Théorie et Applications de la Topologie Algébrique Dirigée

Emmanuel Haucourt (CEA-LIST)

Projet **PANDA**[1]

Jeudi 10 Octobre 2009

[1] soutenu par l'**A**gence **N**ationale pour la **R**echerche

Historique

- Partially ordered spaces (or Pospace)
  - *Eilenberg* 40, *Nachbin* 48/65
  - *Dijkstra* 68, *Coffman/Elphick/Shoshani* 71, *Carson/Reynolds* 87
  - *Fajstrup/Goubault/Raußen* 98
- d-spaces *Marco Grandis* 01
- streams *Sanjeevi Krishnan* 06

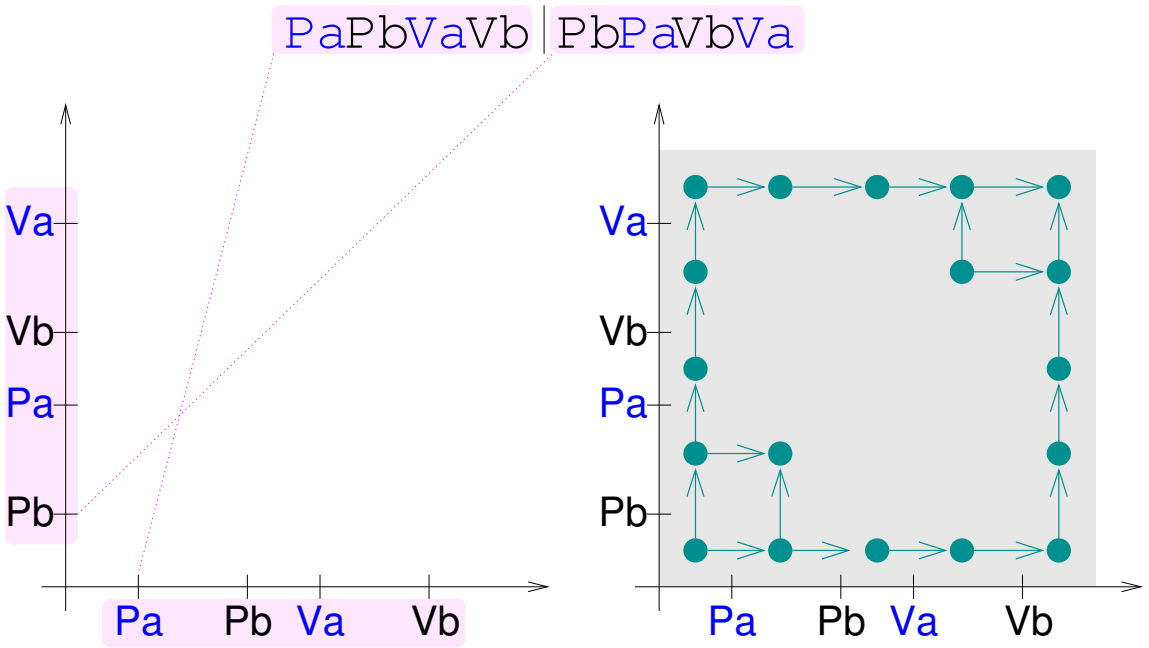
Partially ordered spaces

Obj $\begin{cases} \text{Espace topologique } X \\ \text{Un ordre } \sqsubseteq \text{ sur } |X| \text{ dont le graphe est fermé dans } X \times X \end{cases}$

Mor Applications croissantes et continues

Représentation combinatoire d'un programme

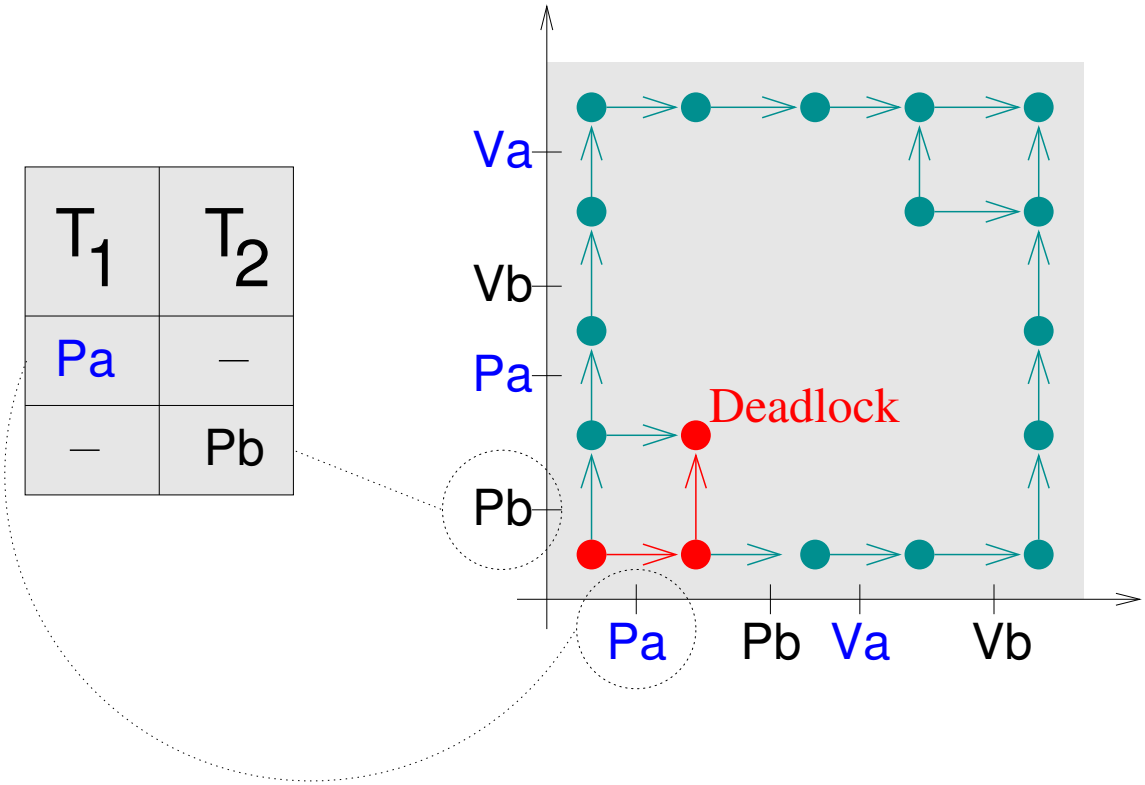
d'après le langage "Pakken/Vrijlaten" de *Edsger Wybe Dijkstra*



