}{(1-z)^2}-\frac{1}{1-z}=\frac{z^3}{(1-z)^4}$
$\frac{z^2}{(1-z)^2}$ $(=\mathrm{Li}_{0,0}^-)$	$\frac{2z^2}{(1-z)^3}$ $(=\mathrm{Li}_{1,0}^-)$	$\frac{2z^4}{(1-z)^5}$ $(=\mathrm{Li}_{0,0}^-\mathrm{Li}_{1,0}^-)$	$\frac{2}{(1-z)^5}-\frac{8}{(1-z)^4}+\frac{12}{(1-z)^3}-\frac{8}{(1-z)^2}+\frac{2}{1-z}=\frac{2z^4}{(1-z)^5}$

Pour tout $w \in Y_0^*$, nous écrivons l'expression $\mathrm{Li}_w^-(z)$ dans $\mathbb{Z}[1/(1-z)]$ comme

$$\mathrm{Li}_w^-(z) = a^w_{(w)+|w|}(1-z)^{-(w)-|w|} + \ldots + a^w_1(1-z)^{-1} + a^w_0,$$

où pour tout $i = 0, \ldots, (w)+|w|$, $a_i^w \in \mathbb{Z}$. Nous avons

$$a_i^{1_{Y_0^*}} = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 0, \\ 0 & \text{pour } n > 0. \end{cases}$$

Remarque 12 *Soient* $y_{-s_1} \ldots y_{-s_r} \in Y_-^*$ *et* $y_t w \in Y^*$ *où* $Y_- = \{y_s\}_{s \in -\mathbb{N}}$ *and* $Y = \{y_s\}_{s \in \mathbb{N}_+}$.

Soit $y_k w \in (Y_- \cup Y_0)^*$ *et* $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. *Le polylogarithme en* $y_k w$, *noté* $\mathrm{Li}_{y_k w}(z)$, *est calculé par* $\mathrm{Li}_{1_{(Y_- \cup Y_0)^*}}(z) = 1$, *et*

$$\mathrm{Li}_{y_k w}(z) = \begin{cases} \theta_0^{k+1}\iota_1(\mathrm{Li}_w)(z) & \Leftrightarrow k < 0 \\ \lambda(z)\mathrm{Li}_w(z) & \Leftrightarrow k = 0. \\ \iota_0^k \iota_1(\mathrm{Li}_w)(z) & \Leftrightarrow k > 0. \end{cases}$$

Alors nous obtenons que

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}_{y_{-s_1}\ldots y_{-s_r} y_t w}(z) &= \theta_0^{s_1}(\theta_0\iota_1)\ldots\theta_0^{s_r}(\theta_0\iota_1)\mathrm{Li}_{y_t w}(z) \\ &= \sum_{k_1=0}^{s_1}\ldots\sum_{k_r=0}^{s_r}\binom{s_1}{k_1}\ldots\binom{s_r}{k_r}\mathrm{Li}_{y_{-k_1}\ldots y_{-k_r}}(z)\,\mathrm{Li}_{y_{t+k_1\ldots+k_r-s_1-\ldots-s_r}w}(z). \end{aligned}$$

Alors les familles $\{a_i^w\}_{w\in Y_0^+, n\in\mathbb{N}}$ sont définies par la proposition suivante.

Proposition 17 (G-M-H, 2016) *Soit $y_k u \in Y_0^+$. Nous avons*

1. *Si $k=0$ alors* $a_i^{y_0 u} := \begin{cases} a_{i-1}^u & \text{pour } i=(u)+|u|+1, \\ a_{i-1}^u - a_i^u & \text{pour } 1\le i\le (u)+|u|, \\ -a_i^u & \text{pour } i=0, \\ 0 & \text{pour les autres.} \end{cases}$.
2. *Si $k>0$ alors* $a_i^{y_k u} := \begin{cases} (i-1)a_{i-1}^{y_{k-1}u} & \text{pour } i=(u)+|u|+k+1, \\ (i-1)a_{i-1}^{y_{k-1}u} - i a_i^{y_{k-1}u} & \text{pour } 2\le i\le (u)+|u|+k, \\ -a_i^{y_{k-1}u} & \text{pour } i=1, \\ 0 & \text{pour les autres.} \end{cases}$.

PREUVE –

1. Si $k=0$, alors nous avons $\mathrm{Li}^-_{y_0 u} = \mathrm{Li}^-_{y_0}\mathrm{Li}^-_u$. Donc, nous obtenons cette condition.
2. Cette condition est un corollaire direct de l'identité $\mathrm{Li}^-_{y_k u} = \theta_0 \mathrm{Li}^-_{y_{k-1}u}$.

□

$k\backslash i$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	-1	1	0	0	0	0	0	0	...
1	0	-1	1	0	0	0	0	0	...
2	0	1	-3	2	0	0	0	0	...
3	0	-1	7	- 12	6	0	0	0	...
4	0	1	-15	50	-60	24	0	0	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

TABLE 3.2 – La valeur de $a_i^{y_k}$

$k\backslash i$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	1	-2	1	0	0	0	0	0	...
1	0	2	-4	2	0	0	0	0	...
2	0	-2	10	-14	6	0	0	0	...
3	0	2	-22	62	-66	24	0	0	...
4	0	-2	46	-230	450	-384	120	0	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

TABLE 3.3 – La valeur de $a_i^{y_k y_0}$

Corollaire 8 (G-M-H, 2016) *Quel que soit $w\in Y_0^*$, nous avons*

$$\mathrm{Li}^-_w(z) = \mathrm{Li}_{P_w}(z),$$

où $P_w := \sum_{i=0}^{(w)+|w|} a_i^w (x_1^*)^{\sqcup\!\sqcup\, i} \in (\mathbb{C}[x_1^*], \sqcup\!\sqcup, 1_{X^*})$ *et les coefficients* $\{a_i^w\}_{i\in\mathbb{N}}$ *sont définis dans la proposition 17.*

Notons que quel que soit $k \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{1-z}\right)^{(k)} = \frac{1}{k!}\sum_{n\geq k} n\ldots(n-k+1)z^{n-k} = \sum_{N\geq 0}\binom{N+k}{k}z^N.$$

D'un autre côté, nous avons aussi

$$\forall w \in Y_0^*, \sum_{N\geq 0} \mathrm{H}_w^-(N)z^N = \frac{\mathrm{Li}_w^-(z)}{1-z} = \frac{a_{(w)+|w|}^w}{(1-z)^{(w)+|w|+1}} + \ldots + \frac{a_1^w}{(1-z)^2} + \frac{a_0^w}{1-z}.$$

Donc,

$$\sum_{N\geq 0} \mathrm{H}_w^-(N)z^N = a_{(w)+|w|}^w \sum_{N\geq 0}\binom{N+(w)+|w|}{(w)+|w|}z^N + \ldots + a_0^w \sum_{N\geq 0}\binom{N}{0}z^N,$$

c'est-à-dire que

$$\forall w \in Y_0^*, \mathrm{H}_w^-(N) = a_{(w)+|w|}^w\binom{N+(w)+|w|}{(w)+|w|} + \ldots + a_0^w\binom{N}{0} = \sum_{k=0}^{(w)+|w|} a_k^w \binom{N+k}{k}.$$

Exemple 26

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_{y_0}^-(N) &= \binom{N+1}{1} - \binom{N}{0},\\
\mathrm{H}_{y_1}^-(N) &= \binom{N+2}{2} - \binom{N+1}{1},\\
\mathrm{H}_{y_2}^-(N) &= 2\binom{N+3}{3} - 3\binom{N+2}{2} + \binom{N+1}{1},\\
\mathrm{H}_{y_3}^-(N) &= 6\binom{N+4}{4} - 12\binom{N+3}{3} + 7\binom{N+2}{2} - \binom{N+1}{1},\\
\mathrm{H}_{y_0^2}^-(N) &= \binom{N+2}{2} - 2\binom{N+1}{1} + \binom{N}{0},\\
\mathrm{H}_{y_1y_0}^-(N) &= 2\binom{N+3}{3} - 4\binom{N+2}{2} + 2\binom{N+1}{1},\\
\mathrm{H}_{y_2y_0}^-(N) &= 6\binom{N+4}{4} - 14\binom{N+3}{3} + 10\binom{N+2}{2} - 2\binom{N+1}{1}.
\end{aligned}$$

