Séance 5 : **Transformée multiéchelles 2D**

1 Transformée 2D produit tensoriel

1.1 Transformée de Haar

On rappelle la transformée de Haar. Le passage de l'échelle fine vers l'échelle grossière:

$$v_k^{j-1} = \frac{1}{2}(v_{2k-1}^j + v_{2k}^j), \;\; k \geq 1.$$

Le passage de l'échelle grossière vers l'échelle fine nécéssite le calcul du détail:

$$d_k^{j-1} = \hat{v}_{2k-1}^j - v_{2k-1}^j \text{ où } \hat{v}_{2k-1}^j = \hat{v}_{2k}^j = v_k^{j-1} \; k \geq 1.$$

1.2 Transformée quadratique

On rappelle la transformée quadratique. Le passage de l'échelle fine vers l'échelle grossière ne change pas. Le passage de l'échelle grossière vers l'échelle fine nécéssite le calcul du détail:

$$d_k^{j-1} = \hat{v}_{2k-1}^j - v_{2k-1}^j$$

où

$$\hat{v}_{2k-1}^j = v_k^{j-1} - \frac{1}{8}(v_{k-1}^{j-1} - v_{k+1}^{j-1}), \;\; \hat{v}_{2k}^j = v_k^{j-1} + \frac{1}{8}(v_{k-1}^{j-1} - v_{k+1}^{j-1}), \;\; k \geq 1.$$

1.3 Transformée quadratique ENO

On rappelle la transformée quadratique ENO. On rappelle le passage de l'échelle fine vers l'échelle grossière:

$$v_k^{j-1} = \frac{1}{2}(v_{2k-1}^j + v_{2k}^j), \;\; k \geq 1.$$

Le passage de l'échelle grossière vers l'échelle fine est plus complexe : On calcule d'abord les quantités $c_k = |v_{k-1}^{j-1} - v_k^{j-1}| + |v_k^{j-1} - v_{k+1}^{j-1}|$, $g_k = |v_{k-1}^{j-1} - v_{k-2}^{j-1}| + |v_k^{j-1} - v_{k-1}^{j-1}|$ et $d_k = |v_{k+1}^{j-1} - v_k^{j-1}| + |v_{k+2}^{j-1} - v_{k+1}^{j-1}|$.
Alors
si $c_k = \min\{c_k, g_k, d_k\}$

$$\hat{v}_{2k-1}^j = v_k^{j-1} - \frac{1}{8}(v_{k-1}^{j-1} - v_{k+1}^{j-1}) \text{ et } \hat{v}_{2k}^j = v_k^{j-1} + \frac{1}{8}(v_{k-1}^{j-1} - v_{k+1}^{j-1}).$$

si $d_k = \min\{c_k, g_k, d_k\}$

$$\hat{v}_{2k-1}^j = \frac{11}{8}v_k^{j-1} - \frac{1}{2}v_{k+1}^{j-1} + \frac{1}{8}v_{k+2}^{j-1} \;\text{ et }\; \hat{v}_{2k}^j = \frac{5}{8}v_k^{j-1} + \frac{1}{2}v_{k+1}^{j-1} - \frac{1}{8}v_{k+2}^{j-1},$$

si $g_k = \min\{c_k, g_k, d_k\}$

$$\hat{v}^j_{2k-1} = \frac{5}{8}v^{j-1}_k + \frac{1}{2}v^{j-1}_{k-1} - \frac{1}{8}v^{j-1}_{k-2} \text{ et } \hat{v}^j_{2k} = \frac{11}{8}v^{j-1}_k - \frac{1}{2}v^{j-1}_{k-1} + \frac{1}{8}v^{j-1}_{k-2},$$

Pour le traitement des images on utilise le produit tensoriel. Cela implique le fait que les lignes et les colonnes de l'image seront traitées comme des signaux/vecteurs $1d$. Plus précisement une étape du produit tensoriel consiste dans l'application des algorithmes $1d$ sur toutes les lignes de l'image et ensuite l'application des algorithmes $1d$ sur toutes les colonnes sur l'image précédement obtenue. Ensuite on passe l'itération suivante.