18 states and 20 arrows

Une exécution

du programme T_1 =PaPbVaVb | T_2 =PbPaVbVa

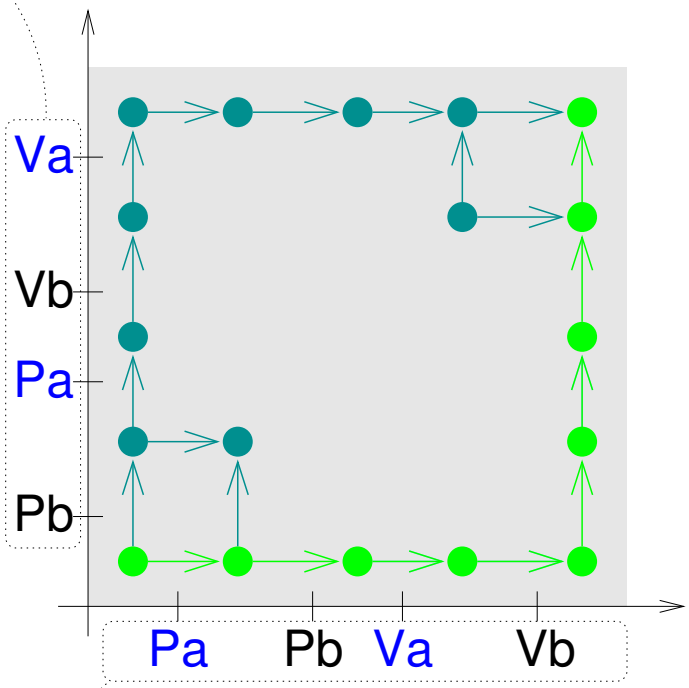


Deadlock

Une autre exécution

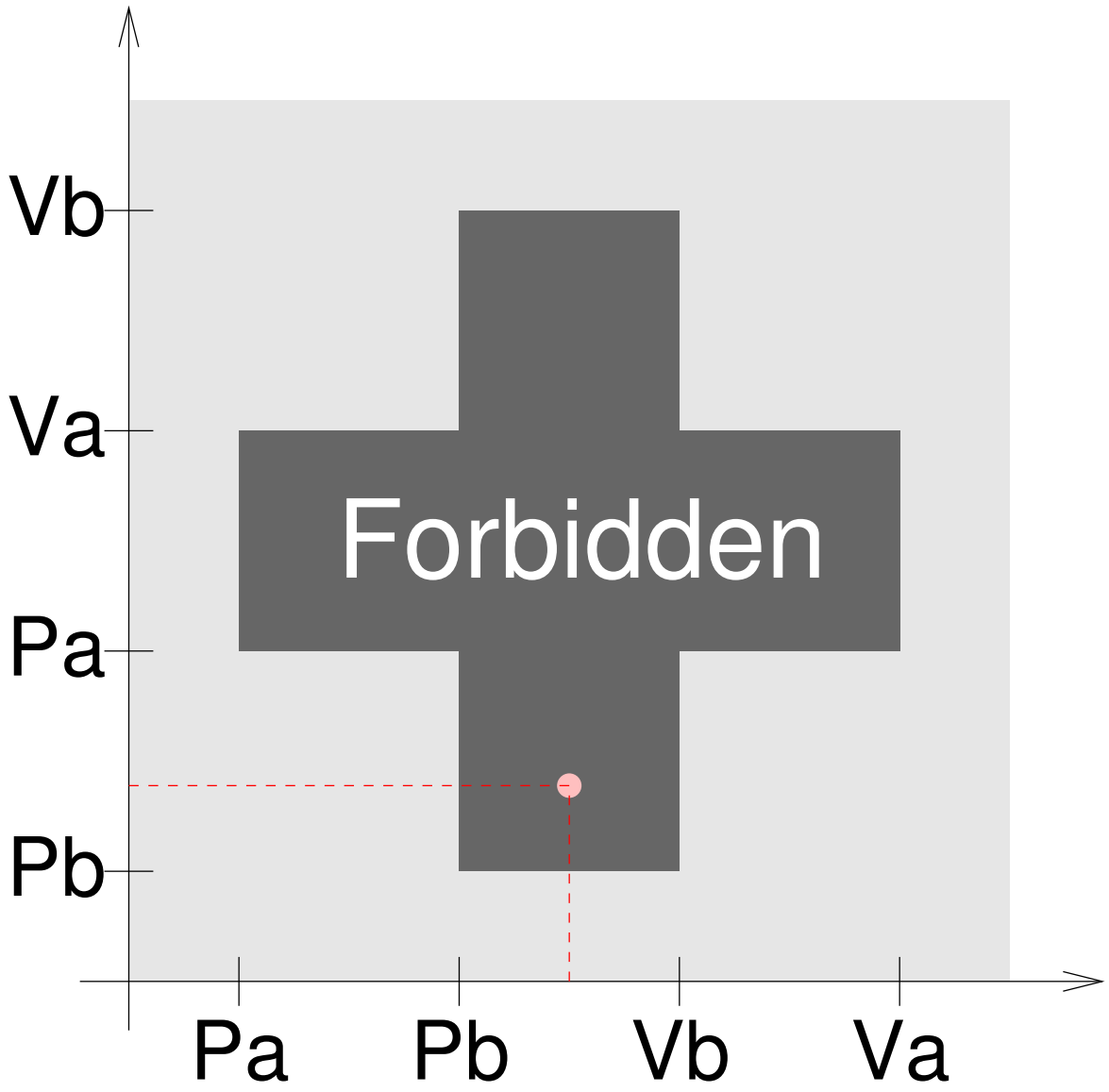
du programme T_1 =PaPbVaVb | T_2 =PbPaVbVa

T_1	T_2
Pa	–
Pb	–
Va	–
Vb	–
–	Pb
–	Pa
–	Vb
–	Va

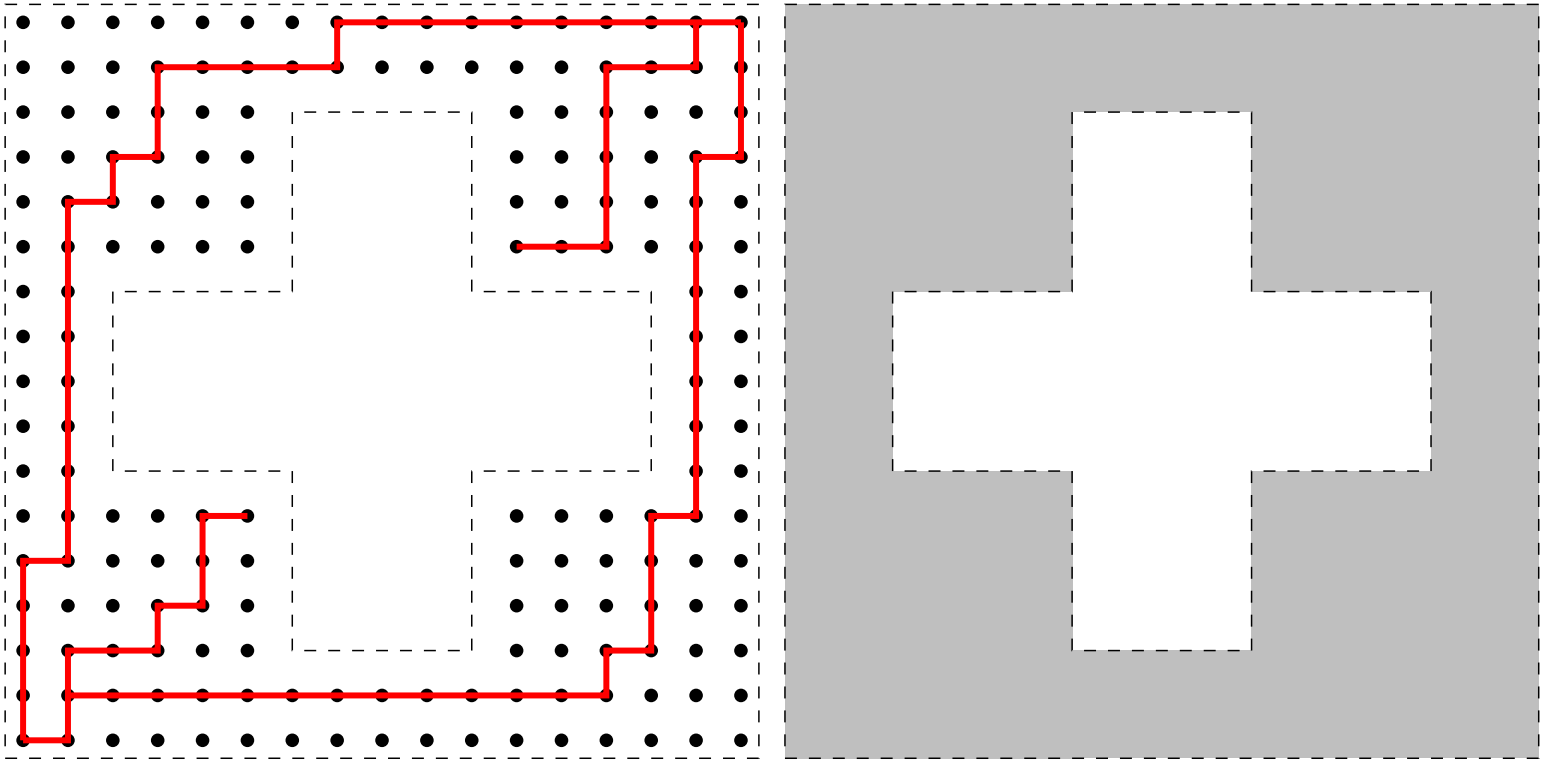


Termination

Représentation géométrique



Discret *vs* Continu



Le Cercle Dirigé

Chemins dirigés sur un pospace X : applications continues croissantes de $[0,1]$ sur X