Applications aux sommes harmoniques en les multiindices négatifs

Rappelons que $y_1^* = \sum_{n\geq 0} y_1^n$, nous avons alors

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{1-z}\mathrm{Li}_{x_1^*}(z) = \sum_{N\geq 0}\mathrm{H}_{y_1^*}(N)z^N.$$

D'un autre côté, nous avons

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\frac{d}{dz}(\frac{1}{1-z})=\frac{d}{dz}(\sum_{N\geq 0}z^N)=\sum_{N\geq 0}(N+1)z^N,$$

et alors $\mathrm{H}_{y_1^*}(N)=N+1,\forall N\in\mathbb{N}$. Donc, nous obtenons que

Corollaire 9 *Quel que soit $w=y_{s_1}\ldots y_{s_r}\in Y^*$, nous avons*

$$\mathrm{H}_w^-(N)=\sum_{k_r=0}^{s_r}\ldots\sum_{k_1=0}^{r-1+\sum_{i=1}^r s_i-\sum_{i=2}^r k_i}\sum_{k_{r+1}=0}^{r+\sum_{i=1}^r s_i-\sum_{i=1}^r k_i}\frac{\binom{s_r+1}{k_r}\ldots\binom{r+\sum_{i=1}^r s_i-\sum_{i=2}^r k_i}{k_1}}{(s_r+1)\ldots(r+\sum_{i=1}^r s_i-\sum_{i=2}^r k_i)}$$
$$\binom{r+\sum_{i=1}^r s_i-\sum_{i=1}^r k_i}{k_{r+1}}(\prod_{i=1}^r b_{y_{k_i}})(\mathrm{H}_{y_1^*}(N)-1)^{k_{r+1}}.$$

Régularisation des polyzetas aux multiindices négatifs

Soit $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ un ensemble infini des variables. La fonction symétrique élémentaire η_k et la somme puissance $\psi_k,k\in\mathbb{N}_+$ sont définies par [Min13a]

$$\eta_k(\underline{t}):=\sum_{n_1>\ldots n_k>0}t_{n_1}\ldots t_{n_k}\quad\text{et}\quad\psi_k(\underline{t}):=\sum_{n>0}t_n^k.$$

Alors la fonction génératrice de la suite $\{\eta_k(\underline{t})\}_{k\in\mathbb{N}_+}$ est la série formelle

$$1+\sum_{k\geq 1}\eta_k(\underline{t})z^k=\prod_{i>0}(1+t_iz):=\eta(\underline{t}\mid z).$$

De la même, nous avons aussi

$$\sum_{k\geq 1}\psi_k(\underline{t})z^k=\sum_{i\geq 1}\frac{t_iz}{1-t_iz}:=\psi(\underline{t}\mid z).$$

De plus, les fonctions génératrices des suites $\{\eta_k(\underline{t})\}_{k\in\mathbb{N}_+}$ et $\{\psi_k(\underline{t})\}_{k\in\mathbb{N}_+}$ satisfont l'identité de Newton

$$z\frac{d}{dz}\log(\eta(\underline{t}\mid z))=\ \psi(\underline{t}\mid -z)\ . \tag{3.23}$$

Soit $Y=\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}_+}$ un alphabet infini. Nous construisons un ordre $\succ$ tel que

$$y_1\succ y_2\succ y_3\succ\ldots.$$

Définition 24 ([GDT98]) *Soit $w=y_{s_1}\ldots y_{s_r}\in Y^*$. La fonction quasi-symétrique F_w est définie ici par*

$$\mathrm{F}_w(\underline{t}):=\sum_{n_1>\ldots>n_r>0}t_{n_1}^{s_1}\ldots t_{n_r}^{s_r}\ .$$

Alors, nous avons $\mathrm{F}_{y_1^k} = \eta_k$ et $F_{y_k} = \psi_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. De plus, la famille $\{\mathrm{F}_{y_1^k}\}_{k\geq 0}$ est linéairement indépendante et d'après l'équation (3.23), nous obtenons que

$$\sum_{k\geq 0} \mathrm{F}_{y_1^k} z^k = \exp(-\sum_{k\geq 1} \mathrm{F}_{y_k} \frac{(-z)^k}{k}) \ .$$

En particulier, nous choisissons (pour tout $N \in \mathbb{N}_+$ et tout i tel que $N \geq i > 0$) $t_i = \frac{1}{i}$ et $\forall i > N, t_i = 0$, nous obtenons la somme harmonique $\mathrm{H}_w(N)$ où $w = y_{s_1} \ldots y_{s_r} \in Y^*$. Donc nous avons aussi

$$\sum_{k\geq 0} \mathrm{H}_{y_1^k} z^k = \exp(-\sum_{k\geq 1} \mathrm{H}_{y_k} \frac{(-z)^k}{k}). \tag{3.24}$$

Ensuite, nous redonnons les morphismes

$$\zeta_{⧢} : (\mathbb{C}\langle X\rangle, ⧢, 1_{X^*}) \to (\mathbb{C}, \cdot, 1) \text{ et } \boldsymbol{\gamma_\bullet} : (\mathbb{C}\langle Y\rangle, \text{⧢}\!\!\!-, 1_{Y^*}) \to (\mathbb{C}, \cdot, 1),$$

tels que

- quel que soit $l \in (\mathscr{L}yn(X)\backslash X)$, on a [6] $\zeta_{⧢}(l) = \gamma_{\pi_Y(l)} = \lim_{z\to 1} \mathrm{Li}_l(z)$.
- $\zeta_{⧢}(x_0) = \zeta_{⧢}(x_1) = 0$ et $\gamma_{y_1} = \gamma$.

Donc, pour tout $t \in \mathbb{N}_+$, $\zeta_{⧢}((tx_0)^*) = \zeta_{⧢}((tx_1)^*) = 1$.

Notons que [Cos08, Min13a], $\sum_{n\geq 0} \mathrm{H}_{y_1^n} t^n = \exp(-\sum_{n\geq 1} \mathrm{H}_{y_n} \frac{(-t)^n}{n})$. D'après une propriété de la fonction gamma, nous obtenons

$$\gamma_{\pi_Y((tx_1)^*)} = \exp(\gamma t - \sum_{n\geq 2} \zeta(n) \frac{(-t)^n}{n}) = \frac{1}{\Gamma(1+t)}, \forall |t| < 1. \tag{3.25}$$

Et alors, nous étendons $\gamma_{\pi_Y((tx_1)^*)}$ à $t \in \mathbb{N}$ par

$$\gamma_{\pi_Y((tx_1)^*)} := \frac{1}{\Gamma(1+t)} = \frac{1}{t!},$$

et

$$\forall P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (kx_1)^* \in (\mathbb{C}[x_1^*], ⧢, 1_{X^*}),\ \gamma_{\pi_Y(P)} := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \gamma_{\pi_Y((kx_1)^*)} \ . \tag{3.26}$$

Alors d'après la formule (3.21) et le théorème 9, nous pouvons obtenir la proposition suivante :

6. L'application π_Y est définie comme dans l'équation (5).

Proposition 18 *Soit* $y_{s_1}\ldots y_{s_r}\in Y_0^*$. *Supposons que* $\mathrm{Li}_w^- = \mathrm{Li}_{P_w}$ *où* $P_w \in (\mathbb{C}[x_1^*], ш, 1_{X^*})$ *et* $\deg(P_w) = \min\{\deg(P) \mid P \in (\mathbb{C}[x_1^*], ш, 1_{X^*}), \mathrm{Li}_w^- = \mathrm{Li}_P\}$.

