Empilements de disques de densité maximale

Thomas Fernique

Jussieu, 13 décembre 2019

1 Une pièce

Comment disposer sans chevauchement le plus grand nombre de pièces de monnaie toutes identiques une table ? La forme de la table peut jouer un rôle, mais on s'intéresse au cas d'une table infinie.

Formellement, on appelle *empilement* un ensemble de disques de rayon unité d'intérieurs deux-à-deux disjoints. Sa *densité* est définie par

$$\delta := \limsup_{r \to \infty} \frac{\text{aire de } D(0,r) \text{ couverte par les disques}}{\text{aire totale de } D(0,r)},$$

où $D(0,r)$ désigne le disque de rayon r centrée en l'origine. La question devient : quel est la densité maximale d'un empilement et, si elle est atteinte [1], quels empilements la maximisent ?

Parmi les empilements, on distingue ceux dont les disques sont centrées sur les points d'un *réseau* : ils sont dits *réguliers* et sont particulièrement simples à décrire. C'est par exemple le cas de l'empilement *carré*, où les disques sont centrés sur la grille carré de côté 2 et la densité vaut $\frac{\pi}{4} \simeq 0,785$, ou encore l'empilement *hexagonal*, où les disques sont centrés sur la grille triangulaire de côté 2 et la densité vaut $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \simeq 90\%$. Le Franco-italien Joseph Louis Lagrange (1736–1813) a montré

Proposition 1 (Lagrange, 1772) *La densité maximale d'un empilement régulier dans le plan est* $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \simeq 90\%$.

1. ce qui n'est pas *a priori* le cas.

Preuve. Considérons un empilement régulier. Soient $\vec{u}$ un plus court vecteur du réseau et $\vec{v}$ un plus court parmi ceux qui ne sont pas liés à $\vec{u}$[2]. Alors $\vec{v}$ est dans la bande (dessiner) :

$$\left\{\vec{x}, \quad |\langle\vec{x}|\vec{u}\rangle| \leq \tfrac{1}{2}||\vec{u}|| \cdot ||\vec{x}||\right\}.$$

En effet, si ce n'était pas le cas on pourrait raccourcir $\vec{v}$ en lui ajoutant $\pm\vec{u}$. On en déduit $|\cos(\vec{v},\vec{u})| \leq \frac{1}{2}$ (car $||\vec{v}|| \geq ||\vec{u}||$), *i.e.*, ces vecteurs font un angle entre $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$. Le volume du parallélogramme d'arêtes $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifie donc

$$||u|| \times ||v|| \times \sin\alpha \geq 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Comme ce parallélogramme contient exactement un disque au total (c'est un domaine fondamental du réseau), on en déduit la densité annoncée. □

Il a fallu attendre pour avoir une première preuve du cas général, due au Hongrois László Fejes Tóth en 1943 :

Théorème 1 (Tóth, 1943) *La densité maximale d'un empilement dans le plan est* $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \simeq 90\%$.

On suivra ici la preuve de [1], qui repose sur la *triangulation de Delaunay* - une notion due au Russe Boris Nikolaevitch Delaunay (1890–1980).

Définition 1 *Une* triangulation *est une partition du plan en triangles tels que deux triangles, s'ils s'intersectent, ont soit un sommet soit une arête entière en commun. Une* triangulation de Delaunay *est une triangulation telle que l'intérieur du cercle circonscrit à tout triangle ne contienne aucun sommet de la triangulation.*

Delaunay a montré qu'étant donné un ensemble fini X de points dans le plan, il existe toujours une triangulation de Delaunay telle que X est l'ensemble des sommets (il peut y en avoir plusieurs s'il y a quatre points cocycliques).

Les triangulations de Delaunay ont plein de jolies propriétés qui font qu'elles sont beaucoup utilisées en pratique (par exemple pour décrire la surface de votre personnage de dessin animé 3D préféré).

2. C'est une base du réseau, dite réduite, qu'on peut calculer en temps quadratique en la longueur du codage des coefficients d'une base donnée avec l'*algorithme de Lagrange*.