Problème

$$\left\{ \; z \in \mathbb{C} \; \middle| \; |z| = 1 \; \right\}$$

Chemin dirigés : $t \in [0,1] \mapsto e^{i\theta(t)}$
où $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue croissante

d-Spaces

$$\text{Obj} \begin{cases} \text{Espace topologique } X \\ \text{Une famille } dX \text{ de chemins dirigés sur } X \end{cases}$$

Mor Applications continues préservant les circulations

Streams

Obj $\begin{cases} \text{Espace topologique } X \\ \text{Une circulation } \preceq_W \text{ sur } X \end{cases}$

Mor Applications continues préservant les chemins dirigés

circulation : W ouvert de $X \mapsto \preceq_W$ preordre sur W tq

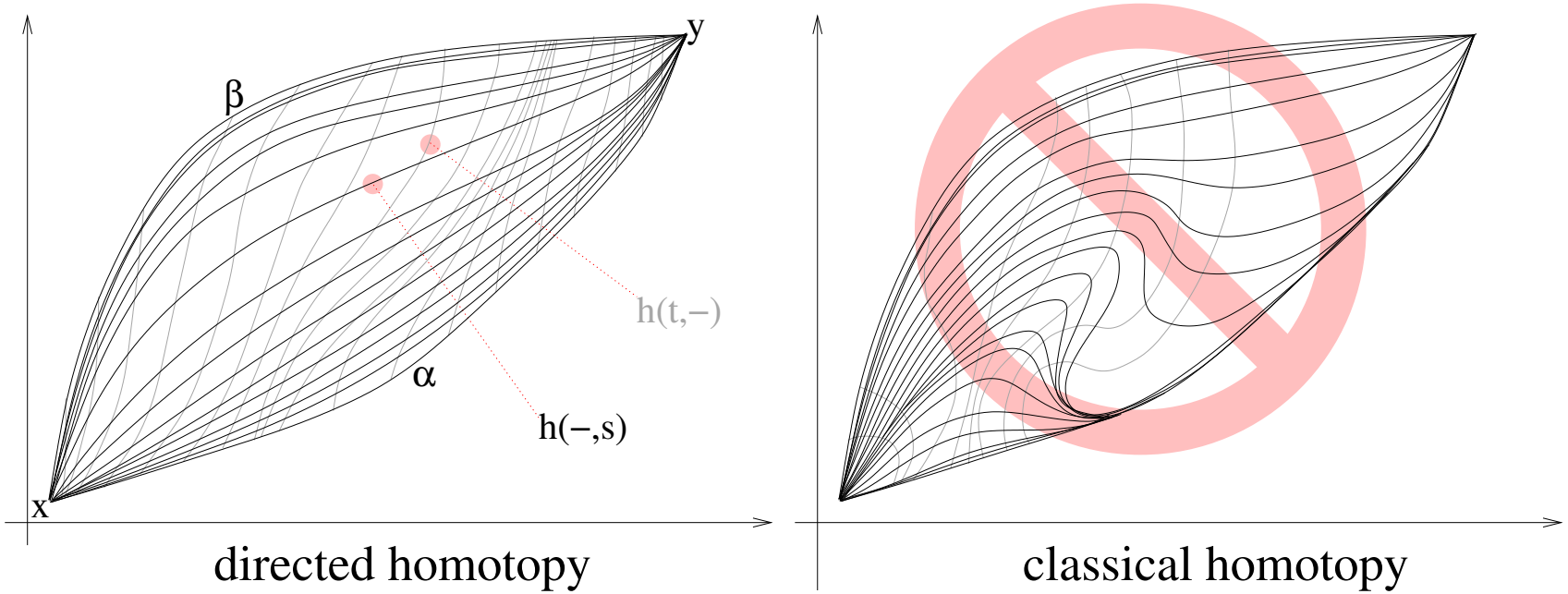
$$\bigvee_{i \in \mathcal{I}} \preceq_{V_i} = \preceq_W$$

pour tout ouvert W et tout recouvrement ouvert $(V_i)_{i \in \mathcal{I}}$ de W

Directed homotopy

what it is and looks like

Morphism h from $\overrightarrow{[0,1]}^2$ to $\overrightarrow{X}$ such that $U(h)$ is a homotopy from γ to δ



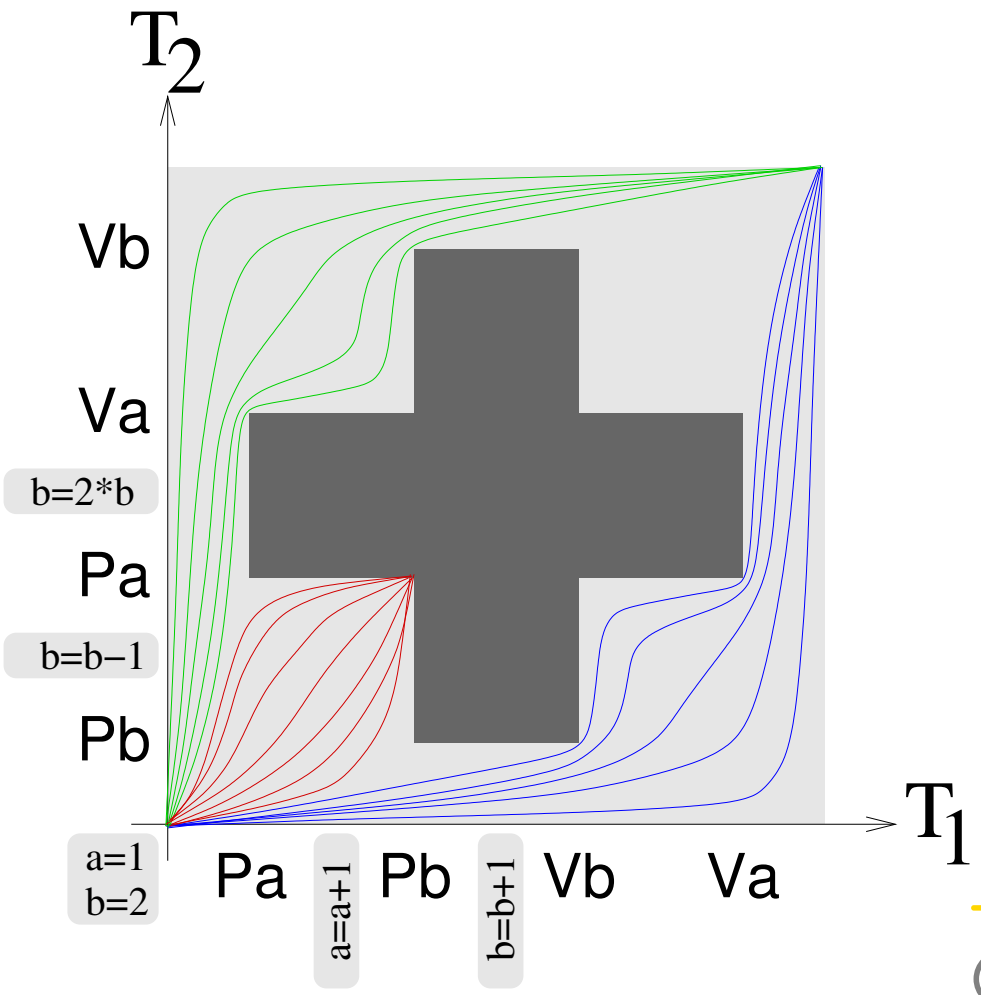
Directed homotopy

an example

T1 gets a and b before T2 => a=2 and b=4

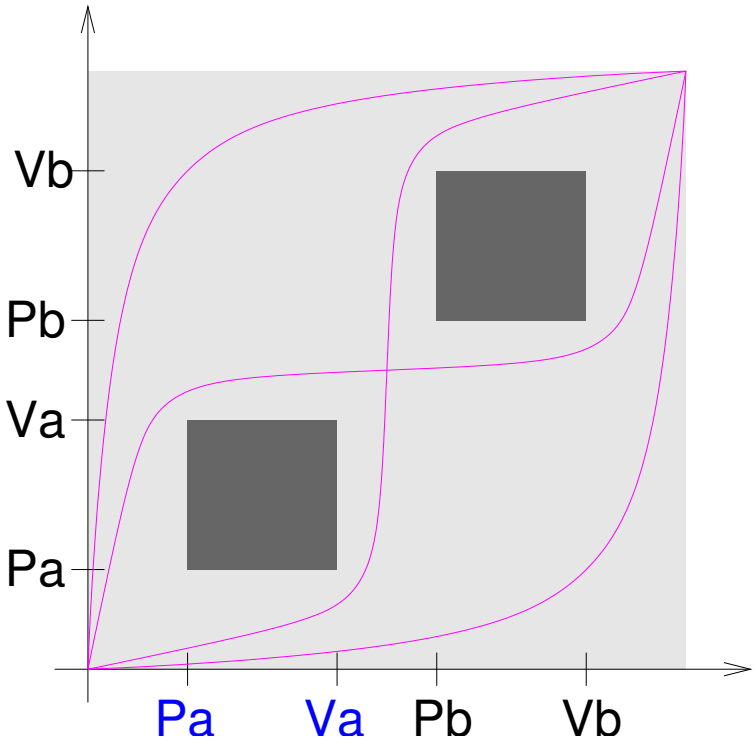
T2 gets b and a before T1 => a=2 and b=3