Notant[7] $\gamma_{-s_1,\ldots,-s_r} := \gamma_{\pi_Y(P_w)}$, *nous avons*

$$\gamma_{-s_1,\ldots,-s_r} = \sum_{i=r}^{s_1+\ldots+s_r}\sum_{j=0}^{s_1\ldots+s_{r-1}} l_{i,j}\sum_{k=0}^{|w|+i-1-j}\binom{|w|+i-1-j}{k}(-1)^k\frac{1}{(|w|+i-k)!},$$

où $l_{i,j} = 0, \forall i < j+1$ *et*

$$\forall i \geq j+1, \qquad l_{i,j} = \sum_{\substack{1\leq k_t\leq s_t\\ k_1+\ldots+k_r=i}}\left(\prod_{n=1}^{r}(k_n!S_2(s_n,k_n))\right)\sum_{\substack{0\leq t_m\leq k_m\\ 1\leq m\leq r-1}}^{t_1+\ldots+t_{r-1}=j}\prod_{p=1}^{r-1}$$
$$\binom{k_r+\ldots+k_{r-p+1}+p-t_{r-p+1}-\ldots-t_{r-1}}{t_{r-p}}\binom{k_{r-p}+t_{r-p+1}+\ldots t_{r-1}}{k_{r-p}-t_{r-p}}.$$

PREUVE – Cette proposition est un corollaire direct du théorème 9 et les formules (3.21) et (3.26). □

Pour finir ce chapitre, nous donnerons les premières valeurs de la régularisation $\gamma_\bullet$ aux multiindices négatifs.

Exemple 27

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= -1+\frac{1}{1!} = 0,\\
\gamma_{-1} &= -\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!} = -\frac{1}{2},\\
\gamma_{-2} &= \frac{1}{1!}-\frac{3}{2!}+\frac{2}{3!} = -\frac{1}{6},\\
\gamma_{-3} &= -\frac{1}{1!}+\frac{7}{2!}-\frac{12}{3!}+\frac{6}{4!} = \frac{3}{4},\\
\gamma_{-4} &= \frac{1}{1!}-\frac{15}{2!}+\frac{50}{3!}-\frac{60}{4!}+\frac{24}{5!} = -\frac{7}{15},\\
\gamma_{0,0} &= 1-\frac{2}{1!}+\frac{1}{2!} = -\frac{1}{2},\\
\gamma_{-1,0} &= \frac{2}{1!}-\frac{4}{2!}+\frac{2}{3!} = \frac{1}{3},\\
\gamma_{0,-1} &= \frac{1}{1!}-\frac{2}{1!}+\frac{1}{3!} = -\frac{5}{6},\\
\gamma_{-2,0} &= -\frac{2}{1!}+\frac{10}{2!}-\frac{14}{3!}+\frac{6}{4!} = \frac{11}{12},\\
\gamma_{0,-2} &= -1+\frac{4}{2!}-\frac{5}{3!}+\frac{2}{4!} = \frac{1}{4},\\
\gamma_{-1,-1} &= -1+\frac{5}{2!}-\frac{7}{3!}+\frac{3}{4!} = \frac{11}{24},
\end{aligned}$$

7. Ici, $\gamma_{\pi_Y(P_w)}$ est définie par l'équation (3.26).

$$\begin{aligned}
\gamma_{-4,-5} &= 1-\frac{527}{2!}+\frac{21301}{3!}-\frac{267315}{4!}+\frac{1566450}{5!}-\frac{5091450}{6}+\frac{9933780}{7!}\\
&\quad-\frac{1194480}{8!}+\frac{8685600}{9!}-\frac{3507840}{10!}+\frac{604800}{11!}=\frac{7998337}{83160},\\
\gamma_{0,0,0} &= -1+\frac{3}{1!}-\frac{3}{2!}+\frac{1}{3!}=\frac{2}{3},\\
\gamma_{0,-1,0} &= -\frac{2}{1!}+\frac{6}{2!}-\frac{6}{3!}+\frac{2}{4!}=\frac{1}{12},\\
\gamma_{0,-2,0} &= \frac{-12}{2!}+\frac{6}{5!}+\frac{2}{1!}-\frac{20}{4!}+\frac{24}{3!}=-\frac{47}{60},\\
\gamma_{-4,-4,-6} &= 1-\frac{16655}{2!}+\frac{5260444}{3!}-\frac{321370622}{4!}+\frac{7519806977}{5!}\\
&\quad-\frac{90280292235}{6!}+\frac{647428882810}{7!}-\frac{3028468246320}{8!}+\frac{9748178974760}{9!}\\
&\quad-\frac{22298261594760}{10!}+\frac{36869237126640}{11!}-\frac{44258208343200}{12!}\\
&\quad+\frac{38240776382400}{13!}-\frac{23192869190400}{14!}+\frac{9376213916160}{15!}\\
&\quad-\frac{2270032128000}{16!}+\frac{249080832000}{17!}=-\frac{47315637837661}{137837700}.
\end{aligned}$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié les problèmes des polylogarithmes et sommes aux multi-indices. Les résultats de cette thèse sont les suivants :

1. Cette thèse a permis de déterminer la forme des polylogarithmes et des sommes harmoniques aux multiindices entiers négatifs. De plus, nous avons donné la structure de l'algèbre des polylogarithmes et des sommes harmoniques aux multiindices entiers.
2. Une des techniques utilisées dans cette thèse consiste à considérer les propriétés des polylogarithmes et des sommes harmoniques en relation avec les algèbres de Hopf. Un autre résultat est que nous avons trouvé les algèbres associatives des polylogarithmes, c'est à dire l'algèbre des séries non commutatives échangeables sur un alphabet fini.
3. Dans cette thèse, on a présenté une nouvelle méthode pour étendre les polylogarithmes, c'est-à-dire que nous avons considéré les polylogarithmes aux multi-indices entiers négatifs comme des polynômes en la fonction $\dfrac{1}{1-z}$.
4. Cette thèse a présenté certaines propriétés des séries formelles en variables non commutatives dans la relation avec les systèmes dynamiques non-linéaires. En particulier, nous appliquons la technologie des séries formelles en variables non commutatives pour donner une nouvelle forme de l'algorithme de Picard qui nous aide chercher les solutions d'équations différentielles. Enfin, on donne l'application de cet algorithme aux polylogarithmes.

Les développements possibles de cette thèse sont de

1. considérer la forme des polylogaritmes aux multi-indices complexes à l'aide des séries rationnelles.
2. considérer la régularisation des polyzetas divergents aux multiindices complexes.

Index

A : Théorème de Convergence Dominée de Lebesgue

Dans cette annexe, nous présentons une version du Théorème de Convergence Dominée de Lebesgue (LDC) [8] qui est utilisé dans la preuve de la discontinuité de l'opérateur ι_0 (dans le chapitre 3).

Théorème 13 (Le théorème de convergence dominée) *Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur un espace mesuré $(E,\mathscr{A},\mu)$, à valeurs réelles ou complexes, telles que :*

- *la suite de fonctions $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur E vers une fonction f*
- *il existe une fonction intégrable g telle que :*

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in E, \mid f_n(x)\mid\leq g(x) \tag{27}$$

Alors f est intégrable et

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n - f|d\mu = 0\,. \tag{28}$$

En particulier :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n d\mu = \int_E \lim_{n\to+\infty} f_n d\mu = \int_E f d\mu\,. \tag{29}$$

Exemple 28 *Dans la thèse $z\in]0,1[$, $E\equiv[0,z]$ et $\mathscr{A}$ sera la tribu borélienne. La mesure sur E est la mesure $\frac{ds}{s}$.*

Soit la famille de fonctions sur E, $g_n(s)=\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m+1}\frac{\log^m((1-s)^{-1})}{m!}, n\in\mathbb{N}_+$. Si $s\in[0,z], n\in\mathbb{N}$ alors cette famille satisfait

$$|g_n(s)| = \left|\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m+1}\frac{\log^m(1-s)}{m!}\right| \leq \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{|\log^m(1-s)|}{m!} = \exp(-\log(1-s))-1 = \frac{s}{1-s}\,.$$

8. Voir Yaron Ostrover, *Real and Functional Analysis*, Compiled Notes of Course 18.125, 2008, ou H.L. Royden, *Real Analysis*, **3rd ed.**, 1988.

De plus, $\frac{s}{1-s}$ *est intégrable sur* $[0,z]$.

