



N° attribué par la bibliothèque :

|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

THÈSE

Présentée pour obtenir

LE DIPLÔME DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ
PARIS 13, SORBONNE PARIS CITÉ

Spécialité : Informatique

par

Ladji KANE

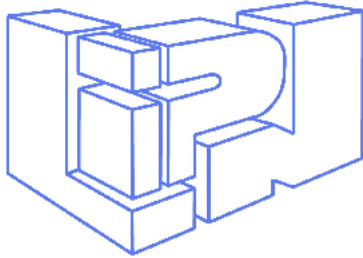
**Combinatoire et algorithmique
des factorisations tangentes à l'identité**

Soutenue le — juin 2014 devant la Commission d'examen :

- | | | |
|----|--|--------------------------|
| M. | Gérard H.E DUCHAMP | (Directeur de thèse) |
| M. | Christophe TOLLU | (Co -Directeur de thèse) |
| M. | Vincel Hoang Ngoc MINH, professeurs des universités (Lille II) | |
| M. | Jean - Gabriel LUQUE, professeurs des universités (Rouen) | |
| M. | — | |
| M. | — | |

Rapporteurs :

- | | |
|----|---|
| M. | — |
| M. | — |



Thèse préparée au
Laboratoire d'Informatique de Paris Nord
Université Paris 13
LIPN - UMR 7030,
99, Avenue Jean-Baptiste Clément
93 430 VILLETANEUSE

Combinatoire et algorithmique des factorisations tangentes à l'identité

Résumé : La Combinatoire a permis de résoudre certains problèmes en Mathématiques, en Physique et en Informatique, en retour celles-ci inspirent des questions nouvelles à la Combinatoire. Ce mémoire de thèse intitulé «*Combinatoire et algorithmique des factorisations tangentes à l'identité*» regroupe plusieurs travaux de la combinatoire de shuffle.

L'objectif de cette thèse est d'écrire des factorisations tangentes à l'identité grâce à l'utilisation des outils combinatoire et algorithmique. L'écriture des factorisations tangentes à l'identité passe par la construction effective d'une paire de bases en dualité. Dans bien des cas, la construction d'une paire de bases en dualité passe par celle d'une base duale à partir d'une base dont on connaît certaines propriétés. Nous nous proposons donc de déterminer les conditions requises que doivent satisfaire la base dont nous partons de sorte que la base duale permette l'écriture des factorisations.

Mots-Clés : Mots de Lyndon, Produit de shuffle, Produit de q -shuffle, Éléments de Lie, Algèbre de Lie libre, Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt, Bases transcendants, Bases multiplicatives, factorisations tangentes.

Combinatorial and algorithmic factorizations tangent to the identity

Abstract : Combinatorics has solved some problems in Mathematics, Physics and Computer Science, in turn they inspire new questions Combinatorics. This thesis entitled «*Combinatorial and algorithmic factorizations tangent to the identity*» includes several works of combinatorial shuffle.

The objective of this thesis is to write tangents factorization identity through the use of combinatorial and algorithms tools. Writing factorizations tangents through the identity of the actual base pair duality in construction. In many cases, the construction of a base pair in duality requires that a dual basis from which certain properties are known base. We therefore propose to determine the requirements that must meet the basic we leave so that the dual basis allows writing factorizations.

Keywords : Lyndon words, Shuffle product, q -Shuffle product, Lie elements, Free Lie algebra, Poincaré-Birkhoff-Witt basis, transcendence basis, multiplicative bases, factorizations tangents.

Table des matières

1	Introduction et Motivations	7
2	Notions de base	13
2.1	Combinatoire des mots	13
2.1.1	Définitions de base	13
2.1.2	Facteurs et Conjugués d'un mot	15
2.2	Mots de Lyndon	16
2.3	Listes standard et Théorème de Lyndon	17
2.4	Polynômes et séries en variables non commutatives	18
2.4.1	La multiplication de $\mathbb{K}\langle X \rangle$ et ses propriétés	19
2.5	Algèbre des séries de Lie	21
2.6	Algèbre enveloppante	22
2.7	Algèbre de Hopf	23
2.7.1	Cas de l'algèbre de shuffle	25
2.7.2	Cas de l'algèbre de stuffle	26
3	Poincaré-Birkhoff-Witt, Dualité, Factorisation de Schützenberger	29
3.1	Introduction	29
3.2	Résultats connus	30
3.2.1	Notations - Définitions	30
3.2.2	Théorème de factorisation	31
3.3	Remarques sur la dualisation	35
3.3.1	Exemple : cas de l'algèbre libre et l'algèbre de shuffle	38
3.3.2	Exemple : cas de l'algèbre libre et l'algèbre de stuffle	42
3.3.3	Exemple : cas de l'algèbre libre et l'algèbre de q -stuffle	45
4	q-déformation	49
4.1	Construction des éléments de \mathfrak{S}_{nm} du produit encouronne de 2 groupes symétriques : $(\mathfrak{S}_n)_m$ (avec $n, m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$)	50
4.1.1	Définitions	50
4.1.2	Le groupe symétrique	50

4.2	Le produit de q -shuffle	54
4.2.1	Définition et propriétés du produit de q -shuffle	55
4.2.2	Définition et propriétés du coproduit de \sqcup_q	59
4.2.3	Relation entre \sqcup et \sqcup_q	66
4.3	Construction récursive des $S_w^{(q)}$, $w \in X^*$	68
4.3.1	Caractérisation des éléments $\ell^{\sqcup_q k}$ (avec $\ell \in \mathcal{Lyn}(X)$, $q \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$)	69
4.3.2	Construction récursive des $S_w^{(q)}$, $w \in X^*$	72
4.3.3	Caractérisation des éléments $S_w^{(q)}$, $w \in X^*$	75
4.4	Construction récursive des $P_w^{(q)}$, $w \in X^*$	77
4.4.1	Construction des éléments $P_w^{(q)}$, $w \in X^*$	77
4.4.2	Caractérisation des éléments $P_w^{(q)}$, $w \in X^*$	78
4.4.3	Nouveau théorème q -analogue de Radford	81
5	Multiplicativité des $P_w^{(q)}$, $w \in X^*$	84
5.1	Introduction	84
5.2	Partant de la famille $(T_w^{(q)})_{w \in X^*}$	87
5.2.1	Objectif	87
5.2.2	Caractérisation de la multiplicativité des $R_w^{(q)}$, $w \in X^*$	87
5.3	Partant de la famille $(S_w^{(q)})_{w \in X^*}$	90
5.3.1	Objectif	90
5.3.2	Caractérisation de la multiplicativité des $P_w^{(q)}$, $w \in X^*$	90
6	Factorisations tangentes à l'identité : $\mathcal{D}_X^{(q)}$	92
6.1	Illustration	92
6.2	Factorisation de l'identité : \mathcal{D}_X	94
6.2.1	Objectif	94
6.2.2	Écriture de \mathcal{D}_X	95
6.3	Factorisations tangentes à l'identité : $\mathcal{D}_X^{(q)}$	97
6.3.1	Objectif	97
6.3.2	Écriture de $\mathcal{D}_X^{(q)}$	98
7	Conclusion générale - Perspective-Feuilles de calculs Maple	99
7.1	Conclusion générale	99
7.2	Perspectives	100
7.3	Autres résultats : Bases duales pour les fonctions symétriques non commutatives et les quasi-symétriques via la factorisation monoïdale [8]	101
7.3.1	Notations et compositions d'entiers [8]	101
7.3.2	Fonctions symétriques non commutatives [8]	102
7.3.3	Fonctions quasi-symétriques [8]	103
7.3.4	Encodage des fonctions symétriques non commutatives et des fonctions quasi-symétriques via les mots [8]	104

7.3.5	Construction d'une nouvelle base de Poincaré - Birkhoff - Witt via L et R [8] :	111
7.3.6	Construction d'un isomorphisme entre l'algèbre de Hopf de stuffle et l'algèbre de Hopf des fonctions symétriques non commutatives et des fonctions quasi-symétriques [8]	112
7.3.7	Bases duales pour les fonctions symétriques non commutatives et les fonctions quasi-symétriques via la factorisation monoïdale [8] . .	113
7.4	Feuilles de calculs Maple	116

Chapitre 1

Introduction et Motivations

Cette thèse est consacrée à l'étude de certaines déformations de l'algèbre associative libre (ou l'algèbre de Lie libre). Typiquement, les déformations qui nous intéressent dépendent d'un ou plusieurs paramètres et sont triviales dans le sens de la théorie de la déformation des algèbres. Autrement dit, pour des valeurs génériques de ces paramètres, il existe un isomorphisme de conjugaison

$$u \odot v = f (f^{-1}(u)f^{-1}(v)) \quad (1.1)$$

entre le produit déformé \odot et l'original¹. Cependant, pour des valeurs spécifiques des paramètres, le produit déformé dégénère de façon non négligeable, une situation qui permet la représentation des algèbres complexes comme en limitant aux cas de celles des plus connues.

La motivation de cette étude du produit de q -shuffle a été fourni par des exemples de décompositions de somme directe de l'algèbre libre universelle $\mathbb{K}\langle X \rangle$, considérée comme l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie libre $\mathcal{L}\langle X \rangle$

$$\mathbb{K}\langle X \rangle = \bigoplus_{\lambda} U_{\lambda} \quad (1.2)$$

analogue à la décomposition de Poincaré-Birkhoff-Witt, c'est à dire λ parcourt l'ensemble de toutes les partitions, $U_0 = \mathbb{K}$ et $U_1 = \mathcal{L}\langle X \rangle$.

Dans ces exemples, chaque module U_{λ} est l'image de la composante homogène $\mathbb{K}\langle X \rangle_n$ de degré n de $\mathbb{K}\langle X \rangle$ par certains idempotents e_{λ} de l'algèbre de groupe du groupe symétrique $\mathbb{K}[\mathfrak{S}_n]$, agissant à droite par $(a_1 a_2 \cdots a_n)\sigma = a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(n)}$ (où $a_i \in X$).

Dans le cas de la décomposition de Poincaré-Birkhoff-Witt, venant de l'identification de $\mathbb{K}\langle X \rangle$ avec l'algèbre symétrique $S(\mathcal{L}\langle X \rangle)$, U_{λ} est le sous-espace engendré par les produits

1. $f(f^{-1}(u)f^{-1}(v)) = f(f^{-1}(u)) \odot_q f(f^{-1}(v)) = u \odot_q v$ voir aussi [17] $u \odot_q v = U(q)U(q)^{-1}(u)U(q)^{-1}(v) = U(q)(U(q)^{-1}(u)) \odot_q U(q)(U(q)^{-1}(v))$

de polynômes de Lie symétrisés

$$(P_1, P_2, \dots, P_r) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} P_{\sigma(1)} P_{\sigma(2)} \cdots P_{\sigma(r)} \quad (1.3)$$

de sorte que chaque P_i est homogène de degré λ_i . Les idempotents correspondants, introduits par Garsia et Reutenaeur [39], sont des raffinements d'idempotents dits d'Euler [1], qui se posent par exemple dans le calcul de la série séparé [40], ou dans l'étude de la cohomologie de Hochschild d'algèbres commutatives [41, 42].

La forme des idempotents e_λ de Garsia-Reutenaeur, en prenant toutes les partitions d'un n donné, un ensemble complet d'idempotents orthogonaux d'une sous-algèbre Σ_n remarquable de $\mathbb{K}[\mathfrak{S}_n]$, découvert par L. Solomon [43] et appelé l'algèbre de descente. Il a été montré dans [17] que ces ensembles complets peuvent être construits pour toutes les algèbres de descente de toute séquence $e_{(n)}$ des idempotents de Lie de Σ_n , c'est à dire idempotents projectant $\mathbb{K}\langle X \rangle_n$ sur $\mathcal{L}_n\langle X \rangle$. En particulier, en utilisant la théorie de la déformation des fonctions symétriques non commutatives, on peut obtenir des séquences intéressantes d'idempotents de Lie, selon un ou plusieurs paramètres, et d'interpolation d'une manière naturelle entre tous les exemples connus [17]. Cela conduit à différentes déformations des idempotents Garsia-Reutenaeur et des idempotents eulériens, et la première question est certainement d'expliciter les modules U_λ sur lequel ils projettent.

Il existe pour chaque n , un vecteur $p = (p_I)$ indexés par les compositions de n satisfaisant $\sum_I p_I = 1$, tel que U_λ est engendré par les produits symétrisés pondérés

$$(P_1, P_2, \dots, P_r)_p = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} p_{\lambda, \sigma} P_{\sigma(1)} P_{\sigma(2)} \cdots P_{\sigma(r)} \quad (1.4)$$

où $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ et $P_i \in \mathcal{L}_{\lambda_i}\langle X \rangle$.

Les poids des p_I sont explicités dans plusieurs exemples intéressants.

Le seul exemple de décomposition (1.2) enregistré qui ne provient pas d'une séquence d'idempotents de Lie en algèbres de descente est la décomposition dite orthogonale [17]. Il a été montré par Ree [29] que si l'on apporte $\mathbb{K}\langle X \rangle$ avec le produit scalaire de mots qui forment une base orthonormée, le complément orthogonal de $\mathcal{L}_n\langle X \rangle$ est l'espace engendré par les shuffles propres $u \sqcup v$, $u, v \in X^+$. L'orthogonale idempotents de Lie π_n est le projecteur orthogonal de $\mathbb{K}\langle X \rangle_n$ sur $\mathcal{L}_n\langle X \rangle$. Cet idempotent n'est pas dans l'algèbre de descente, et il serait intéressant de comprendre sa structure. La décomposition orthogonale de $\mathbb{K}\langle X \rangle$ peut être affinée en une décomposition de type (1.2), où U_λ est maintenant engendré par les shuffles des éléments de Lie homogènes

$$P_1 \sqcup P_2 \sqcup \cdots \sqcup P_r \quad (1.5)$$

où chaque P_i est de degré λ_i . La relation entre la projection $\pi_n = e_{(n)}$ de cette décomposition et les autres projecteurs e_λ est un peu analogue à celle rencontrée dans le cas de

l'algèbre de descente, mais beaucoup plus complexe.

Pour comprendre cette analogie, nous avons été amenés à introduire un q -analogue du produit de shuffle, qui, à proprement parler, est plutôt une déformation du produit de concaténation obtenue pour $q = 0$, défini récursivement par :

$$au \odot_q bv = a(u \odot_q bv) + q^{|au|}b(au \odot_q v) \quad (1.6)$$

où $a, b \in X$ et $u, v \in X^*$. Ce produit dégénère aux racines de l'unité, et en particulier donne au produit de shuffle (ou produit de mélange) commutatif pour $q = 1$.

Un problème difficile serait de trouver une bonne déformation du produit de shuffle donnant l'algèbre de convolution pertinent à l'affaire des idempotents orthogonaux comme un cas dégénéré.

Il s'avère que le q -shuffle, ainsi que les éléments $U_n(q) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{Inv(\sigma)} \sigma$, qui sont naturellement associés avec lui, déjà eu lieu dans la littérature, dans plusieurs contextes apparemment non apparentés.

Tout d'abord, l'algèbre de q -shuffle est le cas le plus simple non négligeable d'une construction très générale en raison de M.Rosso [17], obtenue dans le cadre de la théorie des groupes quantiques. En outre, l'algèbre de q -shuffle est isomorphe à l'algèbre associative libre si seulement si $U_n(q)$ est inversible pour tout n . Le calcul de son déterminant (comme un opérateur de la représentation régulière de \mathfrak{S}_n) déjà eu lieu dans un problème de physique (l'espace de représentabilité de Hilbert de l'algèbre de quon, décrivant les particules hypothétiques de violer la statistique de Bose ou de Fermi [44]), et a été résolu par D.Zagier [44] qui a également calculé $U_n(q)^{-1}$ au moyen de certaines formules de factorisation. Curieusement, la formule de Zagier pour $det(U_n(q))$ s'avère être un cas particulier d'une formule récente de Varchenko [45], ce qui donne le déterminant de ce qu'il appelle la forme bilinéaire quantique d'un arrangement d'hyperplans. Pour compléter le tableau, nous mentionnons que le q -shuffle dispose également d'une interprétation naturelle dans la théorie de la représentation des algèbres 0-Hecke de type A [17]. Ces aspects du q -shuffle sont examinés, et les différentes liaisons sont exploitées afin de donner des généralisations ou des simplifications de résultats connus lorsque cela est possible. Par exemple, on peut voir que l'on peut construire un shuffle quantique de toute solution de l'équation de Yang-Baxter (sans paramètres spectraux), et que les fonctions symétriques de Hall-Littlewood ou les espaces q -Fock de Kashiwara, Miwa et Stern [46] peut être considéré comme des exemples de ces constructions. Ainsi, nous donnerons quelques applications.

Comme déjà observé dans [17], l'insertion d'une puissance indéterminée q dans la définition du produit de shuffle, donne une déformation intéressante, qui peut être interprétée comme une déformation (dans le sens de la théorie de la déformation des algèbres) du produit de concaténation d'une algèbre associative libre. C'est plutôt une

déformation du produit de concaténation obtenue pour $q = 0$, défini récursivement par : $au \sqcup_q bv = a(u \sqcup_q bv) + q^{|au|}b(au \sqcup_q v)$ où $a, b \in X$ et $u, v \in X^*$. Ce produit dégénère aux racines de l'unité, et en particulier donne au produit de shuffle (ou produit de mélange) commutatif pour $q = 1$.

Il est connu que ces algèbres sont rigides, ce qui implique que pour un q générique, le produit de q -shuffle est nécessairement une déformation du produit de concaténation au sens de [17].

Dans [1, 2, 3], Mélançon et Reutenauer présentaient un système de réécriture de listes de mots de Lyndon. Ce système de réécriture permettait de montrer plusieurs identités, satisfaites par des polynômes construits à partir de la base de Lyndon, dans l'algèbre de polynômes non commutatifs et dans l'algèbre de shuffle.

Un théorème dû à Schützenberger [1, 2, 3], qui affirme que la série diagonale, considérée comme une série sur X^* , à coefficients dans l'algèbre de shuffle $(\mathbb{K}\langle X \rangle, \sqcup, 1)$, peut être factorisée en un produit infini d'exponentielles de Lie, indexées par les mots de Lyndon, pris dans l'ordre décroissant. C'est dans le but d'étendre cette factorisation que nous avons entrepris nos travaux sur le shuffle : \sqcup et le q -shuffle : \sqcup_q .

Contributions et plan détaillé

Les contributions de cette thèse sont décrites dans les chapitres 4, 5 et 6 :

Chapitre 1 : Le but de ce chapitre est d'introduire des déformations et de donner les différentes motivations de cette thèse.

Chapitre 2 : Ce chapitre sert de préliminaire aux autres chapitres, rappelant plusieurs définitions et résultats qui seront utilisés plus loin. Il fournit les notions de base concernant les structures combinatoires mises en jeu dans cette thèse : mots, polynômes, algèbre de Lie, algèbre de Lie libre, algèbre enveloppante, algèbre de Hopf et algèbre de shuffle.

Chapitre 3 : Ce chapitre sert de notions de base aux chapitres 4, 5 et 6. Nous allons tout d'abord, rappeler les résultats principaux des différents travaux déjà effectués dans [1, 2, 3], qui montrent les mécanismes de construction de la base de Poincaré-Birkhoff-Witt-Lyndon et sa base duale. Nous nous intéressons aux bases obtenues à partir des mots de Lyndon. Il reprend aussi les fondements de la méthode de factorisations de l'identité de Schützenberger.

Chapitre 4 : Le but de ce chapitre est de construire une paire de bases en dualité. Ce chapitre contient trois volets principaux : Dans le premier volet, nous donnons une construction des éléments de \mathfrak{S}_{nm} du produit encouronné de 2 groupes symétriques : $(\mathfrak{S}_n)_m$

(Définition 23), dans un second volet, nous construisons une base q -analogue de la base duale de la base de Poincaré-Birkhoff-Witt-Lyndon $(S_w^{(q)})_{w \in X^*}$ (4.50) et dans le troisième volet, la construction d'une base q -analogue de la base de Poincaré-Birkhoff-Witt-Lyndon $(P_w^{(q)})_{w \in X^*}$ (4.61) telle que $\langle S_u^{(q)} | P_v^{(q)} \rangle = \delta_{uv}$, $\forall u, v \in X^*$.

Dans bien des cas, la construction d'une paire de bases en dualité passe par celle d'une base duale à partir d'une base dont on connaît certaines propriétés. Nous nous proposons donc d'étudier les conditions que doit satisfaire la base dont nous partons de sorte que la base duale permette l'écriture des factorisations. Nous illustrerons ces idées sur des exemples combinatoires (relatifs à l'algèbre de q -shuffle).

Les principaux résultats de ce chapitre sont :

1. le Théorème 7 donne une généralisation du Théorème 8[37, 38].
2. le Théorème 9 donne une généralisation des éléments $\ell^{\sqcup q k}$ (avec $\ell \in \mathcal{Lyn}(X)$, $q \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$).
3. le Théorème 10 donne une construction récursive des éléments $S_w^{(q)}$, $w \in X^*$.

Chapitre 5 : Le but de ce chapitre est d'étudier la multiplicativité des familles obtenues par dualité. Notre point de départ est un théorème dûs à Schützenberger [1, 2, 3], qui affirme que la factorisation de Schützenberger est établie dans le cas où la paire de bases en dualité comporte une base de Poincaré-Birkhoff-Witt de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie. La base duale est alors quasi-multiplicative pour le shuffle (c'est-à-dire multiplicative à une constante près). Ce chapitre comporte deux volets principaux : Dans un premier volet, nous redonnons une construction d'une paire de bases en dualité dans le cas de mots de Lyndon pur et dans le second volet, nous donnons une autre construction de paire de bases en dualité. Nous nous proposons donc d'étudier les conditions que doit satisfaire la base dont nous partons de sorte que la base duale permette l'écriture des factorisations.

Les principaux résultats de ce chapitre sont :

1. la Note 3 (Test numérique) caractérise la multiplicativité de la famille $(R_w^{(q)})_{w \in X^*}$ afin d'écrire les factorisations de \mathcal{D}_X (Note 5, 6) et $\mathcal{D}_X^{(q)}$ (Corollaire 10).
2. la Note 4 (Test numérique) caractérise la multiplicativité de la famille $(P_w^{(q)})_{w \in X^*}$ afin d'écrire les factorisations de \mathcal{D}_X (Note 5, 6) et $\mathcal{D}_X^{(q)}$ (Corollaire 10).

Chapitre 6 : Le but de ce chapitre est d'écrire des factorisations tangentes à l'identité. Notre point de départ est un théorème dûs à Schützenberger [1, 2, 3], qui affirme que la série diagonale, considérée comme une série sur X^* , à coefficients dans l'algèbre de shuffle $(\mathbb{K}\langle X \rangle, \sqcup, 1)$, peut être factorisée en un produit infini d'exponentielles de Lie, indexées par les mots de Lyndon, pris dans l'ordre décroissant. Ce chapitre comporte trois volets principaux : Dans un premier volet, nous donnons une illustration des factorisations

tangentes à l'identité. Dans un second volet, nous donnons une écriture de la factorisation de l'identité. Enfin, nous donnons une écriture des factorisations tangentes à l'identité. Les principaux résultats de ce chapitre sont :

1. Écriture des factorisations : \mathcal{D}_X (Note 5, 6) et $\mathcal{D}_X^{(q)}$ (Corollaire 10)

Chapitre 7 : Le but de ce chapitre est de tirer des conclusions et perspectives de cette thèse. Il ressort aussi des feuilles de calculs effectués sur Maple.

Chapitre 2

Notions de base

Résumé : Ce chapitre sert de préliminaire aux autres chapitres, rappelant plusieurs définitions et résultats qui seront utilisés plus loin. Il fournit les notions de base concernant les structures combinatoires mises en jeu dans cette thèse : mots, polynômes, algèbre de Lie, algèbre de Lie libre, algèbre enveloppante, algèbre de Hopf et algèbre de shuffle.

2.1 Combinatoire des mots

2.1.1 Définitions de base

Un alphabet est un ensemble de lettres, fini $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ ou infini (par exemple $Y = \{y_i, i \in \mathbb{N}_{\geq 0}\}$). Un mot est une suite finie $w = x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ de lettres. Le mot vide, noté ε ou 1_{X^*} est le mot ne contenant aucune lettre. La longueur d'un mot $w = x_{i_1} \cdots x_{i_k}$, notée $|w|$ est la longueur de la suite de lettres constituant w , c'est-à-dire l'entier k . Le nombre d'occurrences de la lettre x_i dans le mot w est noté $|w|_{x_i}$. Si chaque lettre est associée à un entier nommé poids, nous appellerons poids d'un mot noté (w) la somme des poids respectifs des lettres qui le composent. L'ensemble des mots sur un alphabet X est noté X^* . On note de plus X^+ l'ensemble des mots non vides.

Sur X^* , on définit une opération interne notée "." et appelée opération ou produit de concaténation, comme suit : si $u = x_0x_1x_0$ et $v = x_0x_1$ alors $u.v = x_0x_1x_0x_0x_1$ (c'est la juxtaposition des lettres de u et de celles de v). Il est clair que ε est l'élément neutre pour ce produit ($u.1_{X^*} = 1_{X^*}.u$ pour tout $u \in X^*$). Il est également évident que ce produit n'est pas commutatif (si l'alphabet comporte deux lettres distinctes $x_0 \neq x_1$ alors $x_0x_1 \neq x_1x_0$). Par contre, il est associatif ($(u.v).w = u.(v.w)$).

$$(x_0x_1x_0.x_0x_1).x_1 = x_0x_1x_0.(x_0x_1.x_1) = x_0x_1x_0x_0x_1x_1. \quad (2.1)$$

$(X^*, .)$ est le monoïde libre non commutatif sur l'alphabet X .

On appelle longueur d'un mot u que l'on note $|u|$, le nombre de lettres qui constituent ce mot.

On peut définir récursivement la longueur d'un mot comme suit :

$$|w| = \begin{cases} 0 & \text{si } w = 1_{X^*} \\ 1 + |u| & \text{si } w = xu \text{ avec } x \in X \end{cases}$$

Si X est ordonné (on a un ordre sur les lettres. Par exemple $x_0 < x_1$), alors on peut définir différents ordres sur X^* , on se sert des deux ordres suivants :

– L'ordre lexicographique est défini pour tous mots u et v de X^* par :

$$u < v \iff \begin{cases} \exists w \in X^+ \text{ tel que } uw = v \\ \text{ou} \\ \exists w_1, w_2, w_3 \in X^* \text{ et } x, y \in X \text{ tels que } u = w_1 x w_2, v = w_1 y w_3 \text{ et } x < y \end{cases}$$

Par exemple $x_0 x_1 < x_0 x_1^2$ et $x_0 x_1 x_0 x_1^2 < x_0 x_1 x_1$.

– L'ordre lexicographique par longueur est défini pour tous mots u et v de X^* par :

$$u < v \iff \begin{cases} |u| < |v| \\ \text{ou} \\ |u| = |v| \text{ et } u < v \text{ pour l'ordre l'exicographique.} \end{cases}$$

Par exemple $x_0 x_1 < x_1 x_0$ et $x_1 < x_0 x_1$.

Exemple 1. .

i) $|x_0 x_1 x_0| = 3$ et $|1_{X^*}| = 0$.

ii) Soit $Y = \{y_i, i \in \mathbb{N}_{\geq 0}\}$, et $w = y_1^2 y_3 y_2 y_1 \in Y^*$, le poids de chaque lettre étant défini par son indice, w a pour poids $(w) = 8$. De plus $|w| = 5$.

A partir de maintenant, X est supposé totalement ordonné par $<$ et le mot vide sera noté 1_{X^*} .

2.1.2 Facteurs et Conjugués d'un mot

Un mot $u \in X^*$ est un facteur d'un mot $v \in X^*$ s'il existe deux mots $w_1, w_2 \in X^*$ tels que

$$v = w_1 u w_2 \tag{2.2}$$

Un mot $u \in X^*$ est dit facteur gauche (resp. droit) d'un mot $v \in X^*$ si dans (2.2), $w_1 = 1_{X^*}$ (resp $w_2 = 1_{X^*}$), si de plus $w_2 \neq 1_{X^*}$ u est dit facteur droit propre (resp $w_2 \neq 1_{X^*}$ v est dit facteur gauche propre).

Exemple 2. Soit le mot $v = x_0 x_1 x_1 x_0 x_1$. L'ensemble de ses facteurs droits est :

$$\{x_1, x_0 x_1, x_1 x_0 x_1, x_1 x_1 x_0 x_1, x_0 x_1 x_1 x_0 x_1\}.$$

Et l'ensemble de ses facteurs droits propres est :

$$\{x_1, x_0 x_1, x_1 x_0 x_1, x_1 x_1 x_0 x_1\}.$$

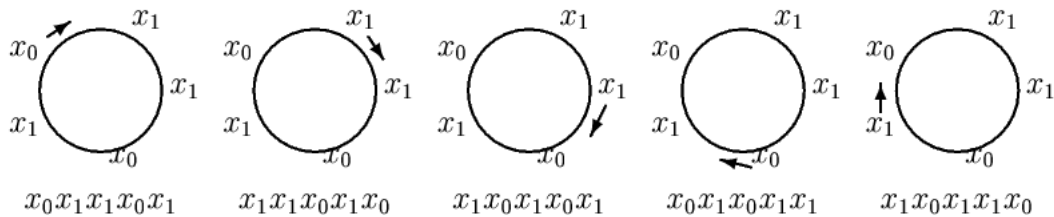
Deux mots w_1 et w_2 sont dits conjugués s'il existe deux mots u et v de X^+ tels que $w_1 = uv$ et $w_2 = vu$.

Soit $u \in X^*$. La classe de conjugaison de u est l'ensemble de ses conjugués.

Exemple 3. Soit le mot $v = x_0 x_1 x_1 x_0 x_1$. L'ensemble de ses conjugués est :

$$\{x_0 x_1 x_1 x_0 x_1, x_1 x_1 x_0 x_1 x_0, x_1 x_0 x_1 x_0 x_1, x_0 x_1 x_0 x_1 x_1, x_1 x_0 x_1 x_1 x_0\}.$$

On remarque que l'on obtient la classe de conjugaison de w en plaçant les lettres de w sur un cercle et en énumérant tous les mots obtenus en accédant au cercle par ses différentes lettres.



Maintenant nous avons les éléments nécessaires pour définir les mots de Lyndon et ses propriétés.

2.2 Mots de Lyndon

Un mot $l \in X^*$ est un mot de Lyndon si $l \in X^+$ et strictement plus petit, pour l'ordre lexicographique, que chacun de ses facteurs droits propres.

Ainsi, le mot $v = x_0x_1x_1x_0x_1$ n'est pas un mot de Lyndon car il est plus grand que x_0x_1 qui est un de ses facteurs droits propres. Par contre, le mot $l = x_0x_0x_1x_0x_1$ est un mot de Lyndon.

Une autre définition des mots de Lyndon : $l \in X^*$ est un mot de Lyndon si $l \in X^+$ et strictement plus petit, pour l'ordre lexicographique, que chacun de ses conjugués propres. Donc $l = x_0x_0x_1x_0x_1$ est un mot de Lyndon au sens de cette deuxième définition. En particulier, les lettres sont des mots de Lyndon.

L'ensemble des mots de Lyndon sur X est noté $\mathcal{Lyn}(X)$.

Exemple 4. . Pour $X = \{x_0, x_1\}$ muni de l'ordre $x_0 < x_1$ les mots de Lyndon de longueur inférieure ou égale à 5 sont (donnés dans l'ordre lexicographique croissant)

$$x_0, x_0^4x_1, x_0^3x_1, x_0^3x_1^2, x_0^2x_1, x_0^2x_1x_0x_1, x_0^2x_1^2, x_0^2x_1^3, x_0x_1, x_0x_1x_0x_1^2, x_0x_1^2, x_0x_1^3, x_0x_1^4, x_1.$$

Pour $Y = \{y_i, i \in \mathbb{N}_{\geq 0}\}$, muni de l'ordre $y_i < y_j$ si $i > j$, les mots de Lyndon de poids inférieur ou égal à 5 sont

$$y_5, y_4, y_4y_1, y_3, y_3y_2, y_3y_1, y_3y_1^2, y_2, y_2^2y_1, y_2y_1, y_2y_1^2, y_2y_1^3, y_1.$$

Signalons enfin deux décompositions fondamentales relatives aux mots de Lyndon [1].

Proposition 1. [1, 2, 3] Si l_1 et l_2 sont deux mots de Lyndon, alors l_1l_2 est un mot de Lyndon si et seulement si $l_1 < l_2$ (pour l'ordre lexicographique).

Proposition 2. [1, 2, 3] Soit $w \in \mathcal{Lyn}(X)$ et soit m son plus long facteur droit propre dans $\mathcal{Lyn}(X)$. Si $w = lm$, alors l est aussi un mot de Lyndon et $l < lm < m$. Le couple $\sigma(w) = (l, m)$ est appelé factorisation standard de w avec $|w| \geq 2$.

Lemme 1. Soit $w \in \mathcal{Lyn}(X)$ (avec $|w| \geq 2$) et $\sigma(w) = (l, m)$ sa factorisation standard, et soit $n \in \mathcal{Lyn}(X)$ un mot de Lyndon vérifiant $w < n$. Alors le couple (w, n) est la factorisation standard du mot wn si et seulement si $n \leq m$.

Preuve :

(i) Montrons que $\sigma(wn) = (w, n) \implies n \leq m$.

Supposons que $m < n$. Alors, d'après la Proposition 1, $mn \in \mathcal{Lyn}(X)$ et donc n n'est pas le plus long facteur droit propre de wn ce qui contredit l'hypothèse : $\sigma(wn) = (w, n)$.

(ii) Supposons que $w < n \leq m$ et que $\sigma(wn) = (u, v)$ avec $v \neq n$.

On a alors nécessairement $|v| > |n|$. Donc $v = hn$ où h est un facteur droit propre de w . Soit alors k le plus petit facteur droit, différent de 1_{X^*} , propre ou non de h . On a alors $k < m$. En effet,

$$k \leq h < hn = v < n \leq m.$$

Or $m \leq k$, puisque k est un facteur droit propre de w , et que $\sigma(w) = (l, m)$. D'où la contradiction.

□

Exemple 5. Avec l'ordre $x_0 < x_1$ sur l'alphabet $X = \{x_0, x_1\}$, le mot $x_0^2 x_1 x_0 x_1^2 \in \mathcal{Lyn}(X)$ se décompose sous la forme d'un produit de deux mots de Lyndon de deux façons, $x_0^2 x_1 \cdot x_0 x_1^2$ et $x_0 \cdot x_0 x_1 x_0 x_1^2$, mais, avec la condition sur la longueur de v , seule cette dernière expression correspond à la factorisation standard.

2.3 Listes standard et Théorème de Lyndon

Définition 1. Soient $L = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ une liste d'éléments de X^+ et $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. On dira que L est standard si et seulement si elle vérifie la propriété suivante :

$$(S) \begin{cases} u_i \text{ est une lettre,} \\ \text{ou} \\ \text{si } \sigma(u_i) = (x, y), \text{ alors } u_j \leq y \text{ pour tout } i \leq j. \end{cases}$$

Si tous les éléments de L sont des lettres, alors L vérifie (S).

Si L est décroissante (c'est à dire $u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_n$), alors elle vérifie (S).

Définition 2. Soit $L = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ une liste d'éléments de X^+ . On appelle inversion tout couple (i, j) tel que $i < j$ et $u_i > u_j$.

A partir de ces deux définitions, nous pouvons écrire le Théorème suivant :

Théorème 1. [1, 2, 3] *Tout mot $w \in X^+$ se décompose de manière unique comme produit décroissant de mots de Lyndon :*

$$w = \ell_1 \ell_2 \cdots \ell_n \tag{2.3}$$

où $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \cdots \geq \ell_n$ et $\ell_i \in \mathcal{Lyn}(X)$ pour $1 \leq i \leq n$.

Preuve : Comme preuve de ce théorème, donnons un algorithme permettant de construire la décomposition d'un mot en produit décroissant de mots de Lyndon.

On se donne le mot $w = x_1 x_2 x_3 \cdots x_n \in X^+$ à décomposer. On construit la liste L de ses lettres : c'est une liste standard (de mots de Lyndon).

On parcourt cette liste de droite à gauche. Si l'on trouve une inversion (i, j) , alors on remplace dans L les deux éléments x_i et x_j par le produit $x_i x_j$ qui est un mot de Lyndon. On recommence avec la nouvelle liste. Si au contraire, aucune inversion n'est trouvée, c'est que la liste est une liste décroissante de mots de Lyndon. Il suffit alors de faire le produit des éléments de L pour avoir la décomposition de w en produit décroissant de mots de Lyndon.