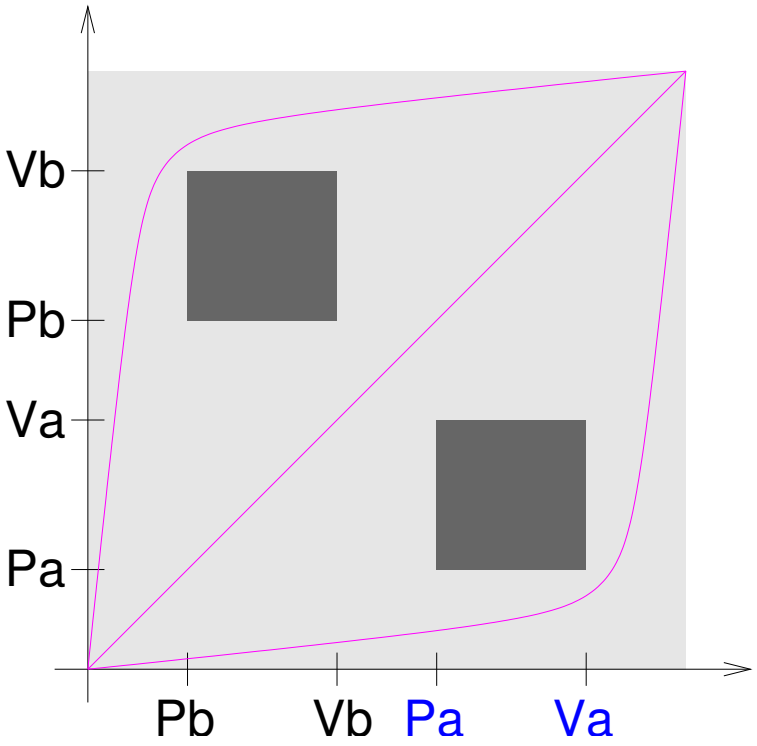
Each of T1 and T2 gets a ressource
=> Deadlock with a=2 and b=1



Exemples de représentations géométriques

de programmes parallèles

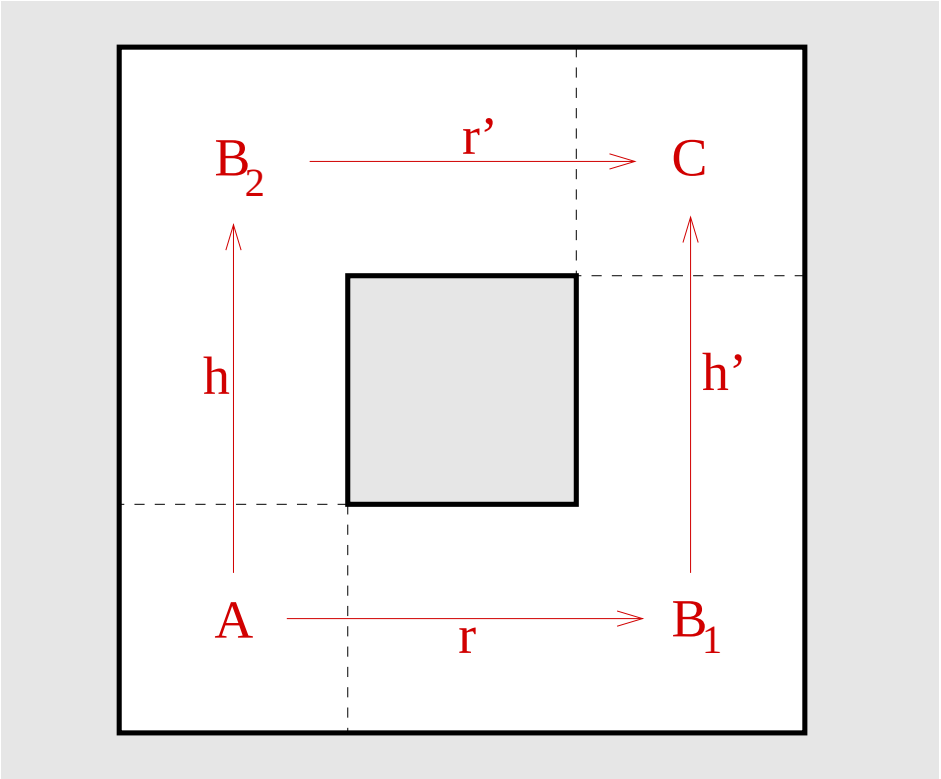




Catégories fondamentales

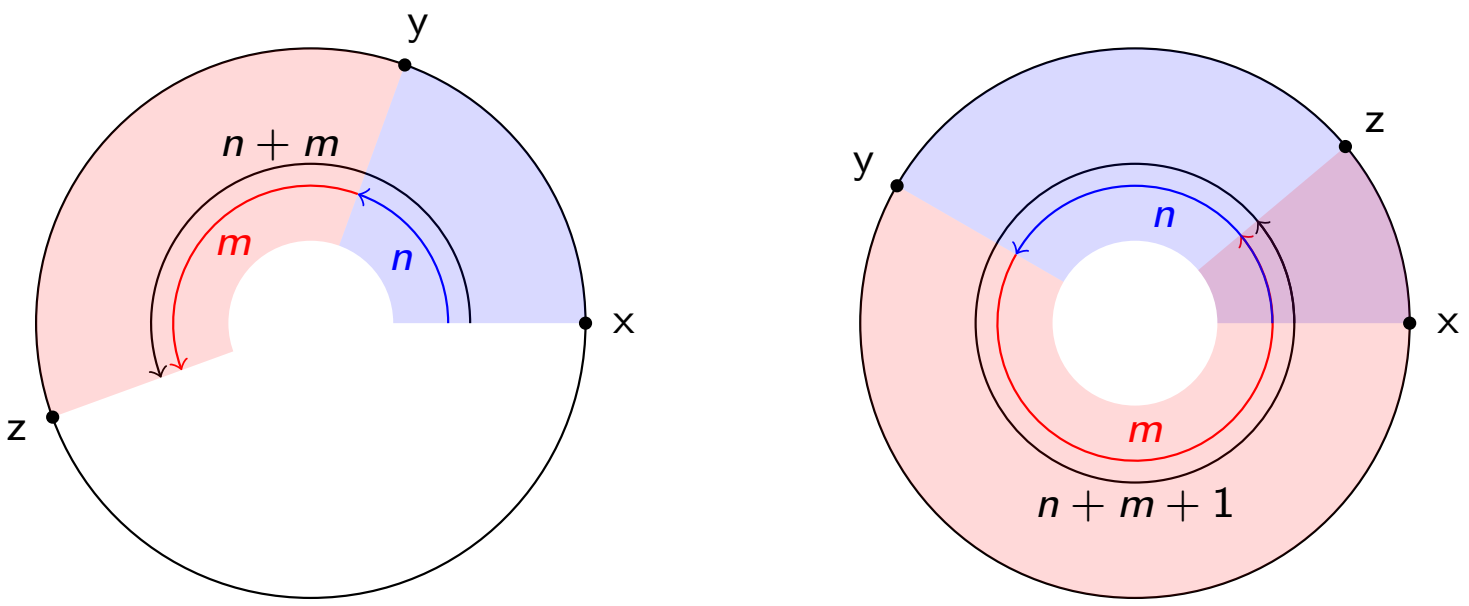
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{PoTop} \arrow[r, shift left] \arrow[dr, shift left, "\overrightarrow{\pi}_1"'] & \mathrm{Str} \arrow[l, dashed, shift left] \arrow[r, shift left] \arrow[dr, shift left, "\overrightarrow{\pi}_1"] & \mathrm{dTop} \arrow[l, dashed, shift left] \arrow[d, "\overrightarrow{\pi}_1"] \\
& & \mathrm{Cat}
\end{tikzcd}$$