Notons que $\lim_{n\to+\infty} g_n(s) = s$*, alors pour tout* $z \in [0,1]$*, nous obtenons que*

$$\lim_{n\to+\infty} \iota_0(g_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^z g_n(s)\frac{ds}{s} = \int_0^z \lim_{n\to+\infty} g_n(s)\frac{ds}{s} = \int_0^z s\frac{ds}{s} = z\,. \tag{30}$$

Commentaire 3 *En l'absence de fonction dominante, on a pas nécessairement interversion des limites :*

1. *Avec* $f_n = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[0,n]}$*, on a* $\lim_{n\to+\infty} f_n = 0$ *(limite uniforme !) et pourtant*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(s)ds = 1\,.$$

2. *Soit* $X = \{x\}$ *un alphabet et* $E = X^*$*. Nous dénotons*

$$\begin{aligned} S &:= x^* = \sum_{n\geq 0} x^n, \\ \forall n\in\mathbb{N}, T_n &:= \frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\,. \end{aligned}$$

Alors nous avons $\forall n \in \mathbb{N}, \mu_S(T_n) := \langle S \parallel T_n\rangle = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} = 1$*. Notons que* $\forall n \in \mathbb{N}, T_n \in \mathscr{L}^1(\mu_S)$*. Toutefois, nous avons,*

$$\mu_S(\lim_{n\to+\infty} T_n) = \langle S \parallel \lim_{n\to+\infty} T_n\rangle = 0 \neq 1 = \lim_{n\to+\infty} \mu_S(T_n), \tag{31}$$

car il n'existe pas de série μ_S*-intégrable dominant de la famille* $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

B : Indépendance linéaire des polylogarithmes en multiindices positifs sur $\mathscr{C}$

Théorème général

Soit X un alphabet et k un anneau commutatif avec unité (1_k), X^* est le monoïde engendré par X. Nous rappelons que :

- l'algèbre des polynômes sur X^* à coefficients dans k est notée $k[X^*]$ ou $k\langle X\rangle$ [9]
- l'algèbre des fonctions sur X^* à valeurs dans k (séries) est notée k^{X^*} ou $k\langle\langle X\rangle\rangle$.

Le dual de $k[X^*] = k\langle X\rangle$ est $k\langle\langle X\rangle\rangle$. Il est realisé par le crochet

$$\forall f \in k^{X^*},\ \forall g \in k[X^*],\ \langle f \mid g\rangle := \sum_{w\in X^*} f(w)g(w)\ . \tag{32}$$

En fait, $k^{(X^*)}$ est l'ensemble de fonctions à support fini sur X^* à valeur dans k.

Ensuite, nous supposons que k est un corps commutatif. Soit $(\mathscr{A}, d)$ une $k-$algèbre différentielle commutative sans diviseur de 0 avec [10] $k = \ker(d)$.

Nous étendons d terme à terme aux éléments de $\mathscr{A}\langle\langle X\rangle\rangle$ par

$$\forall\, S \in \mathscr{A}\langle\langle X\rangle\rangle,\ \mathbf{d}(S) := \sum_{w\in X^*} d(\langle S \mid w\rangle)w. \tag{33}$$

Théorème 14 (G-M-D, 2011) *Soit C un sous-corps différentiel de $\mathscr{A}$ (i.e., $d(C) \subset C$, C est un corps et $k.1_{\mathscr{A}} \in C$).*

Nous supposons que $S \in \mathscr{A}\langle\langle X\rangle\rangle$ est une solution de l'équation différentielle

$$\mathbf{d}(S) = MS;\ \langle S \mid 1_{X^*}\rangle = 1_{\mathscr{A}} \tag{34}$$

9. Le même polymorphisme existe aussi dans le monde commutatif puisque $R[Z]$ désigne tout à la fois l'espace des polynômes d'alphabet Z et, si Z est un monoïde, son algèbre et, si Z est un élément, une extension.

10. Ici, $\ker(d)$ est l'ensemble des constantes de $(\mathscr{A}, d)$.

où $M := \sum_{x\in X} u_x x \in C\langle\langle X\rangle\rangle$. *Les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *La famille* $\{\langle S \mid w\rangle\}_{w\in X^*}$ *est libre sur* C.
2. *La famille* $\{\langle S \mid x\rangle\}_{x\in X\sqcup\{1_{X^*}\}}$ *est libre sur* C.
3. *La famille* $\{u_x\}_{x\in X}$ *satisfait que, pour tout* $f\in C$ *et* $\forall x\in X,\ \alpha_x\in k$,

$$d(f) = \sum_{x\in X} \alpha_x u_x \Longrightarrow \forall x\in X,\ \alpha_x = 0\,. \tag{35}$$

Preuve – Nous démontrerons ce théorème par le diagramme suivant [MDS11],

$$1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 1\,.$$

$1 \Longrightarrow 2$ C'est évident.

$2 \Longrightarrow 3$ Supposons que la famille $\{\langle S \mid x\rangle\}_{x\in X\sqcup\{1_{X^*}\}}$ soit libre sur C. Soit $f\in C$ telle que $d(f) = \sum_{x\in X}\alpha_x u_x$ où $\alpha_x\in k$ pour tout $x\in X$. Nous avons besoin de prouver que $\forall x\in X, \alpha_x = 0$. Tout d'abord, nous posons

$$P := -f\ 1_{X^*} + \sum_{x\in X}\alpha_x\, x\,.$$

Nous avons $d(P) = 0$ et

$$\begin{aligned} d(\langle S \mid P\rangle) &= \langle d(S) \mid P\rangle + \langle S \mid d(P)\rangle = \langle MS \mid P\rangle - d(f)\langle S \mid 1_{X^*}\rangle \\ &= \sum_{x\in X}\alpha_x u_x - d(f) = 0\,. \end{aligned}$$

Donc $\langle S \mid P\rangle = \lambda\in k$.
Puis, en posant $Q := P - \lambda\ 1_{X^*} \in C\langle X\rangle$, nous obtenons que

$$\operatorname{supp}(Q) \subset X\sqcup\{1_{X^*}\} \quad \text{et} \quad \langle S \mid Q\rangle = \langle S \mid P\rangle - \lambda\langle S \mid 1_{X^*}\rangle = \langle S \mid P\rangle - \lambda = 0\,.$$

Soit

$$0 = \langle S \mid Q\rangle = \sum_{w\in X\sqcup\{1_{X^*}\}} \langle S \mid w\rangle\langle Q \mid w\rangle\,,$$

donc $Q = 0$. Enfin, en utilisant $Q = -(\lambda+f)1_{X^*} + \sum_{x\in X}\alpha_x x$, nous concluons $\forall x\in X,\ \alpha_x = 0$.

$3 \Longrightarrow 1$ Nous avons besoin de prouver que la famille $\{\langle S \mid w\rangle\}_{w\in X^*}$ est libre sur C. Posons

$$K := \{P\in C\langle X\rangle \mid \langle S \mid P\rangle = 0\}\,.$$

Montrer la liberté de la famille $\{\langle S \mid w\rangle\}_{w\in X^*}$ revient à montrer que $K = \{0\}$.

Supposons que $K \neq 0$ et montrons que c'est impossible. On se donne d'abord une relation de bon ordre $<$ sur X. La relation d'ordre (ordre lexicographique par longueur) $\prec$ de X^* est alors définie par

$$u \prec v \Longleftrightarrow (\mid u\mid < \mid v\mid) \quad \text{ou} \quad (u = pxs_1, v = pys_2,\ \text{où}\ x\prec y)\,, \tag{36}$$

et c'est également une relation de bon ordre (sur X^*). Soit P un polynôme non nul de $C\langle X\rangle$. Posons $\mathrm{lead}(P) := \max_{\prec}\{w \mid w \in \mathrm{supp}(P)\}$. Supposons que $w_0 = \min\{w \mid (\exists P \in K)(w = \mathrm{lead}(P))\}$ et donc $w_0 = \mathrm{lead}(P_0)$. Nous supposons que

$$P_0 = f w_0 + \sum_{u \prec w_0} \langle P \mid u\rangle\, u \;, f \in C \setminus \{0\}. \tag{37}$$

Alors, en formant $Q = \dfrac{1}{f} P_0 \in K$, on a $Q = w_0 + \sum_{u \prec w_0} \langle Q \mid u\rangle u$. En notant l'identité $\langle S \mid Q\rangle = 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{d}(S) \mid Q\rangle + \langle S \mid d(Q)\rangle = \langle MS \mid Q\rangle + \langle S \mid d(Q)\rangle \\ &= \langle S \mid Q \triangleleft M\rangle + \langle S \mid d(Q)\rangle = \langle S \mid Q \triangleleft M + d(Q)\rangle\,. \end{aligned} \tag{38}$$