□

On peut écrire aussi (2.3) de la façon suivante : Tout mot $w \in X^+$ peut s'exprimer, de manière unique, comme un produit décroissant de mots de Lyndon,

$$w = \ell_1^{i_1} \cdots \ell_k^{i_k}, \ell_1 > \cdots > \ell_k, \quad \ell_1, \dots, \ell_k \in \mathcal{Lyn}(X), k, i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{N}_{\geq 1}. \tag{2.4}$$

Exemple 6. .

$$x_1^2 x_0 x_1 x_0 x_1^2 x_0^2 x_1 x_0^3 = (x_1)^2 . x_0 x_1 x_0 x_1^2 . x_0^2 x_1 . (x_0)^3, \text{ avec } x_1 > x_0 x_1 x_0 x_1^2 > x_0^2 x_1 > x_0.$$

2.4 Polynômes et séries en variables non commutatives

Dans cette partie, nous allons définir la notion de polynôme et de série en variables non commutatives. Ensuite, nous considérons un ensemble d'opérations sur ces objets. Ces opérations permettent de définir différentes structures sur l'ensemble des polynômes mais aussi sur l'ensemble des séries formelles.

Soit \mathbb{K} un anneau commutatif et unitaire. On connaît bien les polynômes (commutatifs) classiques. Si l'on supprime la "commutativité", on obtiendra les polynômes non-commutatifs. On commence par quelques définitions.

Définition 3. *Un polynôme non-commutatif d'alphabet X à coefficient dans \mathbb{K} est une \mathbb{K} -combinaison linéaire finie de mots de X . Alors, un polynôme non-commutatif P d'alphabet X à coefficient dans \mathbb{K} s'écrit*

$$P = \sum_{w \in X^*} \langle P | w \rangle w, \quad (2.5)$$

où $\langle P | w \rangle$ désigne le coefficient du mot w . Sans ambiguïté, on l'appelle aussi un polynôme.

Chaque polynôme est donc une somme finie car il n'y a qu'un nombre fini de coefficients non-nuls dans cette notation. On note $\mathbb{K}\langle X \rangle$ l'ensemble de tous les polynômes non-commutatifs dans X sur \mathbb{K} (d'alphabet X à coefficient dans \mathbb{K}).

Par ailleurs, on peut définir la série formelle non-commutative par analogie. Autrement dit, il s'agit d'une somme infinie, en utilisant la même écriture de P ; l'ensemble des séries formelles est noté $\mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle$.

On appelle support du polynôme P , noté $\text{supp}(P)$, l'ensemble des mots $w \in X^*$ dont le coefficient est non nul ($\alpha_w \neq 0$) :

$$\text{supp}(P) = \{w \in X^* \mid \langle P | w \rangle \neq 0\}. \quad (2.6)$$

On appelle degré du polynôme P , noté $\text{deg}(P)$, la longueur du plus long mot de $\text{supp}(P)$:

$$\text{deg}(P) = \begin{cases} \max\{|w|, w \in \text{supp}(P)\} & \text{si } P \neq 0 \\ -\infty & \text{si } P = 0 \end{cases}$$

Ainsi, le degré d'un polynôme réduit à une constante est 0.

2.4.1 La multiplication de $\mathbb{K}\langle X \rangle$ et ses propriétés

Définition 4. *Soient $P = \sum_{u \in X^*} \langle P | u \rangle u$ et $Q = \sum_{v \in X^*} \langle Q | v \rangle v$ deux polynômes non-commutatifs, les coefficients de $PQ = \sum_{w \in X^*} \langle PQ | w \rangle w$ sont définis par*

$$\langle PQ | w \rangle = \sum_{w=uv \in X^*} \langle P | u \rangle \langle Q | v \rangle. \quad (2.7)$$

Proposition 3. *Muni de la multiplication précédente, $\mathbb{K}\langle X \rangle$ est une algèbre unitaire; $\mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle$ aussi.*

Preuve : Il est évident que $\mathbb{K}\langle X \rangle$ est un espace vectoriel sur \mathbb{K} .

Associativité :

Soient $P_1 = \sum_{u_1 \in X^*} \langle P_1 | u_1 \rangle u_1$, $P_2 = \sum_{u_2 \in X^*} \langle P_2 | u_2 \rangle u_2$ et $P_3 = \sum_{u_3 \in X^*} \langle P_3 | u_3 \rangle u_3$,

$$\begin{aligned} \langle (P_1 P_2) P_3 | w \rangle &= \sum_{w = w_1 w_2 \in X^*} \left(\sum_{w_1 = u_1 u_2 \in X^*} \langle P_1 | u_1 \rangle \langle P_2 | u_2 \rangle \right) \langle P_3 | w_2 \rangle \\ &= \sum_{w = u_1 u_2 u_3 \in X^*} \langle P_1 | u_1 \rangle \langle P_2 | u_2 \rangle \langle P_3 | u_3 \rangle \end{aligned} \quad (2.8)$$

De même, pour $\langle P_1 (P_2 P_3) | w \rangle$, alors $(P_1 P_2) P_3 = P_1 (P_2 P_3)$.

Unité : Le mot vide 1_{X^*} est l'élément unitaire, en effet

$$\langle P_1 1_{X^*} | w \rangle = \sum_{w = u_1 u_2 \in X^*} \langle P_1 | u_1 \rangle \langle 1_{X^*} | u_2 \rangle = \langle P_1 | w \rangle. \quad (2.9)$$

Alors, $P_1 1_{X^*} = P_1$. De même, $1_{X^*} P_1 = P_1$.

Distributivité :

Soient $P_1 = \sum_{u_1 \in X^*} \langle P_1 | u_1 \rangle u_1$, $P_2 = \sum_{u_2 \in X^*} \langle P_2 | u_2 \rangle u_2$ et $P_3 = \sum_{u_3 \in X^*} \langle P_3 | u_3 \rangle u_3$.

On a :

$$\begin{aligned} (P_1 + P_2) P_3 &= \left(\sum_{u \in X^*} (\langle P_1 | u \rangle + \langle P_2 | u \rangle) u \right) \left(\sum_{u_3 \in X^*} \langle P_3 | u_3 \rangle u_3 \right) \\ &= \sum_{w = u u_3 \in X^*} ((\langle P_1 | u \rangle + \langle P_2 | u \rangle) \langle P_3 | u_3 \rangle) w \end{aligned} \quad (2.10)$$

et

$$\begin{aligned} P_1 P_3 + P_2 P_3 &= \sum_{w = u_1 u_3 \in X^*} \langle P_1 | u_1 \rangle \langle P_3 | u_3 \rangle w + \sum_{w' = u_2 u_3 \in X^*} \langle P_2 | u_2 \rangle \langle P_3 | u_3 \rangle w' \\ &= \sum_{w = u u_3 \in X^*} \langle P_1 | u \rangle \langle P_3 | u_3 \rangle w + \sum_{w = u u_3 \in X^*} \langle P_2 | u \rangle \langle P_3 | u_3 \rangle w \\ &= \sum_{w = u u_3 \in X^*} (\langle P_1 | u \rangle \langle P_3 | u_3 \rangle + \langle P_2 | u \rangle \langle P_3 | u_3 \rangle) w \\ &= \sum_{w = u u_3 \in X^*} ((\langle P_1 | u \rangle + \langle P_2 | u \rangle) \langle P_3 | u_3 \rangle) w \end{aligned} \quad (2.11)$$

Donc $(P_1 + P_2) P_3 = P_1 P_3 + P_2 P_3$. De même, $P_3 (P_1 + P_2) = P_3 P_1 + P_3 P_2$. Donc $\mathbb{K}\langle X \rangle$ est une algèbre. On démontre le cas des séries formelles en utilisant les mêmes calculs.

Exemple 7. Soit $X = \{a, b\}$. Soient les polynômes $P_1 = 2aba + aab - 3abb$, $P_2 = -aba + 5abb$ et $Q = ab + ba$. Alors

$$i) P_1 + P_2 = aba + aab + 2abb$$

$$ii) P_1 \cdot Q = 2aba.ab + 2aba.ba + aab.ab + aab.ba - 3abb.ab - 3abb.ba \\ = 2abaab + 2ababa + aabab + aabba - 3abbab - 3abbba$$

$$iii) -3P_1 = -6aba - 3aab + 9abb$$

2.5 Algèbre des séries de Lie

L'ensemble des monômes de Lie est défini par récurrence : les lettres de l'alphabet X sont des monômes de Lie et le crochet de Lie $[x_0, x_1] = x_0x_1 - x_1x_0$ de deux monômes de Lie x_0 et x_1 est un monôme de Lie. Un polynôme de Lie est une combinaison \mathbb{K} -linéaire de monômes de Lie. L'ensemble des polynômes de Lie forme alors une algèbre de Lie, notée $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}\langle X \rangle$, l'algèbre de Lie libre sur X . Une série est une série de Lie si et seulement si toutes ses composantes homogènes sont des polynômes de Lie. L'ensemble des séries de Lie est noté $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}\langle\langle X \rangle\rangle$ ¹.

Exemple 8. Sur $X = \{x_0, x_1\}$, les éléments $[x_0, x_1] = x_0x_1 - x_1x_0$ et $[x_1, [x_0, x_1]] = [x_1, x_0x_1 - x_1x_0] = 2x_1x_0x_1 - x_1^2x_0 - x_0x_1^2$ sont des monômes de Lie. Le polynôme $[x_0, [x_0, x_1]] + 3[[x_1, x_1], x_0]$ est un polynôme homogène de Lie de degré 3.

Définition 5. Soit Θ le morphisme d'algèbre de $\mathbb{K}\langle X \rangle$ (muni du produit de concaténation) dans $\mathbb{K}\langle X \rangle \otimes \mathbb{K}\langle X \rangle$ défini pour une lettre $x \in X$ par $\Theta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$.

- Une série $S \in \mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle$ est dite primitive si elle vérifie $\Theta(S) = S \otimes 1 + 1 \otimes S$.
- Une série $S \in \mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle$ est dite groupe-like si elle vérifie $\Theta(S) = S \otimes S$ et $\langle S \mid 1_{X^*} \rangle = 1$.
- Une série $S \in \mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle$ vérifie le critère de Friedrichs si pour tout couple $(w_1, w_2) \in (X^*)^2$, $\langle S \mid w_1 \rangle \langle S \mid w_2 \rangle = \langle S \mid w_1 \sqcup w_2 \rangle$

Théorème 2. [1] Soit $S \in \mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle$ avec $\langle S \mid 1_{X^*} \rangle = 1$.
 $S \in \mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}\langle\langle X \rangle\rangle \iff S$ est primitive $\iff e^S = S \otimes S \iff e^S$ vérifie le critère de Friedrichs.

$S \in \mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle$ est une exponentielle de Lie si et seulement s'il existe une série de Lie L telle que $S = e^L$.

1. lorsque l'alphabet est fini

2.6 Algèbre enveloppante

Dans cette partie, on rappelle certains liens existant entre les algèbres de Lie et les algèbres de Hopf. On commence par définir ce qu'est une algèbre enveloppante.

Définition 6. Soit \mathcal{G} une algèbre de Lie .

L'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie \mathcal{L} est définie comme le quotient $\mathcal{U}(\mathcal{G}) = \mathcal{T}/\mathcal{I}$ de l'algèbre tensorielle

$$\mathcal{T} = \mathcal{G}^0 \otimes \mathcal{G}^1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{G}^n \otimes \cdots \quad (2.12)$$

avec

$$\mathcal{G}^0 = \mathbb{K}, \quad \mathcal{G}^n = \underbrace{\mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \otimes \cdots \otimes \mathcal{G}}_{n \text{ fois}} \quad (2.13)$$

par l'idéal bilatère \mathcal{I} engendré par les éléments de la forme :

$$x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \text{ pour tous } x, y \in \mathcal{G}.$$

On note $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ cette algèbre enveloppante.

Théorème 3. [1] L'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie libre $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}\langle X \rangle$ s'identifie à l'algèbre des polynômes non commutatifs $\mathbb{K}\langle X \rangle$.

Rappelons qu'un polynôme de Lie est une combinaison \mathbb{K} -linéaire de monômes de Lie. L'ensemble des polynômes de Lie forme alors une algèbre de Lie, notée $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}\langle X \rangle$, l'algèbre de Lie libre sur X et que $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}\langle X \rangle$ est une algèbre de Lie engendrée par X . On a un homomorphisme injectif :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}\langle X \rangle &\longrightarrow \mathbb{K}\langle X \rangle \\ x &\longrightarrow x' \\ [x, x'] &\longrightarrow xx' - x'x \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}\langle X \rangle \subset \mathbb{K}\langle X \rangle$, l'algèbre $\mathbb{K}\langle X \rangle$ est aussi l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie libre $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}\langle X \rangle$.

2.7 Algèbre de Hopf

La notion d'algèbre de Hopf apparaît pour la première fois en topologie dans les travaux d'Ehresmann. Il s'agissait d'étudier la cohomologie des groupes unitaires. Comme l'espace sous-jacent est un groupe, on dispose d'une application $G \times G \longrightarrow G$ (la multiplication) qui donne par dualité un coproduit sur la cohomologie.

La notion d'algèbre de Hopf permet de donner une version algébrique des opérations combinatoires de concaténation et déconcaténation et, plus généralement, de composition et de décomposition.

Avant de définir ce qu'est une algèbre de Hopf, nous aurons besoin de quelques notions préliminaires.

Définition 7. Une \mathbb{K} -cogèbre associative avec unité est un \mathbb{K} -espace vectoriel C muni de deux applications \mathbb{K} -linéaires

$$\Delta : C \longrightarrow C \otimes C \quad (2.14)$$

et

$$e : C \longrightarrow \mathbb{K} \quad (2.15)$$

telles que

$$(Id_C \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes Id_C) \circ \Delta \quad (2.16)$$

et

$$(Id_C \otimes e) \circ \Delta = Id_C = (e \otimes Id_C) \circ \Delta. \quad (2.17)$$

L'application Δ est appelée coproduit. C'est la notion duale de celle de produit dans une algèbre. Le coproduit d'un élément de C est une combinaison linéaire de produits tensoriels de deux éléments de C .

Définition 8. Soit B un \mathbb{K} -espace vectoriel muni d'une structure d'algèbre associative unitaire (B, μ, η) et d'une structure de cogèbre (B, Δ, e) . On dira alors que B est une bigèbre si la structure d'algèbre et la structure de cogèbre sont compatibles, au sens où

$$\Delta \text{ et } e \text{ sont des morphismes d'algèbre} \quad (2.18)$$

$$\mu \text{ et } \eta \text{ sont des morphismes de cogèbre} \quad (2.19)$$

(l'application $\mu : B \otimes B \longrightarrow B$ est la multiplication, et l'application $\eta : \mathbb{K} \longrightarrow B$ est l'unité).

Nous sommes maintenant en mesure de définir ce qu'est une algèbre de Hopf.

Définition 9. Soit $(\mathcal{H}, \mu, \eta, \Delta, e)$ une bigèbre. On définit alors la convolution \star par

$$f \star g = \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta \quad (2.20)$$

où $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ et $g : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ sont deux applications linéaires. Si l'identité est inversible par la convolution, on dit que \mathcal{H} est une algèbre de Hopf et on appelle antipode l'inverse S de l'identité par la convolution. L'antipode S est un antimorphisme d'algèbres

$$S(xy) = S(y)S(x) \quad (2.21)$$

De plus, il vérifie par définition

$$Id_{\mathcal{H}} \star S = S \star Id_{\mathcal{H}} = \eta \circ e, \quad (2.22)$$

c'est à dire

$$\mu \circ (Id_{\mathcal{H}} \otimes S) \circ \Delta = \mu(S \otimes Id_{\mathcal{H}}) \circ \Delta = \eta \circ e. \quad (2.23)$$

Définition 10. Soit $\mathcal{H} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{H}_n$ une algèbre de Hopf graduée en dimension finie. On munit alors le dual gradué $\mathcal{H}' = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{H}'_n$ de \mathcal{H} d'une structure d'algèbre de Hopf par

$$\langle fg \mid x \rangle = \langle f \otimes g \mid \Delta_{\mathcal{H}}(x) \rangle \quad (2.24)$$

et

$$\langle \Delta_{\mathcal{H}'}(f) \mid x \otimes y \rangle = \langle f \mid xy \rangle \quad (2.25)$$

où pour tout $f \in \mathcal{H}'$ et pour tout $x \in \mathcal{H}$, $\langle f \mid x \rangle$ désigne l'action de f sur x , et où on a posé

$$\langle f \otimes g \mid x \otimes y \rangle = \langle f \mid x \rangle \langle g \mid y \rangle. \quad (2.26)$$

Soit maintenant $(B_x)_{x \in X}$ une base de \mathcal{H} indexée par une certaine famille X d'objets. On définit alors la base duale $(A_y)_{y \in X}$ de $(B_x)_{x \in X}$ comme étant la base de \mathcal{H}' qui vérifie

$$\langle A_x \mid B_y \rangle = \delta_{xy} \quad (2.27)$$

pour tout $x \in X$ et pour tout $y \in X$.

Lorsque \mathcal{H}' est isomorphe à \mathcal{H} , on dit que \mathcal{H} est auto-duale, et le crochet de dualité s'identifie alors à un produit scalaire sur \mathcal{H} .

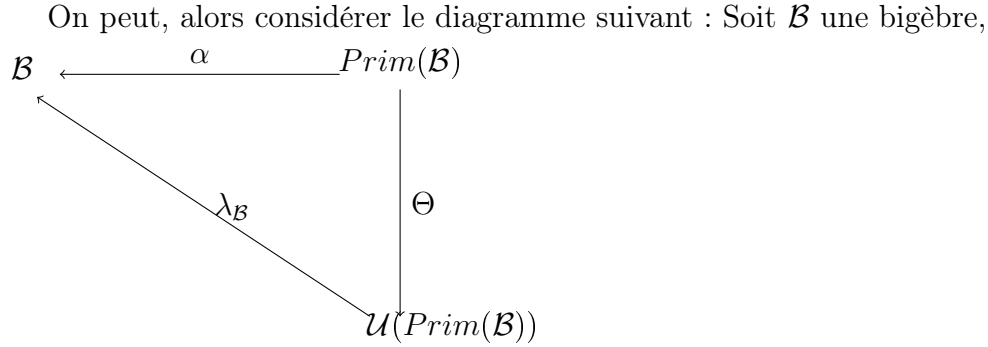
Définition 11. Soit C une cogèbre de coproduit Δ . $x \in C$ est dit primitif si $\Delta(x) = x \otimes 1_{X^*} + 1_{X^*} \otimes x$.

Définition 12. Soit C une cogèbre.

On appelle $\text{Prim}(C)$ l'ensemble des éléments primitifs de C .

Proposition 4. [13, 4] Soit \mathcal{H} une algèbre de Hopf.

Alors $\text{Prim}(\mathcal{H})$ est une algèbre de Lie.



Théorème 4. (Cartier-Quillen-Milnor-Moore) [13, 4].

Soit \mathcal{H} une algèbre de Hopf cocommutative, graduée et connexe sur un corps de caractéristique 0. Alors, \mathcal{H} est isomorphe à l'algèbre de Hopf graduée $\mathcal{U}(\text{Prim}(\mathcal{H}))$ par $\lambda_{\mathcal{B}}$.

Nous pouvons à présent donner quelques exemples d'algèbres de Hopf.

2.7.1 Cas de l'algèbre de shuffle

Le produit de shuffle \sqcup est défini sur les mots par

$$sh : \begin{cases} \mathbb{K}\langle X \rangle \otimes \mathbb{K}\langle X \rangle & \rightarrow & \mathbb{K}\langle X \rangle \\ w_1 \otimes w_2 & \mapsto & w_1 \sqcup w_2, \end{cases} \quad (2.28)$$

et étendue par linéarité aux polynômes. Alors, l'application linéaire

$$\mathbb{1}_{X^*} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}\langle X \rangle, \quad k \longmapsto \mathbb{1}_{X^*}(k) = k.1_{X^*} \quad (2.29)$$

constitue un élément unité. Donc $(\mathbb{K}\langle X \rangle, sh, \mathbb{1}_{X^*})$ constitue une \mathbb{K} -algèbre associative et graduée. Cette algèbre est connue comme algèbre de shuffle (algèbre de mélange).

Nous définissons un coproduit, pour le produit \sqcup , $\Delta_{conc} : \mathbb{K}\langle X \rangle \longrightarrow \mathbb{K}\langle X \rangle \otimes \mathbb{K}\langle X \rangle$ par l'opération classique de *déconcaténation*

$$\Delta_{conc}(w) = \sum_{uv=w \in X^*} u \otimes v. \quad (2.30)$$

$e : P \in \mathbb{K}\langle X \rangle \mapsto e(P) = \langle P \mid 1_{X^*} \rangle \in \mathbb{K}$ apparaît comme un élément unité pour le coproduit Δ_{conc} , et donc $(\mathbb{K}\langle X \rangle, \Delta_{conc}, e)$ est une cogèbre (non cocommutative).

Pour tout mot $w = x_1x_2 \cdots x_k \in X^*$ on note la fonction miroir $\tilde{w} = x_k \cdots x_2x_1 \in X^*$. Dans le cas du produit de shuffle \sqcup , l'antipode se résume à $a_{\sqcup}(w) = a_{conc}(w) = (-1)^k \tilde{w}$.

En effet, l'algèbre de Hopf dite de décomposition est la bigèbre $(\mathbb{K}\langle X \rangle, conc, \mathbb{1}_{X^*}, \Delta_{\sqcup}, e)$ munie de l'antipode a_{\sqcup} précédemment définie, et où le coproduit Δ_{\sqcup} est défini par transposition du produit de shuffle \sqcup :

$$\forall (P, P_1, P_2) \in (\mathbb{K}\langle X \rangle)^3 \quad , \quad \langle \Delta_{\sqcup}(P) \mid P_1 \otimes P_2 \rangle = \langle P \mid P_1 \sqcup P_2 \rangle \quad (2.31)$$

Cette algèbre est alors non commutative, mais cocommutative.

En fait, les algèbres $\mathcal{H}_{\sqcup} = (\mathbb{K}\langle X \rangle, conc, \mathbb{1}_{X^*}, \Delta_{\sqcup}, e, a_{\sqcup})$ et $\mathcal{H}_{\sqcup}^{\vee} = (\mathbb{K}\langle X \rangle, \sqcup, \mathbb{1}_{X^*}, \Delta_{conc}, e, a_{\sqcup})$ sont des algèbres de Hopf duales l'une de l'autre. Et, de plus, d'après le Théorème 4 [13, 4], $\mathbb{K}\langle X \rangle$ est isomorphe, comme algèbre de Hopf cocommutative graduée connexe, à l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}\langle X \rangle$.

2.7.2 Cas de l'algèbre de stuffle

Soit $Y = \{y_i\}_{i \geq 1}$ un alphabet totalement ordonné par $> : y_1 > y_2 > \cdots > \cdots$. Le produit de stuffle \sqcup est défini sur les mots par

$$st : \begin{cases} \mathbb{K}\langle X \rangle \otimes \mathbb{K}\langle X \rangle & \rightarrow & \mathbb{K}\langle X \rangle \\ w_1 \otimes w_2 & \mapsto & w_1 \sqcup w_2, \end{cases} \quad (2.32)$$

et étendue par linéarité aux polynômes. Alors, l'application linéaire

$$\mathbb{1}_{Y^*} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}\langle Y \rangle \quad , \quad k \longrightarrow \mathbb{1}_{X^*}(k) = k. \mathbb{1}_{Y^*} \quad (2.33)$$

constitue un élément unité. Donc $(\mathbb{K}\langle Y \rangle, st, \mathbb{1}_{Y^*})$ constitue une \mathbb{K} -algèbre associative et graduée. Cette algèbre est connue comme algèbre de stuffle (algèbre de quasi-mélange).

Nous définissons un coproduit, pour le produit \sqcup , $\Delta_{conc} : \mathbb{K}\langle Y \rangle \longrightarrow \mathbb{K}\langle Y \rangle \otimes \mathbb{K}\langle Y \rangle$ par l'opération classique de *déconcaténation* (duale de la concaténation)

$$\Delta_{conc}(w) = \sum_{\substack{(uv)=(w) \\ w \in Y^*}} u \otimes v. \quad (2.34)$$

$\mathbf{e} : P \in \mathbb{K}\langle Y \rangle \mapsto \mathbf{e}(P) = \langle P \mid \mathbb{1}_{X^*} \rangle \in \mathbb{K}$ apparaît comme un élément unité pour le coproduit Δ_{conc} , et donc $(\mathbb{K}\langle Y \rangle, \Delta_{conc}, \mathbf{e})$ est une cogèbre (non cocommutative).

Pour tout mot $w = y_1y_2 \cdots y_k \in Y^*$ on note la fonction miroir $\tilde{w} = y_k \cdots y_2y_1 \in Y^*$.

Dans le cas du produit de stuffle \sqcup , l'antipode se calcule recurssivement par $a_{\sqcup}(y_s) = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \sum_{i_1 + \dots + i_n = s} y_{i_1} \cdots y_{i_n}$.

En effet, l'algèbre de Hopf dite de décomposition est la bigèbre $(\mathbb{K}\langle Y \rangle, conc, \mathbb{1}_{Y^*}, \Delta_{\sqcup}, \mathbf{e})$ munie de l'antipode a_{\sqcup} précédemment définie, et où le coproduit Δ_{\sqcup} est défini par transposition du produit de stuffle \sqcup :

$$\forall (P, P_1, P_2) \in (\mathbb{K}\langle Y \rangle)^3, \quad \langle \Delta_{\sqcup}(P) \mid P_1 \otimes P_2 \rangle = \langle P \mid P_1 \sqcup P_2 \rangle \quad (2.35)$$

Cette algèbre est alors non commutative, mais cocommutative.

En fait, les algèbres $\mathcal{H}_{\sqcup} = (\mathbb{K}\langle Y \rangle, conc, \mathbb{1}_{Y^*}, \Delta_{\sqcup}, \mathbf{e}, a_{\sqcup})$ et $\mathcal{H}_{\sqcup}^{\vee} = (\mathbb{K}\langle Y \rangle, \sqcup, \mathbb{1}_{Y^*}, \Delta_{conc}, \mathbf{e}, a_{\sqcup})$ sont des algèbres de Hopf duales l'une de l'autre. Et, de plus, d'après le Théorème 4 [13, 4], $\mathbb{K}\langle Y \rangle$ est isomorphe, comme algèbre de Hopf cocommutative graduée connexe, à l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}\langle Y \rangle$.

Par conséquent, on peut écrire le Lemme suivant :

Lemme 2. *Soit α un morphisme tel que*

$$\alpha : \begin{cases} \mathbb{K}\langle Y \rangle & \rightarrow \\ w & \mapsto w + \sum_{\substack{|u| > |w| \\ (u) = (w)}} \langle \alpha(w) \mid u \rangle u, \end{cases} \quad (2.36)$$

alors α est un isomorphisme.

Pour cela, on peut écrire le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\langle X \rangle & \xrightarrow{\Delta_{\sqcup}} & \mathbb{K}\langle X \rangle \otimes \mathbb{K}\langle X \rangle \\ \alpha_1 \downarrow & & \downarrow \alpha_1 \otimes \alpha_1 \\ \mathbb{K}\langle X \rangle & \xrightarrow{\Delta_{\sqcup}} & \mathbb{K}\langle X \rangle \otimes \mathbb{K}\langle X \rangle \end{array}$$

avec $\alpha_1(y_{i_1} \cdots y_{i_p}) = \pi_1(y_{i_1}) \cdots \pi_1(y_{i_p})$ (voir (3.52)).

La bijectivité de α tient au fait que la graduation par poids est en dimensions finies. Dans le cas de la dimension infinie, le résultat ne tient pas, comme le montre l'exemple, en une variable, de la substitution $x \mapsto x + x^2$. Dans ce cas les images sont toutes des

polynômes pairs par rapport à la vertical $x = \frac{-1}{2}$ et cette substitution ne peut pas être bijective (par exemple $P(x) = x$ n'est pas dans l'image).

Chapitre 3

Poincaré-Birkhoff-Witt, Dualité, Factorisation de Schützenberger

Résumé : Ce chapitre sert de notions de base aux chapitres 4, 5 et 6. Nous allons tout d'abord, rappeler les résultats principaux des différents travaux déjà effectués dans [1, 2, 3], qui montrent les mécanismes de construction de la base de Poincaré-Birkhoff-Witt-Lyndon et sa base duale. Nous nous intéressons aux bases obtenues à partir des mots de Lyndon. Il reprend aussi les fondements de la méthode de factorisations de l'identité de Schützenberger.

3.1 Introduction

Soient $(P_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}}$ une base d'une algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ et $(S_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}}$ sa famille duale de l'algèbre duale $\mathcal{U}^*(\mathcal{G})$ ¹. La factorisation de Schützenberger s'écrit

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}} S_\alpha \otimes P_\alpha = \prod_{i \in I}^{\searrow} e^{S_{e_i} \otimes P_{e_i}} = Id_{\mathcal{U}(\mathcal{G})}. \quad (3.1)$$

En particulier, C. Reutenauer a signalé que cette relation est valable dans toute algèbre enveloppante [1, 2, 3].

Cette factorisation compte plusieurs applications, parmi lesquelles nous trouvons le domaine des équations différentielles non linéaires, dans lequel elle apparaît en tant que factorisation d'opérateurs de transport, et le domaine combinatoire, plus proche de cette thèse.

Elle est une conséquence des propriétés des deux bases en dualité. Dans bien des cas, la construction d'une paire de bases en dualité passe par celle d'une base duale à partir d'une

1. Cette famille formée par des formes linéaires coordonnées de $(P_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}}$ est libre et engendre un espace stable par la convolution car $S_\alpha * S_\beta = \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha! \beta!} S_{\alpha+\beta}$

base dont on connaît certaines propriétés. Nous nous proposons donc d'étudier les conditions que doit satisfaire la base dont nous partons de sorte que la base duale permette l'écriture de la factorisation. Nous illustrerons ces idées sur des exemples combinatoires relatifs à algèbre de shuffle (l'algèbre de mélange) et à algèbre de stuffle (l'algèbre de quasi-mélange).

3.2 Résultats connus

\mathbb{K} est un anneau commutatif et unitaire et I un ensemble ordonné par $<$.

3.2.1 Notations - Définitions

Notons $\mathbb{N}^{(I)}$ l'ensemble des fonctions à support fini de I dans \mathbb{N} (multiindices). C'est un monoïde (le monoïde commutatif librement engendré par I) pour la loi $+$ définie par

$$(\alpha + \beta)_i = \alpha_i + \beta_i \quad , \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^{(I)}, \quad (3.2)$$

admettant la fonction nulle pour élément neutre. De plus, si $\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}$, nous définissons $\alpha!$ par

$$\alpha! = \prod_{i \in \text{supp}(\alpha)} \alpha_i!. \quad (3.3)$$

La base canonique² de $\mathbb{N}^{(I)}$ est donnée par les fonctions s'annulant sur $I \setminus \{i_0\}$ et prenant la valeur 1 en i_0 ; ces fonctions sont notées $e_{i_0} : e_{i_0}(i) = \delta_{i i_0}$.

Maintenant, si \mathcal{A} une algèbre, $Y = (y_i)_{i \in I}$ une famille de \mathcal{A} et $\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}$,

$$Y^\alpha := y_{i_1}^{\alpha_{i_1}} y_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \cdots y_{i_k}^{\alpha_{i_k}} \quad (3.4)$$

pour tout sous-ensemble $J = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, $i_1 > i_2 > \dots > i_k$, de I contenant le support de α (on montre facilement que la valeur de Y^α est indépendante du choix de $J \supset \text{supp}(\alpha)$ si l'algèbre possède une unité).

En particulier, $Y^{e_i} = y_i$. Nous appellerons *éléments atomiques* d'une famille $(Y^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}}$ les éléments Y^{e_i} , $i \in I$.

Dans le cas d'une algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ si $B = (b_i)_{i \in I}$ est une base ordonnée de

2. En fait, $\mathbb{N}^{(I)}$ n'est pas un espace vectoriel. La famille que nous définissons est celle des *générateurs libres*.

\mathcal{G} alors $(B^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}}$ est une base de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ (voir Théorème 5). On montre facilement que $\Delta(B^\alpha) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\beta}{\gamma} B^\beta \otimes B^\gamma$, il en résulte que si les S_α désignent la famille duale dans $\mathcal{U}^*(\mathcal{G})$ donnée par $\langle S_\alpha | B^\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$, on a : $S_\alpha * S_\beta = \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\beta!} S_{\alpha+\beta}$

3.2.2 Théorème de factorisation

Soit \mathcal{G} une algèbre de Lie sur \mathbb{K} et $B = (b_i)_{i \in I}$ une base ordonnée de \mathcal{G} .

Théorème 5. Poincaré-Birkhoff-Witt. *Les éléments B^α , pour $\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}$, forment une base de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ de \mathcal{G} .*

La base formée par les B^α , pour $\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}$, est appelée *base de Poincaré-Birkhoff-Witt* de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$.

Cette propriété de décomposition de chaque élément d'une base par rapport à son multiindice (Une base $(B_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}}$ obtenue par l'application du Théorème 5 de Poincaré-Birkhoff-Witt satisfait la relation $B^\alpha = \prod_{i \in \text{supp}(\alpha)} B_{e_i}^{\alpha_i} = \prod_{i \in \text{supp}(\alpha)} b_i^{\alpha_i}$) nous intéresse particulièrement et justifie l'introduction de la définition suivante.

Soit \mathcal{A} une algèbre associative commutative avec unité.

Définition 13. *Soit \mathcal{L} une partie de \mathcal{A} . On appelle \mathcal{L} base de transcendance de \mathcal{A} sur \mathbb{K} si les \mathcal{L}^α , $\alpha \in \mathbb{N}^{(\mathcal{L})}$ voir (3.4), forment une base linéaire de \mathcal{A} .*

Nous pouvons donner une caractérisation générale des familles multiplicatives dans une \mathbb{K} -algèbre associative et commutative avec unité \mathcal{A} . Pour cela, donnons la définition suivante :

Définition 14. *Soit \mathcal{L} une partie de \mathcal{A} . Alors la famille $(\mathcal{L}^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{(\mathcal{L})}}$ forme une base de \mathcal{A} si et seulement si \mathcal{L} est une base de transcendance de \mathcal{A} sur \mathbb{K} .*

Notons $\mathcal{U}^*(\mathcal{G})$ le dual de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ et considérons la famille $(S_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}}$ duale de la base de Poincaré-Birkhoff-Witt $(B^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}}$, c'est-à-dire la famille de formes linéaires sur $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ définies par

$$\langle S_\alpha | B^\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}. \quad (3.5)$$

Supposons que $\langle S_0 | 1_{\mathcal{U}(\mathcal{G})} \rangle = 1$ (S_0 désigne l'élément obtenu pour le multiindice identiquement nul) et que $\langle S_\alpha | 1_{\mathcal{U}(\mathcal{G})} \rangle = 0$ pour tout α non identiquement nul. Nous pouvons alors établir le Théorème suivant.

Théorème 6. [1, 7]

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}} S_\alpha \otimes B^\alpha = \prod_{i \in I}^{\rightarrow} e^{S_{e_i} \otimes b_i} \quad (3.6)$$

Remarque 1. [7]

- Le produit du membre de droite est donné avec $* \otimes \mu_{\mathcal{U}(\mathcal{G})}$ où $\mu_{\mathcal{U}(\mathcal{G})}$ désigne le produit usuel de l'algèbre enveloppante et $*$ le produit de convolution des formes linéaires de $\mathcal{U}^*(\mathcal{G})$.