$x \in$	$y \in$	$\mathcal{C}[x,y]$
A	A	$\{\sigma_{x,y}\}$
B_1	B_1	$\{\sigma_{x,y}\}$
B_2	B_2	$\{\sigma_{x,y}\}$
C	C	$\{\sigma_{x,y}\}$
A	B_1	$\{r_{x,y}\}$
A	B_2	$\{h_{x,y}\}$
B_1	C	$\{h'_{x,y}\}$
B_2	C	$\{r'_{x,y}\}$
B_1	B_2	$\emptyset$
B_2	B_1	$\emptyset$
A	C	$\{u_{x,y}\ ,\ d_{x,y}\}$



Le Cercle Dirigé

Obects : S^1 Morphisms : $S^1 \times \mathbb{N} \times S^1$ Identities : (x,0,x) for x$\in S^1$



Les outils MIEL et ALCOOL

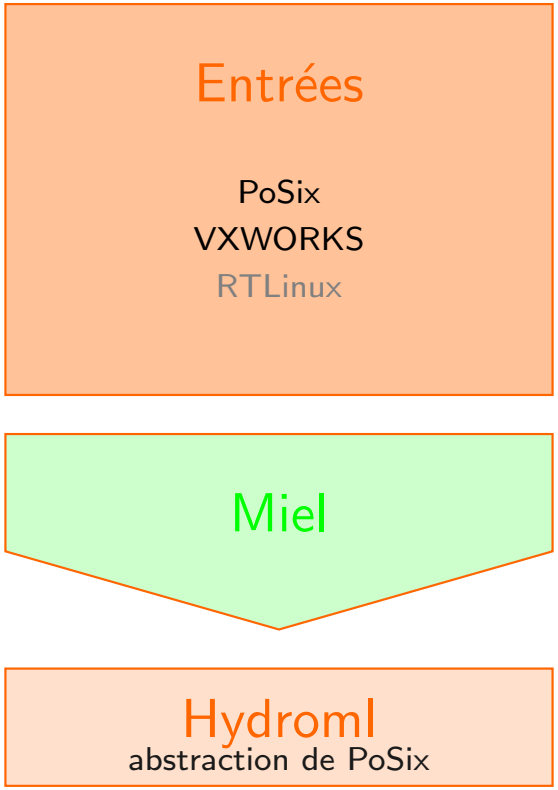
Principe de fonctionnement

Entrées

PoSix
VXWORKS
RTLinux

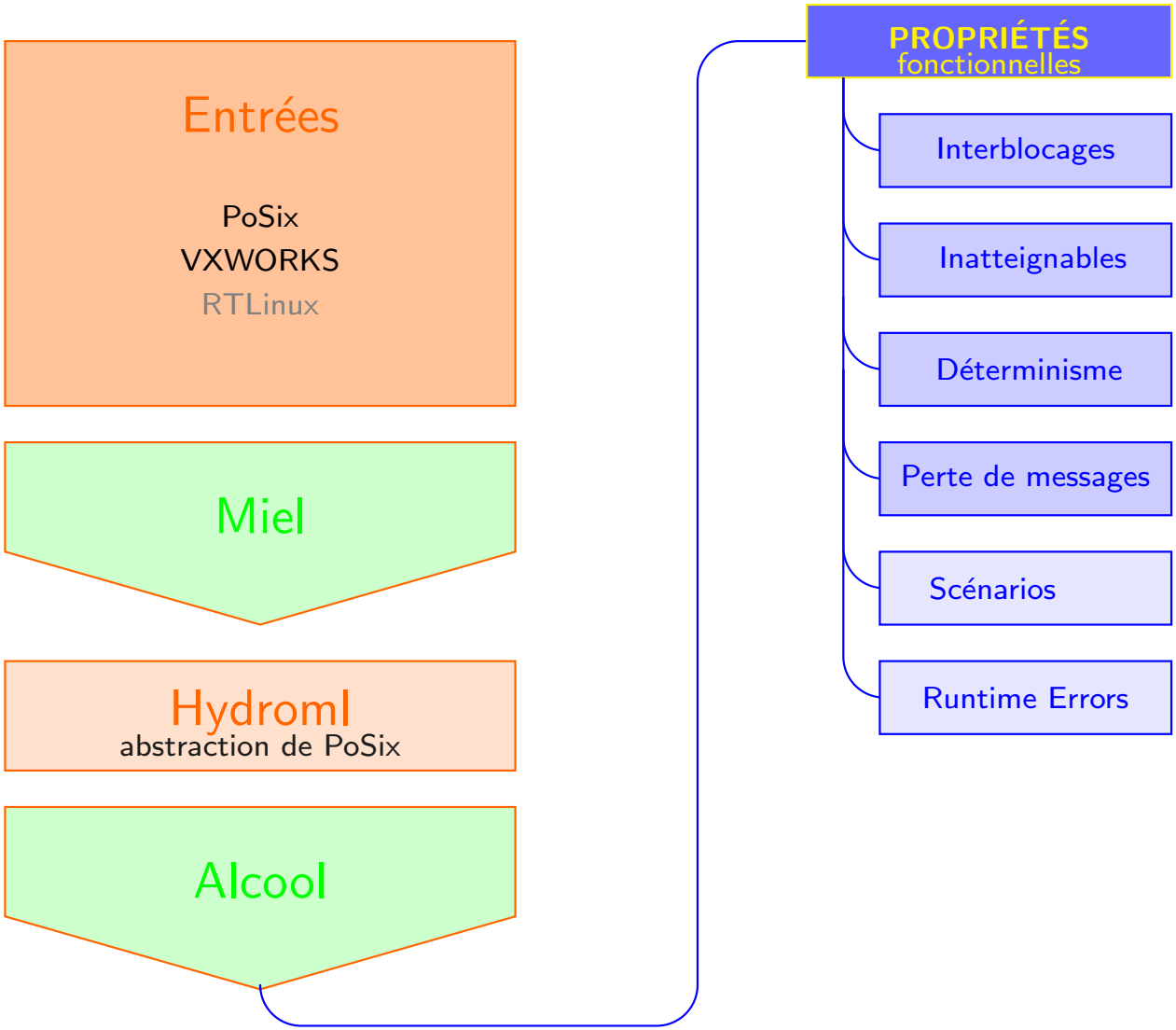
Les outils MIEL et ALCOOL

Principe de fonctionnement



Les outils MIEL et ALCOOL

Principe de fonctionnement



Documentation
du projet ALCOOL

Documentation développeur/utilisateur de l'outil ALCOOL

Le moteur de calcul des régions cubiques

opérations disponibles : description de $\mathcal{E}$

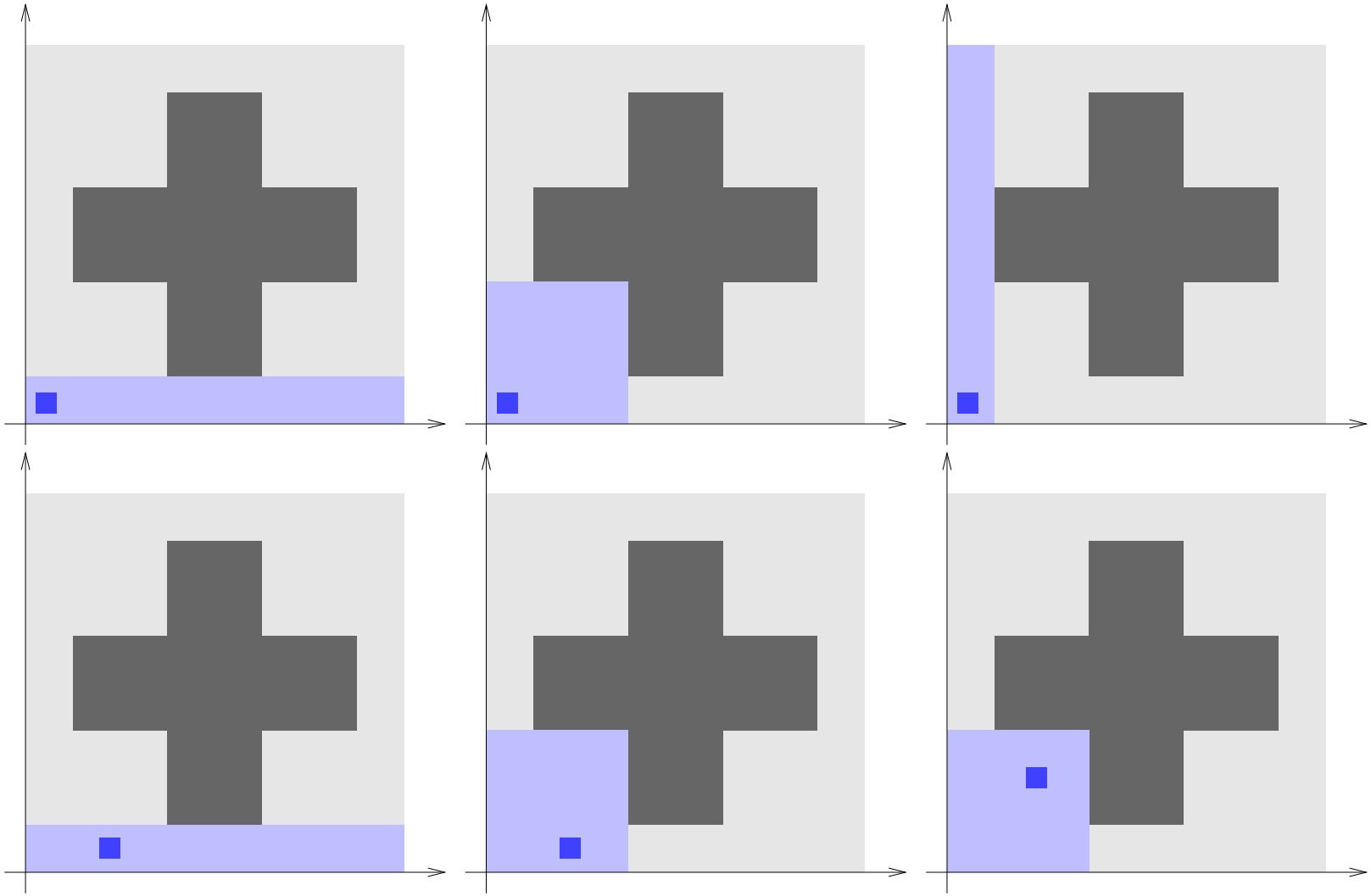
`(`$\mathcal{E}$`)`	parenthésage
$\mathcal{E}$`*`$\mathcal{E}$	produit Cartésien
$\mathcal{E}$`&`$\mathcal{E}$	intersection
$\mathcal{E}$`|`$\mathcal{E}$	union
$\mathcal{E}$`/`$\mathcal{E}$	différence
`!`$\mathcal{E}$	complément
`up.`$\mathcal{E}$	cône au-dessus
`do.`$\mathcal{E}$	cône en-dessous
`in.`$\mathcal{E}$	intérieur topologique
`cl.`$\mathcal{E}$	clôture topologique
`cu.`$\mathcal{E}$	enveloppe cubique