Donc $Q \triangleleft M + d(Q) \in K$. Si on avait $Q \triangleleft M + d(Q) \neq 0$, on aurait $\mathrm{lead}(Q \triangleleft M + d(Q)) \prec w_0$, ce qui est impossible à cause de la minimalité de P (et de Q), donc $Q \triangleleft M + d(Q) = 0$. Notons que

$$Q \triangleleft M + d(Q) = \sum_{x \in X} u_x (Q \triangleleft x) + \sum_{u \prec w_0} d(\langle Q \mid u\rangle) u\,,$$

donc,

$$d(\langle Q \mid u\rangle) = -\sum_{x \in X} u_x \langle Q \mid xu\rangle,\ u \in X^*\,. \tag{39}$$

Notons que, comme $Q \neq 0$ et $\langle S \mid Q\rangle = 0$, on a $\deg(Q) > 0$. Nous pouvons écrire $w_0 = x_0 v$ et calculer

$$d(\langle Q \mid u\rangle) = -\sum_{x \in X} u_x \langle Q \mid xu\rangle,\ u \in X^*\,. \tag{40}$$

En particulier, pour $|u| = |w_0|$, on a $d(\langle Q \mid u\rangle) = 0$ et $\langle Q \mid u\rangle \in k$. Et, comme $|v| = |w_0| - 1$, il résulte de ce qui précède que $\alpha_x = \langle Q \mid xv\rangle \in k$ (puisque $|xv| = |w_0|$) . On peut alors utiliser le point (3.) du théorème et conclure que $\forall x \in X, \langle Q \mid xv\rangle = 0$ et, en particulier pour $x = x_0$, cela est en contradiction avec $\langle Q \mid x_0 v\rangle = 1$. Finalement, $K = \{0\}$.

Enfin, comme $K = \{0\}$, l'application linéaire $\langle S \mid .\rangle : C\langle X\rangle \to C$ qui définie par $P \mapsto \langle S \mid P\rangle$ est injective. Donc, la famille $\{\langle S \mid w\rangle\}_{w \in X^*}$ est libre sur C parce que $\{w \in X^*\}$ est libre sur C.

□

Pour pouvoir appliquer ce théorème aux polylogarithmes, nous avons besoin de la notion de corps de germes.

Soit E un l'ensemble. L'ensemble de toutes parties de E sera noté $\mathscr{P}(E)$.

Nous disons qu'un ensemble de parties $\mathscr{B}$ de E qui satisfait aux axiomes suivants :

[B_1] L'intersection de 2 ensembles de $\mathscr{B}$ contient un ensemble de $\mathscr{B}$.

[B_2] $\mathscr{B}$ n'est pas vide, et la partie vide de X n'appartient pas à $\mathscr{B}$.

est une base de filtre.

Maintenant, soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\mathscr{B}(\Omega)$ une base de filtre sur Ω. On notera $\mathscr{F}(\Omega,\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ dont le domaine de définition [11] est Ω, et $\mathscr{F}(\mathscr{B}(\Omega),\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ dont le domaine de définition contient l'un des éléments de $\mathscr{B}(\Omega)$,

$$\mathscr{F}(\mathscr{B}(\Omega),\mathbb{C}) = \{f \in \mathscr{F}(\mathrm{dom}(f),\mathbb{C}) \mid (\exists V \in \mathscr{B})(\mathrm{dom}(f) \supset V)\}\ . \tag{41}$$

Maintenant, nous construisons sur $\mathscr{F}(\mathscr{B}(\Omega),\mathbb{C})$ une relation "$\equiv$" sur comme suit :
Pour tout $f,g \in \mathscr{F}(\mathscr{B}(\Omega),\mathbb{C})$, $f \equiv g$ si seulement s'il existe $V \in \mathscr{B}$ tel que

$$V \subset dom(f) \cap dom(g) \text{ et } f|_V = g|_V$$

cette relation est une relation d'équivalence[12] *sur $\mathscr{F}(\mathscr{B}(\Omega),\mathbb{C})$.*

Sur l'ensemble $\mathscr{F}(\mathscr{B}(\Omega),\mathbb{C})$, nous construisons des lois addition $\widehat{+}$ et multiplication $\widehat{*}$ comme suit : " Pour toute $f,g \in \mathscr{F}(\mathscr{B}(\Omega),\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} f\widehat{+}g : \quad & \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) \to \mathbb{C} \\ & x \mapsto f(x) + g(x) \end{aligned} \tag{42}$$

et

$$\begin{aligned} f\widehat{*}g : \quad & \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) \to \mathbb{C} \\ & x \mapsto f(x) * g(x)\ . \end{aligned} \tag{43}$$

En fait, les lois $\widehat{+}$ et $\widehat{*}$ sont commutatives et associatives sur l'ensemble $\mathscr{F}(\mathscr{B}(\Omega),\mathbb{C})$, $\widehat{*}$ est distributive sur $\widehat{+}$, mais $(\mathscr{F}(\mathscr{B}(\Omega),\mathbb{C}),\widehat{+},\widehat{*})$ n'est pas un anneau car il n'y a pas, en général, d'élément neutre pour l'addition ni pour la multiplication. Alors, nous allons construire une structure algébrique d'anneau sur un quotient de $(\mathscr{F}(\mathscr{B}(\Omega),\mathbb{C}),\widehat{+},\widehat{*})$ pour pouvoir appliquer le théorème 14.

Proposition 19 *Les lois $\widehat{+}$ et $\widehat{*}$ sont compatibles avec $\equiv$, de plus*

$$(\mathscr{F}(\mathscr{B}(\Omega),\mathbb{C})/\equiv,\widetilde{+},\widetilde{*}) \ := \ (\mathscr{F}(\mathscr{B}(\Omega),\mathbb{C}),\widehat{+},\widehat{*})/\equiv \tag{44}$$

est un anneau (appelé anneau des germes de fonctions selon la base de filtre $\mathscr{B}$).

11. Ici, pour toute fonction f, le domaine de f est noté $\mathrm{dom}(f)$.
12. Notée R_∞ dans [Bou07]

Indépendance linéaire des polylogarithmes en multiindices positifs sur $\mathscr{C}$

Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[)$; Ω est ouvert, non vide et simplement connexe dans $\mathbb{C}$. Rappelons que $\mathscr{H}(\Omega)$ est l'espace des fonctions analytiques sur Ω à valeur dans $\mathbb{C}$. Alors $(\mathscr{H}(\Omega), \frac{d}{dz})$ est un anneau différentiel. Nous pouvons alors considérer différentes bases de filtre dans Ω, l'anneau des germes de $\mathscr{H}(\Omega)$ selon Ω muni de $d = \frac{d}{dz}$ est un anneau différentiel dans lequel on peut en général considérer des sous-corps différentiels. Ici on va prendre pour $\mathscr{B}$ le filtre des complémentaires des parties finies[13] et, pour corps, les germes des fonctions rationnelles (i.e. de $\mathbb{C}(z)$), $\mathscr{C}_1$ est un corps différentiel de germes de fonctions définies sur les éléments de la base de filtre $\mathscr{B}(\Omega)$.

Nous avons donc les éléments suivants

1. $\mathscr{B} = \{\Omega \setminus F\}_{F\ finie}$ (le filtre de Fréchet).
2. $\mathscr{A} = \mathscr{H}(\Omega)/\equiv$.
3. $\mathscr{C}_1 = C(z)$ est le corps des fractions rationnelles (avec $dom(P/Q) = \mathbb{C} \setminus Q^{-1}(0)$).

Soit $X = \{x_0, x_1\}$ un alphabet. En appliquant le théorème 14, nous obtenons que

Théorème 15 *Soit $M = \frac{x_0}{z} + \frac{x_1}{1-z}$. Supposons que S soit une solution, dans $\mathscr{A}\langle\langle X\rangle\rangle$, de l'équation*

$$\frac{d}{dz}S = M\,S\ ;\ \langle S \mid 1_{X^*}\rangle = 1\ . \tag{45}$$

Alors les fonctions coordonnées $(\langle S \mid w\rangle)_{w\in X^*}$ sont linéairement indépendantes par rapport aux coefficients de $\mathscr{C}$.