On suppose la taille de l'image $n \times n$. Le nombre d'itrations L. En gnral $L \leq \log_2 n$ Schématiquement cette technique a les tapes suivantes:

- for $l = L$ to 3 do
  - "transform on the rows "
  - for $i = 1$ to n apply $1D$ procedure on the row i
  - copy the result in an intermediary matrix.
  - "transform on the columns " of the intermediary matrix.
  - for $j = 1$ to n apply $1D$ procedure on the column j
  - copy the result.
- copy the result.
- divide l by 2
- go to the first step

Exercice 1. *Pour une image X de taille $n \times n$ implémenter l'algorithme direct pour les 3 transformées multi-échelles en utilisant le produit tensoriel.*

Exercice 2. *Pour une image X de taille $n \times n$ implémenter l'algorithme invers pour les 3 transformées multi-échelles en utilisant le produit tensoriel.*

Exercice 3. *Sur une image de votre choix, vérifier que l'on a bien l'identité avec l'image de départ.*

Exercice 4. *Pour une image X de taille $n \times n$ ajouter du bruit gaussien et puis appliquer le seuillage pour le débruitage. Afficher les coefficients gardés. Où sont localisés ces coefficients ?*

Exercice 5. *Etudier numériquement la qualité de la reconstruction par rapport aux seuils utilisées. Faire le graphe de l'érreur en fonction du seuil.*

Exercice 6. *Pour une image X de taille $n \times n$ appliquer les transformée directes : haar et quadratique. Ensuite ne garder pour la transformée inverse que les coefficients plus grands qu'un certain seuil. Etudier numériquement la qualité de la reconstruction pour ces deux transformées par rapport au nombres de coefficients gardés.*

2 Transformée 2D non produit tensoriel Haar

La transformation Haar multi-échelle linéaire non séparable. On rappelle le passage de l'échelle fine vers l'échelle grossière:

$$v_k^{j-1} = v_{k_x,k_y}^{j-1} := \frac{1}{4}(v^j_{2k_x-1,2k_y-1} + v^j_{2k_x,2k_y} + v^j_{2k_x,2k_y-1} + v^j_{2k_x-1,2k_y}). \tag{1}$$

Dans ce cas le passage de l'échelle grossière vers l'échelle fine est:

$$v^j_{2k_x-1,2k_y-1} = v^j_{2k_x,2k_y} = v^j_{2k_x,2k_y-1} = v^j_{2k_x-1,2k_y}) := v^{j-1}_{k_x,k_y}. \tag{2}$$

Pour calculer les détails on utilise les formules suivantes :

$$d^{j-1}_{k_x,k_y+1} := \frac{1}{4}(v^j_{2k_x-1,2k_y-1} - v^j_{2k_x-1,2k_y} - v^j_{2k_x,2k_y} + v^j_{2k_x,2k_y-1}). \tag{3}$$

$$d^{j-1}_{k_x+1,k_y} := \frac{1}{4}(v^j_{2k_x-1,2k_y-1} + v^j_{2k_x-1,2k_y} - v^j_{2k_x,2k_y} - v^j_{2k_x,2k_y-1}). \tag{4}$$

$$d^{j-1}_{k_x+1,k_y+1} := \frac{1}{4}(v^j_{2k_x-1,2k_y-1} - v^j_{2k_x-1,2k_y} + v^j_{2k_x,2k_y} - v^j_{2k_x,2k_y-1}). \tag{5}$$

Exercice 7. *Le passage de l'échelle grossière vers l'échelle fine est plus complexe. Retrouvez les formules de la transformée inverse.*

Exercice 8. *Pour un signal X de taille $n \times n$ implémente l'algorithme direct de la transformée multi-échelle Haar linéaire non -séparable*

Exercice 9. *Pour un signal X de taille $n \times n$ implémente l'algorithme invers de la transformée multi-échelle Haar linéaire non -séparable*

Exercice 10. *Sur une image de votre choix, vérifier que l'on a bien l'identité avec l'image de départ.*

Exercice 11. *Pour une image X de taille $n \times n$ appliquer le seuillage pour la reconstruction Afficher les coefficients gardés. Où sont localisés ces coefficients ?*

Exercice 12. *Etudier numériquement la qualité de la reconstruction par rapport aux seuils utilisées.*

Exercice 13. *Pour une image X de taille $n \times n$ ajouter du bruit gaussien et puis appliquer le seuillage pour le débruitage. Afficher les coefficients gardés. Où sont localisés ces coefficients ?*

Exercice 14. *Etudier numériquement la qualité de la reconstruction par rapport aux seuils utilisées.*

Exercice 15. *Etudier numériquement la qualité de la reconstruction par rapport aux seuils utilisées pour les deux transformées de Haar séparable et non-séparable.*

3 Bonus Transformée 2D non produit tensoriel quadratique

La transformation quadratique multi-échelle linéaire non séparable. On rappelle le passage de l'échelle fine vers l'échelle grossière:

$$v_k^{j-1} = v_{k_x,k_y}^{j-1} := \frac{1}{4}(v^j_{2k_x-1,2k_y-1} + v^j_{2k_x,2k_y} + v^j_{2k_x,2k_y-1} + v^j_{2k_x-1,2k_y}). \tag{6}$$