`bo.`$\mathcal{E}$	frontière topologique
`no.`$\mathcal{E}$	forme normale
`co.`$\mathcal{E}$	forme réduite
`dl.`$\mathcal{E}$	points morts
`da.`$\mathcal{E}$	bassin d'attraction des points morts
`ia.`$\mathcal{E}$	bassin d'attraction de l'infini
`re.`$\mathcal{E}$	sous-région atteignable
`mgd.`$\mathcal{E}$	région dangeureuse
`mgi.`$\mathcal{E}$	région vive
`gnz.`$\mathcal{E}$	ginzu

`@(`n`)`	Région vide de dimension $n \in \mathbb{N}$
`ù(`n`)`	Région pleine de dimension $n \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l}]a,b[\\ [a,b[\\ ]a,b] \\ [a,b] \\ [a,-[\\ ]a,-[\\ \{a\} \end{array}\right\} \text{Intervalles}$$

CPO des sous-cubes d'une région cubique

Sous-cubes maximaux d'une région cubique



Une région cubique est égale à la réunion de ses sous-cubes maximaux

Régions cubiques *vs* Recouvrements cubiques

une correspondance de *Galois*

$$\{\text{Recouvrements cubiques}\} \underset{\gamma}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \{\text{Régions cubiques}\}$$

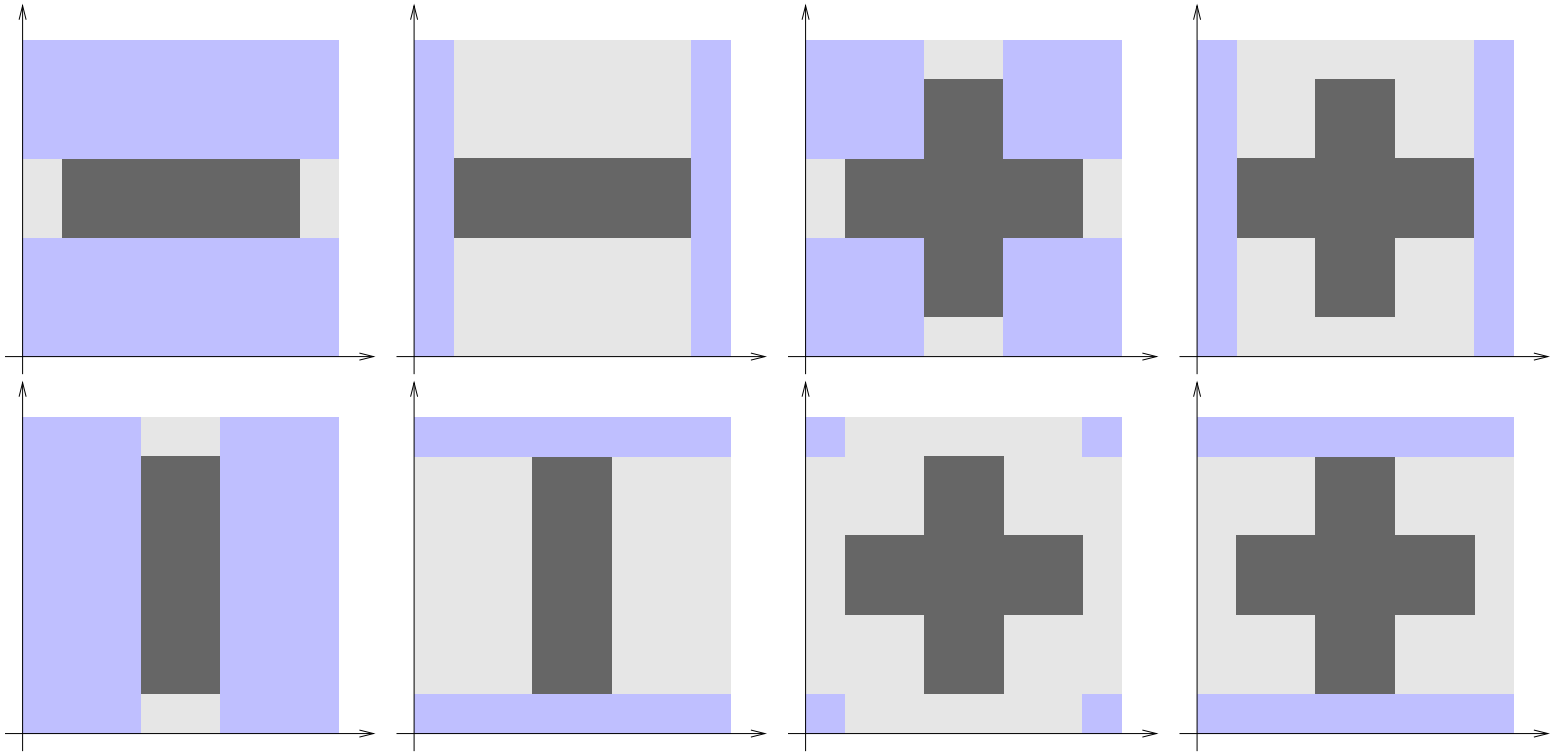
$$\alpha\big((C_i)_{i=1,\dots,p}\big) := \bigcup_{i=1}^{p} C_i$$

$$\gamma(X) := \{\text{sous-cubes maximaux de } X\}$$

Si les régions cubiques X_1 et X_2 contiennent tous les sous-cubes maximaux de $\alpha(X_1)$ et $\alpha(X_2)$, alors $X_1 \wedge X_2$ contient tous les sous-cubes maximaux de $\alpha(X_1) \cap \alpha(X_2)$