En fait, toute algèbre enveloppante est une algèbre de Hopf et possède donc une structure de bigèbre. Notons Δ le coproduit associé à la structure de bigèbre de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$. C'est un homomorphisme d'algèbres défini par :

$$\Delta(g) = g \otimes 1_{X^*} + 1_{X^*} \otimes g \quad (3.7)$$

pour $g \in \mathcal{G}$ (il satisfait donc

$$\Delta(PQ) = \Delta(P)\Delta(Q) \text{ pour tous } P, Q \in \mathcal{U}(\mathcal{G}) \quad (3.8)$$

puis étendu en une famille de morphismes d'algèbres $\Delta^{(k)} : \mathcal{U}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{G})^{\otimes k+1}$ tels que, $\forall v \in \mathcal{G}$,

$$\Delta^{(k)}(v) = v \otimes 1_{X^*} \otimes \cdots \otimes 1_{X^*} + 1_{X^*} \otimes v \otimes 1_{X^*} \otimes \cdots \otimes 1_{X^*} + \cdots + 1_{X^*} \otimes 1_{X^*} \otimes \cdots \otimes 1_{X^*} \otimes v. \quad (3.9)$$

En fait,

$$\Delta = \Delta^{(1)} \quad (3.10a)$$

$$\Delta^{(k)}(P) = (\text{Id}_{\mathcal{U}(\mathcal{G})} \otimes \Delta^{(k-1)})\Delta(P) = (\Delta^{(k-1)} \otimes \text{Id}_{\mathcal{U}(\mathcal{G})})\Delta(P), k \geq 2. \quad (3.10b)$$

La convolution est en fait définie comme la loi duale de Δ :

$$\langle a * b \mid v \rangle = \langle a \otimes b \mid \Delta(v) \rangle, \forall a, b \in \mathcal{U}^*(\mathcal{G}) \text{ et } \forall v \in \mathcal{U}(\mathcal{G}). \quad (3.11)$$

- Les deux membres de (3.6) forment en fait une résolution de l'identité lorsque l'on considère le morphisme

$$\Phi : V^* \otimes V \rightarrow \mathcal{E}nd^{\text{finis}}(V) \quad (3.12)$$

($\mathcal{E}nd^{\text{finis}}(V)$ désigne l'espace des endomorphismes rang fini) qui associe à tout produit tensoriel $f \otimes v \in V^* \otimes V$ l'endomorphisme $\Phi(f \otimes v) : b \mapsto f(b) \cdot v$. Le morphisme Φ peut être étendu, par continuité, aux séries :

$$\Phi \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}} S_\alpha \otimes B^\alpha \right) (v) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}} S_\alpha(v) B^\alpha = \text{Id}_{\mathcal{U}(\mathcal{G})}(v). \quad (3.13)$$

La preuve de ce théorème (Théorème 6) repose, entre autres, sur la propriété suivante des éléments S_α :

$$S_\alpha * S_\beta = \frac{(\alpha + \beta)!}{\alpha! \beta!} S_{\alpha + \beta} \quad (3.14)$$

(qui montre que cette famille est multiplicative à *une constante près*) que l'on peut établir comme suit ³ :

$$\begin{aligned} S_\alpha * S_\beta &= \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^{(I)}} \langle S_\alpha * S_\beta \mid B^\gamma \rangle S_\gamma \\ &= \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^{(I)}} \langle S_\alpha \otimes S_\beta \mid \Delta(B^\gamma) \rangle^{\otimes 2} S_\gamma \\ &= \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^{(I)}} \langle S_\alpha \otimes S_\beta \mid \sum_{\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma} \frac{\gamma!}{\gamma_1! \gamma_2!} B^{\gamma_1} \otimes B^{\gamma_2} \rangle^{\otimes 2} S_\gamma \\ &= \frac{(\alpha + \beta)!}{\alpha! \beta!} S_{\alpha + \beta}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Cette propriété permet d'établir, par récurrence, que $\frac{S_{e_{i_k}}^{*\alpha_k}}{\alpha_k!} = S_{\alpha_k e_{i_k}}$ puis que

$$\frac{S_{e_{i_1}}^{*\alpha_1} * \dots * S_{e_{i_k}}^{*\alpha_k}}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} = S_\alpha. \quad (3.16)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I} e^{S_{e_i} \otimes b_i} &= \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{i_1 \geq \dots \geq i_k \\ \alpha_1, \dots, \alpha_k}} \frac{(S_{e_{i_1}} \otimes b_{i_1})^{\alpha_1} \dots (S_{e_{i_k}} \otimes b_{i_k})^{\alpha_k}}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} \\ &= \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{i_1 \geq \dots \geq i_k \\ \alpha_1, \dots, \alpha_k}} \frac{S_{e_{i_1}}^{*\alpha_1} * \dots * S_{e_{i_k}}^{*\alpha_k} \otimes (b_{i_1})^{\alpha_1} \dots (b_{i_k})^{\alpha_k}}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} \\ &= \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{i_1 \geq \dots \geq i_k \\ \alpha_1, \dots, \alpha_k}} \frac{S_{e_{i_1}}^{*\alpha_1} * \dots * S_{e_{i_k}}^{*\alpha_k}}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} \otimes B^\alpha \end{aligned} \quad (3.17)$$

où la dernière étape repose sur la définition de la base $(B^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}}$ par multiplications ordonnées. Le résultat suit alors en utilisant l'équation (3.16). Nous pouvons, à partir de

3. Nous employons ci-dessous la notation $\langle \cdot \mid \cdot \rangle^{\otimes 2}$; celle-ci correspond à la définition suivante : si V_1 et V_2 sont deux espaces en dualité avec, respectivement, W_1 et W_2 pour les produits scalaires $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_1$ et $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_2$, alors (on montre que) $V_1 \otimes V_2$ est en dualité avec $W_1 \otimes W_2$ pour le produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle^{\otimes 2}$:

$$\begin{cases} (V_1 \otimes V_2) \times (W_1 \otimes W_2) & \rightarrow & k \\ (v_1 \otimes v_2, w_1 \otimes w_2) & \mapsto & \langle v_1 \mid w_1 \rangle_1 \langle v_2 \mid w_2 \rangle_2. \end{cases}$$

l'équation précédente, revenir sur la convergence du membre de droite de (3.6). En fait, c'est

$\Phi\left(\sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{i_1 \geq \dots \geq i_k \\ \alpha_1, \dots, \alpha_k}} \frac{S_{e_{i_1}}^{*\alpha_1} * \dots * S_{e_{i_k}}^{*\alpha_k}}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} \otimes B^\alpha\right)$ qui définit ce produit et permet d'en assurer l'existence.

Lemme 3. [7] *La famille $\left(\Phi(S_{e_{i_1}}^{*\alpha_1} * \dots * S_{e_{i_k}}^{*\alpha_k} \otimes B^\alpha)\right)_\alpha$ est sommable (c'est-à-dire que, pour tout vecteur $v \in \mathcal{U}(\mathcal{G})$, $|\text{supp}_\alpha \left[\Phi\left(S_{e_{i_1}}^{*\alpha_1} * \dots * S_{e_{i_k}}^{*\alpha_k} \otimes B^\alpha\right)(v)\right]| < \infty$).*

Preuve : Nous avons besoin de la propriété suivante, qui se démontre par récurrence à partir de la définition (3.11) : pour toute famille S_1, \dots, S_k de formes linéaires de $\mathcal{U}^*(\mathcal{G})$ et pour tout vecteur $v \in \mathcal{U}(\mathcal{G})$,

$$\langle S_1 * \dots * S_k \mid v \rangle = \langle S_1 \otimes \dots \otimes S_k \mid \Delta^{(k-1)}(v) \rangle^{\otimes k}. \quad (3.18)$$

Choisissons $v \in \mathcal{U}(\mathcal{G})$; décomposons-le sur la base $(B^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}(I)}$: $v = \sum_\beta v_\beta B^\beta$.

Notons $N_\alpha = \sum_i \alpha_i$, $\beta = \sum_i \beta_i e_i$ et $N_\beta = \sum_i \beta_i$. Alors

$$\begin{aligned} \Phi\left(S_{e_{i_1}}^{*\alpha_1} * \dots * S_{e_{i_k}}^{*\alpha_k} \otimes B^\alpha\right)(v) &= \sum_\beta v_\beta \Phi\left(S_{e_{i_1}}^{*\alpha_1} * \dots * S_{e_{i_k}}^{*\alpha_k} \otimes B_\alpha\right)(B^\beta) \\ &= \sum_\beta v_\beta \langle S_{e_{i_1}}^{*\alpha_1} * \dots * S_{e_{i_k}}^{*\alpha_k} \mid B^\beta \rangle B^\alpha \\ &= \sum_\beta v_\beta \langle S_{e_{i_1}}^{\otimes \alpha_1} \otimes \dots \otimes S_{e_{i_k}}^{\otimes \alpha_k} \mid \Delta^{(N_\alpha-1)}(B^\beta) \rangle^{\otimes N_\alpha} B^\alpha. \end{aligned} \quad (3.19)$$

De plus, si l'on décompose B^β comme un produit d'éléments primitifs, $B^\beta = \prod_{i \in I} b_i^{\beta_i}$,

$$\begin{aligned} \langle S_{e_{i_1}}^{\otimes \alpha_1} \otimes \dots \otimes S_{e_{i_k}}^{\otimes \alpha_k} \mid \Delta^{(N_\alpha-1)}(B^\beta) \rangle^{\otimes N_\alpha} &= \\ &= \langle S_{e_{i_1}}^{\otimes \alpha_1} \otimes \dots \otimes S_{e_{i_k}}^{\otimes \alpha_k} \mid \sum_{J_1 + \dots + J_{N_\alpha} = N_\beta} B[J_1] \otimes \dots \otimes B[J_{N_\alpha}] \rangle^{\otimes N_\alpha} \end{aligned}$$

où $B[J] = \prod_{i \in J} b_i$.

Maintenant, remarquons que :

- si $N_\alpha > N_\beta$, l'un des $B[J]$ comporte nécessairement un facteur $1_{\mathcal{U}(\mathcal{G})}$; or $\langle S_{e_i} \mid 1_{\mathcal{U}(\mathcal{G})} \rangle = 0$ par hypothèse ;

- si $N_\alpha < N_\beta$, l'un des $B[J]$ comporte nécessairement un facteur $b_{i_1}b_{i_2}$; or $\langle S_{e_i} | b_{i_1}b_{i_2} \rangle = 0$ par dualité.

Par conséquent, $N_\alpha = N_\beta$. On conclut finalement en notant que les seuls α qui ne donnent pas un produit scalaire nul sont obtenus à partir de β par permutations et sont donc en nombre fini.

□

De plus, pour α contenant l'ensemble des coordonnées de v , on a (3.13), ce qui montre

$$\text{que } \prod_{i \in I} e^{S_{e_i} \otimes b_i} = Id_{U(\mathcal{G})}.$$

Note 1. .

- $(I, <) \longrightarrow (\mathcal{Lyn}(X), <)$ (attention, cependant : comme le cas de l'algèbre libre, on considère des produits décroissants de mots de Lyndon, alors que dans le cas général, on considère des produits croissants);
- le produit de convolution est le produit de shuffle (produit de mélange) dans le cas de l'algèbre libre;
- les S_{e_i} correspondent aux S_ℓ ($\ell \in \mathcal{Lyn}(X)$), les P_α aux éléments B_α .

3.3 Remarques sur la dualisation

Nous revenons dans cette section sur une construction qui sera utilisée à plusieurs reprises dans les paragraphes suivants, celle d'une base duale dans le cas de l'algèbre libre.

Commençons par rappeler la définition d'une algèbre M -graduée. Soit \mathcal{A} une algèbre associative sur \mathbb{K} et M un monoïde additif. On dit que \mathcal{A} est M -graduée si elle se décompose, en tant qu'espace vectoriel, de la façon suivante :

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{m \in M} \mathcal{A}_m \tag{3.20}$$

avec $\mathcal{A}_m \mathcal{A}_{m'} \subseteq \mathcal{A}_{m+m'}$ pour tous $m, m' \in M$. Les $\mathcal{A}_m, m \in M$, sont appelés *composantes homogènes* de \mathcal{A} . De plus, on dit que \mathcal{A} est *graduée en dimension finie* si chacun des $\mathcal{A}_m, m \in M$, est un espace vectoriel de dimension finie.

L'algèbre libre peut être graduée de différentes façons qui utilisent chacune une fonction de poids $\phi : X^* \rightarrow M$, définie sur les lettres et étendue aux mots et engendrant les composantes homogènes suivantes :

$$(\mathbb{K}(X))_m = \text{span} \{w \in X^*, \phi(w) = m\}, \quad m \in M. \tag{3.21}$$

Un premier exemple de graduation est donnée par la longueur des mots : M est alors le monoïde $(\mathbb{N}, +)$ et la fonction de poids $\phi_1(w) = |w|, \forall w \in X^*$. Cette graduation n'est

cependant pas satisfaisante car les composantes homogènes auxquelles elle donne naissance $((\mathbb{K}X)_\ell = \text{span} \{ \text{ensemble des mots de longueur } \ell \})$ ne sont pas de dimension finie. En effet, dans le cas où l'alphabet est infini, il existe un nombre infini de mots de longueur donnée.

C'est pour cette raison que nous introduisons une seconde graduation : on considère alors le monoïde des multiindices $(\mathbb{N}^{(X)}, +)$ (monoïde des fonctions à support fini de X dans \mathbb{N}) et la fonction de poids est donnée par

$$\phi_2 : \begin{cases} X & \rightarrow & \mathbb{N}^{(X)} \\ x_i & \mapsto & e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots), \end{cases} \quad (3.22)$$

étendue comme morphisme de monoïdes aux mots de sorte que $\phi_2(w) = \text{multideg}(w)$ est le multidegré de w , c'est-à-dire le nombre d'occurrences de chaque lettre de l'alphabet considéré dans w . Par exemple, si $X = \{a, b, c\}$ et $w = \text{abbcab}$, $\text{multideg}(w) = (2, 3, 1)$.

Même dans le cas d'un alphabet infini, les composantes (multi)-homogènes $\mathbb{K}\langle X \rangle_\alpha = \text{span} \{ \text{ensemble des mots de multidegré } \alpha \}$, $\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}$, sont de dimension finie. On dit que $\mathbb{K}\langle X \rangle$ est *graduée en dimension finie par la multihomogénéité*. C'est cette graduation que nous utiliserons dans les paragraphes suivants.

On appelle *famille multihomogène* de $\mathbb{K}\langle X \rangle$ une famille $(B_w)_{w \in X^*}$ telle que $\forall w \in X^*$, $\text{multideg}(w) = \alpha$:

$$B_w \in (\mathbb{K}\langle X \rangle)_\alpha. \quad (3.23)$$

Il est toujours possible, lorsque l'on considère une base $(B_w)_{w \in X^*}$ de l'algèbre libre de construire une famille duale $(D_w)_{w \in X^*}$, définie par $\langle D_u | B_v \rangle = \delta_{uv}$, $\forall u, v \in X^*$. A priori, cette famille est une famille de séries (rappelons que $(\mathbb{K}\langle X \rangle)^* = \mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle$), mais ici, ce sont des polynômes.

Cependant, lorsque la famille $(B_w)_{w \in X^*}$ est multihomogène, la famille duale est une famille de polynômes qui forment une base de $\mathbb{K}\langle X \rangle$. On peut alors construire les D_w comme suit : pour chaque multidegré $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$, on construit la matrice $M = (M_{u,v})_{u,v \in X^\alpha}$ des coefficients des B_w , $w \in X^\alpha$ sur les mots :

$$M_{u,v} = \langle B_u | v \rangle. \quad (3.24)$$

La matrice $N = (N_{u,v})_{u,v \in X^\alpha}$ des coefficients des D_w , $w \in X^\alpha$ sur les mots, est donnée par :

$$N_{u,v} = \langle D_u | v \rangle. \quad (3.25)$$

Il est facile de voir que la matrice M est inversible en tant que matrice de changement de bases : Si la base $(B_w)_{w \in X^*}$ est triangulaire par rapport aux mots, M l'est aussi.

Les matrices M et N sont triangulaire, inversible et vérifient l'identité $N = ({}^t M)^{-1}$.

Le processus de dualisation conserve les propriétés de multihomogénéité et de triangularité (ceci près que la base duale d'une base triangulaire inférieure est triangulaire supérieure).

Définition 15. Soient $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$ et $X^\alpha = a_1^{\alpha_1} \cdots a_n^{\alpha_n}$ avec $a_1 < \cdots < a_n \in X$ et $n, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

i) On dira que le mot $w \in X^*$ est multihomogène et de multidegré $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ sur l'alphabet X si :

$$w \in X^\alpha \quad (3.26)$$

c'est-à-dire $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est le nombre d'occurrences de chaque lettre de l'alphabet X considéré dans $w \in X^*$ (chaque lettre $a_s \in X$ apparaît α_s fois dans w pour $1 \leq s \leq n$).

ii) On définit la classe de multihomogénéité de X^α par :

$$M(X^\alpha) = \{w \in X^* \mid w \in X^\alpha\} \quad (3.27)$$

c'est-à-dire $M(X^\alpha)$ est l'ensemble de tous les mots multihomogènes de multidegré $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ sur l'alphabet X .

Remarque 2. Avec les notations précédentes :

i) Le nombre de mots $w \in X^\alpha$ est $m = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)!}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!}$.

ii) $M(X^\alpha) = \{w_1 < w_2 < \cdots < w_{m-1} < w_m\}$ par rapport à l'ordre défini sur X .

Exemple 9. Soit $X = \{a < b < c\}$.

i) Pour $X^\alpha = a^2 b^2$ avec $\alpha = (2, 2)$, on a : $M(a^2 b^2) = \{a^2 b^2, abab, ab^2 a, ba^2 b, baba, b^2 a^2\}$.

ii) Pour $X^\alpha = abc$ avec $\alpha = (1, 1, 1)$, on a : $M(abc) = \{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}$.

Définition 16. Soit $Y = \{y_i, i \in \mathbb{N}\}$ un alphabet totalement ordonné par $> : y_1 > y_2 > \cdots > \cdots$. On définit l'ensemble de tous les mots de poids $|\alpha|$ sur l'alphabet Y par

$$M(Y_{|\alpha|}) = \{w = y_{\alpha_1} y_{\alpha_2} \cdots y_{\alpha_n} \in Y^* \mid (w) = |\alpha|\} \quad (3.28)$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ et $w \in Y^*$ a pour poids $(w) = |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

Remarque 3. Avec les notations précédentes :

i) Le nombre de mots $w \in M(Y_{|\alpha|})$ est $m = 2^{|\alpha|-1}$.

ii) $M(Y_{|\alpha|}) = \{w_1 < w_2 < \cdots < w_{m-1} < w_m\}$ par rapport à l'ordre défini sur Y .

Exemple 10. Soit $Y = \{y_1 > y_2 > y_3\}$.

i) Pour $|\alpha| = 3$, on a : $M(Y_3) = \{y_3, y_2y_1, y_1y_2, y_1^3\}$.

ii) Pour $|\alpha| = 4$, on a : $M(Y_4) = \{y_4, y_3y_1, y_2^2, y_2y_1^2, y_1y_3, y_1y_2y_1, y_1^2y_2, y_1^4\}$.

Avant de donner des exemples, nous allons écrire le Lemme suivant :

Lemme 4. Soient $(S_i)_{i \in I}$ une base dans $\mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle$ et $(P_i)_{i \in I}$ la famille duale telle que $\langle S_i | P_j \rangle = \delta_{ij}$, $\forall (i, j) \in I^2$.

i) Alors, si $(S_i)_{i \in I}$ est multihomogène, il en est de même $(P_i)_{i \in I}$ qui est alors une base de $\mathbb{K}\langle X \rangle$.

ii) Si $(S_i)_{i \in I}$ est triangulaire inférieure par rapport aux mots, alors $(P_i)_{i \in I}$ est triangulaire supérieure.

3.3.1 Exemple : cas de l'algèbre libre et l'algèbre de shuffle

Dans cette partie, X désigne de nouveau un alphabet totalement ordonné par $<$; l'ensemble des mots de Lyndon sur X est noté $\mathcal{Lyn}(X)$ et la factorisation standard [1, 2, 3] de $\ell \in \mathcal{Lyn}(X)$ (avec $|\ell| \geq 2$) est désignée par $\sigma(\ell) = (\ell_1, \ell_2)$ où ℓ_2 est le facteur (de Lyndon) droit propre de ℓ de longueur maximale.

Rappelons aussi que tout mot $w \in X^*$ admet une factorisation en produit décroissant de mots de Lyndon :

$$w = \ell_1^{i_1} \dots \ell_k^{i_k}, \ell_1 > \dots > \ell_k, \quad \ell_1, \dots, \ell_k \in \mathcal{Lyn}(X), \quad k, i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{N}_{\geq 1}.$$

Ces deux factorisations permettent de définir une base $(P_w)_{w \in X^*}$ de l'algèbre libre $\mathbb{Q}\langle X \rangle$ comme suit [1, 2, 3] :

$$P_w = \begin{cases} w & \text{si } |w| = 1_{X^*}; \\ [P_{\ell_1}, P_{\ell_2}] & \text{si } w = \ell \in \mathcal{Lyn}(X) \text{ et } (\ell_1, \ell_2) = \sigma(\ell); \\ P_{\ell_1}^{i_1} \dots P_{\ell_k}^{i_k} & \text{si } w = \ell_1^{i_1} \dots \ell_k^{i_k} \text{ avec } \ell_1 > \dots > \ell_k. \end{cases} \quad (3.29)$$

Cette base est en fait la base de Poincaré-Birkhoff-Witt associée à la base $(P_\ell)_{\ell \in \mathcal{Lyn}(X)}$ de l'algèbre de Lie libre $\mathcal{Lie}_{\mathbb{Q}}\langle X \rangle$. Les éléments primitifs P_ℓ , $\ell \in \mathcal{Lyn}(X)$ sont appelés *crochets standard*. La famille $(P_w)_{w \in X^*}$ est *triangulaire*⁴ :

$$P_w = w + \sum_{\substack{u > w \\ u, w \in X^\alpha}} \langle P_w | u \rangle u \quad (3.30)$$

et *multihomogène* : le support de la famille $(\langle P_w | u \rangle)_u$ est constitué de mots u qui comportent tous le même nombre $|u|_x$ de x et ce pour toute lettre $x \in X$.

4. quand la matrice de passage est décrite en ligne

La multihomogénéité des P_w , $w \in X^*$ autorise la construction d'une base $(S_w)_{w \in X^*}$ de $\mathbb{Q}\langle X \rangle$ satisfaisant $\langle S_u | P_v \rangle = \delta_{uv}$ pour tous $u, v \in X^*$. Cette famille vit dans l'algèbre duale de $(\mathbb{Q}\langle X \rangle, \text{conc}, 1)$, qui est l'algèbre de shuffle $(\mathbb{Q}\langle X \rangle, \sqcup, 1)$. Rappelons la définition du produit de shuffle [1, 2, 3] :

$$\begin{cases} 1_{X^*} \sqcup w &= w \sqcup 1_{X^*} = w, \\ au \sqcup bv &= a(u \sqcup bv) + b(au \sqcup v), \end{cases} \quad (3.31)$$

si $a, b \in X$, $u, v, w \in X^*$, 1_{X^*} : mot vide.

Schützenberger et Reutenauer [1, 2, 3] ont montré que

$$S_w = \begin{cases} w & \text{si } |w| = 1_{X^*}; \\ aS_u & \text{si } w = au \text{ et } w \in \mathcal{Lyn}(X); \\ \frac{S_{\ell_1}^{\sqcup i_1} \sqcup \dots \sqcup S_{\ell_k}^{\sqcup i_k}}{i_1! \dots i_k!} & \text{si } w = \begin{cases} \ell_1^{i_1} \dots \ell_k^{i_k} \\ \ell_1 > \dots > \ell_k \in \mathcal{Lyn}(X) \\ k, i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{N}_{\geq 1}. \end{cases} \end{cases} \quad (3.32)$$

Ces deux familles vérifient les hypothèses du Théorème 6. Par conséquent,

$$\sum_{w \in X^\alpha} S_w \otimes P_w = \prod_{\ell \in \mathcal{Lyn}(X)} e^{S_\ell \otimes P_\ell}. \quad (3.33)$$

Puisque $\sum_{w \in X^\alpha} S_w \otimes P_w = \sum_{w \in X^\alpha} w \otimes w$ est égale à l'identité sur $\mathbb{Q}\langle X \rangle$, on peut aller plus loin et écrire

$$\sum_{w \in X^\alpha} w \otimes w = \prod_{\ell \in \mathcal{Lyn}(X)} e^{S_\ell \otimes P_\ell}. \quad (3.34)$$

Après, Mélançon et Reutenauer [1, 2, 3] prouvent que, pour tout mot $w \in X^*$,

$$P_w = w + \sum_{\substack{v > w \\ v, w \in X^\alpha}} \theta_v v \quad \text{et} \quad S_w = w + \sum_{\substack{u < w \\ u, w \in X^\alpha}} \theta_u u \quad (3.35)$$

$$(3.36)$$

où $\theta_v = \langle P_w | v \rangle$ et $\theta_u = \langle S_w | u \rangle$.

Rappelons que la dualité préserve le multidegré et échange les triangularités des polynômes. Pour cela, on peut construire des matrices triangulaires M et N admettant comme coefficients, les coefficients des mots multihomogènes de multidegré α des polynômes triangulaires, $(P_w)_{w \in X^\alpha}$ et $(S_w)_{w \in X^\alpha}$ dans la base $(w)_{w \in X^\alpha}$ respectivement $u, v \in X^\alpha$,

$$M_{u,v} = \langle P_u | v \rangle \quad \text{et} \quad N_{u,v} = \langle S_u | v \rangle \quad (3.37)$$

$$(3.38)$$

Les matrices triangulaires M et N sont inversibles et vérifient l'identité $M = ({}^tN)^{-1}$.
 En d'autres termes, les éléments des bases $(S_w)_{w \in X^*}$ et $(P_w)_{w \in X^*}$ sont triangulaires inférieurs et triangulaires supérieurs et ils sont multihomogènes de multidegré α . Par conséquent, si \mathcal{D}_X désigne la série diagonale sur X , alors :

– Factorisation de l'identité :

$$\mathcal{D}_X = \sum_{w \in X^\alpha} w \otimes w = \prod_{\ell \in \mathcal{L}_{yn}X} \overset{\curvearrowright}{\prod} e^{S_\ell \otimes P_\ell}. \quad (3.39)$$

$$(3.40)$$

– Factorisation de Schützenberger :

$$\sum_{w \in X^\alpha} S_w \otimes P_w = \prod_{\ell \in \mathcal{L}_{yn}X} \overset{\curvearrowright}{\prod} e^{S_\ell \otimes P_\ell}. \quad (3.41)$$

$$(3.42)$$

Exemple 11. Soit un alphabet $X = \{a, b\}$ avec $a < b$.

Pour cela, calculons la matrice $\langle S_u \mid v \rangle$ pour les mots $u, v \in X^\alpha = a^2b^2$ et on avons $M(a^2b^2) = \{a^2b^2, abab, ab^2a, ba^2b, baba, b^2a^2\}$.

Nous avons successivement :

$$\begin{aligned} S_{a^2b^2} &= a^2b^2 ; \\ S_{abab} &= \frac{S_{ab} \sqcup^2}{2!} \\ &= \frac{1}{2}(ab \sqcup ab) = abab + 2a^2b^2 ; \\ S_{ab^2a} &= ab^2 \sqcup a \\ &= 2a^2b^2 + ab^2a + abab ; \\ S_{ba^2b} &= b \sqcup a^2b \\ &= ba^2b + abab + 2a^2b^2 ; \\ S_{baba} &= b \sqcup ab \sqcup a \\ &= 4a^2b^2 + 3abab + 2ba^2b + 2ab^2a + baba ; \\ S_{b^2a^2} &= \frac{S_b \sqcup^2}{2!} \sqcup \frac{S_a \sqcup^2}{2!} \\ &= b^2a^2 + a^2b^2 + ba^2b + ab^2a + abab + baba. \end{aligned} \quad (3.43)$$

La matrice recherchée $N = (N_{u,v})_{u,v \in X^\alpha} = (\langle S_u | v \rangle)_{u,v \in X^\alpha}$ est donnée par

$$\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccccc} a^2b^2 & abab & ab^2a & ba^2b & baba & b^2a^2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad (3.44)$$

Corollaire 1. Soit $w \in X^*$. Alors

$$P_w = w - \sum_{u > w, |u|=|w|} \langle S_u | w \rangle P_u \quad (3.45)$$

Exemple 12.

$$\begin{aligned} P_{b^2a^2} &= b^2a^2 ; \\ P_{baba} &= baba - P_{b^2a^2} \\ &= baba - b^2a^2 ; \\ P_{ba^2b} &= ba^2b - 2P_{baba} - P_{b^2a^2} \\ &= ba^2b - 2baba + b^2a^2 ; \\ P_{ab^2a} &= ab^2a - 2P_{baba} - P_{b^2a^2} \\ &= ab^2a - 2baba + b^2a^2 ; \\ P_{abab} &= abab - P_{ab^2a} - P_{ba^2b} - 3P_{baba} - P_{b^2a^2} \\ &= abab - ab^2a - ba^2b + baba ; \\ P_{a^2b^2} &= a^2b^2 - 2P_{abab} - 2P_{ab^2a} - 2P_{ba^2b} - 4P_{baba} - P_{b^2a^2} \\ &= a^2b^2 - 2abab + 2baba - b^2a^2. \end{aligned} \quad (3.46)$$

La matrice recherchée $M = ({}^tN)^{-1} = (M_{u,v})_{u,v \in X^\alpha} = (\langle P_u | v \rangle)_{u,v \in X^\alpha}$ est donnée par

$$\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccccc} a^2b^2 & abab & ab^2a & ba^2b & baba & b^2a^2 \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad (3.47)$$

3.3.2 Exemple : cas de l'algèbre libre et l'algèbre de stuffle

Soit $Y = \{y_i\}_{i \geq 1}$ un alphabet totalement ordonné par $> : y_1 > y_2 > \dots > \dots$.

Définition 17. Soient $y_s, y_t \in Y$ et $u, v \in Y^*$, alors nous définissons le produit de stuffle (\sqcup) récursivement comme suit :

$$\begin{cases} 1_{Y^*} \sqcup u &= u \sqcup 1_{Y^*} = u, \\ y_s u \sqcup y_t v &= y_s (u \sqcup y_t v) + y_t (y_s u \sqcup v) + y_{s+t} (u \sqcup v). \end{cases} \quad (3.48)$$

Exemple 13. $y_2 \sqcup y_3 y_1 = y_2 y_3 y_1 + y_3 y_2 y_1 + y_3 y_1 y_2 + y_3 y_3 + y_5 y_1$.

Ce produit (\sqcup) est commutatif, associatif et avec unité (l'élément neutre étant le mot vide : 1_{Y^*}).

Il admet un coproduit dual qui est un morphisme et qui peut être défini comme suit : pour toute lettre $y_s \in Y$, on a :

$$\begin{cases} \Delta_{\sqcup}(1_{Y^*}) &= 1_{Y^*} \otimes 1_{Y^*}, \\ \Delta_{\sqcup}(y_s) &= y_s \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes y_s + \sum_{s_1 + s_2 = s} y_{s_1} \otimes y_{s_2}. \end{cases} \quad (3.49)$$

et $\forall w = y_{s_1} y_{s_2} \dots y_{s_k} \in Y^+$, on a $(w) = s_1 + s_2 + \dots + s_k$.

Rappelons que tout mot de Lyndon $\ell \in \mathcal{Lyn}(Y)$ (avec $|\ell| \geq 2$) admet une factorisation standard $\sigma(\ell) = (\ell_1, \ell_2)$ et tout mot $w \in Y^*$ admet aussi une factorisation en produit décroissant de mots de Lyndon :

$$w = \ell_1^{i_1} \dots \ell_k^{i_k}, \ell_1 > \dots > \ell_k, \ell_1, \dots, \ell_k \in \mathcal{Lyn}(Y), k, i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{N}_{\geq 1}.$$

Ces deux factorisations permettent de définir une base $(\Pi_w)_{w \in Y^*}$ de l'algèbre libre $\mathbb{Q}\langle Y \rangle$ comme suit :

Proposition 5. [13, 4]

Soit \mathcal{D}_Y la série diagonale sur Y . Alors

$$i) \log(\mathcal{D}_Y) = \sum_{w \in Y^+} w \otimes \pi_1(w) = \sum_{w \in Y^+} \pi_1^*(w) \otimes w,$$

ii) pour tout $w \in Y^+$, nous avons,

$$\begin{aligned} w &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \sum_{v_1, v_2, \dots, v_k \in Y^+} \langle w \mid v_1 \sqcup \dots \sqcup v_k \rangle \pi_1(v_1) \pi_1(v_2) \dots \pi_1(v_k) \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \sum_{v_1, v_2, \dots, v_k \in Y^+} \langle w \mid v_1 v_2 \dots v_k \rangle \pi_1^*(v_1) \sqcup \dots \sqcup \pi_1^*(v_k) \end{aligned} \quad (3.50)$$

iii) pour tout $w \in Y^+$, on a :

$$\pi_1(w) = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{v_1, v_2, \dots, v_k \in Y^+} \langle w \mid v_1 \sqcup \dots \sqcup v_k \rangle v_1 v_2 \dots v_k. \quad (3.51)$$

En particulier pour tout $y_s \in Y^+$, on a :

$$\pi_1(y_s) = y_s + \sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{s_1 + s_2 + \dots + s_k = s} y_{s_1} y_{s_2} \dots y_{s_k} \quad (3.52)$$

Lemme 5. [4] Soit $\text{Prim}(\mathcal{H}_{\sqcup}) = \{P \in \mathbb{Q}\langle Y \rangle \mid \Delta_{\sqcup}(P) = P \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes P\}$. Alors :

i) $\text{Prim}(\mathcal{H}_{\sqcup})$ est stable par le crochet de Lie et par combinaisons linéaires.

ii) $Y \subset \text{Prim}(\mathcal{H}_{\sqcup}) \iff \text{Prim}(\mathcal{H}_{\sqcup}) = \mathcal{L}ie_{\mathbb{Q}}\langle Y \rangle$.

Lemme 6. [4] Pour tout $w \in Y^+$, on a $\Delta_{\sqcup}(\pi_1(w)) = \pi_1(w) \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes \pi_1(w)$.

Remarquons que Δ_{\sqcup} et Δ_{\sqcup} sont des morphismes pour la concaténation (par définition). Nous notons ici que le produit de concaténation est désigné par *conc* et Δ_{conc} son coproduit associé (par dualité).

Par conséquent, avec la counité \mathbf{e} définie par

$$\forall P \in \mathbb{Q}\langle Y \rangle, \quad \mathbf{e}(P) = \langle P \mid 1_{Y^*} \rangle, \quad (3.53)$$

on obtient deux paires d'algèbres de Hopf :

$$\mathcal{H}_{\sqcup} = (\mathbb{Q}\langle Y \rangle, \text{conc}, \mathbb{1}_{Y^*}, \Delta_{\sqcup}, \mathbf{e}, a_{\sqcup}) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_{\sqcup}^{\vee} = (\mathbb{Q}\langle Y \rangle, \sqcup, \mathbb{1}_{Y^*}, \Delta_{\text{conc}}, \mathbf{e}, a_{\sqcup}), \quad (3.54)$$

$$\mathcal{H}_{\sqcup} = (\mathbb{Q}\langle Y \rangle, \text{conc}, \mathbb{1}_{Y^*}, \Delta_{\sqcup}, \mathbf{e}, a_{\sqcup}) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_{\sqcup}^{\vee} = (\mathbb{Q}\langle Y \rangle, \sqcup, \mathbb{1}_{Y^*}, \Delta_{\text{conc}}, \mathbf{e}, a_{\sqcup}) \quad (3.55)$$

Par le Théorème 4 de Cartier-Quillen-Milnor-Moore [4], l'algèbre de Hopf cocommutative graduée connexe \mathcal{H}_{\sqcup} est isomorphe à l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie et ses éléments primitifs notés $\text{Prim}(\mathcal{H}_{\sqcup})$ sont égal à $\mathcal{L}ie_{\mathbb{Q}}\langle Y \rangle$:

$$\mathcal{H}_{\sqcup} \cong \mathcal{U}(\mathcal{L}ie_{\mathbb{Q}}\langle Y \rangle) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_{\sqcup}^{\vee} \cong \mathcal{U}(\mathcal{L}ie_{\mathbb{Q}}\langle Y \rangle)^{\vee}. \quad (3.56)$$

Par conséquent, nous introduisons le nouvel alphabet :

$$\bar{Y} = \{\bar{y}\}_{y \in Y} = \{\pi_1(y)\}_{y \in Y} \quad (3.57)$$

et on a le Lemme suivant :

Lemme 7. [4] Soit $\bar{Prim}(\mathcal{H}_{\sqcup}) = \{P \in \mathbb{Q}\langle \bar{Y} \rangle \mid \Delta_{\sqcup}(P) = P \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes P\}$.
Alors $\bar{Prim}(\mathcal{H}_{\sqcup}) \cong \mathcal{L}ie_{\mathbb{Q}}\langle \bar{Y} \rangle$.

de plus

$$\mathcal{H}_{\sqcup} \cong \mathcal{U}(Prim(\mathcal{H}_{\sqcup})) \cong \mathcal{U}(\mathcal{L}ie_{\mathbb{Q}}\langle \bar{Y} \rangle), \quad (3.58)$$

$$\mathcal{H}_{\sqcup}^{\vee} \cong \mathcal{U}(Prim(\mathcal{H}_{\sqcup}))^{\vee} \cong \mathcal{U}(\mathcal{L}ie_{\mathbb{Q}}\langle \bar{Y} \rangle)^{\vee}. \quad (3.59)$$

La base de PBW-Lyndon $(\Pi_w)_{w \in Y^*}$ pour $\mathcal{U}(Prim(\mathcal{H}_{\sqcup}))$ est construite récursivement comme suit [13, 4] :

$$\begin{cases} \Pi_y &= \pi_1(y) & \text{si } y \in Y, \\ \Pi_{\ell} &= [\Pi_{\ell_1}, \Pi_{\ell_2}] & \text{si } \ell \in \mathcal{L}yn(Y), \text{ et } \sigma(\ell) = (\ell_1, \ell_2), \\ \Pi_w &= \Pi_{\ell_1}^{i_1} \dots \Pi_{\ell_k}^{i_k} & \text{si } w = \ell_1^{i_1} \dots \ell_k^{i_k}, \ell_1 > \dots > \ell_k, \ell_1, \dots, \ell_k \in \mathcal{L}yn(Y), \end{cases}$$

La multihomog enit e des Π_w , $w \in Y^*$ autorise la construction d'une base $(\Sigma_w)_{w \in Y^*}$ de $\mathbb{Q}\langle Y \rangle$ satisfaisant $\langle \Sigma_u \mid \Pi_v \rangle = \delta_{uv}$ pour tous $u, v \in Y^*$. Cette famille vit dans l'algèbre duale de $(\mathbb{Q}\langle Y \rangle, \text{conc}, \mathbb{1}_{Y^*})$, qui est l'algèbre de stuffle $(\mathbb{Q}\langle Y \rangle, \sqcup, \mathbb{1}_{Y^*})$.