En particulier, notons que la série $S = \sum_{w\in X^*} \mathrm{Li}_w(z)\, w$ est une solution de l'équation différentielle du théorème 15. Les germes des polylogarithmes sont donc linéairement indépendants par rapport aux germes des fractions rationnelles. On en déduit que la famille (polylogarithmes) $(\mathrm{Li}_w(z))_{w\in X^*}$ est libre sur

$$\mathscr{C} = \mathbb{C}[z, \frac{1}{z}, \frac{1}{1-z}] \subset \mathscr{C}_1\ .$$

13. Qu'on appelle aussi *filtre de Fréchet*.

C : Exemples avec MAPLE

Dans cette annexe, nous donnons les exemples qui sont calculés par MAPLE.

Sommes harmorniques

Tout d'abord, dans tous des exemples, nous avons besoin d'utiliser les nombres de Bernoulli qui sont calculés par l'algorithme suivant :

Sommes harmoniques $\mathrm{H}^-_{y_m}$

- Données : $m \in \mathbb{N}$.

- L'algorithme :

$>$ $\quad myProc := \textbf{proc}()$
$\quad\quad \textbf{local } n;\ \textbf{global } H;$
$\quad\quad H := 0;$
$\quad\quad \textbf{for } n \textbf{ from } 0 \textbf{ to } m \textbf{ do}$
$\quad\quad H := H + \frac{1}{m+1} * (binomial(m+1,n)) * (bernoulli(n,0)) * (N+1)^{m+1-n}$
$\quad\quad \textbf{end do};$
$\quad\quad print(H)$
$\quad\quad \textbf{end proc};$
$>$ $\quad H^-[y[m]] := sprint(H)$

- Par exemple, $m = 2$:

$$H^-_{y_2} := \frac{1}{3} * (N+1)^3 - \frac{1}{2} * (N+1)^2 + \frac{1}{6} * (N+1).$$

Sommes harmoniques $\mathrm{H}^-_{y_m y_n}$

- Données : $m, n \in \mathbb{N}$.

- L'algorithme :

$>$ $\quad myProc := \textbf{proc}()$

$\textbf{local } p; \textbf{local } q; \textbf{r}; \ \textbf{global } H;$

$H := 0;$

$\textbf{for } p \textbf{ from } 0 \textbf{ to } n \textbf{ do}$

$\textbf{for } q \textbf{ from } 0 \textbf{ to } n+m+1-p \textbf{ do}$

$\textbf{for } r \textbf{ from } 0 \textbf{ to } n+m+2-p-q \textbf{ do}$

$$H := H + \frac{B[p]*B[q]}{(n+1)*(n+m+2-p)} * binomial(n+1,p) * binomial(n+m+2-p,q)$$

$*binomial(m+n+2-p-q,r)*N^r$

$\textbf{end do};$

$$H := H + \frac{B[p]*B[q]}{(n+1)*(n+m+2-p)} * binomial(n+1,p) * binomial(n+m+2-p,q)$$

$**binomial(m+n+2-p-q,r)*N^r$

$\textbf{end do};$

$$H := H + \frac{B[p]*B[q]}{(n+1)*(n+m+2-p)} * binomial(n+1,p) * binomial(n+m+2-p,q)$$

$*binomial(m+n+2-p-q,r)*N^r$

$\textbf{end do};$

$print(H)$

$\textbf{end proc};$

$>$ $\quad H^-[y[m]y[n]] := H;$

- Par exemple, $m = 2, n = 4$:

$$H^-_{y_2 y_4} = \frac{1}{35}*N^7 + \frac{1}{40}*N^8 - \frac{7}{90}*N^6 + \frac{13}{180}*N^4 - \frac{7}{360}*N^2 - \frac{1}{12}*N^5 + \frac{1}{15}*N^3 - \frac{1}{84}*N$$

Remarque 13 *Avec le même algorithme, nous pouvons calculer (avec MAPLE) tous les sommes harmonique aux multiindices non-positifs* $H^-_{y_{i_1}\cdots y_{i_r}}$ *où* $1 \le r \le 6$.

Polylogarithmes

Polylogarithmes $\mathrm{Li}^-_{y_m}$

- Données : $m \in \mathbb{N}$

- L'algorithme :

$$
\begin{aligned}
> \quad & A[n] := 0; \\
& \textbf{for } k \textbf{ from } 0 \textbf{ to } n \textbf{ do} \\
& A[n] := A[n] + (sum(\frac{(-1)^j * (k+1-j)^n * ((n+1)!)}{((n+1-j)!) * ((j)!)}, j = 0..k)) * z^k \\
& \textbf{end do}; \\
& L[-n] := \frac{z * A[n]}{(1-z)^(n+1)}; \\
& L[-n] := \mathrm{convert}(L[-n], parfrac, z);
\end{aligned}
$$

- Par exemple, $m = 4$:

$$
\begin{aligned}
L_{-4} &:= \frac{z * (z^3 + 11 * z^2 + 11 * z + 1)}{(1-z)^5} \\
L_{-4} &:= -\frac{15}{(-1+z)^2} - \frac{50}{(-1+z)^3} - \frac{1}{(-1+z)} - \frac{60}{(-1+z)^4} - \frac{24}{(-1+z)^5}
\end{aligned}
$$

Polylogarithmes $\mathrm{Li}^-_{y_m y_t}$

- Données : $m, t \in \mathbb{N}$.

- L'algorithme :

$$
\begin{aligned}
> \quad & L[-m,-t] := 0; \\
& \textbf{for } l \textbf{ from } 0 \textbf{ to } m \textbf{ do} \\
& L[-m,-t] := L[-m,-t] + \frac{m!}{(m-l)! * l!} * L[-l] * L[-m-t+l] \\
& \textbf{end do}; \\
& L[-m,-t] := \mathrm{convert}(L[-m,-t], parfrac, z); \\
& \textbf{end do};
\end{aligned}
$$

- Par example, $m = 2, t = 2$

$$
L[-2,-2] := \frac{161}{(-1+z)^4} + \frac{40}{(-1+z)^6} + \frac{19}{(-1+z)^2} + \frac{1}{(-1+z)} + \frac{87}{(-1+z)^3} + \frac{132}{(-1+z)^5}
$$

Polylogarithmes $\mathrm{Li}^-_{y_k y_b y_t}$

- Données : $k, b, t \in \mathbb{N}$.

- L'algorithme :

$>$ **for** m **from** 0 **to** b **do**
$L[-k,-m,-t] := 0;$
for q **from** 0 **to** k **do**
$L[-k,-m,-t] := L[-k,-m,-t] + \dfrac{k!}{(k-q)!*q!} * L[-q]*L[-m-k+q,-t]$
end do;
$L[-k,-m,-t] := \mathbf{convert}(L[-k,-m,-t],\mathbf{parfrac},z);$
end do;

- Par example, $k=1, b=1, t=2$

$$L[-1,-1,-2] := \frac{280}{(-1+z)^8} + \frac{41}{(-1+z)^2} + \frac{2497}{(-1+z)^6} + \frac{1}{(-1+z)} + \frac{1310}{(-1+z)^4} + \frac{1312}{(-1+z)^7} + \frac{2457}{(-1+z)^5} + \frac{358}{(-1+z)^3}$$

Constantes $C^-_\bullet, B^-_\bullet$

- Données : $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N}$.

- L'algorithme :

$>$ $myProc := \mathbf{proc}()$
local$x$, **local**i; **global**C;
$C := 1; x := 0;$
for i **to** 3 **do**
$x := x + m[4-i] + 1;$
$C := \dfrac{C}{x}$
end do;
$print(C)$
end proc;
$myProc()$
$>$ $C^-[y[m[1]], y[m[2]], y[m[3]]] := C;$
$>$ $B^-[y[m[1]], y[m[2]], y[m[3]]] := (m[1]+m[2]+m[3]+3)!C;$

- Par exemple, $m_1 := 1, m_2 := 2, m_3 := 3$:

$$C^-_{y_1y_2y_3} = \frac{1}{252}; B^-_{y_1y_2y_3} = 1440.$$

La loi $\top$

- Données : $u, v \in Y^*$.

Nous avons besoin de déterminer $u \top v$.
- L'algorithme :

- Calculons $\mathrm{Li}_u^-, \mathrm{Li}_v^- \in \mathbb{Q}[\frac{1}{1-z}]$.
- Calculons $\mathrm{Li}_u^- \mathrm{Li}_v^- \in \mathbb{Q}[\frac{1}{1-z}]$. Reécrirons $\mathrm{Li}_u^- \mathrm{Li}_v^-$ comme une vecteur v dans la base $\{\frac{1}{(z-1)^n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Q}[\frac{1}{1-z}]$.
- Presentons v dans la base $\{1, \mathrm{Li}_{y_n}^-\}_{n\geq 0}$.