Pour majorer la densité dans le cas général, on suppose l'empilement *saturé*, c'est-à-dire qu'il n'y a aucun trou assez gros pour y ajouter un disque. Comme saturer un empilement ne fait que le densifier, il suffit bien de considérer ces empilements pour obtenir la densité maximale. Le point essentiel est que les triangles de Delaunay ne sont jamais très plats (Fig. 1) :

Lemme 1 *Dans une triangulation de Delaunay des centres d'un empilement saturé, le plus grand angle de chaque triangle est entre* $\frac{\pi}{3}$ *et* $\frac{2\pi}{3}$*.*

Preuve. Soit ABC un triangle et A son plus grand angle. On a $\widehat{A} \geq \frac{\pi}{3}$ car la somme des angles vaut π. Si $\widehat{A} \geq \frac{2\pi}{3}$, alors $\widehat{B} + \widehat{C} \leq \frac{\pi}{3}$ et donc le plus petit angle - mettons $\widehat{B}$ - est plus petit que $\frac{\pi}{6}$. Donc $\sin \widehat{B} \leq \frac{1}{2}$, et comme $\overline{AC} \geq 2$, la *loi des sinus* permet de minorer le rayon R du cercle circonscrit à ABC :

$$2R = \frac{\overline{AC}}{\sin \widehat{B}} \geq 4.$$

Mais alors on peut ajouter un disque de rayon 1 au centre du cercle circonscrit : comme ce cercle est de rayon $R \geq 2$ et qu'il ne contient aucun point, le nouveau disque n'intersectera aucun autre disque. Ceci contredit l'hypothèse que l'empilement est saturé. Donc $\widehat{A} \leq \frac{2\pi}{3}$. $\square$

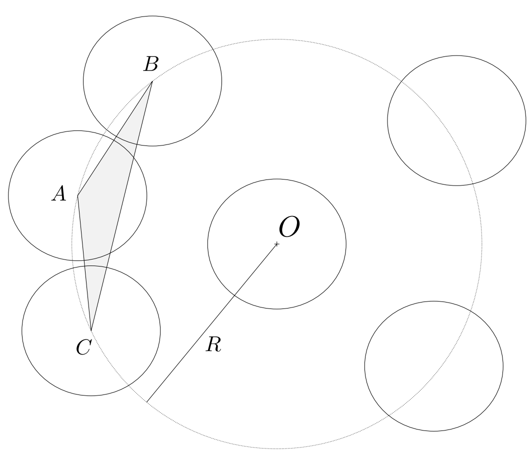

FIGURE 1 – Dans un empilement saturé, les triangles ne sont pas trop plats.

On en déduit facilement que dans une telle triangulation, l'aire d'un triangle est au moins $\sqrt{3}$. En effet, si $\widehat{A}$ désigne le plus grand angle d'un triangle

ABC, son aire $\mathcal{A}$ vérifie :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BA} \cdot \overline{AC} \cdot \sin \widehat{A} \geq \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Or chaque triangle contient *en moyenne* un demi disque, dans le sens où une part des secteurs des disques en ses sommets peut empièter sur le triangle voisin (ou réciproquement) mais la moyenne sur tous les triangles donne bien un demi-disque par triangle. La densité est donc bien majorée par $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

2 Une orange

Les empilements de disques dans le plan sont un cas particulier, pour $n = 2$, des empilement de sphères dans $\mathbb{R}^n$. Pour $n = 1$, cela revient à empiler des intervalles sur la droite : la densité maximale est évidemment 100%. À partir de $n = 3$, la situation se complique.

Une façon d'empiler des oranges sur un étal de maraîcher est de former une première couche carrée (centres disposés sur une grille carrée), puis une seconde couche identique où chaque orange vient se loger dans une cavité formée par 4 oranges de la couche inférieure, et ainsi de suite (Fig. 2).

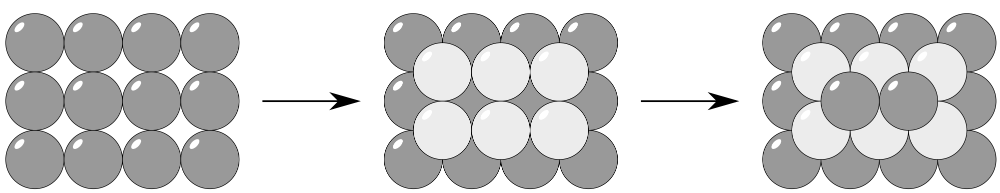

FIGURE 2 – Empiler des oranges par couches carrées.