La base duale $(\Sigma_w)_{w \in Y^*}$ pour $\mathcal{U}(Prim(\mathcal{H}_{\sqcup}))^{\vee}$ construite récursivement comme suit [13, 4] :

$$\begin{cases} \Sigma_y &= y & \text{si } y \in Y, \\ \Sigma_{\ell} &= \sum_{\substack{\{s'_1, \dots, s'_i\} \subset \{s_1, \dots, s_k\}, \ell_1 \geq \dots \geq \ell_n \in \mathcal{L}yn(Y) \\ (y_{s_1} \dots y_{s_k})^* \stackrel{*}{=} (y_{s'_1}, \dots, y_{s'_n}, \ell_1, \dots, \ell_n)}} \frac{1}{i!} y_{s'_1 + \dots + s'_i} \Sigma_{\ell_1 \dots \ell_n} & \text{si } \ell = y_{s_1} \dots y_{s_k} \in \mathcal{L}yn(Y), \\ \Sigma_w &= \frac{\Sigma_{\ell_1}^{\sqcup i_1} \sqcup \dots \sqcup \Sigma_{\ell_k}^{\sqcup i_k}}{i_1! \dots i_k!} & \text{si } w = \ell_1^{i_1} \dots \ell_k^{i_k}, \ell_1 > \dots > \ell_k, \end{cases}$$

Nous obtenons la factorisation de Schützenberger :

$$\mathcal{D}_Y = \prod_{\ell \in \mathcal{L}yn(Y)}^{\searrow} e^{\Sigma_{\ell} \otimes \Pi_{\ell}} \in \mathcal{H}_{\sqcup}^{\vee} \hat{\otimes} \mathcal{H}_{\sqcup}. \quad (3.60)$$

Exemple 14. Pour $|\alpha| = 4$, on a : $M(Y_4) = \{y_4, y_3y_1, y_2^2, y_2y_1^2, y_1y_3, y_1y_2y_1, y_1^2y_2, y_1^4\}$.

i) La matrice recherchée $N = (\langle \Pi_u \mid v \rangle)_{u, v \in M(Y_4)}$ est donnée par

$$\begin{matrix} & y_4 & y_3y_1 & y_2^2 & y_2y_1^2 & y_1y_3 & y_1y_2y_1 & y_1^2y_2 & y_1^4 \\ \Pi_{y_4} = & \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \end{matrix}, \quad (3.61)$$

ii) La matrice recherchée $M = ({}^tN)^{-1} = (\Sigma_{u,v})_{u,v \in M(Y_4)} = (\langle \Sigma_u \mid v \rangle)_{u,v \in M(Y_4)}$ est donnée par

$$\begin{aligned} \Sigma_{y_4} &= \\ \Sigma_{y_3y_1} &= \\ \Sigma_{y_2^2} &= \\ \Sigma_{y_2y_1^2} &= \\ \Sigma_{y_1y_3} &= \\ \Sigma_{y_1y_2y_1} &= \\ \Sigma_{y_1^2y_2} &= \\ \Sigma_{y_1^4} &= \end{aligned} \begin{pmatrix} y_4 & y_3y_1 & y_2^2 & y_2y_1^2 & y_1y_3 & y_1y_2y_1 & y_1^2y_2 & y_1^4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.62)$$

3.3.3 Exemple : cas de l'algèbre libre et l'algèbre de q -stuffle

Soient $Y = \{y_i\}_{i \geq 1}$ un alphabet totalement ordonné par $>$ et $q \in \mathbb{N}$.

Définition 18. Soient $y_s, y_t \in Y$ et $u, v \in Y^*$, alors nous définissons le produit de q -stuffle (\sqcup_q) récursivement comme suit :

$$\begin{cases} 1_{Y^*} \sqcup_q u &= u \sqcup_q 1_{Y^*} = u, \\ y_s u \sqcup_q y_t v &= y_s (u \sqcup_q y_t v) + y_t (y_s u \sqcup_q v) + q y_{s+t} (u \sqcup_q v). \end{cases} \quad (3.63)$$

Exemple 15. $y_2 \sqcup_q y_3 y_1 = y_2 y_3 y_1 + y_3 y_2 y_1 + y_3 y_1 y_2 + q(y_3 y_3 + y_5 y_1)$.

Ce produit (\sqcup) est commutatif, associatif et avec unité (l'élément neutre étant le mot vide : 1_{Y^*}).

Il admet un coproduit dual qui est un morphisme et qui peut être défini comme suit : pour toute lettre $y_s \in Y$, on a :

$$\begin{cases} \Delta_{\sqcup_q}(1_{Y^*}) &= 1_{Y^*} \otimes 1_{Y^*}, \\ \Delta_{\sqcup_q}(y_s) &= y_s \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes y_s + q \sum_{s_1+s_2=s} y_{s_1} \otimes y_{s_2}. \end{cases} \quad (3.64)$$

et $\forall w = y_{s_1} y_{s_2} \cdots y_{s_k} \in Y^+$, on a $\mathfrak{a}(w) = s_1 + s_2 + \cdots + s_k$.

Rappelons que tout mot de Lyndon $\ell \in \mathcal{Lyn}(Y)$ (avec $|\ell| \geq 2$) admet une factorisation standard $\sigma(\ell) = (\ell_1, \ell_2)$ et tout mot $w \in Y^*$ admet aussi une factorisation unique en produit décroissant de mots de Lyndon :

$$w = \ell_1^{i_1} \cdots \ell_k^{i_k}, \quad \ell_1 > \cdots > \ell_k, \quad \ell_1, \dots, \ell_k \in \mathcal{Lyn}(Y), \quad k, i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{N}_{\geq 1}.$$

Ces deux factorisations permettent de définir une base $(\Pi_w^{(q)})_{w \in Y^*}$ de l'algèbre libre $\mathbb{Q}[q]\langle Y \rangle$ comme suit :

Proposition 6. [13, 4] Soit \mathcal{D}_Y la série diagonale sur Y . Alors

$$i) \log(\mathcal{D}_Y) = \sum_{w \in Y^+} w \otimes \pi_1(w) = \sum_{w \in Y^+} \pi_1^*(w) \otimes w,$$

ii) pour tout $w \in Y^+$, nous avons,

$$\begin{aligned} w &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \sum_{v_1, v_2, \dots, v_k \in Y^+} \langle w \mid v_1 \sqcup_q \dots \sqcup_q v_k \rangle \pi_1(v_1) \pi_1(v_2) \dots \pi_1(v_k) \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \sum_{v_1, v_2, \dots, v_k \in Y^+} \langle w \mid v_1 v_2 \dots v_k \rangle \pi_1^*(v_1) \sqcup_q \dots \sqcup_q \pi_1^*(v_k) \end{aligned} \quad (3.65)$$

iii) pour tout $w \in Y^+$, on a :

$$\pi_1(w) = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{v_1, v_2, \dots, v_k \in Y^+} \langle w \mid v_1 \sqcup_q \dots \sqcup_q v_k \rangle v_1 v_2 \dots v_k. \quad (3.66)$$

En particulier pour tout $y_s \in Y^+$, on a :

$$\pi_1(y_s) = y_s + \sum_{k \geq 2} \frac{(-q)^{k-1}}{k} \sum_{s_1 + s_2 + \dots + s_k = s} y_{s_1} y_{s_2} \dots y_{s_k} \quad (3.67)$$

Lemme 8. [4] Soit $\text{Prim}(\mathcal{H}_{\sqcup_q}) = \{P \in \mathbb{Q}[q]\langle Y \rangle \mid \Delta_{\sqcup_q}(P) = P \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes P\}$.

Alors :

i) $\text{Prim}(\mathcal{H}_{\sqcup_q})$ est stable par le crochet de Lie et par combinaisons linéaires.

ii) $Y \subset \text{Prim}(\mathcal{H}_{\sqcup_q}) \iff \text{Prim}(\mathcal{H}_{\sqcup_q}) = \text{Lie}_{\mathbb{Q}[q]}\langle Y \rangle$.

Lemme 9. [4] Pour tout $w \in Y^+$, on a $\Delta_{\sqcup_q}(\pi_1(w)) = \pi_1(w) \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes \pi_1(w)$.

Remarquons que Δ_{\sqcup_q} et Δ_{\sqcup} sont des morphismes pour la concaténation. Nous notons ici que le produit de concaténation est désigné par *conc* et Δ_{conc} son coproduit associé par dualité.

Par conséquent, avec la counité \mathbf{e} définie par

$$\forall P \in \mathbb{Q}[q]\langle Y \rangle, \quad \mathbf{e}(P) = \langle P \mid 1_{Y^*} \rangle, \quad (3.68)$$

on obtient deux paires d'algèbres de Hopf :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\sqcup} &= (\mathbb{Q}[q]\langle Y \rangle, \text{conc}, \mathbb{1}_{Y^*}, \Delta_{\sqcup}, \mathbf{e}, a_{\sqcup}) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_{\sqcup}^{\vee} = (\mathbb{Q}[q]\langle Y \rangle, \sqcup, \mathbb{1}_{Y^*}, \Delta_{\text{conc}}, \mathbf{e}, a_{\sqcup}) \quad (3.69) \\ \mathcal{H}_{\sqcup_q} &= (\mathbb{Q}[q]\langle Y \rangle, \text{conc}, \mathbb{1}_{Y^*}, \Delta_{\sqcup_q}, \mathbf{e}, a_{\sqcup_q}) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_{\sqcup_q}^{\vee} = (\mathbb{Q}[q]\langle Y \rangle, \sqcup_q, \mathbb{1}_{Y^*}, \Delta_{\text{conc}}, \mathbf{e}, a_{\sqcup_q}) \quad (3.70) \end{aligned}$$

Par le Théorème de Cartier-Quillen-Milnor-Moore [4], l'algèbre de Hopf cocommutative graduée connexe \mathcal{H}_{\sqcup_q} est isomorphe à l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie et ses éléments primitifs notés $\text{Prim}(\mathcal{H}_{\sqcup_q})$ sont égal à $\mathcal{L}ie_{\mathbb{Q}[q]} \langle Y \rangle$:

$$\mathcal{H}_{\sqcup} \cong \mathcal{U}(\mathcal{L}ie_{\mathbb{Q}[q]} \langle Y \rangle) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_{\sqcup}^{\vee} \cong \mathcal{U}(\mathcal{L}ie_{\mathbb{Q}[q]} \langle Y \rangle)^{\vee}. \quad (3.71)$$

Par conséquent, nous introduisons le nouvel alphabet :

$$\bar{Y} = \{\bar{y}\}_{y \in Y} = \{\pi_1(y)\}_{y \in Y} \quad (3.72)$$

et on a le Lemme suivant :

Lemme 10. [4] *Soit $\bar{\text{Prim}}(\mathcal{H}_{\sqcup_q}) = \{P \in \mathbb{Q}[q] \langle \bar{Y} \rangle \mid \Delta_{\sqcup_q}(P) = P \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes P\}$. Alors $\bar{\text{Prim}}(\mathcal{H}_{\sqcup_q}) \cong \mathcal{L}ie_{\mathbb{Q}[q]} \langle \bar{Y} \rangle$.*

de plus

$$\mathcal{H}_{\sqcup} \cong \mathcal{U}(\text{Prim}(\mathcal{H}_{\sqcup_q})) \cong \mathcal{U}(\mathcal{L}ie_{\mathbb{Q}[q]} \langle \bar{Y} \rangle), \quad (3.73)$$

$$\mathcal{H}_{\sqcup}^{\vee} \cong \mathcal{U}(\text{Prim}(\mathcal{H}_{\sqcup_q}))^{\vee} \cong \mathcal{U}(\mathcal{L}ie_{\mathbb{Q}[q]} \langle \bar{Y} \rangle)^{\vee}. \quad (3.74)$$

La base de PBW-Lyndon $(\Pi_w^{(q)})_{w \in Y^*}$ pour $\mathcal{U}(\text{Prim}(\mathcal{H}_{\sqcup_q}))$ est construite récursivement comme suit [13, 4] :

$$\begin{cases} \Pi_y^{(q)} &= \pi_1(y) & \text{si } y \in Y, \\ \Pi_{\ell}^{(q)} &= [\Pi_{\ell_1}^{(q)}, \Pi_{\ell_2}^{(q)}] & \text{si } \ell \in \mathcal{L}yn(Y), \text{ et } \sigma(\ell) = (\ell_1, \ell_2), \\ \Pi_w^{(q)} &= (\Pi_{\ell_1}^{(q)})^{i_1} \dots (\Pi_{\ell_k}^{(q)})^{i_k} & \text{si } w = \ell_1^{i_1} \dots \ell_k^{i_k}, \ell_1 > \dots > \ell_k, \ell_1, \dots, \ell_k \in \mathcal{L}yn(Y), \end{cases}$$

La multihomogénéité des $\Pi_w^{(q)}$, $w \in Y^*$ autorise la construction d'une base $(\Sigma_w^{(q)})_{w \in Y^*}$ de $\mathbb{Q}[q] \langle Y \rangle$ satisfaisant $\langle \Sigma_u^{(q)} \mid \Pi_v^{(q)} \rangle = \delta_{uv}$ pour tous $u, v \in Y^*$. Cette famille vit dans l'algèbre duale de $(\mathbb{Q}[q] \langle Y \rangle, \text{conc}, \mathbb{1}_{Y^*})$, qui est l'algèbre de q -stuffle $(\mathbb{Q}[q] \langle Y \rangle, \sqcup_q, \mathbb{1}_{Y^*})$.

La base duale de la base de PBW-Lyndon $(\Sigma_w^{(q)})_{w \in Y^*}$ pour $\mathcal{U}(\text{Prim}(\mathcal{H}_{\sqcup}))^{\vee}$ est construite récursivement comme suit [13, 4] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_y^{(q)} = y \quad \text{si } y \in Y, \\ \Sigma_{\ell}^{(q)} = \sum_{\substack{\{s'_1, \dots, s'_i\} \subset \{s_1, \dots, s_k\}, \ell_1 \geq \dots \geq \ell_n \in \mathcal{L}yn(Y) \\ (y_{s_1} \dots y_{s_k})^* \otimes (y_{s'_1}, \dots, y_{s'_n}, \ell_1, \dots, \ell_n)}} \frac{q^{i-1}}{i!} y_{s'_1 + \dots + s'_i} \Sigma_{\ell_1 \dots \ell_n}^{(q)} \\ \text{si } \ell = y_{s_1} \dots y_{s_k} \in \mathcal{L}yn(Y), \\ \Sigma_w^{(q)} = \frac{(\Sigma_{\ell_1}^{(q)})^{\sqcup_q i_1} \sqcup_q \dots \sqcup_q (\Sigma_{\ell_k}^{(q)})^{\sqcup_q i_k}}{i_1! \dots i_k!} \\ \text{si } w = \ell_1^{i_1} \dots \ell_k^{i_k}, \ell_1 > \dots > \ell_k, \end{array} \right.$$

Nous obtenons la factorisation de Schützenberger :

$$\mathcal{D}_Y = \prod_{\ell \in \mathcal{L}yn(Y)}^{\searrow} e^{\Sigma_{\ell}^{(q)} \otimes \Pi_{\ell}^{(q)}} \in \mathcal{H}_{\sqcup_q}^{\vee} \hat{\otimes} \mathcal{H}_{\sqcup_q}. \quad (3.75)$$

Exemple 16. .

$$\Pi_{y_1}^{(q)} = y_1.$$

$$\Pi_{y_2}^{(q)} = y_2 - \frac{q}{2}y_1^2,$$

$$\Pi_{y_2y_1}^{(q)} = y_2y_1 - y_1y_2,$$

$$\begin{aligned} \Pi_{y_3y_1y_2}^{(q)} &= y_3y_1y_2 - \frac{q}{2}y_3y_1^3 - qy_2y_1^2y_2 + \frac{q^2}{4}y_2y_1^4 - y_1y_3y_2 + \frac{q}{2}y_1y_3y_1^2 + \frac{q}{2}y_1^2y_2^2 - \frac{q^2}{2}y_1^2y_2y_1^2 - \\ & y_2y_3y_1 + \frac{q}{2}y_2^2y_1^2 + y_2y_1y_3 + \frac{q}{2}y_1^2y_3y_1 - \frac{q}{2}y_1^3y_3 + \frac{q^2}{4}y_1^4y_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{y_3y_1y_2y_1}^{(q)} &= y_3y_1y_2y_1 - y_3y_1^2y_2 - \frac{q}{2}y_2y_1^2y_2y_1 - y_1y_3y_2y_1 + y_1y_3y_1y_2 + \frac{q}{2}y_1^2y_2^2y_1 - y_2y_1y_3y_1 - \\ & \frac{q}{2}y_1^2y_2y_1y_2 + \frac{q}{2}y_2y_1y_2y_1^2 + y_2y_1^2y_3 + y_1y_2y_3y_1 - \frac{q}{2}y_1y_2^2y_1^2 - y_1y_2y_1y_3 + \frac{q}{2}y_1y_2y_1^2y_2. \end{aligned}$$

$$\Sigma_{y_1}^{(q)} = y_1,$$

$$\Sigma_{y_2}^{(q)} = y_2,$$

$$\Sigma_{y_2y_1}^{(q)} = y_2y_1 + \frac{q}{2}y_3,$$

$$\Sigma_{y_3y_2y_1}^{(q)} = y_3y_2y_1 + y_3y_1y_2 + qy_3^2 + \frac{q}{2}y_4y_2 + \frac{q^3}{3}y_6 + \frac{q}{2}y_5y_1,$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{y_3y_1y_2y_1}^{(q)} &= y_3y_1y_2y_1 + 2y_3y_2y_1^2 + qy_3y_2^2 + \frac{3q}{2}y_3^2y_1 + \frac{q}{2}y_3y_1y_3 + \frac{q^2}{2}y_3y_4 + \frac{q}{2}y_4y_2y_1 + \frac{q^2}{4}y_4y_3 + \\ & qy_5y_1^2 + \frac{q^2}{2}y_5y_2 + \frac{q^2}{2}y_6y_1 + \frac{q^3}{8}y_7. \end{aligned}$$

Chapitre 4

q –déformation

Résumé : Le but de ce chapitre est de construire une paire de bases en dualité. Ce chapitre contient trois volets principaux : Dans le premier volet, nous donnons une construction des éléments de \mathfrak{S}_{nm} du produit encouronné de 2 groupes symétriques : $(\mathfrak{S}_n)_m$ (Définition 23), dans un second volet, nous construisons une base q –analogue de la base duale de la base de Poincaré-Birkhoff-Witt-Lyndon $(S_w^{(q)})_{w \in X^*}$ (4.50) et dans le troisième volet, la construction d’une base q –analogue de la base de Poincaré-Birkhoff-Witt-Lyndon $(P_w^{(q)})_{w \in X^*}$ (4.61) telle que $\langle S_u^{(q)} | P_v^{(q)} \rangle = \delta_{uv}, \forall u, v \in X^*$.

Dans bien des cas, la construction d’une paire de bases en dualité passe par celle d’une base duale à partir d’une base dont on connaît certaines propriétés. Nous nous proposons donc d’étudier les conditions que doit satisfaire la base dont nous partons de sorte que la base duale permette l’écriture des factorisations. Nous illustrerons ces idées sur des exemples combinatoires (relatifs à l’algèbre de q –shuffle).

Les principaux résultats de ce chapitre sont :

1. le Théorème 7 donne une généralisation du Théorème 8 [37, 38].
2. le Théorème 9 donne une généralisation des éléments $\ell^{\sqcup_q k}$ (avec $\ell \in \mathcal{Lyn}(X)$, $q \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$).
3. le Théorème 10 donne une construction récursive des éléments $S_w^{(q)}$, $w \in X^*$.

Ces différents résultats ont été présentés aux séminaires CALIN et aux journées du groupe de travail Combinatoire et Algèbrique 2013 à l’Université Paris-Est (Marne-la-vallée).

4.1 Construction des éléments de \mathfrak{S}_{nm} du produit en-couronne de 2 groupes symétriques : $(\mathfrak{S}_n)_m$ (avec $n, m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$)

Résumé : Dans cette partie, nous présentons une généralisation du Théorème 8 [37, 38]. Les statistiques de permutation *Inv* et *Crois* sont fréquemment utilisées pour obtenir des q -analogues de résultats classiques. En général, un q -analogue d'un objet a la propriété que par la spécialisation $q = 1$, on récupère l'objet original. Bien sûr, il y a beaucoup de q -analogues de n'importe quel objet donné, et il n'y a pas de critères objectifs pour avoir ce qui est considéré être un bon q -analogue. Ici, nous définissons quelques q -analogues couramment utilisés dans cette thèse.

4.1.1 Définitions

Définition 19. Soit $n, m \in \mathbb{N}$.

- On pose $\{m, m + 1, m + 2, \dots, n\} = \llbracket m, n \rrbracket$ si $n \geq m$.
- Le q -analogue de n , noté $[n]_q$, est défini par

$$[n]_q = \sum_{0 \leq i \leq n-1} q^i. \quad (4.1)$$

- Le q -analogue de $n!$, noté $[n]_q!$, est défini par

$$[n]_q! = \prod_{1 \leq i \leq n} [i]_q = [1]_q [2]_q \cdots [n]_q. \quad (4.2)$$

- Le q -analogue de la fonction exponentielle, noté e_q^z , est défini par

$$e_q^z = \sum_{i \geq 0} \frac{z^i}{[i]_q!}. \quad (4.3)$$

4.1.2 Le groupe symétrique

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. On note $\llbracket 1, n \rrbracket = \{1, 2, \dots, n\}$. On rappelle qu'une permutation d'ordre n est une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers $\llbracket 1, n \rrbracket$. Traditionnellement, on présente une permutation σ sur deux lignes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(i) & \dots & \sigma(j) & \dots & \sigma(n) \end{bmatrix}$$

Par convention, nous utilisons plutôt l'écriture en une seule ligne :

$$\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(i)\cdots\sigma(j)\cdots\sigma(n). \quad (4.4)$$

Par exemple, la permutation

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

s'écrit tout simplement $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\sigma(4)\sigma(5) = 23451$.

1. On note alors \mathfrak{S}_n le groupe des permutations d'ordre n (ou groupe symétrique d'ordre n). Les éléments de \mathfrak{S}_n sont appelés permutations. Le cardinal de \mathfrak{S}_n est $n!$.

2. Pour tous i, j éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket = \{1, 2, \dots, n\}$ tels que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$; le couple (i, j) est appelé une inversion de la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

3. L'ensemble des inversions de la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, noté $\mathcal{S}(\sigma)$, est défini par

$$\mathcal{S}(\sigma) = \{(i, j) \mid i < j \quad \text{et} \quad \sigma(i) > \sigma(j)\}. \quad (4.5)$$

4. Le nombre d'inversions de la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, noté $Inv(\sigma)$, est défini par

$$Inv(\sigma) = \#\mathcal{S}(\sigma) = \#\{(i, j) \mid i < j \quad \text{et} \quad \sigma(i) > \sigma(j)\}. \quad (4.6)$$

Exemple 17.

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \tau_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \tau_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$Inv(\tau_1) = 4$ car l'ensemble des inversions est $\mathcal{S}(\tau_1) = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\}$,

$Inv(\tau_2) = 3$ car l'ensemble des inversions est $\mathcal{S}(\tau_2) = \{(1, 2), (1, 3), (4, 5)\}$ et

$Inv(\tau_3) = 1$ car l'ensemble des inversions est $\mathcal{S}(\tau_3) = \{(2, 3)\}$.

Définition 20. On définit un croisement comme une intersection entre deux arcs produite par une inversion : Elle est construite de la manière suivante : on associe un sommet à chaque entier de 1 à n et on les place sur deux lignes, par ordre croissant, de gauche à droite. On dessine une droite de sommet i au sommet j si et seulement si $\sigma(i) = j$.

Le nombre de croisements de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est évidemment égal au nombre d'inversions de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, noté $Crois(\sigma) = Inv(\sigma)$.

Exemple 18. *i)*

on a : $Crois(23451) = 4$ car l'ensemble des intersections est $\mathcal{S}(23451) = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\}$

.

ii) on a : $Crois(31254) = 3$ car l'ensemble des intersections est $\mathcal{S}(31254) = \{(1, 2), (1, 3), (4, 5)\}$.

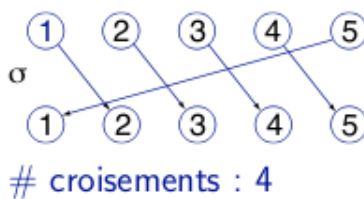


FIGURE 4.1 – Inversions et Croisements

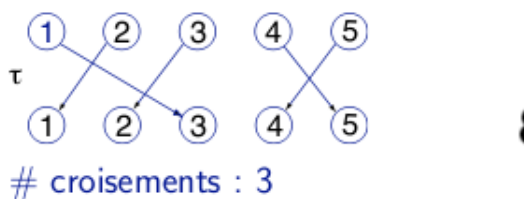


FIGURE 4.2 – Inversions et Croisements

Définition 21. Soient $i, j, m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Alors, nous définissons $\mathcal{T}_1(i, j)$ comme suit :

$$\mathcal{T}_1(i, j) = \{(I, J) \mid I \in \llbracket (i-1)m+1, im \rrbracket \quad \text{et} \quad J \in \llbracket (j-1)m+1, jm \rrbracket\} \quad (4.7)$$

où $\{(i-1)m+1, (i-1)m+2, \dots, im\} = \llbracket (i-1)m+1, im \rrbracket$.

Avec la notation précédente, on peut écrire la définition suivante :

Définition 22. Soient $i, j, m, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Nous définissons $\mathcal{T}_2(\sigma)$ comme suit :

$$\mathcal{T}_2(\sigma) = \bigcup_{(i,j) \in \mathcal{S}(\sigma)} \mathcal{T}_1(i, j) \quad \text{avec} \quad \sigma \in \mathfrak{S}_n \quad (4.8)$$

Avec la notation précédente, on peut écrire la remarque suivante :

Remarque 4. Soient $i, j, m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Alors

- 1) $\#\mathcal{T}_1(i, j) = m^2$ avec $(i, j) \in \mathcal{S}(\sigma)$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
- 2) $\#\mathcal{T}_2(\sigma) = m^2 M$ avec $M = \#\mathcal{S}(\sigma)$.

Exemple 19. Soient $n = 3, m = 2$ et $\sigma = 231 \in \mathfrak{S}_3$. On a :

$\mathcal{S}(\sigma) = \mathcal{S}(231) = \{(1, 3), (2, 3)\}$ avec $M = \#\mathcal{S}(\sigma) = 2$. Donc :

–) Pour $(i, j) = (1, 3)$, on a : $\mathcal{T}_1(1, 3) = \{(I, J) \mid I \in \llbracket 1, 2 \rrbracket \text{ et } J \in \llbracket 5, 6 \rrbracket\}$ et $\mathcal{T}_1(1, 3) = \{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6)\}$ avec $\#\mathcal{T}_1(1, 3) = m^2 = 4$.

–) Pour $(i, j) = (2, 3)$, on a : $\mathcal{T}_1(2, 3) = \{(I, J) \mid I \in \llbracket 3, 4 \rrbracket \text{ et } J \in \llbracket 5, 6 \rrbracket\}$ et
 $\mathcal{T}_1(2, 3) = \{(3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6)\}$ avec $\#\mathcal{T}_1(2, 3) = m^2 = 4$.

Par conséquent :

$$\mathcal{T}_2(\sigma) = \mathcal{T}_2(231) = \bigsqcup_{(i,j) \in \mathcal{S}(\sigma)} \mathcal{T}_1(i, j) = \bigsqcup_{(i,j) \in \mathcal{S}(231)} \mathcal{T}_1(i, j) = \mathcal{T}_1(1, 3) \bigsqcup \mathcal{T}_1(2, 3).$$

$$\mathcal{T}_2(\sigma) = \mathcal{T}_2(231) = \{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6)\} \text{ avec } \#\mathcal{T}_2(231) = m^2 M = 8.$$

Définition 23. Soient $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Alors, les éléments de \mathfrak{S}_{nm} du produit encouronne de 2 groupes symétriques : $(\mathfrak{S}_n)_m$ peuvent s'écrire sous la forme :

$$(\mathfrak{S}_n)_m = \{\tau = \tau(1)\tau(2) \cdots \tau(nm) \in \mathfrak{S}_{nm} \mid \tau(mp-m+k) = m\sigma(p)-m+k, p \in \llbracket 1, n \rrbracket, k \in \llbracket 1, m \rrbracket\}. \quad (4.9)$$

où

$$\sigma = \sigma(1)\sigma(2) \cdots \sigma(r) \cdots \sigma(s) \cdots \sigma(n) \in \mathfrak{S}_n.$$

Autrement dit :

$$(\mathfrak{S}_n)_m = \{\tau \in \mathfrak{S}_{nm} \mid \mathcal{S}(\tau) = \mathcal{T}_2(\sigma) \quad \text{et} \quad \sigma \in \mathfrak{S}_n\}. \quad (4.10)$$

Exemple 20. Pour $m = 2$ et $n = 3$ on a : $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ et $\tau \in (\mathfrak{S}_3)_2$. Donc

$\sigma \in \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$ et $\tau \in \{123456, 125643, 341256, 345612, 561234, 563412\}$
 avec $\tau \in \mathfrak{S}_6$. Par conséquent :

$$\mathcal{S}(345612) = \mathcal{T}_2(231) = \bigsqcup_{(i,j) \in \mathcal{S}(\sigma)} \mathcal{T}_1(i, j) = \bigsqcup_{(i,j) \in \mathcal{S}(231)} \mathcal{T}_1(i, j) = \mathcal{T}_1(1, 3) \bigsqcup \mathcal{T}_1(2, 3).$$

$$\mathcal{S}(345612) = \mathcal{T}_2(231) = \{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6)\}.$$

Par conséquent, nous pouvons écrire le Théorème suivant :

Théorème 7. Soient $n, m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Alors

$$\sum_{\tau \in (\mathfrak{S}_n)_m} q^{Inv(\tau)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{Inv(\sigma)m^2} = [1]_{q^{m^2}} \cdots [n]_{q^{m^2}} = [n]_{q^{m^2}}! \quad (4.11)$$

Pour la preuve de ce Théorème, nous allons écrire la Proposition et le Théorème suivants :

Proposition 7. Soient $n, m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Alors

$$(\mathfrak{S}_n)_m = \{\tau \in \mathfrak{S}_{nm} \mid \mathcal{S}(\tau) = \mathcal{T}_2(\sigma) \quad , \quad Inv(\tau) = m^2 Inv(\sigma) \quad \text{et} \quad \sigma \in \mathfrak{S}_n\}. \quad (4.12)$$

Preuve : Soient $i, j, m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. A partir de la Remarque 4, nous pouvons écrire que : pour toute inversion (i, j) de la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a $\#\mathcal{T}_1(i, j) = m^2$. Par conséquent : $Inv(\tau) = \#\mathcal{S}(\tau) = \#\mathcal{T}_2(\sigma) = m^2 Inv(\sigma)$ pour $\tau \in (\mathfrak{S}_n)_m$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

□

Théorème 8. [37, 38] Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Alors

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{Inv(\sigma)} = [1]_q [2]_q \cdots [n]_q = [n]_q! \quad (4.13)$$

Comme $Inv(\sigma) = Crois(\sigma)$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on peut réécrire (4.13) :

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{Crois(\sigma)} = [1]_q [2]_q \cdots [n]_q = [n]_q! \quad (4.14)$$

Comme observé dans [37, 38] : comme d'habitude en q -théorie, le coefficient q -multinomial est donné par

$$\frac{[c_1 + c_2 + \cdots + c_n]_q!}{[c_1]_q! [c_2]_q! \cdots [c_n]_q!}. \quad (4.15)$$

Et ici, on a la spécialisation $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 1$. Par conséquent :

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{Inv(\sigma)} = \frac{[c_1 + c_2 + \cdots + c_n]_q!}{[c_1]_q! [c_2]_q! \cdots [c_n]_q!} = [n]_q!.$$

Preuve du Théorème 7 : Elle se fait par statistique :

A partir de la définition 23 et la Proposition 7, nous pouvons écrire que :

$$(\mathfrak{S}_n)_m = \{\tau \in \mathfrak{S}_{nm} \mid \mathcal{S}(\tau) = \mathcal{T}_2(\sigma) \quad , \quad Inv(\tau) = m^2 Inv(\sigma) \quad \text{et} \quad \sigma \in \mathfrak{S}_n\}.$$

Comme observé dans [37, 38] : comme d'habitude en p -théorie, le coefficient p -multinomial est donné par

$$\frac{[c_1 + c_2 + \cdots + c_n]_p!}{[c_1]_p! [c_2]_p! \cdots [c_n]_p!}. \quad (4.16)$$

Et ici, on a la spécialisation $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 1$ et $p = q^{m^2}$. Par conséquent :

$$\sum_{\tau \in (\mathfrak{S}_n)_m} q^{Inv(\tau)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (q^{m^2})^{Inv(\sigma)} = \frac{[c_1 + c_2 + \cdots + c_n]_{q^{m^2}}!}{[c_1]_{q^{m^2}}! [c_2]_{q^{m^2}}! \cdots [c_n]_{q^{m^2}}!} = [n]_{q^{m^2}}! \quad (4.17)$$

□

4.2 Le produit de q -shuffle

Nous présentons dans cette section, le produit de q -shuffle qui est une déformation intéressante du produit habituel de Cauchy dans $\mathbb{K}\langle X \rangle$.

Nous donnerons une définition formelle de ce produit et de son coproduit.

4.2.1 Définition et propriétés du produit de q -shuffle

Note 2. Soit $w = a_1 a_2 \cdots a_n \in X^*$ un mot de longueur $|w| = n$ et I un sous-ensemble de $\{1, 2, \dots, n\} = \llbracket 1, n \rrbracket$.

Si $I = \emptyset$, on pose $w|I = 1_{X^*}$; si $I = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$, on pose $w|I = a_{i_1} \cdots a_{i_k}$.

Remarque 5. Par définition, si l'on se donne une partition de $\llbracket 1, n \rrbracket$, c'est-à-dire p ensembles disjoints I_1, I_2, \dots, I_p vérifiant $\biguplus_{j=1}^p I_j = \llbracket 1, n \rrbracket$ et les mots $w|_{I_1}, \dots, w|_{I_p}$, on retrouve naturellement w et $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$ avec $|I_j| = n_j$, pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Exemple 21. Si $X = \{a, b, c\}$,

$I_1 = \{1, 3, 4\}$, $I_2 = \{2, 7, 9\}$, $I_3 = \{5, 6, 8\}$ avec $w|_{I_1} = abc$, $w|_{I_2} = bca$, $w|_{I_3} = cab$, alors, on retrouve $w = abbccacba$.

Si l'on se donne p mots de longueur n_i , $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on peut définir leur shuffle d'une manière pratique.

On marque $n_1 + n_2 + \cdots + n_p$ places sur une droite. On choisit d'abord n_1 places arbitrairement, on y place les lettres du mot u_1 de gauche à droite, c'est-à-dire les unes après les autres.

On fait de même pour u_2, u_3 jusqu'à u_p en utilisant les places restantes. On a donc construit un mot de longueur $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$, noté $w(I_1, \dots, I_p; u_1 u_2 \cdots u_p)$ où I_i désigne le sous-ensemble de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de places choisies pour situer les lettres du mot obtenu.

A la ligne, en parcourant toutes les places possibles de cette façon et en effectuant la somme de tous les mots ainsi obtenus, on obtient ce que l'on appelle le produit de shuffle des mots u_1, \dots, u_p .

Maintenant, on se donne la définition du produit de shuffle :

Définition 24. (Le shuffle des mots : voir (3.31)). Soient $u_1, \dots, u_p \in X^*$ des mots de longueur n_i , $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Leur shuffle est un polynôme de $\mathbb{N}\langle X \rangle$ défini par

$$u_1 \sqcup u_2 \sqcup \cdots \sqcup u_p = \sum w(I_1, \dots, I_p; u_1 u_2 \cdots u_p). \quad (4.18)$$

où $w(I_1, \dots, I_p; u_1 u_2 \cdots u_p) = \{w \in X^* \mid \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, w|_{I_j} = u_j\}$.