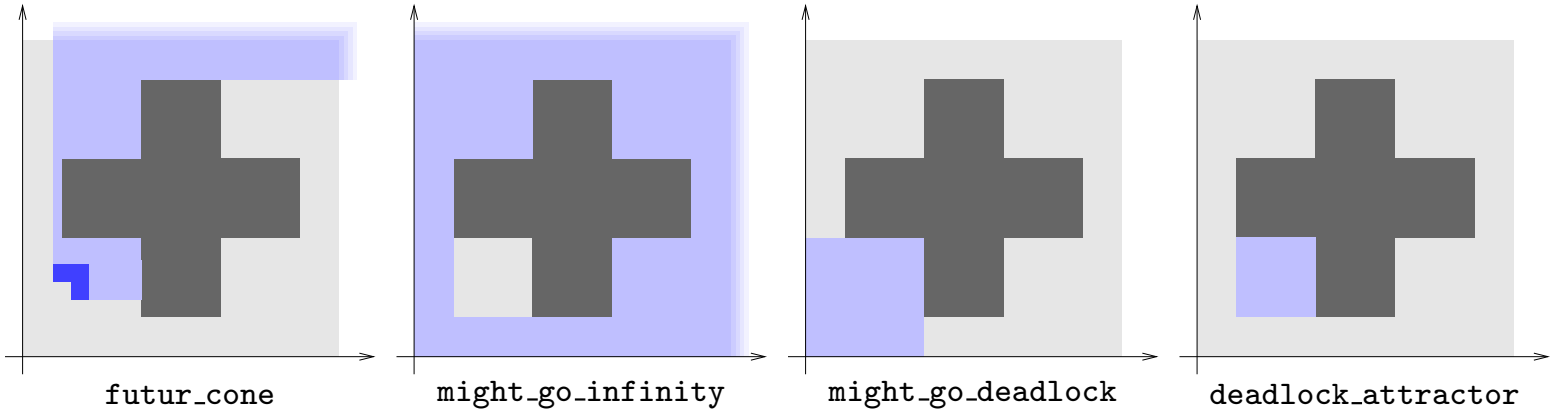
Complémentaire d'une région cubique

un exemple dans le plan



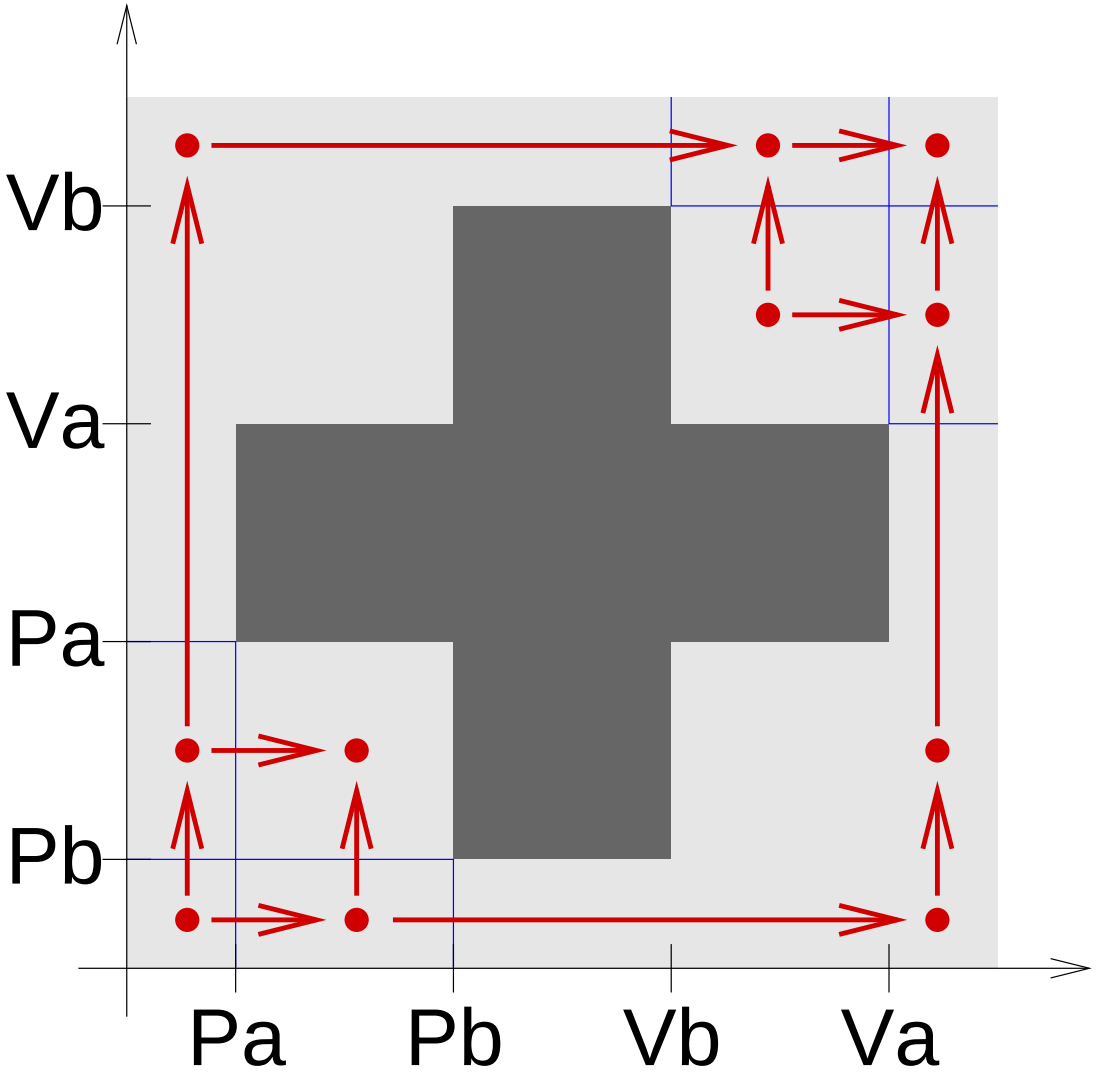
Quelques exemples

d'utilisations de fonctions fournies par le module `Area.ml`

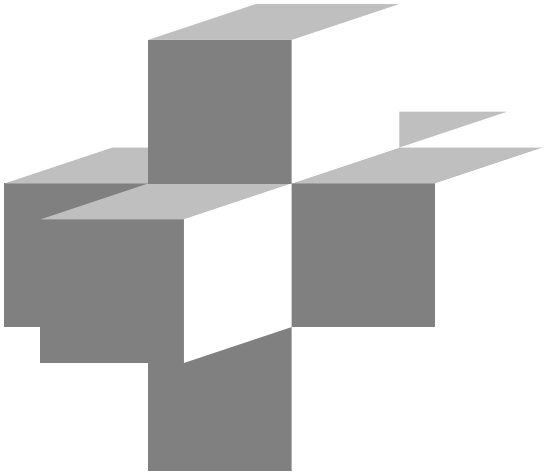


Catégorie des composantes

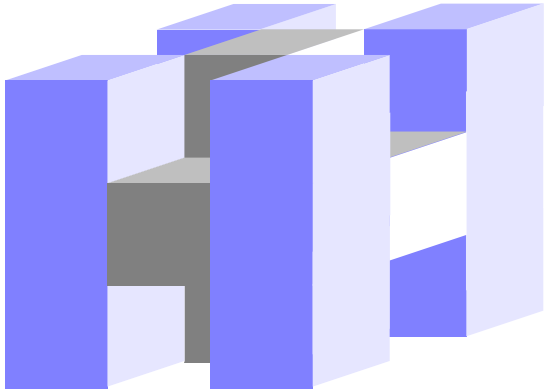
du drapeau suisse



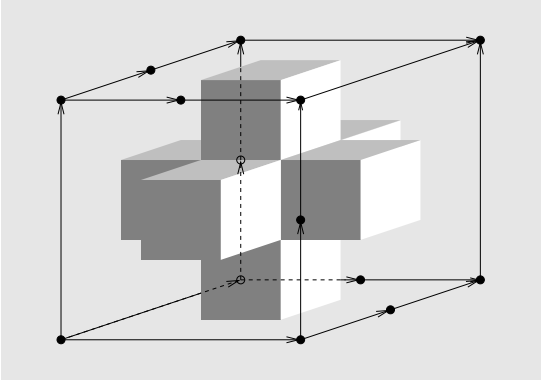
Catégorie des composantes
du drapeau suisse 3D