Une autre façon est de former une première couche hexagonale compacte (centres disposés sur une grille triangulaire), puis une seconde couche identique où chaque orange vient se loger dans une cavité formée par 3 oranges de la couche inférieure, et ainsi de suite (Fig. 3). Il y a cependant un choix à faire à chaque couche, car seulement la moitié des cavités de la couche inférieure sont occupées. On peut soit disposer la dernière couche exactement au-dessus de l'antépénultième, soit la disposer de l'unique autre façon possible (Fig. 3, droite). On peut ensuite coder les couches successives par une suite de lettres A, B ou C de sorte que deux couches exactement l'une au-dessus de l'autre correspondent à la même lettre. Toute suite de A, B et C sans lettres identiques consécutives code alors un empilement (en particulier, il y en a un nombre indénombrable).

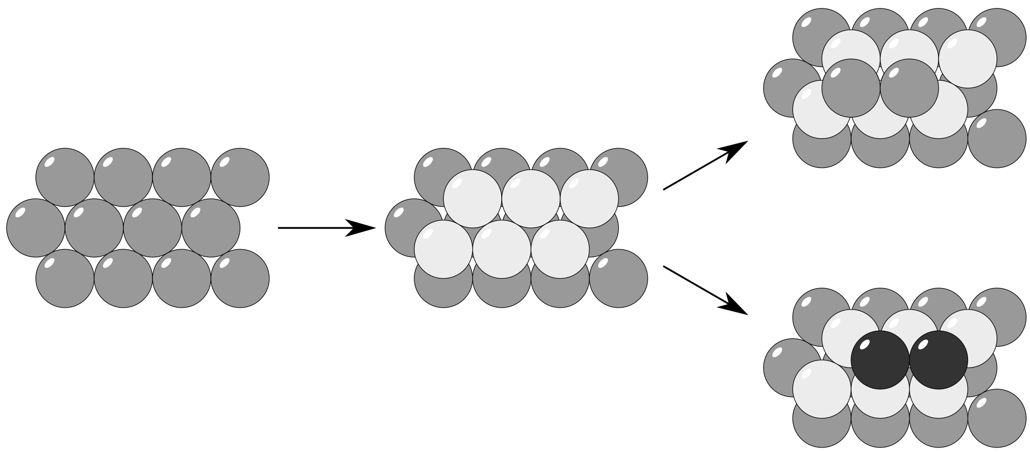

FIGURE 3 – Empiler des oranges par couches hexagonales compactes.

Parmi les empilements par couches hexagonales compactes, celui qui alterne parfaitement deux lettres (il est unique à translation près) est appelé *hexagonal compact* (Barlow, 1883). Celui qui alterne parfaitement les trois lettres n'est autre que l'empilement par couches carrées (Fig. 4), aussi appelé *cubique à faces centrées* (FCC) par les cristallographes (Fig. 5). Seul ce dernier est régulier.

Proposition 2 *Les empilements par couches hexagonales compactes sont tous de densité* $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \simeq 74\%$.

Conjecture 1 (Kepler, 1611) *La densité maximale d'un empilement dans l'espace est* $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \simeq 74\%$.

Comme en 2D, la densité maximale serait alors réalisé par des empilements réguliers (notamment le FCC comme le conjecturait Kepler). Cependant, contrairement au cas 2D, il y aurait aussi des empilements apériodiques de densité maximale : il suffit d'alterner aléatoirement les couches hexagonales compactes. À défaut de démontrer cette conjecture, le mathématicien

Figure 4 – L'empilement par couches carrées est un cas particulier d'empilement par couches hexagonales compactes. La coloration suit les couches hexagonales compactes à gauche et les couches carrées à droite.

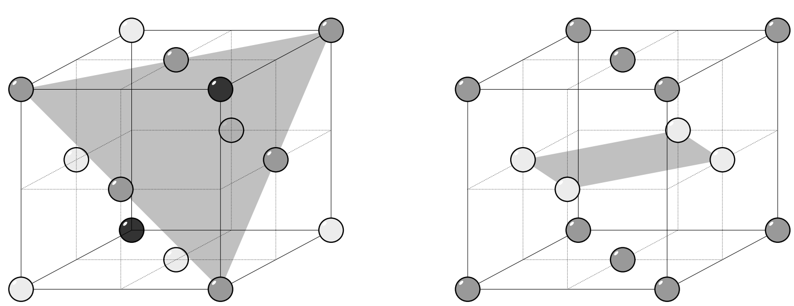

Figure 5 – L'empilement cubique à faces centrées. La coloration suit les couches hexagonales compactes à gauche et les couches carrées à droite.

allemand Carl Friedrich Gauss (1777–1855) a démontré que c'était la densité maximale pour les empilements réguliers (sphères centrées sur un réseau) :

Proposition 3 (Gauss, 1831) *La densité maximale d'un empilement régulier dans l'espace est* $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \simeq 74\%$.