En insérant une puissance indéterminée $q \in \mathbb{K}$ dans la définition du produit de shuffle (4.18), on obtient une déformation intéressante, qui se révèle être un cas particulier d'une construction de [17]. Nous pouvons écrire la définition suivante :

Définition 25. (Le q -shuffle des mots). Soient $u_1, \dots, u_p \in X^*$ des mots de longueur n_i , $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Leur q -shuffle est un polynôme de $\mathbb{N}[q]\langle X \rangle$ défini par

$$u_1 \sqcup_q u_2 \sqcup_q \cdots \sqcup_q u_p = \sum q^{Inv(I_1 \cdots I_p)} w(I_1, \dots, I_p; u_1 u_2 \cdots u_p). \quad (4.19)$$

où $w(I_1, \dots, I_p; u_1 u_2 \cdots u_p) = \{w \in X^* \mid \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, w|_{I_j} = u_j\}$ et $I_1 I_2 \cdots I_p \in \mathfrak{S}_n$.

Exemple 22. Soit $X = \{a, b, c, d\}$.

i) Pour $u_1 = ab$ et $u_2 = cd$, on a :

$$u_1 \sqcup_q u_2 = abcd + qacbd + q^2acdb + q^2cabd + q^3cadb + q^4cdab.$$

ii) Pour $u_1 = aab$ et $u_2 = ab$, on a :

$$u_1 \sqcup_q u_2 = (1 + q^4 + q^5)aabab + (q + 2q^2 + 2q^3 + q^4)aaabb + q^6abaab.$$

Remarque 6. Avec la notation précédente, la somme contient $\frac{n!}{n_1! \dots n_p!}$ termes.

Cette opération (\sqcup_q) interpole entre le produit de concaténation (pour $q = 0$) et le produit de shuffle (pour $q = 1$).

Définition 26. Soient $a, b \in X$ et $w, u, v \in X^*$. Le produit de q -shuffle est défini récursivement par :

$$\begin{cases} 1_{X^*} \sqcup_q w & = w \sqcup_q 1_{X^*} = w, \\ (au) \sqcup_q (bv) & = a(u \sqcup_q bv) + q^{|au|}b(au \sqcup_q v), \end{cases} \quad (4.20)$$

Proposition 8. Si $|X| \geq 2$, alors le produit de q -shuffle (\sqcup_q) est commutatif si et seulement si $q = 1$.

Preuve : Soit $a, b \in X$. On a :
 $a \sqcup_q b - b \sqcup_q a = (1 - q)(ab - ba)$.
 \square

Proposition 9. Le produit de q -shuffle (\sqcup_q) est associatif.

Preuve : On fait une démonstration par récurrence sur la somme des longueurs $|u|$, $|v|$ et $|w|$:

i) $1_{X^*} \sqcup_q u = u \sqcup_q 1_{X^*} = u$ par définition.

ii) Supposons que pour tous u, v et w de X^* tels que $|u| + |v| + |w| \leq n$, on ait $(u \sqcup_q v) \sqcup_q w = u \sqcup_q (v \sqcup_q w)$.

iii) Soient $u, v, w \in X^*$ tels que $|u| + |v| + |w| = n - 1$ et soient $a, b, c \in X$. On a

$$\begin{aligned}
(au \sqcup_q bv) \sqcup_q cw &= a(u \sqcup_q bv) \sqcup_q cw + q^{|au|} b(au \sqcup_q v) \sqcup_q cw \\
&= a((u \sqcup_q bv) \sqcup_q cw) + q^{|au|+|bv|} c(a(u \sqcup_q bv) \sqcup_q w) \\
&\quad + q^{|au|} b((au \sqcup_q v) \sqcup_q cw) + q^{2|au|+|bv|} c(b(au \sqcup_q v) \sqcup_q w) \\
&= a(u \sqcup_q (bv \sqcup_q cw)) + q^{|au|+|bv|} c(a(u \sqcup_q bv) \sqcup_q w) \\
&\quad + q^{|au|} b(au \sqcup_q (v \sqcup_q cw)) + q^{2|au|+|bv|} c(b(au \sqcup_q v) \sqcup_q w) \\
&= a(u \sqcup_q b(v \sqcup_q cw)) + q^{|bv|} a(u \sqcup_q c(bv \sqcup_q w)) + q^{|au|+|bv|} c(a(u \sqcup_q bv) \sqcup_q w) \\
&\quad + q^{|au|} b(au \sqcup_q (v \sqcup_q cw)) + q^{2|au|+|bv|} c(b(au \sqcup_q v) \sqcup_q w) \\
&= a(u \sqcup_q b(v \sqcup_q cw)) + q^{|bv|} a(u \sqcup_q c(bv \sqcup_q w)) + q^{|au|} b(au \sqcup_q (v \sqcup_q cw)) \\
&\quad + q^{|au|+|bv|} c((au \sqcup_q bv) \sqcup_q w) \\
&= a(u \sqcup_q b(v \sqcup_q cw)) + q^{|au|} b(au \sqcup_q (v \sqcup_q cw)) + q^{|bv|} a(u \sqcup_q c(bv \sqcup_q w)) \\
&\quad + q^{|au|+|bv|} c(au \sqcup_q (bv \sqcup_q w)) \\
&= au \sqcup_q (bv \sqcup_q cw)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

□

Nous allons donner une démonstration "alternative" avec les dérivations (voir [17]) : pour $u, v \in X^*$ et $x \in X$, on définit la q -dérivation comme suit :

$$\partial_x^q(\varepsilon) = 0, \quad \partial_x^q(y) = \delta_{x,y} \quad \text{et} \quad \partial_x^q(uv) = \partial_x^q(u)v + q^{|u|}u\partial_x^q(v).$$

Remarque 7. [17] *Le q -shuffle (\sqcup_q) est la seule loi graduée telle que les $x_i^{-1} = \partial_i$ soient des q -dérivations.*

Proposition 10. *Soient $u, v \in X^*$ et $x \in X$. Alors,*

$$\begin{cases} 1_{X^*} \sqcup_q u = u \sqcup_q 1_{X^*} = u \\ x^{-1}(u \sqcup_q v) = x^{-1}(u) \sqcup_q v + q^{|u|}u \sqcup_q x^{-1}(v) \end{cases}$$

Proof : Pour $x_k, x_i, x_j \in X$ et $u, v \in X^*$, on a : $x_k^{-1}(x_i u) = x_k^{-1}(x_i)u$, $x_k^{-1}(x_i u) \sqcup_q x_j v = x_k^{-1}(x_i)u \sqcup_q x_j v$ et $x_i u \sqcup_q x_k^{-1}(x_j v) = x_i u \sqcup_q x_k^{-1}(x_j)v$.

$$\begin{aligned}
x_k^{-1}(x_i u \sqcup_q x_j v) &= x_k^{-1}(x_i(u \sqcup_q x_j v) + q^{|x_i u|}x_j(x_i u \sqcup_q v)) \\
&= x_k^{-1}(x_i(u \sqcup_q x_j v)) + q^{|x_i u|}x_k^{-1}(x_j(x_i u \sqcup_q v)) \\
&= x_k^{-1}(x_i)(u \sqcup_q x_j v) + q^{|x_i u|}x_k^{-1}(x_j)(x_i u \sqcup_q v) \\
&= x_k^{-1}(x_i u) \sqcup_q x_j v + q^{|x_i u|}x_k^{-1}(x_j)(x_i u \sqcup_q v) \\
&= x_k^{-1}(x_i u) \sqcup_q x_j v + q^{|x_i u|}x_i u \sqcup_q x_k^{-1}(x_j)v \\
&= x_k^{-1}(x_i u) \sqcup_q x_j v + q^{|x_i u|}x_i u \sqcup_q x_k^{-1}(x_j v)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

□

Proposition 11. *Soient $u, v, w \in X^*$ et $x_s, x_i, x_j, x_k \in X$. Alors*

$$x_s^{-1}((x_i u \sqcup_q x_j v) \sqcup_q x_k w) = x_s^{-1}(x_i u \sqcup_q (x_j v \sqcup_q x_k w)) \quad (4.23)$$

Preuve :

$$\begin{aligned} x_s^{-1}((x_i u \sqcup_q x_j v) \sqcup_q x_k w) &= x_s^{-1}(x_i u \sqcup_q x_j v) \sqcup_q x_k w + q^{|x_i u|+|x_j v|} x_i u \sqcup_q x_j v \sqcup_q x_s^{-1}(x_k w) \\ &= (x_s^{-1}(x_i u) \sqcup_q x_j v) \sqcup_q x_k w + q^{|x_i u|} (x_i u \sqcup_q x_s^{-1}(x_j v)) \sqcup_q x_k w \\ &\quad + q^{|x_i u|+|x_j v|} x_i u \sqcup_q x_j v \sqcup_q x_s^{-1}(x_k w) \\ &= x_s^{-1}(x_i u) \sqcup_q (x_j v \sqcup_q x_k w) + q^{|x_i u|} x_i u \sqcup_q (x_s^{-1}(x_j v) \sqcup_q x_k w) \\ &\quad + q^{|x_i u|+|x_j v|} x_i u \sqcup_q (x_j v \sqcup_q x_s^{-1}(x_k w)) \\ &= x_s^{-1}(x_i u) \sqcup_q (x_j v \sqcup_q x_k w) + q^{|x_i u|} x_i u \sqcup_q x_s^{-1}(x_j v \sqcup_q x_k w) \\ &= x_s^{-1}(x_i u \sqcup_q (x_j v \sqcup_q x_k w)) \end{aligned} \quad (4.24)$$

□

On a bien défini le shuffle (\sqcup) et le q -shuffle (\sqcup_q) des mots (X^*); maintenant, on va prolonger cette notion à $\mathbb{K}\langle X \rangle$ et $\mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle$ par p -linéarité.

$\mathbb{K}\langle X \rangle$ désigne l'ensemble des polynômes non-commutatifs et $\mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle$ désigne l'ensemble des séries formelles non-commutatives correspondantes.

Définition 27. *Soit $(P_1, P_2, \dots, P_p) \in \mathbb{K}\langle X \rangle^p$, où $p \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.*

En notant $P_i = \sum_{u_i \in X^} \langle P_i | u_i \rangle u_i$, on définit $P_1 \sqcup_q P_2 \sqcup_q \dots \sqcup_q P_p$ par :*

$$P_1 \sqcup_q P_2 \sqcup_q \dots \sqcup_q P_p = \sum_{u_1, u_2, \dots, u_p \in X^*} \left(\prod_{i=1}^p \langle P_i | u_i \rangle \right) u_1 \sqcup_q u_2 \sqcup_q \dots \sqcup_q u_p. \quad (4.25)$$

Remarque 8. *Chaque P_j est une somme finie. La dernière expression est donc bien une somme finie c'est-à-dire appartenant à $\mathbb{K}\langle X \rangle$. Donc ce prolongement du produit de q -shuffle par p -linéarité a bien un sens.*

Remarque 9. *Dans le cas où les séries formelles $S_j \in \mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle$, la définition est identique sauf que la somme est infinie.*

Lemme 11. *Soit $u_1, u_2, \dots, u_p \in X^*$, où $p \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Alors :*
 $\text{supp}(u_1 \sqcup_q u_2 \sqcup_q \dots \sqcup_q u_p) = \text{supp}(u_1 \sqcup u_2 \sqcup \dots \sqcup u_p).$

Preuve : Posons :

$$\text{supp}(u_1 \sqcup_q u_2 \sqcup_q \cdots \sqcup_q u_p) = \{v \in X^* \mid \langle u_1 \sqcup_q u_2 \sqcup_q \cdots \sqcup_q u_p \mid v \rangle = \alpha_v \neq 0\} \text{ et}$$

$$\text{supp}(u_1 \sqcup u_2 \sqcup \cdots \sqcup u_p) = \{u \in X^* \mid \langle u_1 \sqcup u_2 \sqcup \cdots \sqcup u_p \mid u \rangle = \rho_u \neq 0\}.$$

$$\alpha_v \in \mathbb{N}[q] \text{ alors on peut \u00e9crire que } \alpha_v = \alpha_v(q) = \sum_{0 \leq j \leq d} a_j q^j \text{ o\u00f9 } a_j \in \mathbb{N} \text{ pour } 0 \leq j \leq d.$$

Il nous suffit de montrer que $\alpha_v(q) \neq 0$ si et seulement si $\alpha_v(1) \neq 0$.

a) Supposons que $\alpha_v(1) \neq 0$ alors le polyn\u00f4me $\alpha_v(q)$ n'est pas identiquement nul.

b) Supposons que $\alpha_v(q) \neq 0$, $\alpha_v(q) = \sum_{0 \leq j \leq d} a_j q^j$, $a_j \geq 0$ et $a_d > 0$.

$$\alpha_v(1) = \sum_{0 \leq j \leq d} a_j \geq a_d > 0.$$

De plus, $\text{supp}(u_1 \sqcup_q u_2 \sqcup_q \cdots \sqcup_q u_p) = \{u \in X^* \mid \langle u_1 \sqcup_q u_2 \sqcup_q \cdots \sqcup_q u_p \mid u \rangle \neq 0\} = \{u \in X^* \mid \langle u_1 \sqcup u_2 \sqcup \cdots \sqcup u_p \mid u \rangle \neq 0\} = \text{supp}(u_1 \sqcup u_2 \sqcup \cdots \sqcup u_p)$.

□

Le produit de q -shuffle peut \u00eatre consid\u00e9r\u00e9 comme une application bil\u00e9aire sur $\mathbb{N}[q]\langle X \rangle$ ($\sqcup_q : X^* \times X^* \longrightarrow \mathbb{N}[q]\langle X \rangle$).

Gr\u00e2ce \u00e0 la propri\u00e9t\u00e9 universelle du produit tensoriel, on peut l'\u00e9crire comme

$$sh_q : \mathbb{N}[q]\langle X \rangle \otimes \mathbb{N}[q]\langle X \rangle \longrightarrow \mathbb{N}[q]\langle X \rangle.$$

Corollaire 2. $(\mathbb{Q}\langle X \rangle, \sqcup_q, \mathbb{1}_{X^*})$ est une alg\u00e8bre non commutative (si $q \neq 1$ et $|X| \geq 2$) et associative avec unit\u00e9. $(\mathbb{Q}\langle\langle X \rangle\rangle, \sqcup_q, \mathbb{1}_{X^*})$ aussi.

4.2.2 D\u00e9finition et propri\u00e9t\u00e9s du coproduit de \sqcup_q

Soit Δ_{\sqcup_q} le coproduit du produit de q -shuffle (\sqcup_q).

Nous allons d\u00e9finir Δ_{\sqcup_q} comme suit : Comme d\u00e9j\u00e0 observ\u00e9 dans [17], nous pouvons \u00e9crire la d\u00e9finition suivante :

D\u00e9finition 28. Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Alors

$$\Delta_{\sqcup_q}(12 \cdots n) = \sum_{I \uplus J = \llbracket 1, n \rrbracket} q^{Inv(I.J)} I \otimes J. \quad (4.26)$$

A partir de cette d\u00e9finition, nous pouvons \u00e9crire la Proposition suivante :

Proposition 12. Soit $w \in X^*$. Alors

$$\Delta_{\sqcup_q}(w) = \sum_{I \uplus J = \llbracket 1, |w| \rrbracket} q^{Inv(I.J)} w|I \otimes w|J, \quad (4.27)$$

où $w|I$ et $w|J$ sont des sous-mots de $w \in X^*$.

Pour démontrer cette Proposition, nous allons écrire et démontrer les Lemmes suivants.

Lemme 12. Soit \star_{RHS} une loi et son dual Δ_{RHS} .

Posons $\Delta_{RHS}(w) = \sum_{I \uplus J = [1, |w|]} q^{Inv(I,J)} w|I \otimes w|J$ où $w \in X^*$. Alors

$$\begin{cases} 1_{X^*} \star_{RHS} w & = w \star_{RHS} 1_{X^*} = w, \\ (au) \star_{RHS} (bv) & = a(u \star_{RHS} (bv)) + q^{|au|} b((au) \star_{RHS} v). \end{cases} \quad (4.28)$$

où $a, b \in X$ et $u, v \in X^*$.

Preuve : On peut dire que $\Delta_{RHS}(w)$ est multihomogène.

Soient $a, b \in X$ et $u, v \in X^*$.

Posons que $I' = I - \{1\}$ et $J' = J - \{1\}$ avec $w|I' = w[I - \{1\}]$ et $w|J' = w[J - \{1\}]$. On

peut écrire que :

$$\begin{aligned}
au \star_{RHS} bv &= \sum_{w \in X^*} \langle au \star_{RHS} bv \mid w \rangle w \\
&= \sum_{w \in X^*} \langle au \otimes bv \mid \Delta_{RHS}(w) \rangle w \\
&= \sum_{w \in X^*} \left\langle \sum_{I \uplus J = \llbracket 1, |w| \rrbracket} q^{Inv(I,J)} w \mid I \otimes w \mid J \mid au \otimes bv \right\rangle w \\
&= \sum_{w \in X^*} \sum_{\substack{I \uplus J = \llbracket 1, |w| \rrbracket \\ 1 \in I}} q^{Inv(I,J)} \langle w \mid I \otimes w \mid J \mid au \otimes bv \rangle w \\
&+ \sum_{w \in X^*} \sum_{\substack{I \uplus J = \llbracket 1, |w| \rrbracket \\ 1 \in J}} q^{Inv(I,J)} \langle w \mid I \otimes w \mid J \mid au \otimes bv \rangle w \\
&= \sum_{w = aw_1 \in X^*} \sum_{\substack{I \uplus J = \llbracket 1, |w| \rrbracket \\ 1 \in I}} q^{Inv(I,J)} \langle aw_1 [I - \{1\}] \otimes aw_1 \mid J \mid au \otimes bv \rangle aw_1 \\
&+ \sum_{w = bw_2 \in X^*} \sum_{\substack{I \uplus J = \llbracket 1, |w| \rrbracket \\ 1 \in J}} q^{Inv(I,J)} \langle bw_2 \mid I \otimes bw_2 [J - \{1\}] \mid au \otimes bv \rangle bw_2 \\
&= \sum_{w = aw_1 \in X^*} \sum_{\substack{I' \uplus J = \llbracket 2, |w| \rrbracket \\ 1 \in I'}} q^{Inv(I',J)} \langle aw_1 \mid I' \otimes aw_1 \mid J \mid au \otimes bv \rangle aw_1 \\
&+ \sum_{w = bw_2 \in X^*} q^{|I|} \sum_{\substack{I \uplus J' = \llbracket 2, |w| \rrbracket \\ 1 \in J}} q^{Inv(I,J)} \langle bw_2 \mid I \otimes bw_2 \mid J' \mid au \otimes bv \rangle bw_2 \\
&= a \sum_{w_1 \in X^*} \sum_{I' \uplus J = \llbracket 2, |w| \rrbracket} q^{Inv(I',J)} \langle aw_1 \mid I' \otimes w_1 \mid J \mid u \otimes bv \rangle w_1 \\
&+ b \sum_{w_2 \in X^*} q^{|I|} \sum_{I \uplus J' = \llbracket 2, |w| \rrbracket} q^{Inv(I,J')} \langle w_2 \mid I \otimes bw_2 \mid J' \mid au \otimes v \rangle w_2 \\
&= a(u \star_{RHS} bv) + q^{|au|} b(au \star_{RHS} v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w \star_{RHS} 1_{X^*} &= \sum_{u \in X^*} \langle w \star_{RHS} 1_{X^*} \mid u \rangle u \\
&= \sum_{u \in X^*} \langle w \otimes 1_{X^*} \mid \Delta_{RHS}(u) \rangle u \\
&= \sum_{u \in X^*} \left\langle \sum_{I \uplus J = [1, |w|]} q^{Inv(I, J)} u \mid I \otimes u \mid J \mid w \otimes 1_{X^*} \right\rangle u \\
&= \sum_{u \in X^*} \sum_{I \uplus J = [1, |w|]} q^{Inv(I, J)} \langle u \mid I \otimes u \mid J \mid w \otimes 1_{X^*} \rangle u \\
&= \sum_{u \in X^*} \sum_{I \uplus J = [1, |w|]} q^{Inv(I, J)} \langle u \mid I \mid w \rangle \langle u \mid J \mid 1_{X^*} \rangle u \\
&= \sum_{u=w \in X^*} \sum_{\substack{I=[1, |w|] \\ J=\emptyset}} q^{Inv(I)} \langle w \mid I \mid w \rangle \langle 1_{X^*} \mid 1_{X^*} \rangle w \\
&= w
\end{aligned}$$

De même $1_{X^*} \star_{RHS} w = w$.

□

Lemme 13. Soient \star_1 et \star_2 deux lois et leurs lois duales respectives Δ_1 et Δ_2 . Si $\star_1 = \star_2$, alors on a : $\Delta_1 = \Delta_2$.

Preuve : Supposons $\star_1 = \star_2$ et montrons que $\Delta_1 = \Delta_2$: Soit $w \in X^*$

$$\begin{aligned}
\Delta_1(w) &= \sum_{u, v \in X^*} \langle \Delta_1(w) \mid u \otimes v \rangle u \otimes v \\
&= \sum_{u, v \in X^*} \langle w \mid u \star_1 v \rangle u \otimes v \\
&= \sum_{u, v \in X^*} \langle w \mid u \star_2 v \rangle u \otimes v \\
&= \sum_{u, v \in X^*} \langle \Delta_2(w) \mid u \otimes v \rangle u \otimes v \\
&= \Delta_2(w)
\end{aligned}$$

(4.29)

□

Nous pouvons maintenant donner une preuve de la Proposition 12.

Preuve de la Proposition 12 : A partir des Lemmes 12,13, on peut supposer que $\star_{RHS} = \sqcup_q$. Par conséquent $\Delta_{RHS} = \Delta_{\sqcup_q}$.

□

Maintenant, on peut écrire que :

$$\Delta_{\sqcup_q} : \mathbb{Q}[q]\langle X \rangle \longrightarrow \mathbb{Q}[q]\langle X \rangle \otimes \mathbb{Q}[q]\langle X \rangle.$$

Soient $w, u, v \in X^*$ on a : $\langle \Delta_{\sqcup_q}(w) \mid u \otimes v \rangle = \langle w \mid u \sqcup_q v \rangle$ et $\Delta_{\sqcup_q}(w) = \sum_{u, v \in X^*} \langle w \mid u \sqcup_q v \rangle u \otimes v$.

D'où le calcul de $\Delta_{\sqcup_q}(1_{X^*})$ et de $\Delta_{\sqcup_q}(a)$ si $a \in X$:

$$\langle \Delta_{\sqcup_q}(1_{X^*}) \mid u \otimes v \rangle = \langle 1_{X^*} \mid u \sqcup_q v \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } u = 1_{X^*} \text{ et } v = 1_{X^*} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc $\Delta_{\sqcup_q}(1_{X^*}) = 1_{X^*} \otimes 1_{X^*}$.

$$\langle \Delta_{\sqcup_q}(a) \mid u \otimes v \rangle = \langle a \mid u \sqcup_q v \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } u = a \text{ et } v = 1_{X^*} \\ 1 & \text{si } u = 1_{X^*} \text{ et } v = a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc $\Delta_{\sqcup_q}(a) = a \otimes 1_{X^*} + 1_{X^*} \otimes a$.

Exemple 23. $\Delta_{\sqcup_q}(ab) = ab \otimes 1_{X^*} + 1_{X^*} \otimes ab + a \otimes b + qb \otimes a$.

Voici une réécriture du coproduit du produit de q -shuffle :

Soient $p \geq 2$ un entier et $\Delta_{\sqcup_q}^{(p-1)} : \mathbb{Q}[q]\langle X \rangle \longrightarrow \mathbb{Q}[q]\langle X \rangle^{\otimes p}$ où chaque tenseur a p facteurs et $\Delta_{\sqcup_q}^{(1)} = \Delta_{\sqcup_q}$. On peut écrire la Proposition suivante :

Proposition 13. Soient $w \in X^*$ et $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, on a :

$$\begin{aligned} \Delta_{\sqcup_q}^{(p-1)}(w) &= \sum_{u_1, u_2, \dots, u_p \in X^*} \langle w \mid u_1 \sqcup_q u_2 \sqcup_q \dots \sqcup_q u_p \rangle u_1 \otimes \dots \otimes u_p \\ &= \sum_{\biguplus_{j=1}^p I_j = \llbracket 1, n \rrbracket} q^{Inv(I_1, \dots, I_p)} w|I_1 \otimes w|I_2 \otimes \dots \otimes w|I_p \end{aligned} \tag{4.30}$$

avec $n = |w|$.

Preuve : Posons $w|I_j = w(I_j; u_1 u_2 \cdots u_p)$ pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Soit $u_1, u_2, \dots, u_p \in X^*$, on a :

$$u_1 \sqcup_q u_2 \sqcup_q \cdots \sqcup_q u_p = \sum_{\biguplus_{j=1}^p I_j = \llbracket 1, n \rrbracket} q^{Inv(I_1, \dots, I_p)} w(I_1, \dots, I_p; u_1 u_2 \cdots u_p).$$

Alors

$$\begin{aligned} & \sum_{u_1, u_2, \dots, u_p \in X^*} \langle w \mid u_1 \sqcup_q u_2 \sqcup_q \cdots \sqcup_q u_p \rangle u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \\ = & \sum_{u_1, u_2, \dots, u_p \in X^*} \langle w \mid \sum_{\biguplus_{j=1}^p I_j = \llbracket 1, n \rrbracket} q^{Inv(I_1, \dots, I_p)} w(I_1, \dots, I_p; u_1 u_2 \cdots u_p) \rangle u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \\ = & \sum_{u_1, u_2, \dots, u_p \in X^*} \sum_{\biguplus_{j=1}^p I_j = \llbracket 1, n \rrbracket} q^{Inv(I_1, \dots, I_p)} \langle w \mid w(I_1, \dots, I_p; u_1 u_2 \cdots u_p) \rangle u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \end{aligned}$$

Les sommes ci-dessus sont des sommes finies, ce qui explique que l'on puisse échanger l'ordre de sommation. Quand $I_j, j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ sont fixés, le seul cas où $\langle w \mid w(I_1, \dots, I_p; u_1 u_2 \cdots u_p) \rangle$ n'est pas Zéro est $u_j = w|I_j$.

$$\begin{aligned} & \sum_{u_1, u_2, \dots, u_p \in X^*} \langle w \mid u_1 \sqcup_q u_2 \sqcup_q \cdots \sqcup_q u_p \rangle u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \\ = & \sum_{\biguplus_{j=1}^p I_j = \llbracket 1, n \rrbracket} q^{Inv(I_1, \dots, I_p)} w|I_1 \otimes w|I_2 \otimes \cdots \otimes w|I_p \end{aligned}$$

□

Corollaire 3. Soient $w \in X^*$ et $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, on a :

$$\begin{aligned} \Delta_{\sqcup}^{(p-1)}(w) &= \sum_{u_1, u_2, \dots, u_p \in X^*} \langle w \mid u_1 \sqcup u_2 \sqcup \cdots \sqcup u_p \rangle u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \\ &= \sum_{\biguplus_{j=1}^p I_j = \llbracket 1, n \rrbracket} w|I_1 \otimes w|I_2 \otimes \cdots \otimes w|I_p \end{aligned}$$

(4.31)

où $w|I_j = w(I_j; u_1 u_2 \cdots u_p)$ pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$

Par exemple, si $p = 2$, on a :

$$\Delta_{\sqcup_q}(abb) = (q + q^2)b \otimes ab + (1 + q)ab \otimes b + a \otimes bb + q^2bb \otimes a.$$

On voit bien que dans cet exemple que le coefficient de $u \otimes v$ est égal au coefficient de $w = abb$ dans $u \sqcup_q v$.

Proposition 14. $(\mathbb{Q}[q]\langle X \rangle, \Delta_{\sqcup_q}, \mathbb{1}_{X^*})$ est une cogèbre.

Preuve : Coassociativité de Δ_{\sqcup_q} . On a :

$$\begin{aligned} (\Delta_{\sqcup_q} \otimes id)\Delta_{\sqcup_q}(w) &= \sum_{u,v \in X^*} (\Delta_{\sqcup_q} \otimes id)\langle w \mid u \sqcup_q v \rangle u \otimes v \\ &= \sum_{u,v \in X^*} \langle w \mid u \sqcup_q v \rangle \Delta_{\sqcup_q}(u) \otimes v \\ &= \sum_{u,v \in X^*} \langle w \mid u \sqcup_q v \rangle \sum_{u_1, u_2 \in X^*} \langle u \mid u_1 \sqcup_q u_2 \rangle u_1 \otimes u_2 \otimes v \\ &= \sum_{u_1, u_2, v \in X^*} \langle w \mid u_1 \sqcup_q u_2 \sqcup_q v \rangle u_1 \otimes u_2 \otimes v \end{aligned} \tag{4.32}$$

De même

$$(id \otimes \Delta_{\sqcup_q})\Delta_{\sqcup_q}(w) = \sum_{u, v_1, v_2 \in X^*} \langle w \mid u \sqcup_q v_1 \sqcup_q v_2 \rangle u \otimes v_1 \otimes v_2$$

C'est donc la même chose, aux indices muets de sommation près.

Counité de Δ_{\sqcup_q} . On a : $e : \mathbb{Q}[q]\langle X \rangle \longrightarrow \mathbb{Q}[q]$

$$\begin{aligned} (id \otimes e)\Delta_{\sqcup_q}(w) &= \sum_{u,v \in X^*} (id \otimes e)\langle w \mid u \sqcup_q v \rangle u \otimes v \\ &= \sum_{u,v \in X^*} \langle w \mid u \sqcup_q v \rangle u \otimes e(v) \end{aligned} \tag{4.33}$$

Posons

$$e(v) = \langle a \mid u \sqcup_q v \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } v \neq \varepsilon \\ 1 & \text{si } v = \varepsilon \end{cases}$$

ainsi $e(S) = \langle S \mid 1_{X^*} \rangle$

Donc les termes de la somme sont nuls si $v \neq \varepsilon$.

$$(id \otimes e)\Delta_{\sqcup_q}(w) = \langle w \mid w \rangle w \otimes 1_k = w \otimes 1_k.$$

□

La preuve est identique pour l'égalité symétrique.

$\mathbb{Q}[q]\langle X \rangle$ muni de l'addition, de la multiplication par un scalaire et du coproduit de décomposition Δ_{\sqcup_q} a une structure de cogèbre, appelée cogèbre de décomposition.

4.2.3 Relation entre \sqcup et \sqcup_q

Rappelons que le produit de q -shuffle (\sqcup_q) est l'interpolation entre le produit de concaténation (pour $q = 0$) et le produit de shuffle \sqcup (pour $q = 1$). Le but de cette partie est de construire des liens existants entre le \sqcup et \sqcup_q .

Dans tout au long de ce document, nous dirons qu'un mot w est un shuffle de u et de v si $w \in u \sqcup v$ (c'est-à-dire $w \in \text{supp}(u \sqcup v)$). Par exemple, on a :

$$ab \sqcup ab = 2abab + 4aabb.$$

- $abab \in ab \sqcup ab$: on dira que $abab$ est un shuffle de ab et de ab (ou $abab \in \text{supp}(ab \sqcup ab)$).
- $aabb \in ab \sqcup ab$: on dira que $aabb$ est un shuffle de ab et de ab (ou $aabb \in \text{supp}(ab \sqcup ab)$).

A partir de l'exemple 20 et l'équation (4.4), nous pouvons écrire la définition suivante :

Définition 29. Notons $\mathbb{K}\langle X \rangle_n$ le sous-espace de $\mathbb{K}\langle X \rangle$ engendré par les mots de longueur n . Une action à droite du groupe symétrique \mathfrak{S}_n sur $\mathbb{K}\langle X \rangle_n$, est définie par

$$(w_i)\sigma = w_{\sigma(i)}; \quad i \in \llbracket 1, n \rrbracket \tag{4.34}$$

pour tout mot w de longueur n , où w_i représente la $i^{\text{ème}}$ lettre de w . De façon équivalente, $w = a_1 a_2 \cdots a_n$, nous avons

$$(w)\sigma = (a_1 a_2 \cdots a_n)\sigma = a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(n)}. \tag{4.35}$$

$$\tag{4.36}$$

Cette action à droite de \mathfrak{S}_n sur les mots de longueur n s'étend par linéarité à une action de l'algèbre de groupe $\mathbb{K}\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{K}\langle X \rangle_n$.

Exemple 24. Soient $v = a_1 a_2 a_3$ et $u = abab = a_1 a_2 a_3 a_4$.

(i) Pour $\sigma = 213$, on a : $(v)\sigma = (a_1a_2a_3)213 = a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}a_{\sigma(3)} = a_2a_1a_3$,

(ii) Pour $\sigma = 3124$, on a : $(u)\sigma = (abab)3124 = a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}a_{\sigma(3)}a_{\sigma(4)} = a_3a_1a_2a_4 = aabb$.

(iii) Pour $a_1 = a_3 = a$ et $a_2 = a_4 = b$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma \in 12 \sqcup 34} (abab)\sigma &= \sum_{\sigma \in 12 \sqcup 34} a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}a_{\sigma(3)}a_{\sigma(4)} \\
&= (abab)1234 + (abab)1324 + (abab)1342 \\
&\quad + (abab)3124 + (abab)3142 + (abab)3412 \\
&= a_1a_2a_3a_4 + a_1a_3a_2a_4 + a_1a_3a_4a_2 \\
&\quad + a_3a_1a_2a_4 + a_3a_1a_4a_2 + a_3a_4a_1a_2 \\
&= 2(ab)^2 + 4aabb
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Définition 30. Soient $m, k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Le k -ième shuffle décalé de $[1\dots m]$, noté $[1\dots m]^{\sqcup k}$, est défini par :

$$[1\dots m]^{\sqcup k} = 1\dots m \sqcup m + 1\dots 2m \sqcup 2m + 1\dots 3m \sqcup \dots \sqcup (k-1)m + 1\dots km. \tag{4.38}$$

Exemple 25. $[12]^{\sqcup 2} = 12 \sqcup 34 = 1234 + 1324 + 1342 + 3124 + 3142 + 3412$.

Lemme 14. Soient $m, k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Alors

$$[1\dots m]^{\sqcup k} = \sum_{\tau_1 \in (\mathfrak{S}_k)_m} \tau_1 + \sum_{\substack{\tau_2 \in [1\dots m]^{\sqcup k} \\ \tau_2 \notin (\mathfrak{S}_k)_m}} \tau_2. \tag{4.39}$$

Preuve : Soient $u_1, u_2, \dots, u_k \in X^+$ de longueurs respectifs n_1, n_2, \dots, n_k et $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. Le polynôme $u_1 \sqcup u_2 \sqcup \dots \sqcup u_k$ est la somme de $\frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$ termes de longueur n . Si $n_1 = n_2 = \dots = n_k$, alors on a $n = n_1 k$. On peut écrire que $\frac{n!}{n_1! \dots n_k!} = \frac{(n_1 k)!}{(n_1!)^k}$. De plus $\frac{n!}{n_1! \dots n_k!} = \frac{(n_1 k)!}{(n_1!)^k} = k! + R$ où $R \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ et sachant que le cardinal de $(\mathfrak{S}_k)_m$ est $k!$.
□

Lemme 15. Soient $u, v \in X^+$. Alors

$$\begin{aligned}
(i) \quad u \sqcup v &= \sum_{\sigma \in [1 \dots |u|] \sqcup [1 \dots |u|+1 \dots |u|+|v|]} (uv)\sigma. \\
(ii) \quad u \sqcup_q v &= \sum_{\sigma \in [1 \dots |u|] \sqcup [1 \dots |u|+1 \dots |u|+|v|]} q^{Inv(\sigma)} (uv)\sigma.
\end{aligned}$$

où $\sigma \in \mathfrak{S}_{|u|+|v|}$.