forbidden area

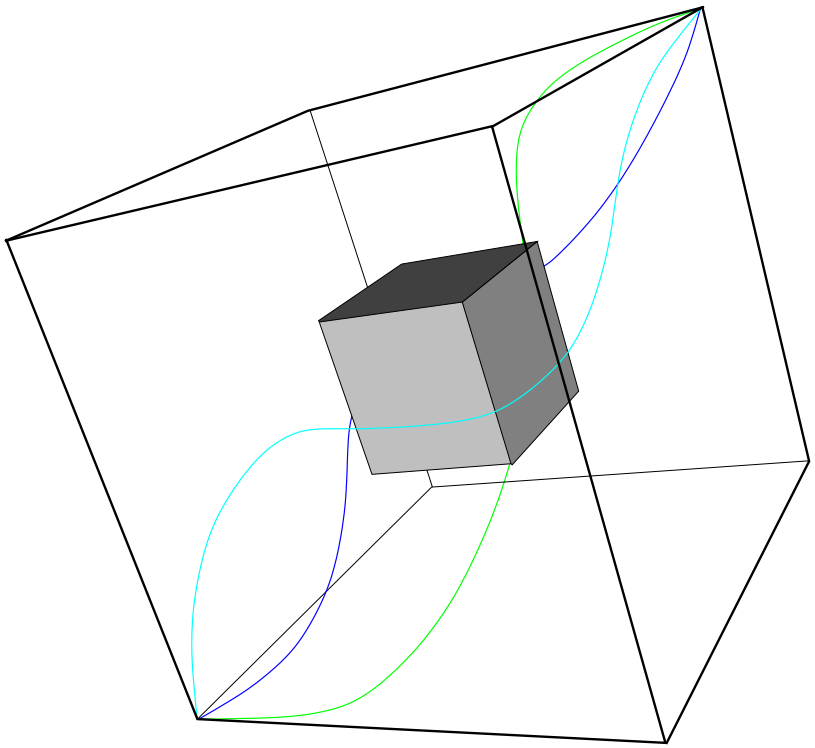


state space

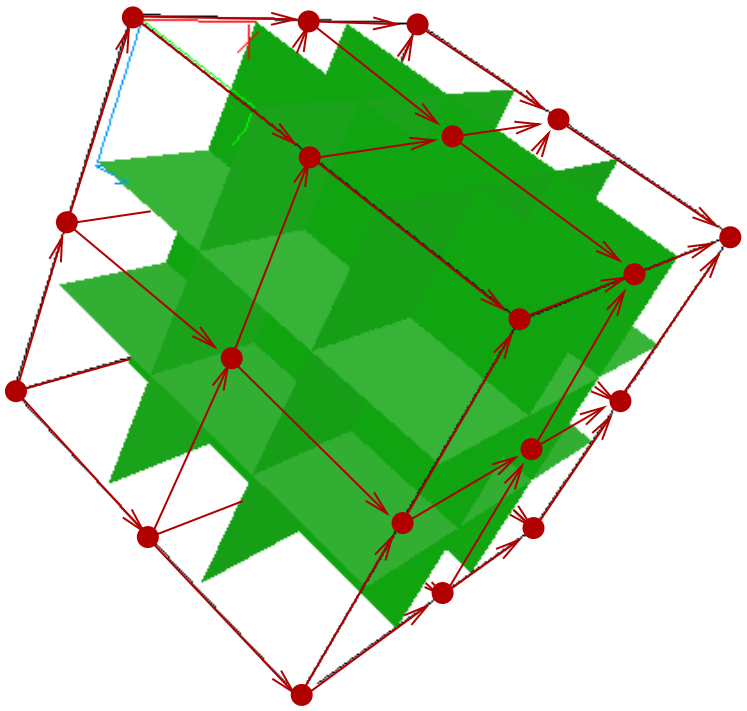


the four “vertical” maximal cubes

Catégorie des composantes
d'un 2-semaphore



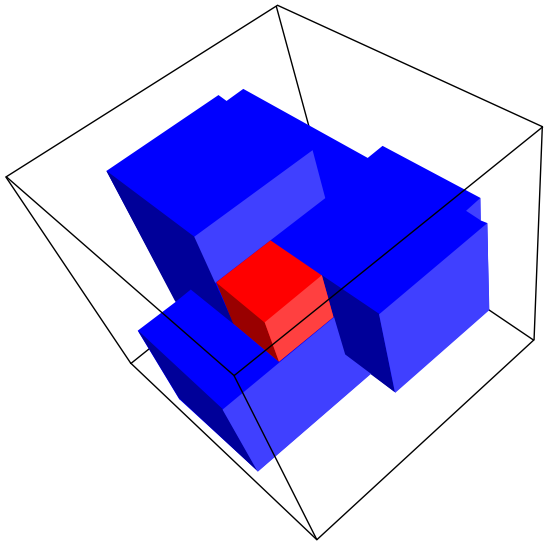
modèle



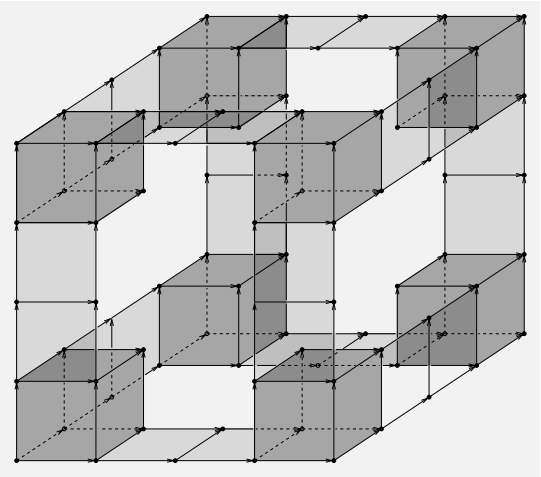
composantes

La catégorie des composantes

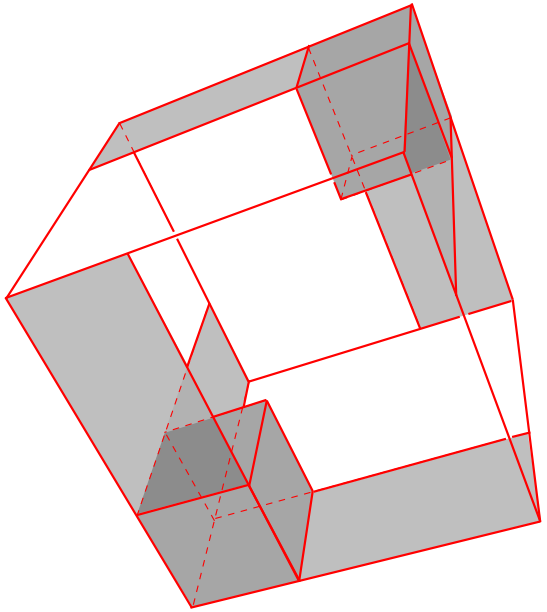
des 3 philosophes



modèle



première réduction



composantes

Fin