Preuve. Similaire au cas des disques dans le plan mais un peu plus délicat. □

Sans l'hypothèse de régularité, le bon mot de l'Anglais Claude Ambrose Rogers (1920–2005) résume assez bien la situation qui perdura longtemps : "Many mathematicians believe, and all physicists know, that the density cannot exceed 0.7404". La conjecture finit cependant par être démontrée en 1998 par l'Américain Thomas Callister Hales et son doctorant Samuel Ferguson (voir [6]), dans ce que certains estiment être la preuve la plus difficile (à lire ?) qui soit à ce jour :

Théorème 2 (Hales-Ferguson, 1998) *La densité maximale d'un empilement dans l'espace est* $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \simeq 74\%$.

C'est une preuve de plus de 300 de pages réparties en 8 articles et, surtout, avec un usage intensif de l'ordinateur non seulement pour calculer mais aussi pour *prouver*, notamment traiter (éliminer, subdiviser *etc.*) de très nombreux cas de configurations locales. La preuve a été vérifiée pendant 4 ans par une équipe d'une quinzaine d'experts internationaux reconnus (donc Gabor Fejes Tóth, le fils de Laszló) qui sont arrivés à la conclusion qu'elle était "très probablement juste" (modulo quelques erreurs signalées qui ont été rapidement corrigées).

De son côté, Hales a monté une équipe d'une trentaine de personnes pour établir une *preuve formelle*, achevée en 2014 (projet Flyspeck en Caml et HOL-light, environ 500000 lignes de code). Après le précédent du théorème des 4 couleurs (1974), il se pourrait bien que de telles preuves assistées par ordinateur prennent une place grandissante en mathématiques.

3 Plus

Pour les empilements de sphères identiques en dimensions supérieures, le livre de référence est [3]. Il y a énormément de bornes supérieures ou inférieures sur les densités maximales et les empilements associés, mais les seuls résultats exacts, récents, sont en dimension 8 et 24 [11, 2].

Pour les empilements dans le plan avec deux tailles de disques, il existe 7 cas prouvés [7, 8, 10], qui correspondent tous à des ratios de tailles spécifiques qui permettent des empilements dits *compacts* : les trous entre les disques sont toujours délimités par seulement trois disques (il y a neuf tels ratios [9]). Pour trois tailles de disque, il y a un cas prouvé [5], qui correspond aussi à un des 164 cas qui permettent un empilement compact [4].

Références

[1] H.-Ch. Chang et L.-Ch. Wang, *A Simple proof of Thue's theorem on circle packing*, arXiv :1009.4322 (2010).

[2] H. Cohn, A. Kumar, S. Miller, S. D. Radchenko, M. Viazovska, *The sphere packing problem in dimension* 24, Annals of Mathematics **185** (2017).

[3] J. H. Conway et N. J. A. Sloane, *Sphere packings, lattices and groups*, Springer, 1988.

[4] Th. Fernique, A. Hashemi, O. Sizova, *Compact packings of the plane with three sizes of discs*, to appear in Discrete and Computational Geometry

[5] Th. Fernique, *A Densest ternary circle packing in the plane*, arXiv :1912.02297 (2019)

[6] Th. Hales, *A Proof of the Kepler conjecture*, Annals of Mathematics **162** (2005).

[7] A. Heppes, *On the Densest packing of discs of radius* 1 *and* $\sqrt{2}-1$, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica **36** (2000).

[8] A. Heppes, *Some densest two-size disc packings in the plane*, Discrete & Compuational Geometry **30** (2003).

[9] T. Kennedy, *Compact packings of the plane with two sizes of discs*, Discrete & Computational Geometry **35** (2006).

[10] T. Kennedy, *A Densest compact planar packing with two sizes of discs*, preprint arxiv :0412418v1 (2004).

[11] M. Viazovska, *The sphere packing problem in dimension* 8, Annals of Mathematics **185** (2017).