Preuve : (i) Posons $uv = a_1 a_2 \cdots a_{|u|+|v|}$. A partir de la Définition 29 et de l'Exemple 24, nous pouvons écrire que :

$$u \sqcup v = \sum_{\sigma \in [1 \cdots |u|] \sqcup [|u|+1 \cdots |u|+|v|]} (uv)\sigma = \sum_{\sigma \in [1 \cdots |u|] \sqcup [|u|+1 \cdots |u|+|v|]} a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} a_{\sigma(3)} \cdots a_{\sigma(|u|+|v|)}. \quad (4.40)$$

(ii) Posons $uv = a_1 a_2 \cdots a_{|u|+|v|}$. A partir de la Définition 29 et de l'Exemple 24, nous pouvons écrire que :

$$u \sqcup_q v = \sum_{\sigma \in [1 \cdots |u|] \sqcup [|u|+1 \cdots |u|+|v|]} q^{Inv(\sigma)} (uv)\sigma = \sum_{\sigma \in [1 \cdots |u|] \sqcup [|u|+1 \cdots |u|+|v|]} q^{Inv(\sigma)} a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} a_{\sigma(3)} \cdots a_{\sigma(|u|+|v|)}. \quad (4.41)$$

□

Exemple 26. $u = ab$, $v = ab$ et $uv = abab = a_1 a_2 a_3 a_4$ (avec $a_1 = a_3 = a$ et $a_2 = a_4 = b$).

$$\begin{aligned} u \sqcup_q u &= ab \sqcup_q ab \\ &= \sum_{\sigma \in 12 \sqcup 34} q^{Inv(\sigma)} a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} a_{\sigma(3)} a_{\sigma(4)} \\ &= q^{Inv(1234)} a_1 a_2 a_3 a_4 + q^{Inv(1324)} a_1 a_3 a_2 a_4 + q^{Inv(1342)} a_1 a_3 a_4 a_2 \\ &\quad + q^{Inv(3124)} a_3 a_1 a_2 a_4 + q^{Inv(3142)} a_3 a_1 a_4 a_2 + q^{Inv(3412)} a_3 a_4 a_1 a_2 \\ &= abab + qaabb + q^2 aabb \\ &\quad + q^2 aabb + q^3 aabb + q^4 abab \\ &= (1 + q^4)(ab)^2 + (q + 2q^2 + q^3)aabb \end{aligned} \quad (4.42)$$

Remarque 10. Soient $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$ et $X^\alpha = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n}$ avec $a_1 < a_2 < \cdots < a_n \in X$ et $n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

i) $supp(a_1^{\alpha_1} \sqcup a_2^{\alpha_2} \sqcup \cdots \sqcup a_n^{\alpha_n}) = \{w \in X^* \mid \langle a_1^{\alpha_1} \sqcup a_2^{\alpha_2} \sqcup \cdots \sqcup a_n^{\alpha_n} \mid w \rangle \neq 0\}$.

ii) $M(X^\alpha) = supp(a_1^{\alpha_1} \sqcup a_2^{\alpha_2} \sqcup \cdots \sqcup a_n^{\alpha_n})$.

Exemple 27. Soit $X^\alpha = a^2 b^2$ avec $X = \{a < b\}$ et $\alpha = (2, 2)$. On a :

$$a^2 \sqcup b^2 = a^2 b^2 + abab + ab^2 a + ba^2 b + baba + b^2 a^2 \text{ et}$$

$$supp(a^2 \sqcup b^2) = \{a^2 b^2, abab, ab^2 a, ba^2 b, baba, b^2 a^2\},$$

$$M(a^2 b^2) = \{a^2 b^2, abab, ab^2 a, ba^2 b, baba, b^2 a^2\}.$$

4.3 Construction récursive des $S_w^{(q)}$, $w \in X^*$

Résumé : Dans cette partie, nous présentons une généralisation des éléments $\ell^{\sqcup_q k}$ (avec $\ell \in \mathcal{Lyn}(X)$, $q \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$) et une construction récursive de la famille $(S_w^{(q)})_{w \in X^*}$.

La famille $(S_w^{(q)})_{w \in X^*}$ est en fait définie par la même relation de récurrence que la famille $(S_w)_{w \in X^*}$ que nous avons considéré plus haut (3.32).

4.3.1 Caractérisation des éléments $\ell^{\sqcup_q k}$ (avec $\ell \in \mathcal{Lyn}(X)$, $q \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$)

Les éléments $\ell^{\sqcup_q k}$ sont caractérisés par le Théorème suivant :

Théorème 9. Soient $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$, $\ell \in \mathcal{Lyn}(X)$ et $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Alors

$$\ell^{\sqcup_q k} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} q^{|\ell|^2 \text{Inv}(\sigma)} \ell^k + \sum_{\substack{u < \ell^k \\ u, \ell^k \in X^\alpha}} \beta_u(q) u \quad (4.43)$$

où $\beta_u(q) = \langle \ell^{\sqcup_q k} \mid u \rangle \in \mathbb{N}[q]$.

Pour la preuve de ce Théorème, nous allons écrire la Proposition suivante :

Proposition 15. Soient $\ell \in \mathcal{Lyn}(X)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$.

(i) Posons $\ell^{\sqcup k} = (\ell)^{\sqcup k} = \underbrace{\ell \sqcup \dots \sqcup \ell}_{k \text{ fois}}$. Alors

$$\ell^{\sqcup k} = \sum_{\sigma \in [1 \dots |\ell|]^{\sqcup k}} (\ell^k)_\sigma = k! \ell^k + \sum_{\substack{u < \ell^k \\ u, \ell^k \in X^\alpha}} \beta_u(1) u \quad (4.44)$$

où $\beta_u(1) = \langle \ell^{\sqcup k} \mid u \rangle \in \mathbb{N}$.

(ii) $\text{supp}(\ell^{\sqcup k}) = \text{supp}(\ell^{\sqcup_q k})$.

Preuve : Posons $\ell^k = a_1 a_2 \dots a_{|\ell^k|}$ avec $a_i \in X$ pour $1 \leq i \leq |\ell^k| = k|\ell|$

(i) A partir de la Définition 23, Lemme 15 et aux équations (4.38) et (4.39), on peut écrire que :

$$\ell^{\sqcup k} = \sum_{\tau \in [1 \dots |\ell|]^{\sqcup k}} (\ell^k)_\tau = \sum_{\tau \in [1 \dots |\ell|]^{\sqcup k}} a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \dots a_{\sigma(|\ell^k|)} \text{ avec } \tau \in \mathfrak{S}_{k|\ell|}.$$

Par conséquent :

$$\ell^{\sqcup k} = \sum_{\tau \in [1 \dots |\ell|]^{\sqcup k}} (\ell^k)_\tau = \sum_{\tau_1 \in (\mathfrak{S}_k)_{|\ell|}} (\ell^k)_{\tau_1} + \sum_{\substack{\tau_2 \in [1 \dots |\ell|]^{\sqcup k} \\ \tau_2 \notin (\mathfrak{S}_k)_{|\ell|}}} (\ell^k)_{\tau_2}$$

et sachant que le cardinal de $(\mathfrak{S}_k)_{|\ell|}$ est $k!$.

Or un théorème dû à C.Reutenauer [1, 2, 3] assure que $\ell^{\sqcup k} = k! \ell^k + \sum_{\substack{u < \ell^k \\ u, \ell^k \in X^\alpha}} \beta_u(1) u$.

(ii) Posons :

$supp(\ell^{\sqcup_q k}) = \{v \in X^* \mid \langle \ell^{\sqcup_q k} \mid v \rangle = \alpha_v \neq 0\}$ et $supp(\ell^{\sqcup k}) = \{u \in X^* \mid \langle \ell^{\sqcup k} \mid u \rangle = \rho_u \neq 0\}$.
 $\alpha_v \in \mathbb{N}[q]$ alors on peut écrire que $\alpha_v = \alpha_v(q) = \sum_{0 \leq j \leq d} a_j q^j$ où $a_j \in \mathbb{N}$ pour $0 \leq j \leq d$.

Il nous suffit de montrer que $\alpha_v(q) \neq 0$ si et seulement si $\alpha_v(1) \neq 0$.

a) Supposons que $\alpha_v(1) \neq 0$ alors le polynôme $\alpha_v(q)$ n'est pas identiquement nul.

b) Supposons que $\alpha_v(q) \neq 0$, $\alpha_v(q) = \sum_{0 \leq j \leq d} a_j q^j$, $a_j \geq 0$ et $a_d > 0$.

$$\alpha_v(1) = \sum_{0 \leq j \leq d} a_j \geq a_d > 0 .$$

De plus, $supp(\ell^{\sqcup_q k}) = \{u \in X^* \mid \langle \ell^{\sqcup_q k} \mid u \rangle \neq 0\} = \{u \in X^* \mid \langle \ell^{\sqcup k} \mid u \rangle \neq 0\} = supp(\ell^{\sqcup k})$
 et

$$max(supp(\ell^{\sqcup_q k})) = \ell^k = max(supp(\ell^{\sqcup k})) .$$

□

Preuve du Théorème 9 : Posons $\ell^{\sqcup_q k} = (\ell)^{\sqcup_q k} = \underbrace{\ell \sqcup_q \cdots \sqcup_q \ell}_{k \text{ fois}}$:

A partir de la Définition 23, du Lemme 15, Théorème 7 et aux équations (4.38) et (4.39) :
 on peut écrire que :

$$\ell^{\sqcup_q k} = \sum_{\tau \in [1 \cdots |\ell|]^{\sqcup k}} q^{Inv(\tau)} (\ell^k)_{\tau} = \sum_{\tau_1 \in (\mathfrak{S}_k)_{|\ell|}} q^{Inv(\tau_1)} (\ell^k)_{\tau_1} + \sum_{\substack{\tau_2 \in [1 \cdots |\ell|]^{\sqcup k} \\ \tau_2 \notin (\mathfrak{S}_k)_{|\ell|}}} q^{Inv(\tau_2)} (l^k)_{\tau_2} .$$

sachant que le cardinal de $(\mathfrak{S}_k)_{|\ell|}$ est $k!$.

On effectue des récurrences sur k :

▷ Pour $k = 1$, on a : $\ell \sqcup_q 1_{X^*} = 1! \ell$ par définition.

▷ Pour $k = 2$, on a :

$$\ell^{\sqcup_q 2} = \ell \sqcup_q \ell = (1 + q^{|\ell|^2})(\ell)^2 + \sum_{\substack{U_1 < \ell^2, \\ U_1, \ell^2 \in X^\alpha}} \beta_{U_1}(q) U_1 = [2]_{q^{|\ell|^2}}! (\ell)^2 + \sum_{\substack{U_1 < \ell^2 \\ U_2, \ell^2 \in X^\alpha}} \beta_{U_1}(q) U_1 .$$

où $\beta_{U_1}(q) = \langle \ell^{\sqcup_q 2} \mid U_1 \rangle \in \mathbb{N}[q]$.

▷ Pour $k = 3$, on a :

$$\begin{aligned}
\ell^{\sqcup_q^3} &= (\ell \sqcup_q \ell) \sqcup_q \ell \\
&= \left((1 + q^{|\ell|^2})\ell^2 + \sum_{\substack{U_1 < \ell^2, \\ U_1, \ell^2 \in X^\alpha}} \beta_{U_1}(q)U_1 \right) \sqcup_q \ell \\
&= (1 + q^{|\ell|^2}) \cdot (\ell^2 \sqcup_q \ell) + \sum_{\substack{U_1 < \ell^2 \\ U_1, \ell^2 \in X^\alpha}} \beta_{U_1}(q)U_1 \sqcup_q \ell \\
&= (1 + q^{|\ell|^2})(1 + q^{|\ell|^2} + q^{2 \cdot |\ell|^2})(\ell)^3 + \sum_{\substack{U_2 < \ell^3 \\ U_2, \ell^3 \in X^\alpha}} \beta_{U_2}(q)U_2 \\
&= [1]_{q^{|\ell|^2}} [2]_{q^{|\ell|^2}} [3]_{q^{|\ell|^2}} (\ell)^3 + \sum_{\substack{U_2 < \ell^3 \\ U_2, \ell^3 \in X^\alpha}} \beta_{U_2}(q)U_2 \\
&= [3]_{q^{|\ell|^2}}! (\ell)^3 + \sum_{\substack{U_2 < \ell^3 \\ U_2, \ell^3 \in X^\alpha}} \beta_{U_2}(q)U_2
\end{aligned} \tag{4.45}$$

où $\beta_{U_1}(q) = \langle \ell^{\sqcup_q^2} | U_1 \rangle$, $\beta_{U_2}(q) = \langle \ell^{\sqcup_q^3} | U_2 \rangle \in \mathbb{N}[q]$.

Supposons que l'égalité est vraie à l'ordre $k - 1$ et vérifions qu'elle est vraie à l'ordre k , on a :

$$\begin{aligned}
\ell^{\sqcup_q^k} &= (\ell \sqcup_q \ell \sqcup_q \ell \sqcup_q \ell \cdots \sqcup_q \ell) \sqcup_q \ell \\
&= \left([1]_{q^{|\ell|^2}} [2]_{q^{|\ell|^2}} \cdots [k-1]_{q^{|\ell|^2}} (\ell)^{k-1} + \sum_{\substack{U_1 < (\ell)^{k-1} \\ U_1, (\ell)^{k-1} \in X^\alpha}} \beta_{U_1}(q)U_1 \right) \sqcup_q \ell \\
&= [1]_{q^{|\ell|^2}} [2]_{q^{|\ell|^2}} \cdots [k-1]_{q^{|\ell|^2}} (\ell)^{k-1} \sqcup_q \ell + \sum_{\substack{U_1 < (\ell)^{k-1} \\ U_1, (\ell)^{k-1} \in X^\alpha}} \beta_{U_1}(q)U_1 \sqcup_q \ell \\
&= [1]_{q^{|\ell|^2}} [2]_{q^{|\ell|^2}} \cdots [k]_{q^{|\ell|^2}} (\ell)^k + \sum_{\substack{U_2 < (\ell)^k \\ U_2, (\ell)^k \in X^\alpha}} \beta_{U_2}(q)U_2 \\
&= [k]_{q^{|\ell|^2}}! (\ell)^k + \sum_{\substack{U_2 < (\ell)^k \\ U_2, (\ell)^k \in X^\alpha}} \beta_{U_2}(q)U_2
\end{aligned} \tag{4.46}$$

où $\beta_{U_1}(q) = \langle \ell^{\sqcup_q^{k-1}} | U_1 \rangle$, $\beta_{U_2}(q) = \langle \ell^{\sqcup_q^k} | U_2 \rangle \in \mathbb{N}[q]$.

□

Exemple 28. (i) Pour $w = (\ell)^2 = (ab)^2 = abab = a_1a_2a_3a_4$ avec $a_1 = a_3 = a$ et $a_2 = a_4 = b$.

$$\begin{aligned}
 (ab)^{\sqcup 2} &= \sum_{\sigma \in [12]^{\sqcup 2}} (abab).\sigma \\
 &= \sum_{\sigma \in 12 \sqcup 34} a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}a_{\sigma(3)}a_{\sigma(4)} \\
 &= (abab).1234 + (abab).1324 + (abab).1342 \\
 &\quad + (abab).3124 + (abab).3142 + (abab).3412 \\
 &= a_1a_2a_3a_4 + a_1a_3a_2a_4 + a_1a_3a_4a_2 \\
 &\quad + a_3a_1a_2a_4 + a_3a_1a_4a_2 + a_3a_4a_1a_2 \\
 &= 2(ab)^2 + 4aabb
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

(i) Pour $w = (\ell)^2 = (ab)^2 = abab = a_1a_2a_3a_4$ avec $a_1 = a_3 = a$ et $a_2 = a_4 = b$.

$$\begin{aligned}
 (ab)^{\sqcup q^2} &= \sum_{\sigma \in [12]^{\sqcup 2}} q^{Inv(\sigma)}(abab).\sigma \\
 &= \sum_{\sigma \in 12 \sqcup 34} q^{Inv(\sigma)}a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}a_{\sigma(3)}a_{\sigma(4)} \\
 &= q^{Inv(1234)}a_1a_2a_3a_4 + q^{Inv(1324)}a_1a_3a_2a_4 + q^{Inv(1342)}a_1a_3a_4a_2 \\
 &\quad + q^{Inv(3124)}a_3a_1a_2a_4 + q^{Inv(3142)}a_3a_1a_4a_2 + q^{Inv(3412)}a_3a_4a_1a_2 \\
 &= abab + qaabb + q^2aabb \\
 &\quad + q^2aabb + q^3aabb + q^4abab \\
 &= (1 + q^4)(ab)^2 + (q + 2q^2 + q^3)aabb \\
 &= [2]_{q^4}!(ab)^2 + (q + 2q^2 + q^3)aabb
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

4.3.2 Construction récursive des $S_w^{(q)}$, $w \in X^*$

La construction des éléments $S_w^{(q)}$, $w \in X^*$ est l'un des objectifs principaux de cette thèse. Elles sont en fait définie par la même relation récurrence que les S_w , $w \in X^*$. Pour cela rappelons la construction des S_w , $w \in X^*$ (3.32) dans [1, 2, 3] :

$$S_w = \begin{cases} w & \text{si } |w| = 1_{X^*} ; \\ aS_u & \text{si } w = au \text{ et } u \in \mathcal{Lyn}(X) ; \\ \frac{S_{\ell_1}^{\sqcup i_1} \sqcup \dots \sqcup S_{\ell_k}^{\sqcup i_k}}{i_1! \dots i_k!} & \text{si } w = \begin{cases} \ell_1^{i_1} \dots \ell_k^{i_k} \\ \ell_1 > \dots > \ell_k \in \mathcal{Lyn}(X) \\ k, i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{N}_{\geq 1}. \end{cases} \end{cases} \tag{4.49}$$

Le Théorème suivant nous donne la construction récursive des $S_w^{(q)}$, $w \in X^*$:

Théorème 10. *Soit $w \in X^*$. Alors*

$$S_w^{(q)} = \begin{cases} w & si & |w| = 1_{X^*} ; \\ aS_u^{(q)} & si & w = au \text{ et } w \in \mathcal{Lyn}(X) ; \\ \frac{(S_{\ell_1}^{(q)}) \sqcup_q i_1 \sqcup_q \dots \sqcup_q (S_{\ell_k}^{(q)}) \sqcup_q i_k}{[i_1]_{q|\ell_1|^2!} \dots [i_k]_{q|\ell_k|^2!}} & si & w = \begin{cases} \ell_1^{i_1} \dots \ell_k^{i_k} \\ \ell_1 > \dots > \ell_k \in \mathcal{Lyn}(X) \\ k, i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{N}_{\geq 1}. \end{cases} \end{cases} \quad (4.50)$$

Pour la preuve de ce Théorème, nous allons écrire la Proposition suivante :

Proposition 16. *Soient $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$ et $w = \ell_1^{i_1} \ell_2^{i_2} \dots \ell_k^{i_k}$ avec $\ell_1 > \ell_2 > \dots > \ell_k \in \mathcal{Lyn}(X)$, $k, i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Alors*

$$(i) Q_w = \frac{\ell_1^{\sqcup_q i_1} \sqcup_q \ell_2^{\sqcup_q i_2} \sqcup_q \dots \sqcup_q \ell_k^{\sqcup_q i_k}}{i_1! i_2! \dots i_k!} = w + \sum_{\substack{u < w \\ u, w \in X^\alpha}} \beta_u(1)u$$

où $\beta_u(1) = \langle Q_w \mid u \rangle \in \mathbb{N}$.

$$(ii) Q_w^{(q)} = \frac{\ell_1^{\sqcup_q i_1} \sqcup_q \ell_2^{\sqcup_q i_2} \sqcup_q \dots \sqcup_q \ell_k^{\sqcup_q i_k}}{[i_1]_{q|\ell_1|^2!} [i_2]_{q|\ell_2|^2!} \dots [i_k]_{q|\ell_k|^2!}} = w + \sum_{\substack{u < w \\ u, w \in X^\alpha}} \beta_u(q)u$$

où $\beta_u(q) = \langle Q_w^{(q)} \mid u \rangle \in \mathbb{Q}^+(q)$.

(iii) $\text{supp}(Q_w) = \text{supp}(Q_w^{(q)})$.

Preuve : (i) A partir de la Proposition 15, on peut écrire que : pour tous $\ell_j \in \mathcal{Lyn}(X)$, $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ on a : $\ell_j^{\sqcup_q i_j} = i_j! (\ell_j)^{i_j} + \sum_{v_j < (\ell_j)^{i_j}} c_{v_j}(1) v_j$ avec $c_{v_j}(1) = \langle \ell_j^{\sqcup_q i_j} \mid v_j \rangle$.

Les coefficients du support du polynôme $\ell_1^{\sqcup_q i_1} \sqcup_q \ell_2^{\sqcup_q i_2} \sqcup_q \dots \sqcup_q \ell_k^{\sqcup_q i_k}$ sont des entiers naturels tous divisible par $i_1! i_2! \dots i_k!$ et $\ell_1^{i_1} \ell_2^{i_2} \dots \ell_k^{i_k}$ apparaît dans ce polynôme.

$$\ell_1^{\sqcup_q i_1} \sqcup_q \ell_2^{\sqcup_q i_2} \sqcup_q \dots \sqcup_q \ell_k^{\sqcup_q i_k} = i_1! i_2! \dots i_k! \ell_1^{i_1} \dots \ell_k^{i_k} + \sum_{\substack{u < w \\ u, w \in X^\alpha}} \theta_u(1)u \quad (4.51)$$

De plus, en divisant (4.51) par $i_1! i_2! \dots i_k!$, on obtient Q_w .

(ii) A partir de la Proposition 15 et le Théorème 9, on peut écrire que : pour tous $\ell_j \in \mathcal{Lyn}(X)$, $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ on a : $\ell_j^{\sqcup_q i_j} = [i_j]_{q|\ell_j|^2!} (\ell_j)^{i_j} + \sum_{v_j < (\ell_j)^{i_j}} c_{v_j}(q) v_j$ avec $c_{v_j}(q) = \langle \ell_j^{\sqcup_q i_j} \mid v_j \rangle$ et $\langle \ell_1^{\sqcup_q i_1} \sqcup_q \ell_2^{\sqcup_q i_2} \sqcup_q \dots \sqcup_q \ell_k^{\sqcup_q i_k} \mid \ell_1^{i_1} \dots \ell_k^{i_k} \rangle = [i_1]_{q|\ell_1|^2!} \dots [i_k]_{q|\ell_k|^2!}$. Donc, on a :

$$\ell_1^{\sqcup_q i_1} \sqcup_q \ell_2^{\sqcup_q i_2} \sqcup_q \dots \sqcup_q \ell_k^{\sqcup_q i_k} = [i_1]_{q|\ell_1|^2!} \dots [i_k]_{q|\ell_k|^2!} \ell_1^{i_1} \dots \ell_k^{i_k} + \sum_{\substack{u < w \\ u, w \in X^\alpha}} \theta_u(q)u \quad (4.52)$$

De plus, en divisant (4.52) par $[i_1]_{q^{|\ell_1|^2}}! \cdots [i_k]_{q^{|\ell_k|^2}}!$, on obtient $Q_w^{(q)}$.
où $\theta_u(q) \in \mathbb{N}[q]$.

(iii) A partir de la Proposition 15 et le Théorème 9, on peut écrire que $\text{supp}(\ell^{\sqcup k}) = \text{supp}(\ell^{\sqcup q k})$ pour $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. De plus $\langle \ell_1^{\sqcup i_1} \sqcup \ell_2^{\sqcup i_2} \sqcup \cdots \sqcup \ell_k^{\sqcup i_k} \mid u \rangle = \beta_u(1) \in \mathbb{N}$ et $\langle \ell_1^{\sqcup q i_1} \sqcup_q \ell_2^{\sqcup q i_2} \sqcup_q \cdots \sqcup_q \ell_k^{\sqcup q i_k} \mid u \rangle = \beta_u(q) \in \mathbb{N}[q]$.

Par conséquent les polynômes $\ell_1^{\sqcup i_1} \sqcup \ell_2^{\sqcup i_2} \sqcup \cdots \sqcup \ell_k^{\sqcup i_k}$ et $\ell_1^{\sqcup q i_1} \sqcup_q \ell_2^{\sqcup q i_2} \sqcup_q \cdots \sqcup_q \ell_k^{\sqcup q i_k}$ ont les mêmes supports : $\text{supp}(\ell_1^{\sqcup i_1} \sqcup \ell_2^{\sqcup i_2} \sqcup \cdots \sqcup \ell_k^{\sqcup i_k}) = \text{supp}(\ell_1^{\sqcup q i_1} \sqcup_q \ell_2^{\sqcup q i_2} \sqcup_q \cdots \sqcup_q \ell_k^{\sqcup q i_k})$.

Par conséquent $\text{supp}(Q_w) = \text{supp}(Q_w^{(q)})$.

□

Preuve du Théorème 10 : Les $S_w^{(q)}$ sont en fait définie par la même relation récurrence que les S_w , $w \in X^*$. Les Propositions 15, 16 et le Théorème 9 justifient l'expression de la formule des $S_w^{(q)}$, $w \in X^*$.

□

Exemple 29. Soient $X = \{a < b\}$, $X^\alpha = a^2b^2$ et $M(X^\alpha) = \{aabb < abab < abba < baab < baba < bbaa\}$ l'ensemble de tous les mots multihomogènes de multidegré $\alpha = (2, 2)$.
Nous avons successivement :

$$\begin{aligned}
 S_{a^2b^2}^{(q)} &= a^2b^2 ; \\
 S_{abab}^{(q)} &= \frac{S_{ab}^{\sqcup q^2}}{1 + q^4} \\
 &= \frac{1}{1 + q^4} (ab \sqcup_q ab) = abab + \frac{q + 2q^2 + q^3}{1 + q^4} a^2b^2 ; \\
 S_{ab^2a}^{(q)} &= ab^2 \sqcup_q a \\
 &= (q^2 + q^3)a^2b^2 + ab^2a + qabab ; \\
 S_{ba^2b}^{(q)} &= b \sqcup_q a^2b \\
 &= ba^2b + qabab + (q^2 + q^3)a^2b^2 ; \\
 S_{baba}^{(q)} &= b \sqcup_q ab \sqcup_q a \\
 &= (q^5 + 2q^4 + q^3)a^2b^2 + (q^2 + 2q^3)abab + (q + q^2)ba^2b + (q + q^2)ab^2a + baba ; \\
 S_{b^2a^2}^{(q)} &= \frac{S_b^{\sqcup q^2}}{1 + q} \sqcup_q \frac{S_a^{\sqcup q^2}}{1 + q} \\
 &= b^2a^2 + q^4a^2b^2 + q^2ba^2b + q^2ab^2a + q^3abab + qbaba.
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

La matrice $N = (\langle S_u^{(q)} \mid v \rangle)_{u,v \in X^\alpha}$ recherchée est donc :

$$\begin{matrix} & a^2b^2 & abab & ab^2a & ba^2b & baba & b^2a^2 \\ \begin{matrix} S_{a^2b^2}^{(q)} \\ S_{abab}^{(q)} \\ S_{ab^2a}^{(q)} \\ S_{ba^2b}^{(q)} \\ S_{baba}^{(q)} \\ S_{b^2a^2}^{(q)} \end{matrix} & = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{q+2q^2+q^3}{1+q^4} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q^2+q^3 & q & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q^2+q^3 & q & 0 & 1 & 0 & 0 \\ q^5+2q^4+q^3 & q^2+2q^3 & q+q^2 & q+q^2 & 1 & 0 \\ q^4 & q^3 & q^2 & q^2 & q & 1 \end{pmatrix}. \end{matrix} \quad (4.54)$$

4.3.3 Caractérisation des éléments $S_w^{(q)}$, $w \in X^*$

Nous avons vu dans les paragraphes précédents que le produit de q -shuffle (\sqcup_q) est une interpolation entre le produit de shuffle (\sqcup) (pour $q = 1$) et le produit de concaténation (pour $q = 0$).

Les éléments $S_w^{(q)}$, $w \in X^*$ sont caractérisés par les Corollaires et les Lemmes suivants :

La base $(S_w^{(q)})_{w \in X^*}$ est une base q -analogue de $(S_w)_{w \in X^*}$. Par conséquent pour $q = 1$, on peut écrire le Corollaire suivant :

Corollaire 4. *Soit $w \in X^*$. Alors*

$$S_w = S_w^{(1)} = \begin{cases} w & si & |w| = 1_{X^*} ; \\ aS_u^{(1)} & si & w = au \text{ et } w \in \mathcal{Lyn}(X) ; \\ \frac{(S_{\ell_1}^{(1)}) \sqcup_{i_1} \sqcup \dots \sqcup (S_{\ell_k}^{(1)}) \sqcup_{i_k}}{i_1! \dots i_k!} & si & w = \begin{cases} \ell_1^{i_1} \dots \ell_k^{i_k} \\ \ell_1 > \dots > \ell_k \in \mathcal{Lyn}(X) \\ k, i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{N}_{\geq 1}. \end{cases} \end{cases} \quad (4.55)$$

Lemme 16. *Soit $w \in X^*$. Alors, $\text{supp}(S_w) = \text{supp}(S_w^{(q)})$.*

Preuve : Soit $w = \ell_1^{i_1} \dots \ell_k^{i_k}$, $\ell_1 > \dots > \ell_k \in \mathcal{Lyn}(X)$, $i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Rappelons que : $S_w = S_w^{(1)}$ et $Q_w^{(1)} = \frac{\ell_1^{\sqcup_{i_1}} \sqcup \ell_2^{\sqcup_{i_2}} \sqcup \dots \sqcup \ell_k^{\sqcup_{i_k}}}{i_1! i_2! \dots i_k!}$ et $Q_w^{(q)} = \frac{\ell_1^{\sqcup_{q i_1}} \sqcup \ell_2^{\sqcup_{q i_2}} \sqcup \dots \sqcup \ell_k^{\sqcup_{q i_k}}}{[i_1]_{q, \ell_1}! [i_2]_{q, \ell_2}! \dots [i_k]_{q, \ell_k}!}$.

Nous avons pu démontrer dans les Propositions 15 et 16 que $\text{supp}(\ell^{\sqcup k}) = \text{supp}(\ell^{\sqcup_q k})$ pour $\ell \in \mathcal{Lyn}(X)$ et que $\text{supp}(Q_w^{(1)}) = \text{supp}(Q_w^{(q)})$ pour $w \in X^*$.

Or dans [1, 2, 3], nous pouvons écrire que : $S_{\ell_j}^{(1)} = \ell_j + \sum_{u_j < \ell_j} \beta_{u_j}(1) u_j$ pour $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$.

Donc

$$S_w^{(1)} = \frac{(\ell_1 + \sum_{u_1 < \ell_1} \beta_{u_1}(1)u_1)^{\sqcup^{i_1}} \sqcup \cdots \sqcup (\ell_k + \sum_{u_k < \ell_k} \beta_{u_k}(1)u_k)^{\sqcup^{i_k}}}{i_1! \cdots i_k!} = Q_w^{(1)} + Q_w'^{(1)}$$

où $Q_w'^{(1)} = \sum_{u_1 \cdots u_k \in X^*} \beta_{u_1 \cdots u_k}(1) \frac{u_1 \sqcup \cdots \sqcup u_k}{i_1! \cdots i_k!}$ et $\beta_{u_1 \cdots u_k}(1) \in \mathbb{N}$. Par conséquent, nous pouvons écrire que :

$$S_w^{(q)} = \frac{(\ell_1 + \sum_{u_1 < \ell_1} \beta_{u_1}(q)u_1)^{\sqcup_q^{i_1}} \sqcup_q \cdots \sqcup_q (\ell_k + \sum_{u_k < \ell_k} \beta_{u_k}(q)u_k)^{\sqcup_q^{i_k}}}{[i_1]_{q|\ell_1|^2!} \cdots [i_k]_{q|\ell_k|^2!}} = Q_w^{(q)} + Q_w'^{(q)} \text{ et}$$

on obtient $Q_w'^{(q)} = \sum_{u_1, \dots, u_k \in X^*} \beta_{u_1 \cdots u_k}(q) \frac{u_1 \sqcup_q \cdots \sqcup_q u_k}{[i_1]_{q|\ell_1|^2!} \cdots [i_k]_{q|\ell_k|^2!}}$ avec $\beta_{u_1 \cdots u_k}(q) \in \mathbb{Q}^+(q)$.

A partir du Lemme 11, on a $\text{supp}(u_1 \sqcup \cdots \sqcup u_k) = \text{supp}(u_1 \sqcup_q \cdots \sqcup_q u_k)$. Donc $\text{supp}(Q_w'^{(1)}) = \text{supp}(Q_w'^{(q)})$.

Par conséquent $\text{supp}(Q_w^{(1)} + Q_w'^{(1)}) = \text{supp}(Q_w^{(q)} + Q_w'^{(q)})$. Donc $\text{supp}(S_w^{(1)}) = \text{supp}(S_w^{(q)})$.

□

Proposition 17. Soient $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$ et $w \in X^*$.

$$S_w^{(q)} = w + \sum_{\substack{v < w \\ v, w \in X^\beta}} \beta_v(q)v \quad , \quad \beta_v(q) = \langle S_w^{(q)} \mid v \rangle \in \mathbb{Q}^+(q) \quad (4.56)$$

Alors, la famille $(S_w^{(q)})_{w \in X^\alpha}$ est multihomogène et triangulaire inférieure.

Preuve : Un théorème dû a C.Reutenaeur [1, 2, 3] prouve que la famille $(S_w^{(1)})_{w \in X^\alpha}$ est multihomogène et triangulaire inférieure :

$$S_w^{(1)} = w + \sum_{\substack{v < w \\ v, w \in X^\alpha}} \alpha_v(1)v \quad \text{où} \quad \alpha_v(1) \in \mathbb{N},$$

et le Lemme 16 ($\text{supp}(S_w^{(1)}) = \text{supp}(S_w^{(q)})$) nous assure que la famille $(S_w^{(q)})_{w \in X^\alpha}$ est multihomogène et triangulaire inférieure.

□

Proposition 18. Soient $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$ et $w \in X^*$.

Alors, la famille $(S_w^{(q)})_{w \in X^\alpha}$ forme une base de $\mathbb{Q}(q)\langle X \rangle$.

Preuve : La famille $(S_w^{(q)})_{w \in X^\alpha}$ est multihomogène et triangulaire inférieure.

Il est facile de voir que $N = (\langle S_u^{(q)} \mid v \rangle)_{u, v \in X^\alpha}$ est inversible en tant que matrice de changement de base (voir Lemme 17).

□

4.4 Construction récursive des $P_w^{(q)}$, $w \in X^*$

Résumé : La construction donnée dans les paragraphes précédents montre que la famille $(S_w^{(q)})_{w \in X^*}$ est multihomogène et triangulaire inférieure, ce qui permet de considérer la famille duale, que nous désignons par $(P_w^{(q)})_{w \in X^*}$. Ces deux familles sont duales l'une de l'autre : $\langle S_u^{(q)} | P_v^{(q)} \rangle = \delta_{uv}$ pour tous $u, v \in X^*$. Par dualité, il est donc possible de construire la famille $(P_w^{(q)})_{w \in X^*}$ qui est l'objectif principal de cette partie.

4.4.1 Construction des éléments $P_w^{(q)}$, $w \in X^*$

Le processus de dualisation conserve les propriétés de multihomogénéité et de triangularité. Cependant, on peut alors construire les éléments $P_w^{(q)}$, $w \in X^*$ comme suit : Pour chaque multidegré $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$, on construit la matrice N des coefficients des $S_w^{(q)}$, $w \in X^\alpha$ sur les mots :

$$N_{u,v} = \langle S_u^{(q)} | v \rangle, \quad u, v \in X^\alpha \quad (4.57)$$

La matrice des coefficients des $P_w^{(q)}$, $w \in X^\alpha$ sur les mots, est donnée par :

$$M = (M_{u,v})_{u,v \in X^\alpha} = (\langle P_u^{(q)} | v \rangle)_{u,v \in X^\alpha} \quad (4.58)$$

Il est facile de voir que N est inversible en tant que matrice de changement de base.

$$u = \sum_{w \in X^*} \langle S_w^{(q)} | u \rangle P_w^{(q)} \quad \text{et} \quad u = \sum_{w \in X^*} \langle P_w^{(q)} | u \rangle S_w^{(q)}, \quad (4.59)$$

de manière équivalente

$$\langle S_u^{(q)} | P_v^{(q)} \rangle = \delta_{uv}, \quad \forall u, v \in X^* \quad (4.60)$$

Les matrices N et M vérifient l'identité $M = ({}^t N)^{-1}$.