Exemple 29 - *Soient* $u = y_b, v = y_c$ *pour* $0 \leq b, c \leq a$, $a \in \mathbb{N}_+$. *Nous calculons* $y_b \top y_c$.

```
>   for b to a do
    c := 1;
    while c < a+1 do
    Bt := B;
    print(y[b,c] = linsolve(Bt, vector([0,0,coeff(L[-b]*L[-c],1/(z-1)^2),
    coeff(L[-b]*L[-c],1/(z-1)^3),coeff(L[-b]*L[-c],1/(z-1)^4),coeff(L[-b]*L[-c],1/(z-1)^5),
    coeff(L[-b]*L[-c],1/(z-1)^6),coeff(L[-b]*L[-c],1/(z-1)^7),coeff(L[-b]*L[-c],1/(z-1)^8),
    coeff(L[-b]*L[-c],1/(z-1)^9),coeff(L[-b]*L[-c],1/(z-1)^10),coeff(L[-b]*L[-c],1/(z-1)^11),
    coeff(L[-b]*L[-c],1/(z-1)^12),coeff(L[-b]*L[-c],1/(z-1)^13),coeff(L[-b]*L[-c],1/(z-1)^14),
    coeff(L[-b]*L[-c],1/(z-1)^15),coeff(L[-b]*L[-c],1/(z-1)^16),coeff(L[-b]*L[-c],1/(z-1)^17),
    coeff(L[-b]*L[-c],1/(z-1)^18),coeff(L[-b]*L[-c],1/(z-1)^19),
    coeff(L[-b]*L[-c],1/(z-1)^20),coeff(L[-b]*L[-c],1/(z-1)^21)])),...);
    c := c+1;
    od,
    end do;
```

où B *est la matrice des coefficients des* $\{1; \mathrm{Li}_{y_n}^-\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dans la base* $\{\frac{1}{(z-1)^n}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Par exemple, $\mathrm{Li}_{y_4}^- \mathrm{Li}_{y_3}^- = \frac{-596}{(-1+z)^5} - \frac{1}{(-1+z)^2} - \frac{144}{(-1+z)^9} - \frac{648}{(-1+z)^8} - \frac{167}{(-1+z)^4} - \frac{1188}{(-1+z)^7} - \frac{1134}{(-1+z)^6} - \frac{22}{(-1+z)^3}$. *En utilisant MAPLE (*$a = 4$*), nous obtenons,*

$$y_4 \top y_3 = (0,0,0,-1/84,0,1/120,0,0,0,1/280,0,\dots).$$

Donc

$$y_4 \top y_3 = -\frac{1}{84} y_2 + \frac{1}{120} y_4 + \frac{1}{280} y_8.$$

Bibliographie

[AC98] D. Kreimer A. Connes. *Hopf algebras, renormalization and noncommutative geometry.* Comm. Math. Phys., 199 :203–242, 1998.

[Ber85] B. Berndt. *Ramanujan's Notebooks.* Springer-Verlag, New York, 1985.

[Ber09] D.S. Bernstein. *Matrix Mathematics - Theory, Facts and Formulas.* Princeton University Press, Édition : 2nd Revised edition, 2009.

[Bou06] N. Bourbaki. *Groupes et Algèbres de Lie, Chap II - III.* Springer, 2006.

[Bou07] N. Bourbaki. *Fonctions d'une variable réelle Théorie élémentaire.* Springer Berlin Heidelberg, Éléments de mathématique, 2007.

[BVC13] V. Hoang Ngoc Minh Bui V. C., G.H.E. Duchamp. *Schützenberger's factorization on the (completed) Hopf algebra of $q-$ stuffle product.* en préparation, 2013.

[BVCNT14] V. Hoang Ngoc Minh Bui V. C., G.H.E. Duchamp, Hoang Nghia Nguyen, and C. Tollu. *Combinatorics of deformed shuffle Hopf algebras.* en préparation, 2014.

[BVCTH15] V. Hoang Ngoc Minh Bui V. C., G.H.E. Duchamp, C. Tollu, and Ngo Q. H. *(Pure) transcendence bases in ϕ-deformed shuffle bialgebras.* en préparation, 2015.

[Car89] P. Cartier. *Développements récents sur les groupes de tresses. Applications à la topologie et à l'algèbre.* Sém BOURBAKI, 42(716), 1989.

[CB99] B.K. Meister C.M. Bender, D.C. Brody. *Quantum field theory of partitions.* J. Math. Phys., 40 :3239–3245, 1999.

[CC09] V. Hoang Ngoc Minh C. Costermans. *Noncommutative algebra, multiple harmonic sums and applications in discrete probability.* Journal of Symbolic Computation, 44(ISSUE 7) :801–817, 2009.

[CCM05] J.Y. Enjalbert C. Costermans and V. Hoang Ngoc Minh. *Algorithmic and combinatorial aspects of multiple harmonic sums.* Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science Proceedings, 2005.

[Che77] K.T. Chen. *Iterated path integrals.* Bull. Am. Math. Soc., 83 :831–879, 1977.

[Cos08] C. Costermans. *Calcul symbolique non commutatif : analyse des constantes d'arbre de fouille.* thesis, 2008.

[Den12] M. Deneufchâtel. *Intégrales Itérées en Physique Combinatoire.* thèse, 2012.

[DF70] M.P. Schützenberger D. Foata. *Théorie Géométrique des Polynômes Eulériens.* Lecture Notes in Mathematics, 138, 1970.

[dM04] L. Boutet de Monvel. *Remark on divergent multizeta series.* Microlocal Analysis and Asymptotic Analysis, RIMS workshop(1397) :1–9, 2004.

[DM10] S. Paycha D. Manchon. *Nested sums of symbols and renormalised multiple zeta values.* Int. Math. Res. Notices, 24 :4628–4697, 2010.

[Dys49] F.J. Dyson. *The radiation theories of Tomonaga, Schwinger and Feynman.* Physical Rev., 75 :486–502, 1949.

[Eca81] J. Ecalle. *Les fonctions résurgentes.* Pub. Math. d'Orsay, Tome(II), 1981.

[Eil74] S. Eilenberg. *Automata, languages and machines A.* Academic Press, 1974.

[Eul44] L. Euler. *Variæ observationes circa series infinitas.* Commentarii AcademiæScientiarum Imperialis Petropolitanæ, 9 :187–188, 1744.

[Eul75] L. Euler. *Meditationes circa singulare serierum genus.* Novi. Comm. Acad. Sci. Petropolitanae, 20 :140–186, 1775.

[Fau31] J. Faulhaber. *Darinnen die miraculosische Inventiones zu den höchsten Cossen weiters continuirt und profitiert werden.* Academia Algebrae, 1631.

[Fli83] M. Fliess. *Réalisation locale des systèmes non linéaires, algèbres de Lie filtrées transitives et séries génératrices non commutatives.* Inven. Math., 71(3) :521–537, 1983.

[Fri53] K.O. Friedrichs. *Mathematical aspects of the quantum theory of fields, Part V. Fields modified by linear homogeneous forces.* Communications in Pure and Applied Mathematics, 6 :1–72, 1953.

[GD97] C. Reutenauer G.H.E. Duchamp. *Un critère de rationalité provenant de la géométrie non-commutative (à la mémoire de Schutzenberger).* Inventiones Mathematicae, 128 :613–622, 1997.

[GD16a] Ngo Quoc Hoan G.H.E. Duchamp, V. Hoang Ngoc Minh. *Harmonic sums and polylogarithms at negative multi-indices.* J. Symbolic Computation, issac2015specialissue(1748), 2016.

[GD16b] Ngo Quoc Hoan G.H.E. Duchamp, V. Hoang Ngoc Minh. *The algebra* $\mathbb{C}\langle \mathbf{X}\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle \mathbf{x_0}\rangle\rangle \sqcup\!\sqcup \mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle \mathbf{x_1}\rangle\rangle$ *and polylogarithms.* en préparation, 2016.

[GDG11a] A.I. Solomon G.H.E. Duchamp, V. Hoang Ngoc Minh and S. Goodenough. *An interface between physics and number theory.* J. of Physics, 284(1) :012–023, 2011.