Dans ce cas le passage de l'échelle grossière vers l'échelle fine est:

$$\begin{aligned}\hat{v}^j_{2k_x-1,2k_y-1} = &-(1/32)v^{j-1}_{k_x,k_y+1} - (1/256)v^{j-1}_{k_x+1,k_y+1} + (1/32)v^{j-1}_{k_x+1,k_y} + (1/256)v^{j-1}_{k_x+1,k_y-1} + (1/4)v^{j-1}_{k_x,k_y}\\ &+(1/32)v^{j-1}_{k_x,k_y-1} + (1/256)v^{j-1}_{k_x-1,k_y+1} - (1/256)v^{j-1}_{k_x-1,k_y-1} - (1/32)v^{j-1}_{k_x-1,k_y};\end{aligned}$$

$$\hat{v}^j_{2k_x-1,2k_y} = -(1/32)v^{j-1}_{k_x,k_y+1} + (1/256)v^{j-1}_{k_x+1,k_y+1} - (1/32)v^{j-1}_{k_x+1,k_y} - (1/256)v^{j-1}_{k_x+1,k_y-1} + (1/4)v^{j-1}_{k_x,k_y} + (1/32)v^{j-1}_{k_x,k_y-1} - (1/256)v^{j-1}_{k_x-1,k_y+1} + (1/256)v^{j-1}_{k_x-1,k_y-1} + (1/32)v^{j-1}_{k_x-1,k_y};$$

$$\hat{v}^j_{2k_x,2k_y-1} = (1/32)v^{j-1}_{k_x,k_y+1} - (1/256)v^{j-1}_{k_x+1,k_y+1} - (1/32)v^{j-1}_{k_x+1,k_y} + (1/256)v^{j-1}_{k_x+1,k_y-1} + (1/4)v^{j-1}_{k_x,k_y} - (1/32)v^{j-1}_{k_x,k_y-1} + (1/256)v^{j-1}_{k_x-1,k_y+1} - (1/256)v^{j-1}_{k_x-1,k_y-1} + (1/32)v^{j-1}_{k_x-1,k_y};$$

$$\hat{v}^j_{2k_x,2k_y} = (1/32)v^{j-1}_{k_x,k_y+1} + (1/256)v^{j-1}_{k_x+1,k_y+1} + (1/32)v^{j-1}_{k_x+1,k_y} - (1/256)v^{j-1}_{k_x+1,k_y-1} + (1/4)v^{j-1}_{k_x,k_y} - (1/32)v^{j-1}_{k_x,k_y-1} - (1/256)v^{j-1}_{k_x-1,k_y+1} + (1/256)v^{j-1}_{k_x-1,k_y-1} - (1/32)v^{j-1}_{k_x-1,k_y};$$

Pour calculer les détails on utilise les formules suivantes :

$$d^{j-1}_{k_x,k_y+1} := \hat{v}^j_{2k_x-1,2k_y} - v^j_{2k_x-1,2k_y}. \tag{7}$$

$$d^{j-1}_{k_x+1,k_y} := \hat{v}^j_{2k_x,2k_y-1} - v^j_{2k_x,2k_y-1}. \tag{8}$$

$$d^{j-1}_{k_x+1,k_y+1} := \hat{v}^j_{2k_x,2k_y} - v^j_{2k_x,2k_y}. \tag{9}$$

Exercice 16. *Le passage de l'échelle grossière vers l'échelle fine est plus complexe. Retrouvez les formules de la transformée inverse.*

Exercice 17. *Pour un signal X de taille $n \times n$ implémente l'algorithme direct de la transformée multi-échelle Haar linéaire non -séparable*

Exercice 18. *Pour un signal X de taille $n \times n$ implémente l'algorithme invers de la transformée multi-échelle Haar linéaire non -séparable*

Exercice 19. *Sur une image de votre choix, vérifier que l'on a bien l'identité avec l'image de départ.*

Exercice 20. *Pour une image X de taille $n \times n$ appliquer le seuillage pour la reconstruction Afficher les coefficients gardés. Où sont localisés ces coefficients ?*

Exercice 21. *Etudier numériquement la qualité de la reconstruction par rapport aux seuils utilisées.*

Exercice 22. *Pour une image X de taille $n \times n$ ajouter du bruit gaussien et puis appliquer le seuillage pour le débruitage. Afficher les coefficients gardés. Où sont localisés ces coefficients ?*

Exercice 23. *Etudier numériquement la qualité de la reconstruction par rapport aux seuils utilisées.*

Exercice 24. *Etudier numériquement la qualité de la reconstruction par rapport aux seuils utilisées pour les deux transformées quadratiques séparable et non-séparable.*