Proposition 19. *Soit $w \in X^*$. Alors*

$$P_w^{(q)} = w - \sum_{u > w, |u|=|w|} \langle S_u^{(q)} | w \rangle P_u^{(q)} \quad (4.61)$$

Exemple 30. *Soient $X = \{a < b\}$, $X^\alpha = a^2 b^2$ et $M(X^\alpha) = \{aabb < abab < abba <$*

$baab < baba < bbaa$ } l'ensemble de tous les mots multihomogènes de multidegré $\alpha = (2, 2)$.

$$\begin{aligned}
P_{b^2a^2}^{(q)} &= b^2a^2 ; \\
P_{baba}^{(q)} &= baba - qP_{b^2a^2}^{(q)} \\
&= baba - qb^2a^2 ; \\
P_{ba^2b}^{(q)} &= ba^2b - (q + q^2)P_{baba}^{(q)} - q^2P_{b^2a^2}^{(q)} \\
&= ba^2b - (q + q^2)baba + q^3b^2a^2 ; \\
P_{ab^2a}^{(q)} &= ab^2a - (q + q^2)P_{baba}^{(q)} - q^2P_{b^2a^2}^{(q)} \\
&= ab^2a - (q + q^2)baba + q^3b^2a^2 ; \\
P_{abab}^{(q)} &= abab - qP_{ab^2a}^{(q)} - qP_{ba^2b}^{(q)} - (q^2 + 2q^3)P_{baba}^{(q)} - q^3P_{b^2a^2}^{(q)} \\
&= abab - qab^2a - qba^2b + q^2baba ; \\
P_{a^2b^2}^{(q)} &= a^2b^2 - \frac{q(q^2 + 2q + 1)}{1 + q^4}P_{abab}^{(q)} - (q^2 + q^3)P_{ab^2a}^{(q)} - (q^2 + q^3)P_{ba^2b}^{(q)} - (q^3 + 2q^4 + q^5)P_{baba}^{(q)} - q^4P_{b^2a^2}^{(q)} \\
&= a^2b^2 - \frac{q(q^2 + 2q + 1)}{1 + q^4}abab - \frac{q^3(q^4 + q^3 - q - 1)}{1 + q^4}ab^2a \\
&\quad - \frac{q^3(q^4 + q^3 - q - 1)}{1 + q^4}ba^2b + \frac{q^7(q^2 + 2q + 1)}{1 + q^4}baba - q^6b^2a^2.
\end{aligned} \tag{4.62}$$

La matrice recherchée $M = ({}^tN)^{-1} = (M_{u,v})_{u,v \in X^\alpha} = (\langle P_u^{(q)} \mid v \rangle)_{u,v \in X^\alpha}$ est donnée par

$$\begin{aligned}
& \begin{matrix} a^2b^2 & abab & ab^2a & ba^2b & baba & b^2a^2 \\ P_{a^2b^2}^{(q)} &= & \begin{pmatrix} 1 & \frac{-q(q^2+2q+1)}{1+q^4} & \frac{-q^3(q^4+q^3-q-1)}{1+q^4} & \frac{-q^3(q^4+q^3-q-1)}{1+q^4} & \frac{q^7(q^2+2q+1)}{1+q^4} & -q^6 \\ 0 & 1 & -q & -q & q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -q - q^2 & q^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -q - q^2 & q^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \end{matrix} \\
& \begin{matrix} P_{abab}^{(q)} \\ P_{ab^2a}^{(q)} \\ P_{ba^2b}^{(q)} \\ P_{baba}^{(q)} \\ P_{b^2a^2}^{(q)} \end{matrix} = \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{matrix} \tag{4.63}
\end{aligned}$$

4.4.2 Caractérisation des éléments $P_w^{(q)}$, $w \in X^*$

Nous avons vu dans les paragraphes précédents que le produit de q -shuffle (\sqcup_q) est une interpolation entre le produit de shuffle (\sqcup) (pour $q = 1$) et le produit de concaténation (pour $q = 0$).

Les éléments $P_w^{(q)}$, $w \in X^*$ sont caractérisés par :

Corollaire 5. Soient $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$ et $M(X^\alpha) = \{w_1 < w_2 < w_3 < \dots < w_m\}_{m \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ l'ensemble

de tous les mots multihomogènes de multidegré α . Alors

$$P_{w_{m-j}}^{(q)} = w_{m-j} - \sum_{r=m-j+1}^m \langle S_{w_r}^{(q)} | w_{m-j} \rangle P_{w_r}^{(q)} \quad \text{avec} \quad j \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket. \quad (4.64)$$

Proposition 20. Soit $w \in X^*$. Alors

$$P_w^{(1)} = P_w = \begin{cases} w & \text{si} \quad |w| = 1_{X^*}; \\ \left[P_{\ell_1}^{(1)}, P_{\ell_2}^{(1)} \right] & \text{si} \quad w = \ell \in \mathcal{Lyn}(X) \text{ et } (\ell_1, \ell_2) = \sigma(\ell); \\ (P_{\ell_1}^{(1)})^{i_1} \dots (P_{\ell_k}^{(1)})^{i_k} & \text{si} \quad w = \ell_1^{i_1} \dots \ell_k^{i_k} \text{ avec } \ell_1 > \dots > \ell_k \in \mathcal{Lyn}(X). \end{cases} \quad (4.65)$$

Preuve : Soient $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$ et $M(X^\alpha) = \{w_1 < w_2 < w_3 < \dots < w_m\}_{m \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ l'ensemble de tous les mots multihomogènes de multidegré α .

Par construction, nous pouvons écrire que (voir (4.59)) :

$$u = \sum_{w \in X^*} \langle S_w^{(q)} | u \rangle P_w^{(q)} \text{ et } u = \sum_{w \in X^*} \langle P_w^{(q)} | u \rangle S_w^{(q)} \text{ et à partir de l'équation (4.64), on a :}$$

$$P_{w_{m-j}}^{(1)} = w_{m-j} - \sum_{r=m-j+1}^m \langle S_{w_r}^{(1)} | w_{m-j} \rangle P_{w_r}^{(1)} \text{ avec } j \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, \text{ alors on a}$$

$$P_{w_{m-j}}^{(1)} = w_{m-j} - \sum_{r=m-j+1}^m \langle S_{w_r} | w_{m-j} \rangle P_{w_r}^{(1)} \text{ avec } j \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket .$$

$$\text{Donc } w_{m-j} = \sum_{r=m-j}^m \langle S_{w_r} | w_{m-j} \rangle P_{w_r}^{(1)} \text{ avec } j \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket.$$

$$\text{Par conséquent } \langle S_{w_i} | P_{w_j} \rangle = \langle S_{w_i}^{(1)} | P_{w_j}^{(1)} \rangle = \langle S_{w_i} | P_{w_j}^{(1)} \rangle = \delta_{w_i w_j} \text{ avec } i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket.$$

□

Proposition 21. Soient $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$ et $w \in X^*$.

$$P_w^{(q)} = w + \sum_{\substack{w < v \\ v, w \in X^\alpha}} \beta_v(q) v \quad , \quad \beta_v(q) = \langle P_w^{(q)} | v \rangle \in \mathbb{Q}(q) \quad (4.66)$$

Alors, la famille $(P_w^{(q)})_{w \in X^\alpha}$ est multihomogène et triangulaire supérieure.

Preuve : Le processus de dualisation conserve les propriétés de multihomogénéité et de triangularité. Par conséquent, la base duale d'une base triangulaire inférieure est triangulaire supérieure (voir Lemme 4).

De plus, le mot $w \in X^\alpha$ est le plus petit mot par rapport à l'ordre lexicographique tel que $\langle P_w^{(q)} | v \rangle \neq 0$, $\forall v \in X^\alpha : w = \min(\text{supp}(P_w^{(q)}))$.

□

Proposition 22. Soient $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$ et $w \in X^*$. Alors

les polynômes $(P_w^{(q)})_{w \in X^\alpha}$ forment une base de $\mathbb{Q}(q)\langle X \rangle$.

Preuve : Il est facile de voir que la matrice M est inversible (voir Lemme 21).

Le processus de dualisation conserve les propriétés de multihomogénéité et de triangularité. Par conséquent, la base duale d'une base triangulaire inférieure est une base triangulaire supérieure (voir Lemme 4).

□

Définition 31. Soient $\ell \in \mathcal{Lyn}(X)$ et $\sigma(\ell)$ sa factorisation standard.

Le $q^{|\ell|-1}$ -crochet de ℓ , noté $[\ell]_{q^{|\ell|-1}}$, est défini par

$$[\ell]_{q^{|\ell|-1}} = \begin{cases} \ell & \text{si } |\ell| = 1 ; \\ [l_1, l_2]_{q^{|\ell|-1}} & \text{si } \sigma(\ell) = (l_1, l_2) \text{ et } l_1, l_2 \in \mathcal{Lyn}(X) \end{cases} \quad (4.67)$$

Remarque 11. Soit $\ell \in \mathcal{Lyn}(X)$. Alors

$$\text{supp}(P_\ell^{(q)}) = \text{supp}(P_\ell^{(1)}) \iff P_\ell^{(q)} = [\ell]_{q^{|\ell|-1}} \quad (4.68)$$

Exemple 31. - $P_{ab}^{(q)} = [ab]_q = [a, b]_q = ab - qba$.

$$- P_{abb}^{(q)} = [abb]_{q^2} = [[a, b]_q, b]_{q^2} = abb - (q + q^2)bab + q^3bba.$$

$$- P_{bbbc}^{(q)} = [bbbc]_{q^3} = [b, [b, [b, c]_q]_{q^2}]_{q^3} = bbbc - (q + q^2 + q^3)bbcb + (q^3 + q^4 + q^5)bcbb - q^6cbbb.$$

Remarque 12. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $X = \{a < b\}$. Alors

$$P_{a^k b}^{(q)} = [a^k b]_{q^k} \quad \text{et} \quad P_{ab^k}^{(q)} = [ab^k]_{q^k}. \quad (4.69)$$

Définition 32. Soit $w \in X^*$. Alors, nous définissons le polynôme $P_w^{(q)}$ par :

$$P_w^{(q)} = \begin{cases} P_\ell^{(q)} & \text{si } w = \ell \in \mathcal{Lyn}(X) ; \\ (P_{\ell_1}^{(q)})^{i_1} \dots (P_{\ell_k}^{(q)})^{i_k} & \text{si } w = \ell_1^{i_1} \dots \ell_k^{i_k} \text{ avec } \ell_1 > \dots > \ell_k \in \mathcal{Lyn}(X). \end{cases} \quad (4.70)$$

Nous remarquons que le polynôme $P_w^{(q)}$ est le produit des $(P_\ell^{(q)})_{\ell \in \mathcal{Lyn}(X)}$ en appliquant le Théorème 5 .

Proposition 23. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$.

$$P_w^{(q)} = w + \sum_{\substack{w < v \\ v, w \in X^\alpha}} \beta_v(q)v \quad , \quad \beta_v(q) = \langle P_w^{(q)} \mid v \rangle \in \mathbb{Q}(q) \quad (4.71)$$

Alors, la famille $(P_w^{(q)})_{w \in X^\alpha}$ est multihomogène et triangulaire supérieure.

Preuve : Le mot $w \in X^\alpha$ est le plus petit mot par rapport à l'ordre lexicographique tel que $\langle P_w^{(q)} \mid v \rangle \neq 0$, $\forall v \in X^\alpha : w = \min(\text{supp}(P_w^{(q)}))$.

□

Proposition 24. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$. Alors, les polynômes $P_w^{(q)}$, $w \in X^\alpha$ forment une base de $\mathbb{Q}(q)\langle X \rangle$.

Preuve : Les mots de longueur $n = |w|$ sont combinaisons linéaires de polynômes homogènes de degré n associés aux mots de Lyndon. Ainsi, les polynômes associés aux mots de Lyndon et les mots de longueur n engendrent le même sous-espace (de $\mathbb{Q}(q)\langle X \rangle_n$), soit celui formé par des polynômes homogènes de degré n , qu'on note $\mathbb{Q}(q)\langle X \rangle$. On peut mettre les mots de X^* en bijection avec les polynômes. Les polynômes homogènes de degré n associés aux mots de Lyndon sont au même nombre que les mots de longueur n , pour chaque $n \geq 0$. Or, les mots de longueur n forment une base de $\mathbb{Q}(q)\langle X \rangle$; par conséquent, il est en est de même pour les polynômes homogènes de degré n associés aux mots de Lyndon.

□

Exemple 32. Soient $X = \{a < b\}$, $X^\alpha = a^2b^2$ et $M(X^\alpha) = \{aabb < abab < abba < baab < baba < bbaa\}$ l'ensemble de tous les mots multihomogènes de multidegré $\alpha = (2, 2)$.

$$\begin{array}{l}
 P_{a^2b^2}^{(q)} = \\
 P_{abab}^{(q)} = \\
 P_{ab^2a}^{(q)} = \\
 P_{ba^2b}^{(q)} = \\
 P_{baba}^{(q)} = \\
 P_{b^2a^2}^{(q)} =
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 a^2b^2 & abab & ab^2a & ba^2b & baba & b^2a^2 \\
 1 & \frac{-q(q^2+2q+1)}{1+q^4} & \frac{-q^3(q^4+q^3-q-1)}{1+q^4} & \frac{-q^3(q^4+q^3-q-1)}{1+q^4} & \frac{q^7(q^2+2q+1)}{1+q^4} & -q^6 \\
 0 & 1 & -q & -q & q^2 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & -q - q^2 & q^3 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -q - q^2 & q^3 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -q \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix} \quad (4.72)$$

4.4.3 Nouveau théorème q -analogue de Radford

Théorème 11. Tout mot $w \in X^*$ peut s'écrire comme combinaison linéaire (finie) de produits de q -shuffle (\sqcup_q) de mots de Lyndon.

Preuve : Elle se fait par la construction d'un système d'équations "triangulaire". Soient $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$, et $M(X^\alpha) = \{w_1 < w_2 < w_3 < \dots < w_m\}_{m \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ l'ensemble de tous les mots multihomogènes de multidegré α .

Soit la factorisation en produit décroissant de mots de Lyndon de $w = \ell_1^{i_1} \ell_2^{i_2} \dots \ell_k^{i_k} \in M(X^\alpha)$. Alors on peut écrire que : $\frac{\ell_1^{\sqcup_q i_1} \sqcup_q \ell_2^{\sqcup_q i_2} \sqcup_q \dots \sqcup_q \ell_k^{\sqcup_q i_k}}{[i_1]_q! [i_2]_q! \dots [i_k]_q!} = w + \sum_{u < w} \theta_u u$.

où $\theta_u \in \mathbb{Q}^+(q)$.

Cela implique que : $w = \frac{\ell_1 \sqcup_q \ell_2 \sqcup_q \ell_3 \dots \sqcup_q \ell_k}{[i_1]_q! [i_2]_q! \dots [i_k]_q!} - \sum_{u < w} \theta_u u.$

Soit $X = \{a < b\}$. On va se contenter de montrer comment marche l'algorithme sur tous les mots comportant 2 occurrences de la lettre $a \in X$ et 2 occurrences de la lettre $b \in X$. Il y a donc six mots à considérer : $M(X^\alpha) = \{aabb < abab < abba < baab < baba < bbaa\}$. On va les examiner par ordre lexicographique.

1) $aabb \in \mathcal{Lyn}(X)$. Il n'y a rien à faire.

2) $abab = ab.ab$ (factorisation de Lyndon). On calcule :

$$ab \sqcup_q ab = (1 + q^4)abab + (q + 2q^2 + q^3)aabb \quad (4.73)$$

On en déduit

$$abab = \frac{ab \sqcup_q ab - (q + 2q^2 + q^3)aabb}{1 + q^4}$$

or ab et $aabb$ sont des mots de Lyndon, donc c'est fini.

3) $abba = abb.a$ (factorisation de Lyndon). On calcule :

$$abb \sqcup_q a = q^3aabb + qabab + q^2aabb + abba$$

On en déduit

$$abba = abb \sqcup_q a - (q^2 + q^3)aabb - qabab$$

Or a , abb et $aabb$ sont des mots de Lyndon et l'on a déjà calculé $abab$ comme combinaison linéaire de produits de q -shuffle de mots de Lyndon, donc c'est fini.

4) $baab = b.aab$ (factorisation de Lyndon). On calcule :

$$b \sqcup_q aab = baab + qabab + (q^2 + q^3)aabb$$

On en déduit

$$baab = b \sqcup_q aab - qabab - (q^2 + q^3)aabb$$

Or b , ab et $aabb$ sont des mots de Lyndon et l'on a déjà calculé $abab$ comme combinaison linéaire de produits de q -shuffle de mots de Lyndon, donc c'est fini.

5) $baba = b.ab.a$ (factorisation de Lyndon). On calcule :

$$b \sqcup ab \sqcup_q a = baba + (q + q^2)baab + (q^2 + 2q^3)abab + (q^3 + 2q^4 + q^5)aabb + (q + q^2)abba$$

On en déduit

$$baba = b \sqcup_q ab \sqcup_q a - (q + q^2)baab - (q^2 + 2q^3)abab - (q^3 + 2q^4 + q^5)aabb - (q + q^2)abba$$

Or b , ab et $aabb$ sont des mots de Lyndon et l'on a déjà calculé $abba$, $baab$ et $abab$ comme combinaisons linéaire de produits de q -shuffle de mots de Lyndon, donc c'est fini.

6) $bbaa = b.b.a.a$ (factorisation de Lyndon). On calcule :

$$b \sqcup_q b \sqcup_q a \sqcup_q a = (1 + 2q + q^2)[bbaa + qbaba + q^2baab + q^4aabb + q^3abab + q^2abba]$$

On en déduit

$$bbaa = \frac{b \sqcup_q b \sqcup_q a \sqcup_q a}{1 + 2q + q^2} - qbaba - q^2baab - q^4aabb - q^3abab - q^2abba$$

Or b , b et $aabb$ sont des mots de Lyndon et l'on a déjà calculé $baba$, $abba$, $baab$ et abb comme combinaisons linéaire de produits de q -shuffle de mots de Lyndon, donc c'est fini.

□

A partir de ce théorème, on peut écrire le Corollaire suivant :

Corollaire 6. *i)* $(\mathbb{Q}\langle X \rangle, \sqcup, 1) \simeq \mathbb{Q}[\mathcal{Lyn}(X)]$.

ii) $(\mathbb{Q}(q)\langle X \rangle, \sqcup_q, 1) \simeq \mathbb{Q}(q)[\mathcal{Lyn}(X)]$.

Exemple 33.

$$\begin{aligned} babab + 2ab^2ab + 2abab^2 &= \frac{1}{2}ab \sqcup ab \sqcup b - 2a^2b^2 \sqcup b \in \mathbb{Q}[\mathcal{Lyn}(X)] \\ &= abab \sqcup b \in \mathbb{Q}[\mathcal{Lyn}(X)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{4q^3 + 2q^2 + q^4 - q^5 - 2q^6 - 1 - q^{10} - q^9 - q^8}{1 + q^4} aabbb + \frac{q + 3q^5 + 1 + 2q^4 + q^6 - 2q^7 - q^{11} - q^3}{1 + q^4} ababb + \frac{q^4(q + 2q^2 + q^3 - 1 - 2q^4 - q^8)}{1 + q^4} baabb \\ + (q^3 + q^2)abbab + q^4babab = \frac{1}{1 + q^4} ab \sqcup_q ab \sqcup_q b - (1 + q^4)a^2b^2 \sqcup_q b \in \mathbb{Q}(q)[\mathcal{Lyn}(X)] \end{aligned}$$

Chapitre 5

Multiplicativité des $P_w^{(q)}$, $w \in X^*$

Résumé : Le but de ce chapitre est d'étudier la multiplicativité des familles obtenues par dualité. Notre point de départ est un théorème dûs à Schützenberger [1, 2, 3], qui affirme que la factorisation de Schützenberger est établie dans le cas où la paire de bases en dualité comporte une base de Poincaré-Birkhoff-Witt de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie. La base duale est alors quasi-multiplicative pour le shuffle (c'est-à-dire multiplicative à une constante près). Ce chapitre comporte deux volets principaux : Dans un premier volet, nous redonnons une construction d'une paire de bases en dualité dans le cas de mots de Lyndon pur et dans le second volet, nous donnons une autre construction de paire de bases en dualité. Nous nous proposons donc d'étudier les conditions que doit satisfaire la base dont nous partons de sorte que la base duale permette l'écriture des factorisations.

Les principaux résultats de ce chapitre sont :

1. la Note 3 (Test numérique) caractérise la multiplicativité de la famille $(R_w^{(q)})_{w \in X^*}$ afin d'écrire les factorisations de \mathcal{D}_X (Note 5, 6) et $\mathcal{D}_X^{(q)}$ (Corollaire 10).
2. la Note 4 (Test numérique) caractérise la multiplicativité de la famille $(P_w^{(q)})_{w \in X^*}$ afin d'écrire les factorisations de \mathcal{D}_X (Note 5, 6) et $\mathcal{D}_X^{(q)}$ (Corollaire 10).

Ces différents résultats ont été présentés aux séminaires CALIN et aux journées du groupe de travail Combinatoire et Algébrique 2013 à l'Université Paris-Est(Marne-la-vallée).

5.1 Introduction

Nous vous rapelons que, les éléments P'_α , $\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}$ sont obtenus par l'application du Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (voir (4.70) et Théorème 5) et les P_α , $\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}$ sont obtenus par dualité.

Soit \mathcal{G} une algèbre de Lie sur \mathbb{K} et $P = (P_i)_{i \in I}$ une base ordonnée de \mathcal{G} .

Les éléments P'_α , pour $\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}$, forment une base de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ de \mathcal{G} . La base formée par les P'_α , pour $\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}$, est appelée *base de Poincaré-Birkhoff-Witt* de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ (voir Théorème 5).

Cette propriété de décomposition de chaque élément d'une base par rapport à son multiindice (une base $(P_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}}$ obtenue par l'application du Théorème 5 de Poincaré-Birkhoff-Witt satisfait la relation $P'_\alpha = \prod_{i \in \text{supp}(\alpha)} P_{e_i}^{\alpha_i} = \prod_{i \in \text{supp}(\alpha)} P_i^{\alpha_i}$) nous intéresse particulièrement et justifie l'introduction de la définition suivante.

Définition 33. Si $(T_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}}$ est une famille dans une algèbre commutative avec unité dont le produit est noté \times , nous dirons qu'elle est *multiplicative* si, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}$,

$$T_\alpha \times T_\beta = T_{\alpha+\beta} \quad \text{pour tous } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^{(I)} \quad (5.1)$$

Il est facile de voir que cette définition est équivalente à la propriété suivante :

$$T'_\alpha = \prod_{i \in \mathbb{N}} T_{e_i}^{\alpha_i} = T_\alpha.$$

Nous pouvons donner une caractérisation générale des familles multiplicatives dans une \mathbb{K} -algèbre associative et commutative avec unité \mathcal{A} . Pour cela, donnons la Définition et le Lemme suivants :

Définition 34. Soit \mathcal{L} une partie de \mathcal{A} . On appelle \mathcal{L} *base de transcendance* de \mathcal{A} sur \mathbb{K} si les \mathcal{L}^α , $\alpha \in \mathbb{N}^{(\mathcal{L})}$ voir (3.4), forment une base linéaire de \mathcal{L} de \mathcal{A} .

Définition 35. Soit \mathcal{L} une partie de \mathcal{A} . Alors la famille $(\mathcal{L}^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{(\mathcal{L})}}$ forme une base de \mathcal{A} si et seulement si \mathcal{L} est une base transcendance de \mathcal{A} sur \mathbb{K} .

Nous supposons ici que $(T_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}}$ est une famille libre multiplicative dans l'algèbre duale $\mathcal{U}^*(\mathcal{G})$ d'une algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ pour le produit de convolution $*$; S_α désigne la famille quasi-multiplicative que l'on construit grâce à la relation $S_\alpha = \frac{T_\alpha}{\alpha!}$ pour tout multiindice α . Cette construction repose, entre autres, sur la propriété suivante des éléments S_α :

$$S_\alpha * S_\beta = \frac{(\alpha + \beta)!}{\alpha! \beta!} S_{\alpha+\beta} \quad (5.2)$$

qui montre que cette famille est quasi-multiplicative (multiplicative à une constante près),

que l'on peut établir comme suit :

$$\begin{aligned}
 S_\alpha * S_\beta &= \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^{(I)}} \langle S_\alpha * S_\beta \mid P'_\gamma \rangle S_\gamma \\
 &= \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^{(I)}} \langle S_\alpha \otimes S_\beta \mid \Delta(P'_\gamma) \rangle^{\otimes 2} S_\gamma \\
 &= \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^{(I)}} \langle S_\alpha \otimes S_\beta \mid \sum_{\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma} \frac{\gamma!}{\gamma_1! \gamma_2!} P'_{\gamma_1} \otimes P'_{\gamma_2} \rangle^{\otimes 2} S_\gamma \\
 &= \frac{(\alpha + \beta)!}{\alpha! \beta!} S_{\alpha + \beta}.
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Cette propriété permet d'établir, par récurrence, que $\frac{S^{*\alpha_k}}{\alpha_k!} = S_{\alpha_k e_{i_k}}$ puis que

$$\frac{S^{*\alpha_1} * \dots * S^{*\alpha_k}}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} = S_\alpha. \tag{5.4}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 \prod_{i \in I}^{\rightarrow} e^{S_{e_i} \otimes P_i} &= \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{i_1 \geq \dots \geq i_k \\ \alpha_1, \dots, \alpha_k}} \frac{(S_{e_{i_1}} \otimes P_{i_1})^{\alpha_1} \dots (S_{e_{i_k}} \otimes P_{i_k})^{\alpha_k}}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} \\
 &= \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{i_1 \geq \dots \geq i_k \\ \alpha_1, \dots, \alpha_k}} \frac{S^{*\alpha_1} * \dots * S^{*\alpha_k} \otimes (P_{i_1})^{\alpha_1} \dots (P_{i_k})^{\alpha_k}}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} \\
 &= \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{i_1 \geq \dots \geq i_k \\ \alpha_1, \dots, \alpha_k}} \frac{S^{*\alpha_1} * \dots * S^{*\alpha_k}}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} \otimes P'_\alpha \\
 &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}} S_\alpha \otimes P'_\alpha \\
 &= Id_{U(\mathcal{G})}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

où la dernière étape repose sur la définition de la base $(P'_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}}$ par multiplications ordonnées. Le résultat suit alors en utilisant l'équation (5.4).

Nous cherchons donc les conditions qui permettent d'écrire que :

$$P'_\alpha = (P_{i_1})^{\alpha_1} \dots (P_{i_k})^{\alpha_k} = P_\alpha \tag{5.6}$$

5.2 Partant de la famille $(T_w^{(q)})_{w \in X^*}$

5.2.1 Objectif

Soient la famille $(T_w^{(q)})_{w \in X^*}$:

$$T_w^{(q)} = \begin{cases} \ell & \text{si } w = \ell \in \mathcal{Lyn}(X) ; \\ \frac{(T_{\ell_1}^{(q)}) \sqcup_q^{i_1} \sqcup_q \cdots \sqcup_q (T_{\ell_k}^{(q)}) \sqcup_q^{i_k}}{[i_1]_{q^{|\ell_1|^2}}! \cdots [i_k]_{q^{|\ell_k|^2}}!} & \text{si } w = \begin{cases} \ell_1^{i_1} \cdots \ell_k^{i_k} \\ \ell_1 > \cdots > \ell_k \in \mathcal{Lyn}(X) \\ k, i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{N}_{\geq 1}. \end{cases} \end{cases} \quad (5.7)$$

et sa famille duale $(R_w^{(q)})_{w \in X^*}$ telle que $\langle T_u^{(q)} | R_v^{(q)} \rangle = \delta_{uv}$ pour tous $u, v \in X^\alpha$. A partir de la Définition 32, nous pouvons écrire que :

$$R_w^{(q)} = \begin{cases} R_\ell^{(q)} & \text{si } w = \ell \in \mathcal{Lyn}(X) ; \\ (R_{\ell_1}^{(q)})^{i_1} \cdots (R_{\ell_k}^{(q)})^{i_k} & \text{si } w = \ell_1^{i_1} \cdots \ell_k^{i_k} \text{ avec } \ell_1 > \cdots > \ell_k \in \mathcal{Lyn}(X). \end{cases} \quad (5.8)$$

Nous nous attaquons maintenant au problème : partant de la base $(T_w^{(q)})_{w \in X^*}$, à qu'elle(s) condition(s) peut-on écrire que $R_w^{(q)} = R_w^{(q)}$?.

5.2.2 Caractérisation de la multiplicativité des $R_w^{(q)}$, $w \in X^*$

La famille $(T_w^{(q)})_{w \in X^*}$, elle est en fait définie par la même relation de récurrence que la famille $(S_w)_{w \in X^*}$, mais avec d'autres conditions initiales. De plus, le Corollaire 16 prouve que la famille $(T_w^{(q)})_{w \in X^\alpha}$ est multihomogène et triangulaire inférieure :

$$T_w^{(q)} = w + \sum_{\substack{u < w \\ u, w \in X^\alpha}} \langle T_w^{(q)} | u \rangle u. \quad (5.9)$$

Par dualité, il est donc possible de construire la famille duale $(R_w^{(q)})_{w \in X^\alpha}$: $\langle T_u^{(q)} | R_v^{(q)} \rangle = \delta_{uv}$ pour tous $u, v \in X^\alpha$.

Spécialisons notre alphabet au cas où $X = \{a, b\}$ avec $a < b$.

Montrons que le mot de Lyndon $a^2b^2abab \in \mathcal{Lyn}(X)$ figure dans le support du polynôme $R_{a^2b^2a^2b^2}^{(q)}$.

La factorisation de Lyndon de $a^2b^2a^2b^2$ est $a^2b^2a^2b^2 = (a^2b^2)(a^2b^2) = (a^2b^2)^2$. Ainsi, $R_{a^2b^2a^2b^2}^{(q)} = (R_{a^2b^2}^{(q)})^2$.

Calculons $R_{a^2b^2}^{(q)}$ (noter que $R_{a^2b^2}^{(q)} = R_{a^2b^2}^{(q)}$). Pour cela, calculons la matrice des coefficients $\langle T_u^{(q)} | v \rangle$ pour tous $u, v \in X^\alpha = a^2b^2$. La classe de multihomogénéité de $X^\alpha = a^2b^2$ est

$M(a^2b^2) = \{a^2b^2, abab, ab^2a, ba^2b, baba, b^2a^2\}$. Nous avons successivement :

$$\begin{aligned}
 T_{a^2b^2}^{(q)} &= a^2b^2 ; \\
 T_{abab}^{(q)} &= \frac{T_{ab}^{\sqcup_q^2}}{1+q^4} \\
 &= \frac{1}{1+q^4}(ab \sqcup_q ab) = abab + \frac{q+2q^2+q^3}{1+q^4}a^2b^2 ; \\
 T_{ab^2a}^{(q)} &= ab^2 \sqcup_q a \\
 &= (q^2+q^3)a^2b^2 + ab^2a + qabab ; \\
 T_{ba^2b}^{(q)} &= b \sqcup_q a^2b \\
 &= ba^2b + qabab + (q^2+q^3)a^2b^2 ; \\
 T_{baba}^{(q)} &= b \sqcup_q ab \sqcup_q a \\
 &= (q^5+2q^4+q^3)a^2b^2 + (q^2+2q^3)abab + (q+q^2)ba^2b + (q+q^2)ab^2a + baba ; \\
 T_{b^2a^2}^{(q)} &= \frac{T_b^{\sqcup_q^2}}{1+q} \sqcup_q \frac{T_a^{\sqcup_q^2}}{1+q} \\
 &= b^2a^2 + q^4a^2b^2 + q^2ba^2b + q^2ab^2a + q^3abab + qbaba.
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

La matrice $N = (\langle T_u^{(q)} | v \rangle)_{u,v \in X^\alpha}$ est donc :

$$\begin{matrix}
 & a^2b^2 & abab & ab^2a & ba^2b & baba & b^2a^2 \\
 \begin{matrix} T_{a^2b^2}^{(q)} \\ T_{abab}^{(q)} \\ T_{ab^2a}^{(q)} \\ T_{ba^2b}^{(q)} \\ T_{baba}^{(q)} \\ T_{b^2a^2}^{(q)} \end{matrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{q+2q^2+q^3}{1+q^4} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q^2+q^3 & q & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q^2+q^3 & q & 0 & 1 & 0 & 0 \\ q^5+2q^4+q^3 & q^2+2q^3 & q+q^2 & q+q^2 & 1 & 0 \\ q^4 & q^3 & q^2 & q^2 & q & 1 \end{pmatrix}.
 \end{matrix} \tag{5.11}$$

La matrice $M = ({}^tN)^{-1} = (M_{u,v})_{u,v \in X^\alpha} = (\langle R_u^{(q)} | v \rangle)_{u,v \in X^\alpha}$ est donnée par

$$\begin{matrix}
 & a^2b^2 & abab & ab^2a & ba^2b & baba & b^2a^2 \\
 \begin{matrix} R_{a^2b^2}^{(q)} \\ R_{abab}^{(q)} \\ R_{ab^2a}^{(q)} \\ R_{ba^2b}^{(q)} \\ R_{baba}^{(q)} \\ R_{b^2a^2}^{(q)} \end{matrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{-q(q^2+2q+1)}{1+q^4} & \frac{-q^3(q^4+q^3-q-1)}{1+q^4} & \frac{-q^3(q^4+q^3-q-1)}{1+q^4} & \frac{q^7(q^2+2q+1)}{1+q^4} & -q^6 \\ 0 & 1 & -q & -q & q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -q-q^2 & q^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -q-q^2 & q^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{matrix} \tag{5.12}$$

$$R_{a^2b^2}^{(q)} = a^2b^2 + \frac{-q(q^2+2q+1)}{1+q^4}abab + \frac{-q^3(q^4+q^3-q-1)}{1+q^4}ab^2a + \frac{-q^3(q^4+q^3-q-1)}{1+q^4}ba^2b + \frac{q^7(q^2+2q+1)}{1+q^4}baba - q^6b^2a^2.$$

Notre but est de vérifier si $R_w^{(q)} = R'_w^{(q)}$, pour tout $w \in X^*$: Vérifions si $\langle T_\ell^{(q)} \mid (R_l^{(q)})^n \rangle = 0$, pour tous $\ell, l \in \mathcal{Lyn}(X)$ et $n \geq 2$:

Prenons $\ell = a^2b^2abab \in \mathcal{Lyn}(X)$, $l = a^2b^2 \in \mathcal{Lyn}(X)$ et $n = 2$.

D'après les calculs : $T_{a^2b^2abab}^{(q)} = a^2b^2abab \in \mathcal{Lyn}(X)$ et

$$\langle T_{a^2b^2abab}^{(q)} \mid R_{a^2b^2a^2b^2}^{(q)} \rangle = \langle T_{a^2b^2abab}^{(q)} \mid (R_{a^2b^2}^{(q)})^2 \rangle = \frac{-q(q^2+2q+1)}{1+q^4}.$$

Ainsi, $R_{a^2b^2a^2b^2}^{(q)} = (R_{a^2b^2}^{(q)})^2 \neq R'_{a^2b^2a^2b^2}$.

Utilisons le critère de multiplicativité que nous présenterons plus loin (Lemme 17) : puisqu'il existe un élément $R_w^{(q)}$ avec $N_w \geq 2$ (précisément, $w = (a^2b^2)^2$ dont la factorisation en mots de Lyndon comporte deux éléments, donc $N_w = 2$) dont le support contient un mot de Lyndon, la famille $(R_w^{(q)})_{w \in X^\alpha}$ n'est pas multiplicative.

Rappelons que si $w = \ell_1^{i_1} \cdots \ell_k^{i_k}$ avec $\ell_1 > \cdots > \ell_k \in \mathcal{Lyn}(X)$ et $k, i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, on a $N_w = \sum_{1 \leq s \leq k} i_s$.

En fait, la formule (5.7) montre que les éléments de la famille $(T_w^{(q)})_{w \in X^\alpha}$ correspondent à la famille de produits $\mathcal{Lyn}(X) \sqcup_{q^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{N}(\mathcal{Lyn}(X))$. Or un théorème dû à Radford [28] assure que les mots de Lyndon forment une base transcendance de l'algèbre de shuffle $(\mathbb{Q}\langle X \rangle, \sqcup, 1)$ et la Définition 35 nous permet donc d'affirmer que la famille $(T_w^{(q)})_{w \in X^\alpha}$ est multiplicative.

Par conséquent, nous pouvons écrire le Lemme suivant :

Lemme 17. [7]

Si $\langle S_{e_i} \mid 1_{\mathcal{U}(\mathcal{G})} \rangle = 0$, $\forall i \in I$, la famille $(P_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}}$ est multiplicative si et seulement si

$$\forall i \in I, \forall \beta \in \mathbb{N}^{(I)}, |\beta| \geq 2, \langle S_{e_i} \mid P^\beta \rangle = 0. \quad (5.13)$$

De plus, on peut écrire le Lemme suivant (voir (5.8)) :

Lemme 18. *Soit $w \in X^*$. Alors,*

$$R_w^{(q)} = R'_w^{(q)} \iff \begin{cases} T_w^{(q)} = \ell & \text{si } w = \ell \in \mathcal{Lyn}(X); \\ \langle T_\ell^{(q)} \mid (R_l^{(q)})^n \rangle = 0 & \text{avec } \ell, l \in \mathcal{Lyn}(X) \text{ et } n \geq 2. \end{cases} \quad (5.14)$$

Dans un second temps, nous nous sommes appuyés sur des expérimentations numériques menées avec les logiciels Sage et Maple. Les fonctions utilisées sont présentées dans la feuille de travail Maple disponible au Chapitre 7 et section 7.4.