[GDG11b] C. Tollu G.H.E. Duchamp G.H.E. *Sweedler's duals and Schützenberger's calculus.* In K. Ebrahimi-Fard, M. Marcolli and W. van Suijlekom (eds), Combinatorics and Physics, Amer. Math. Soc. (Contemporary Mathematics,), 539 :67–78, 2011.

[GDQS15] K.A. Penson G.H.E. Duchamp, V. Hoang Ngoc Minh, Ngô Q.H., and P. Simonnet. *Mathematical renormalization in quantum electrodynamics via noncommutative generating series.* Springer Proc. in Mathematics & Statistics, Applications of Computer Algebra : July 20-23, 2015, Kalamata, Greece, 2015.

[GDT98] B. Leclerc G.H.E. Duchamp, D. Krob and J.Y. Thibon. *Noncommutative symmetric functions III : deformations of Cauchy and convolution structures.* Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 1998.

[GDT15] J.Y. Enjalbert G.H.E. Duchamp, V. Hoang Ngoc Minh and C. Tollu. *The mechanics of shuffle products and their siblings.* en préparation, 2015.

[HFT14] K. Matsumoto H. Furusho, Y. Komori and H. Tsumura. *Desingularization of Multiple Zeta Functions of Generalized Hurwitz Lerch type and evaluation of p-adic multiple L-functions at arbitrary integers.* en préparation, 2014.

[JB88] C. Reutenauer J. Berstel. *Rational series and their languages.* Springer-Verlag, 1988.

[JM65] J.C. Moore J.W. Milnor. *On the structure of Hopf algebras.* Ann. of Math., 81(2) :211–264, 1965.

[KK70] E. Remiddi K.S. Kolbig, J.A. Mignaco. *On Nielsen's generalized polylogarithms and their numerical calculation.* BIT, 10(1), 1970.

[Knu93] D.E. Knuth. *Johann Faulhaber and Sums of Powers.* Mathematics of Computation, 61(203) :277–294, 1993.

[Lew58] L. Lewin. *Dilogarithms and associated functions.* Macdonald, London,, 1958.

[LG08] B. Zhang Li Guo. *Renormalization of multiple zeta values.* Journal Algebra, 319 :3770–3809, 2008.

[LT96] J. Murakami Lê T.Q.T. *Kontsevich's integral for Kauffman polynomial.* Nagoya Math., pages 39–65, 1996.

[MB95] N.J.A. Sloane M. Bernstein. *Some canonical sequences of integers.* Linear Algebra and its Applications, 226/228 :57–72, 1995.

[MBP00] N.E. Oussous M. Bigotte, G. Jacob and M. Petitot. *Generating power series of coloured polylogarithm functions and Drinfel'd associator.* "Computer Mathematics", Proc. of the Fourth Asian Symposium (ASCM), World Scientific Publishing, 2000.

[MDS11] V. Hoang Ngoc Minh M. Deneufchâtel, G.H.E. Duchamp and A.I. Solomon. *Independence of hyperlogarithms over function fields via algebraic combinatorics.* Lecture Notes in Computer Science, 6742/2011 :127–139, 2011.

[Min90] V. Hoang Ngoc Minh. *Contribution au développement d'outils informatiques pour résoudre des problèmes d'automatique non linéaire.* thèse, Lille, 1990.

[Min96] V. Hoang Ngoc Minh. *Summations of polylogarithms via evaluation transform.* Math. & Comput. Simul., 1336 :707–728, 1996.

[Min98] V. Hoang Ngoc Minh. *Fonctions de Dirichlet d'ordre n et de paramètre t.* Discrete Math., 180 :221–242, 1998.

[Min03a] V. Hoang Ngoc Minh. *Differential Galois groups and noncommutative generating series of polylogarithms.* in Automata, Combinatorics and Geometry, 7^{th} World Multi-conference on Systemics, Cybernetics and Informatics, Florida, 2003.

[Min03b] V. Hoang Ngoc Minh. *Finite polyzêtas, Poly-Bernoulli numbers, identities of polyzêtas and noncommutative rational power series.* Proc. of 4^{th} International Conference on Words, pages 232–250, 2003.

[Min07] V. Hoang Ngoc Minh. *Algebraic combinatoric aspects of asymptotic analysis of nonlinear dynamical system with singular inputs.* Acta Academiae Aboensis, Ser. B, 67(2) :117–126, 2007.

[Min13a] V. Hoang Ngoc Minh. *On a conjecture by Pierre Cartier about a group of associators.* Acta Mathematica Vietnamica, 3, 2013.

[Min13b] V. Hoang Ngoc Minh. *Structure of polyzetas and Lyndon words.* Vietnamese Mathematics Journal, 2013.

[Min14] V. Hoang Ngoc Minh. *Calcul symbolique non commutatif.* Presse Académique Francophone, 2014.

[Nie04a] N. Nielsen. *Note sur quelques séries de puissances trouvées dans la théorie de la fonction gamma.* Annali di Matematica, 9 :211–218, 1904.

[Nie04b] N. Nielsen. *Recherches sur des généralisations d'une fonction de Legendre et d'Abel.* Annali di Matematica, 9 :219–235, 1904.

[Nie04c] N. Nielsen. *Recherches sur le carré de la dérivée logarithmique de la fonction gamma et sur quelques fonctions analogues.* Annali di Matematica, 9 :190–210, 1904.

[Nie06] N. Nielsen. *Handbuch der theorie der gammafunktion.* Teubner in Leipzig, 1906.

[Reu93] C. Reutenauer. *Free Lie Algebras.* London Math. Soc. Monographs, 1993.

[RF65] A.R. Hibbs R.P. Feynman. *Quantum Mechanics and Path Integrals.* McGraw-Hill, New York, 1965.

[Rie59] B. Riemann. *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.* Monatsberichte der Berliner Akademie, 1859.

[SA01] Y. Tanigawa S. Akiyama, S. Egami. *Analytic continuation of multiple zeta-functions and their values at non-positive integers.* Acta Arith., 98(2) :107–116, 2001.

[Sch61] M.P. Schützenberger. *On the definition of a family of automata.* Information and Control, 4 :245–270, 1961.

[VHNM91] N. Oussous V. Hoang Ngoc Minh, G. Jacob. *Input/Output Behaviour of Nonlinear Control Systems : Rational Approximations, Nilpotent structural Approximations.* in Analysis of controlled Dynamical Systems, (B. Bonnard, B. Bride, J.P. Gauthier & I. Kupka eds.), Progress in Systems and Control Theory, Birkhäuser, pages 253–262, 1991.

[VHNM98] Joris Van der Hoeven V. Hoang Ngoc Minh, M. Petitot. *Polylogarithms and Shuffle algebra.* Proc. of FPSAC'98, 1998.

[VHNM00a] G. Jacob V. Hoang Ngoc Minh. *Symbolic integration of meromorphic differential systems via Dirichlet functions.* Discrete Math., 210 :87–116, 2000.

[VHNM00b] Joris Van Der Hoeven V. Hoang Ngoc Minh, M. Petitot. *Shufle algebra and polylogarithms.* Discrete Math., 225 :217–250, 2000.

[VHNM00c] M. Petitot V. Hoang Ngoc Minh. *Lyndon words, polylogarithmic functions and the Riemann ζ function.* Discrete Math., 217 :273–292, 2000.

[VHNMP00] N.E. Oussous V. Hoang Ngoc Minh, G. Jacob and M. Petitot. *Aspects combinatoires des polylogarithmes et des sommes d'Euler-Zagier.* Journal électronique du Séminaire Lotharingien de Combinatoire, B43e, 2000.

[VHNMP01] N.E. Oussous V. Hoang Ngoc Minh, G. Jacob and M. Petitot. *De l'algèbre des ζ de Riemann multivariées l'algèbre des ζ de Hurwitz multivariées.* Journal électronique du Séminaire Lotharingien de Combinatoire, 44, 2001.

[Zag94] D. Zagier. *Values of zeta functions and their applications.* in First European Congress of Mathematics, 2(Birkhauser) :497–512, 1994.

[Zha99] J. Zhao. Analytic continuation of multiple zeta functions. Proceedings of the American Mathematical Society, 128(5), 1999.

[Zyg02] A. Zygmund. Trigonometric series. Cambridge University Press, Third Edition, 2002.