Note 3. Nous avons aussi vérifié, dans ce cadre, que l'on a bien :

$$R_w^{(q)} = R_w^{(q)}; \quad (5.15)$$

jusqu'à l'ordre 7 (c'est-à-dire pour tous les mots de longueur inférieure ou égale à 7), où le Test est effectué de la façon suivante :

$$R_w^{(q)} - R_w^{(q)} = 0 \quad \forall w \in X^*. \quad (5.16)$$

et

$$\langle T_u^{(q)} \mid R_v^{(q)} \rangle = 0 \quad \text{avec} \quad u > v \in X^* \quad (5.17)$$

Ceci confirme qu'il n'y a pas de contre-exemple de longueur plus petite que 8.

5.3 Partant de la famille $(S_w^{(q)})_{w \in X^*}$

5.3.1 Objectif

Soit la famille $(S_w^{(q)})_{w \in X^*}$:

$$S_w^{(q)} = \begin{cases} w & \text{si} \quad |w| = 1 ; \\ aS_u^{(q)} & \text{si} \quad w = au \text{ et } w \in \mathcal{Lyn}(X) ; \\ \frac{(S_{\ell_1}^{(q)})^{\sqcup_q i_1} \sqcup_q \dots \sqcup_q (S_{\ell_k}^{(q)})^{\sqcup_q i_k}}{[i_1]_{q^{\ell_1}!} \dots [i_k]_{q^{\ell_k}!}} & \text{si} \quad w = \begin{cases} \ell_1^{i_1} \dots \ell_k^{i_k} \\ \ell_1 > \dots > \ell_k \in \mathcal{Lyn}(X) \\ k, i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{N}_{\geq 1}. \end{cases} \end{cases}$$

A partir de la Définition 32, nous pouvons écrire que :

$$P_w^{(q)} = \begin{cases} P_\ell^{(q)} & \text{si} \quad w = \ell \in \mathcal{Lyn}(X) ; \\ (P_{\ell_1}^{(q)})^{i_1} \dots (P_{\ell_k}^{(q)})^{i_k} & \text{si} \quad w = \ell_1^{i_1} \dots \ell_k^{i_k} \text{ avec } \ell_1 > \dots > \ell_k \in \mathcal{Lyn}(X). \end{cases}$$

Nous nous attaquons maintenant au problème : partant de la base $(S_w^{(q)})_{w \in X^*}$, à qu'elle(s) condition(s) peut-on écrire que $P_w^{(q)} = P_w^{(q)}$?

5.3.2 Caractérisation de la multiplicativité des $P_w^{(q)}$, $w \in X^*$

Un théorème dû à C.Reutenaeur [1, 2, 3] nous permet donc d'affirmer que la famille $(S_w)_{w \in X^*}$ est quasi-multiplicative. Puisque $\text{supp}(S_w) = \text{supp}(S_w^{(q)})$, alors, la famille $(S_w^{(q)})_{w \in X^*}$ est aussi quasi-multiplicative :

$$S_\alpha \sqcup S_\beta = \frac{(\alpha + \beta)!}{\alpha! \beta!} S_{\alpha + \beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}^{(\mathcal{Lyn}(X))} \quad (5.18)$$

et

$$S_\alpha^{(q)} \sqcup_q S_\beta^{(q)} = \frac{(\alpha + \beta)_q!}{\alpha_q! \beta_q!} S_{\alpha + \beta}^{(q)}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}(\mathcal{Lyn}(X)) \quad (5.19)$$

où $\{w = \ell_1^{\alpha_1} \cdots \ell_k^{\alpha_k}, \ell_1 > \cdots > \ell_k \in \mathcal{Lyn}(X)\} \longleftrightarrow \alpha = \alpha_1 e_{\ell_1} + \cdots + \alpha_k e_{\ell_k}$ et $\alpha_q! = \prod_{1 \leq j \leq k} [\alpha_j]_q!^{\ell_j^2}$.

Par conséquent, nous pouvons écrire les Propositions, Lemmes et Corollaires suivants :

Proposition 25. *Soient $w \in X^*$ et $\ell \in \mathcal{Lyn}(X)$. Alors,*

$$\langle S_w^{(q)} \mid P_\ell^{(q)} \rangle = \delta_{w\ell}. \quad (5.20)$$

Preuve : A partir de la Définition 32, nous pouvons écrire que $P_\ell^{(q)} = P_\ell^{(q)}$. Donc $\langle S_w^{(q)} \mid P_\ell^{(q)} \rangle = \langle S_w^{(q)} \mid P_\ell^{(q)} \rangle = \delta_{w\ell}$.

□

Proposition 26. *Soient $u, v \in X^*$. Alors,*

$$\langle S_u^{(q)} \mid P_v^{(q)} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } u = v ; \\ 0 & \text{si } u < v \end{cases} \quad (5.21)$$

Preuve : Soient $u, v \in X^*$. Alors $S_u^{(q)} = u + \sum_{w < u} \langle S_u^{(q)} \mid w \rangle w$ et $P_v^{(q)} = v + \sum_{w > v} \langle P_v^{(q)} \mid w \rangle w$.

□

Dans un second temps, nous nous sommes appuyés sur des expérimentations numériques menées avec les logiciels Sage et Maple. Les fonctions utilisées sont présentées dans la feuille de travail Maple disponible au Chapitre 7 et section 7.4.

Note 4. *Nous avons aussi vérifié, dans ce cadre, que l'on a bien :*

$$P_w^{(q)} = P_w^{(q)}; \quad (5.22)$$

jusqu'à l'ordre 11 (c'est-à-dire pour tous les mots de longueur inférieure ou égale à 11), où le Test est effectué de la façon suivante :

$$P_w^{(q)} - P_w^{(q)} = 0 \quad \forall w \in X^*. \quad (5.23)$$

et

$$\langle S_u^{(q)} \mid P_v^{(q)} \rangle = 0 \quad \text{avec } u > v \in X^* \quad (5.24)$$

Ceci confirme qu'il n'y a pas de contre-exemple de longueur plus petite que 12.

Chapitre 6

Factorisations tangentes à l'identité : $\mathcal{D}_X^{(q)}$

Résumé : Le but de ce chapitre est d'écrire des factorisations tangentes à l'identité. Notre point de départ est un théorème dû à Schützenberger [1, 2, 3], qui affirme que la série diagonale, considérée comme une série sur X^* , à coefficients dans l'algèbre de shuffle $(\mathbb{Q}\langle X \rangle, \sqcup, 1)$, peut être factorisée en un produit infini d'exponentielles de Lie, indexées par les mots de Lyndon, pris dans l'ordre décroissant. Ce chapitre comporte trois volets principaux : Dans un premier volet, nous donnons une illustration des factorisations tangentes à l'identité. Dans un second volet, nous donnons une écriture de la factorisation de l'identité. Enfin, nous donnons une écriture des factorisations tangentes à l'identité. Les principaux résultats de ce chapitre sont :

1. Ecriture des factorisations : \mathcal{D}_X (Note 5, 6) et $\mathcal{D}_X^{(q)}$ (Corollaire 10)

Ces différents résultats ont été présentés aux séminaires CALIN et aux journées du groupe de travail Combinatoire et Algébrique 2013 à l'Université Paris-Est(Marne-la-vallée).

6.1 Illustration

On va voir comme illustration les directions tangentes à la sphère. En chaque point sur la sphère, on peut considérer les deux *vecteurs vitesses* suivants :

\vec{M} avancer à $100km/h$ en suivant le méridien du nord vers le sud.

\vec{P} avancer à $100km/h$ en suivant le parallèle vers l'est.

Les deux vecteurs \vec{M} et \vec{P} sont portés par des directions, c'est-à-dire par des droites tangentes à la sphère. Ils sont situés entièrement dans le plan tangent à la sphère au point considéré. Ils ne sont pas sur la sphère, mais ils s'en "décollent" (voir la figure (6.1a fig3))

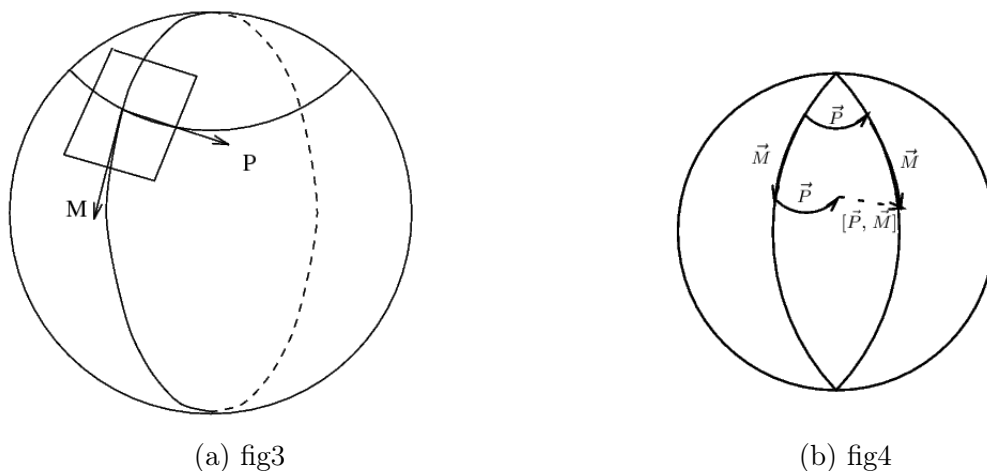


FIGURE 6.1 – les deux vecteurs vitesses dans le plan tangent

)

Par contre, ils indiquent un *mouvement* qui se fait sur la sphère : celui qui est obtenu en faisant une *intégration* de la fonction vitesse. Mathématiquement, cela se traduit par des *exponentielles*.

Le mouvement le long de la sphère, suivant le méridien, pendant 1 heure sera représenté par l'exponentielle e^M . Le mouvement pendant 1 heure suivant le méridien suivi du mouvement pendant 1 heure suivant le parallèle sera représenté par le produit : $e^P e^M$.

Or la direction PM (chemin suivant \vec{M} puis suivant \vec{P}) et la direction MP (chemin suivant \vec{P} puis suivant \vec{M}) ne sont pas égales, comme on peut s'en rendre compte par un simple dessin (voir la figure (6.1b fig4)).

Par contre, on peut se convaincre que la différence

$$[P, M] = PM - MP$$

représente une nouvelle direction de mouvement (un nouveau vecteur vitesse).

Sur les véritables mouvements (les exponentielles), on va tester la composition indiquée par le dessin :

$$e^P e^M e^{-P} e^{-M}$$

(on chemine " à l'envers" suivant \vec{M} , puis suivant \vec{P} , puis on chemine à l'endroit suivant \vec{M} , puis suivant \vec{P}).

Le cheminement composé obtenu aura lieu suivant une direction de mouvement qui n'est autre que $[\vec{P}, \vec{M}]$. Vérifions ce fait pour des cheminements durant un temps ε petit.

$$e^{\varepsilon P} = 1 + \varepsilon P + \frac{\varepsilon^2}{2!} P^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

$$e^{\varepsilon M} = 1 + \varepsilon M + \frac{\varepsilon^2}{2!} M^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

$$e^{-\varepsilon P} = 1 - \varepsilon P + \frac{\varepsilon^2}{2!} P^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

$$e^{-\varepsilon M} = 1 - \varepsilon M + \frac{\varepsilon^2}{2!} M^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

Dans le produit $e^{\varepsilon P} e^{\varepsilon M} e^{-\varepsilon P} e^{-\varepsilon M}$ beaucoup de termes s'en vont. Il faut calculer soigneusement car le produit n'est pas commutatif. On obtient finalement :

$$e^{\varepsilon P} e^{\varepsilon M} e^{-\varepsilon P} e^{-\varepsilon M} = 1 + \varepsilon^2 [P, M] + \mathcal{O}(\varepsilon^3) = 1 + \Theta, \text{ avec } \Theta = \varepsilon^2 [P, M] + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

C'est donc bien la direction de mouvement portée par le vecteur $[P, M] = PM - MP$ qui est apparue. Ce nouveau vecteur vitesse est encore un vecteur tangent à la sphère.

6.2 Factorisation de l'identité : \mathcal{D}_X

6.2.1 Objectif

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$. Posons que :

$$\begin{aligned} \prod_{\ell \in \mathcal{L}yn(X)}^{\rightarrow} e_{q^{|\ell|^2}}^{S_\ell^{(q)} \otimes P_\ell^{(q)}} &= \sum_{w \in X^\alpha} S_w^{(q)} \otimes P_w^{(q)} \\ &= \sum_{w \in X^\alpha} w \otimes w + \Theta \\ &= \mathcal{D}_X + \Theta. \end{aligned} \tag{6.1}$$

avec $\Theta = \sum_{u < w < v \in X^\alpha} \langle S_w^{(q)} | u \rangle u \otimes \langle P_w^{(q)} | v \rangle v$.

Dans les sections précédentes (voir (3.39) et (3.41)), nous avons vu que la série diagonale (\mathcal{D}_X),

considérée comme une série sur X^* , à coefficients dans l'algèbre de shuffle $(\mathbb{Q}\langle X \rangle, \sqcup, 1)$, peut être factorisée en un produit infini d'exponentielles de Lie, indexées par les mots de Lyndon pris dans l'ordre décroissant.

Dans le but d'étendre ce résultat (voir (3.39) et (3.41)) que nous avons entrepris nos travaux sur le produit de shuffle (\sqcup) et le produit de q -shuffle (\sqcup_q) en donnant une construction effective de paire de bases en dualité.

Nous nous attaquons maintenant au problème : partant de la base $(S_w^{(q)})_{w \in X^\alpha}$, à qu'elle(s) condition(s) peut-on écrire que $\Theta = \sum_{u < w < v \in X^\alpha} \langle S_w^{(q)} | u \rangle u \otimes \langle P_w^{(q)} | v \rangle v = 0$?

Cette question est aussi motivée par la considération de ce qui est fait une construction où l'on considère une paire de bases en dualité.

6.2.2 Ecriture de \mathcal{D}_X

Dans un premier temps, nous allons montrer que $\sum_{w \in X^\alpha} w \otimes w = \sum_{w \in X^\alpha} S_w^{(q)} \otimes P_w^{(q)}$ par le Théorème suivant :

Théorème 12. *Soit $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$. Alors*

$$\sum_{w \in X^\alpha} w \otimes w = \sum_{w \in X^\alpha} S_w^{(q)} \otimes P_w^{(q)} \quad (6.2)$$

Preuve : Tout polynôme $P \in \mathbb{Q}\langle X \rangle$ peut s'écrire : $P = \sum_{w \in X^\alpha} \langle S_w^{(q)} | P \rangle P_w^{(q)}$. En particulier, pour tout mot v de X^α , on a :

$$v = \sum_{w \in X^\alpha} \langle S_w^{(q)} | v \rangle P_w^{(q)}$$

et la série diagonale peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{v \in X^\alpha} v \otimes v &= \sum_{v \in X^\alpha} v \otimes \left(\sum_{w \in X^\alpha} \langle S_w^{(q)} | v \rangle P_w^{(q)} \right) \\ &= \sum_{w \in X^\alpha} \left(\sum_{v \in X^\alpha} \langle S_w^{(q)} | v \rangle v \right) \otimes P_w^{(q)} \\ &= \sum_{w \in X^\alpha} S_w^{(q)} \otimes P_w^{(q)} \\ &= \sum_{v \in X^\alpha} S_v^{(q)} \otimes P_v^{(q)} \end{aligned} \quad (6.3)$$

□

Corollaire 7. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$. Alors

$$\mathcal{D}_X = \sum_{w \in X^\alpha} w \otimes w = \sum_{w \in X^\alpha} S_w^{(q)} \otimes P_w^{(q)} \quad (6.4)$$

Lemme 19. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$. Alors

$$P_w^{(q)} = P_w'^{(q)} \iff \Theta = 0, \forall w \in X^\alpha \quad (6.5)$$

Preuve : *i)* Supposons que $P_w^{(q)} = P_w'^{(q)}$, $\forall w \in X^\alpha$, alors, on a :

$$\begin{aligned} \prod_{\ell \in \mathcal{Lyn}(X)} e_{q^{|\ell|^2}}^{S_\ell^{(q)} \otimes P_\ell^{(q)}} &= \prod_{\ell \in \mathcal{Lyn}(X)} \sum_{i \geq 0} \frac{1}{[i]_{q^{|\ell|^2}}!} S_\ell^{\sqcup_q i} \otimes (P_\ell^{(q)})^i \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k \geq 1, \ell_1 > \dots > \ell_k} \frac{1}{[i_1]_{q^{|\ell_1|^2}}! \dots [i_k]_{q^{|\ell_k|^2}}!} (S_{\ell_1}^{(q)})^{\sqcup_q i_1} \sqcup_q \dots \sqcup_q (S_{\ell_k}^{(q)})^{\sqcup_q i_k} \otimes (P_{\ell_1}^{(q)})^{i_1} \dots (P_{\ell_k}^{(q)})^{i_k} \\ &= \sum_{w \in X^\alpha} S_w^{(q)} \otimes P_w^{(q)} \\ &= \sum_{w \in X^\alpha} S_w^{(q)} \otimes P_w^{(q)} = \sum_{w \in X^\alpha} w \otimes w. \end{aligned}$$

ii) Supposons que $\Theta = 0$, alors, on a : $\prod_{\ell \in \mathcal{Lyn}(X)} e_{q^{|\ell|^2}}^{S_\ell^{(q)} \otimes P_\ell^{(q)}} = \mathcal{D}_X$ et $P_w^{(q)} = P_w'^{(q)}$, $\forall w \in X^\alpha$.

□

Corollaire 8. Soient $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$, $X^\alpha = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}$ avec $a_1 < a_2 < \dots < a_n \in X$ et $M(X^\alpha) = \{w_1 < w_2 < \dots < w_m\}$.

$$P_w^{(q)} = P_w'^{(q)} \iff \mathcal{D}_X = \prod_{\ell \in \mathcal{Lyn}(X)} e_{q^{|\ell|^2}}^{S_\ell^{(q)} \otimes P_\ell^{(q)}}, \quad \forall w \in M(X^\alpha). \quad (6.6)$$

Dans un second temps, nous nous sommes appuyés sur des expérimentations numériques menées avec les logiciels Sage et Maple. Les fonctions utilisées sont présentées dans la feuille de travail Maple disponible au Chapitre 7 et section 7.4. Nous pouvons écrire la factorisation de l'identité (Schützenberger) (voir (3.39) et (3.41)) comme suit :

Note 5. Nous avons aussi vérifié, dans ce cadre, que l'on a bien :

$$\mathcal{D}_X = \sum_{w \in X^\alpha} w \otimes w \equiv \prod_{\ell \in \mathcal{Lyn}(X)} e^{T_\ell^{(q)} \otimes R_\ell^{(q)}} \pmod{7}; \quad (6.7)$$

c'est-à-dire pour tous les mots de longueur inférieure ou égale à 7, où le produit est calculé de la façon suivante :

$$\prod_{\ell \in \mathcal{Lyn}(X)} e^{T_\ell^{(q)} \otimes R_\ell^{(q)}} = \prod_{\ell \in \mathcal{Lyn}(X)} e^{\ell \otimes R_\ell^{(q)}} = \sum_{\substack{\ell_1 \geq \dots \geq \ell_k \\ \ell_1, \dots, \ell_k \in \mathcal{Lyn}(X)}} T_{\ell_1 \dots \ell_k}^{(q)} \otimes R_{\ell_1}^{(q)} \dots R_{\ell_k}^{(q)}. \quad (6.8)$$

Ceci confirme qu'il n'y a pas de contre-exemple de longueur plus petite que 8.

Note 6. Nous avons aussi vérifié, dans ce cadre, que l'on a bien :

$$\mathcal{D}_X = \sum_{w \in X^\alpha} w \otimes w \equiv \prod_{\ell \in \text{Lyn}(X)}^{\searrow} e^{S_\ell^{(q)} \otimes P_\ell^{(q)}} \pmod{11}; \quad (6.9)$$

c'est-à-dire pour tous les mots de longueur inférieure ou égale à 11, où le produit est calculé de la façon suivante :

$$\prod_{\ell \in \text{Lyn}(X)}^{\searrow} e^{S_\ell^{(q)} \otimes P_\ell^{(q)}} = \sum_{\substack{\ell_1 \geq \dots \geq \ell_k \\ \ell_1, \dots, \ell_k \in \text{Lyn}(X)}} S_{\ell_1 \dots \ell_k}^{(q)} \otimes P_{\ell_1}^{(q)} \dots P_{\ell_k}^{(q)}. \quad (6.10)$$

Ceci confirme qu'il n'y a pas de contre-exemple de longueur plus petite que 12.

6.3 Factorisations tangentes à l'identité : $\mathcal{D}_X^{(q)}$

6.3.1 Objectif

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$. Posons que :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_X^{(q)} &= \prod_{\ell \in \text{Lyn}(X)}^{\searrow} e_{q^{|\ell|^2}}^{S_\ell^{(q)} \otimes P_\ell^{(q)}} \\ &= \sum_{w \in X^\alpha} S_w^{(q)} \otimes P_w^{(q)} \\ &= \sum_{w \in X^\alpha} w \otimes w + \Theta \\ &= \mathcal{D}_X + \Theta. \end{aligned} \quad (6.11)$$

avec $\Theta = \sum_{u < w < v \in X^\alpha} \langle S_w^{(q)} \mid u \rangle u \otimes \langle P_w^{(q)} \mid v \rangle v$.

Dans les sections précédentes (voir (3.39) et (3.41)), nous avons vu que la série diagonale (\mathcal{D}_X), considérée comme une série sur X^* , à coefficients dans l'algèbre de shuffle $(\mathbb{Q}\langle X \rangle, \sqcup, 1)$, peut être factorisée en un produit infini d'exponentielles de Lie, indexées par les mots de Lyndon pris dans l'ordre décroissant.

Dans le but d'écrire des factorisations tangentes à l'identité, que nous avons entrepris nos travaux sur le produit de shuffle (\sqcup) et le produit de q -shuffle (\sqcup_q) en donnant une construction effective de paire de bases en dualité.

Nous nous attaquons maintenant au problème : partant de la base $(S_w^{(q)})_{w \in X^\alpha}$, à qu'elle(s) condition(s) peut-on écrire que $\Theta = \sum_{u < w < v \in X^\alpha} \langle S_w^{(q)} | u \rangle u \otimes \langle P_w^{(q)} | v \rangle v \neq 0$?

Cette question est aussi motivée par la considération de ce qui est fait une construction où l'on considère une paire de bases en dualité.

6.3.2 Ecriture de $\mathcal{D}_X^{(q)}$

Lemme 20. *Soit $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$.*

$\Theta \neq 0$ si seulement s'il existe au moins un mot $w \in X^\alpha$ tel que $P_w^{(q)} \neq P_w^{(q)}$.

Preuve : *i)* Supposons que $P_w^{(q)} \neq P_w^{(q)}$, alors, on a :

$$\begin{aligned} \prod_{\ell \in \text{Lyn}(X)} e_{q^{|\ell|^2}}^{S_\ell^{(q)} \otimes P_\ell^{(q)}} &= \prod_{\ell \in \text{Lyn}(X)} \sum_{i \geq 0} \frac{1}{[i]_{q^{|\ell|^2}}!} S_\ell^{\sqcup_q i} \otimes (P_\ell^{(q)})^i \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k \geq 1, \ell_1 > \dots > \ell_k} \frac{1}{[i_1]_{q^{|\ell_1|^2}}! \dots [i_k]_{q^{|\ell_k|^2}}!} (S_{\ell_1}^{(q)})^{\sqcup_q i_1} \sqcup_q \dots \sqcup_q (S_{\ell_k}^{(q)})^{\sqcup_q i_k} \otimes (P_{\ell_1}^{(q)})^{i_1} \dots (P_{\ell_k}^{(q)})^{i_k} \\ &= \sum_{w \in X^\alpha} S_w^{(q)} \otimes P_w^{(q)} \\ &= \sum_{w \in X^\alpha} w \otimes w + \Theta = \sum_{w \in X^\alpha} S_w^{(q)} \otimes P_w^{(q)} + \Theta. \end{aligned}$$

ii) Supposons que $\Theta \neq 0$, alors, on a : $\sum_{w \in X^\alpha} S_w^{(q)} \otimes P_w^{(q)} \neq \sum_{w \in X^\alpha} S_w^{(q)} \otimes P_w^{(q)}$.

□

Corollaire 9. *Soient $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$, $X^\alpha = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}$ avec $a_1 < a_2 < \dots < a_n \in X$ et $M(X^\alpha) = \{w_1 < w_2 < \dots < w_m\}$.*

$$P_w^{(q)} = P_w^{(q)} \iff \mathcal{D}_X^{(q)} = \mathcal{D}_X, \quad \forall w \in M(X^\alpha) \quad (6.12)$$

Corollaire 10. *Soient $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$, $X^\alpha = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}$ avec $a_1 < a_2 < \dots < a_n \in X$ et $M(X^\alpha) = \{w_1 < w_2 < \dots < w_m\}$.*

$$\mathcal{D}_X^{(q)} = \mathcal{D}_X + \Theta \quad (6.13)$$

si seulement s'il existe au moins un mot $w \in M(X^\alpha)$ tel que $P_w^{(q)} \neq P_w^{(q)}$.

Chapitre 7

Conclusion générale- Perspectives-Feuilles de calculs Maple

7.1 Conclusion générale

1. Un q - analogue du procédé de C.Reutenaeur [1, 2, 3] (voir (3.32) et (3.29)) nous a permis de construire récursivement les éléments $S_w^{(q)}$, $w \in X^*$ à partir des S_w , $w \in X^*$. Des propriétés précisées dans le cas de la construction de la famille $(S_w)_{w \in X^*}$ s'avèrent encore vraies dans le cas de la construction de la famille $(S_w^{(q)})_{w \in X^*}$. En effet, cette méthode nous a permis de dire que $\text{supp}(S_w) = \text{supp}(S_w^{(q)})$, $\forall w \in X^*$. La dualisation nous a permis d'obtenir une base $(P_w^{(q)})_{w \in X^*}$ en dualité avec la base $(S_w^{(q)})_{w \in X^*}$. Ce couple de bases a permis l'écriture des factorisations tangentes à l'identité. Le processus de dualisation conserve les propriétés de multihomogénéité et de triangularité. Par conséquent, la base duale d'une base triangulaire inférieure est une base triangulaire supérieure.
2. Nous avons étudié les propriétés de multiplicativité de certaines bases obtenues par dualité : $(R_w^{(q)})_{w \in X^*}$ et $(P_w^{(q)})_{w \in X^*}$. Cette question est intimement liée à la propriété de multiplicativité de certaines bases, ce qui nous a poussé à répondre à la question des conditions permettant d'affirmer qu'une base obtenue par dualité est multiplicative (Lemme 18 et Note 3 et 4 (Test numérique)). Nous avons illustré ces questions en nous intéressant à des bases obtenues par dualité à partir des mots de Lyndon. Les expérimentations numériques menées dans cette direction n'ont pas été, jusque-là concluantes. Le problème vient principalement de la longueur des calculs intéressants : Par conséquent, il est nécessaire de considérer des mots de longueur relativement importante qui impliquent des calculs de longue durée.
3. La famille duale d'une famille multiplicative $(T_w^{(q)})_{w \in X^*}$ (5.7) n'est pas en général

multiplicative (Note 3).

4. Enfin, dans le but de montrer que $\mathcal{D}_X = \prod_{\ell \in \mathcal{L}ym(X)}^{\rightarrow} e_{q^{|\ell|^2}}^{S_\ell^{(q)} \otimes P_\ell^{(q)}}$, nous nous sommes appuyés sur des expérimentations numériques menées avec les logiciels Maple et Sage : Voir Chapitre 7-Section 7.4. Les expérimentations numériques menées dans cette direction n'ont pas été jusque-la concluante. Par conséquent, il est donc nécessaire d'écrire des factorisations : \mathcal{D}_X (Note 5, 6) et $\mathcal{D}_X^{(q)}$ (Corollaire 10).

7.2 Perspectives

1. Le cas des mots de Hall est particulièrement intéressant et nous nous proposons d'étudier à l'avenir, le lien entre les paires de bases en dualité : $(S_\ell^{(q)}, P_\ell^{(q)})_{\ell \in \mathcal{L}ym(X)}$ et $(S_h^{(q)}, P_h^{(q)})_{h \in \mathcal{H}all(X)}$. En particulier, nous montrerons que : $\mathcal{D}_X^{(q)} = \mathcal{D}_X$ où

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_X^{(q)} &= \prod_{h \in \mathcal{H}all(X)}^{\rightarrow} e_{q^{|h|^2}}^{S_h^{(q)} \otimes P_h^{(q)}} \\
 &= \sum_{w \in X^\alpha} S_w^{(q)} \otimes P_w^{(q)} \\
 &= \sum_{w \in X^\alpha} w \otimes w + \Theta \\
 &= \mathcal{D}_X + \Theta
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

avec $\Theta = \sum_{u < w < v \in X^\alpha} \langle S_w^{(q)} | u \rangle u \otimes \langle P_w^{(q)} | v \rangle v$ et $\mathcal{H}all(X)$ est l'ensemble des mots de Hall sur X .

2. Par ailleurs, comme nous l'avons déjà mentionné, il est important de se demander si les travaux menés avec le produit de shuffle \sqcup dans le cas de l'algèbre libre se généralisent à ses déformations (voir [27] et [17]).
3. Enfin, les possibilités ouvertes par l'utilisation des outils numériques incitent à continuer le travail de développement commencé pour ces travaux et qui nous a permis d'étudier à fond certaines démonstrations et exemples .

7.3 Autres résultats : Bases duales pour les fonctions symétriques non commutatives et les fonctions quasi- symétriques via la factorisation monoïdale [8]

Résumé : Dans cette partie, nous proposons une construction effective, via la factorisation monoïdale de Schützenberger, des bases duales pour les fonctions symétriques non commutatives et les fonctions quasi-symétriques[8].

7.3.1 Notations et compositions d'entiers [8]

On dit qu'une suite finie d'entiers strictement positifs $I = (i_1, \dots, i_k) \in (\mathbb{N}_+)^*$ est une composition de n si

$$\sum_{1 \leq s \leq k} i_s = n. \quad (7.2)$$

Chaque entier $n \geq 1$ a un nombre de composition égal à 2^{n-1} . On définit les parts i_s , le poids $w(I) = \sum_{1 \leq s \leq k} i_s$, la longueur $l(I) = k$ et les multiplicités $m_s(I)$ d'une composition I de la même manière que dans le cas des partitions. Pour deux compositions I et J données, on note $I.J$ la composition obtenue en concaténant I et J . Pour n'importe quelle suite $(u_n)_{n \geq 1}$ et n'importe quelle composition I , on pose

$$u^I = \prod_{1 \leq s \leq k} u_{i_s}. \quad (7.3)$$

Pour toute composition de I , on désigne par $\tilde{I} = (i_k, \dots, i_1)$,

$$lp(I) = i_k \quad \text{et} \quad \pi_u(I) = i_1(i_1 + i_2) \dots (i_1 + \dots + i_k), \quad (7.4)$$

$$\pi(I) = \prod_{p=1}^k i_p \quad \text{et} \quad sp(I) = \pi(I)l(I)!. \quad (7.5)$$

Définition 36. Soit $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ et $J = (J_1, J_2, \dots, J_p)$, alors $J \leq I$ si et seulement si $w(J) = w(I)$ et $J_s = i_s + \dots + i_{s+r}$ pour tous $s \in \mathbb{N}^*$, $r \in \mathbb{N}$.

Définition 37. Soit $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ et $J = (J_1, J_2, \dots, J_k)$, alors $J \geq I$ si et seulement si $w(J) = w(I)$ et $w(J_s) = i_s$ pour tous $1 \leq s \leq k$.

Pour toute composition de I , on désigne par :

$$l(J, I) = \prod_{i=1}^k l(J_i) \quad \text{et} \quad lp(J, I) = \prod_{i=1}^k lp(J_i), \quad (7.6)$$

$$\pi_u(J, I) = \prod_{i=1}^k \pi_u(J_i) \quad \text{et} \quad sp(J, I) = \prod_{i=1}^k sp(J_i). \quad (7.7)$$

7.3.2 Fonctions symétriques non commutatives [8]

Définition 38. *L'algèbre des fonctions symétriques non commutatives, notée par $\mathbf{Sym}_{\mathbb{K}} = (\mathbb{K}\langle S_1, S_2, \dots \rangle, \bullet, 1)$, est une algèbre associative libre engendrée par une suite infinie $\{S_n\}_{n \geq 1}$ de générateurs non commutatifs sur un corps \mathbb{K} de caractéristique 0. Les $\{S_n\}_{n \geq 1}$ sont aussi appelées fonctions symétriques complètes. $\{S_I\}_{I \in (\mathbb{N}_+)^*} \in \mathbf{Sym}_{\mathbb{K}}$:*

$$S^\emptyset = 1 \text{ et } \forall I = (i_1, \dots, i_k) \in (\mathbb{N}_+)^*, S^I = S_{i_1} \cdots S_{i_k}.$$

Soit t une autre variable qui commute avec toutes les $\{S_n\}_{n \geq 1}$. Nous définissons la série génératrice ordinaire de $\{S_n\}_{n \geq 1}$ par

$$\sigma(t) = 1 + \sum_{n \geq 1} S_n t^n. \quad (7.8)$$

Les autres fonctions symétriques non commutatives peuvent être dérivées par les relations suivantes :

$$\lambda(t) = \sigma(-t)^{-1}, \quad \sigma(t) = e^{\Phi(t)}, \quad \frac{d}{dt} \sigma(t) = \sigma(t) \psi(t) = \psi^*(t) \sigma(t), \quad (7.9)$$

où les Φ, λ, ψ sont respectivement les séries génératrices ordinaires suivantes :

$$\Phi(t) = \sum_{n \geq 1} \Phi_n \frac{t^n}{n}, \quad \lambda(t) = 1 + \sum_{n \geq 1} \Lambda_n t^n, \quad \psi(t) = \sum_{n \geq 1} \Psi_n t^{n-1}. \quad (7.10)$$

Les fonctions symétriques non commutatives $\{\Lambda_n\}_{n \geq 1}$ sont appelées fonctions symétriques élémentaires. Les éléments $\{\Psi_n\}_{n \geq 1}$ (resp. $\{\Phi_n\}_{n \geq 1}$) sont appelées les sommes de puissances de première espèce (resp. seconde espèce). Soit $I = (i_1, \dots, i_k) \in (\mathbb{N}_+)^*$, on définit les produits des fonctions symétriques non commutatives :

$$S^I = S_{i_1} \dots S_{i_k} \quad \text{et} \quad \Lambda^I = \Lambda_{i_1} \dots \Lambda_{i_k} \quad (7.11)$$

$$\Psi^I = \Psi_{i_1} \dots \Psi_{i_k} \quad \text{et} \quad \Phi^I = \Phi_{i_1} \dots \Phi_{i_k}. \quad (7.12)$$

$$S^I = \sum_{J \geq I} (-1)^{l(J) - w(I)} \Lambda^J \quad \text{et} \quad \Lambda^I = \sum_{J \geq I} (-1)^{l(J) - w(I)} S^J \quad (7.13)$$

$$S^I = \sum_{J \geq I} \frac{\Psi^J}{\pi_u(J, I)} \quad \text{et} \quad \Psi^I = \sum_{J \geq I} (-1)^{l(J) - l(I)} lp(J, I) S^J, \quad (7.14)$$

$$S^I = \sum_{J \geq I} \frac{\Phi^J}{sp(J, I)} \quad \text{et} \quad \Phi^I = \sum_{J \geq I} (-1)^{l(J) - l(I)} \frac{\pi(I)}{l(J, I)} S^J, \quad (7.15)$$

7.3. AUTRES RÉSULTATS : BASES DUALES POUR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES NON COMMUTATIVES ET LES QUASI-SYMÉTRIQUES VIA LA FACTORISATION MONOÏDALE [?]03-

$$\Lambda^I = \sum_{J \geq I} (-1)^{w(J)-l(I)} \frac{\Psi^J}{\pi_u(\tilde{J}, \tilde{I})} \quad \text{et} \quad \Psi^I = \sum_{J \geq I} (-1)^{w(I)+l(J)} lp(\tilde{J}, \tilde{I}) \Lambda^J, \quad (7.16)$$

$$\Lambda^I = \sum_{J \geq I} (-1)^{w(J)-l(I)} \frac{\Phi^J}{sp(J, I)} \quad \text{et} \quad \Phi^I = \sum_{J \geq I} (-1)^{w(J)-l(I)} \frac{\pi(I)}{l(J, I)} \Lambda^J, \quad (7.17)$$

Les familles $\{S^I\}_{I \in (\mathbb{N}_+)^*}$, $\{\Lambda^I\}_{I \in (\mathbb{N}_+)^*}$, $\{\Psi^I\}_{I \in (\mathbb{N}_+)^*}$ et $\{\Phi^I\}_{I \in (\mathbb{N}_+)^*}$ sont des bases de $\mathbf{Sym}_{\mathbb{K}}$ et par convention $S^\emptyset = \Lambda^\emptyset = \Psi^\emptyset = \Phi^\emptyset = 1$.

On définit le coproduit Δ_\star sur $\mathbf{Sym}_{\mathbb{K}}$ par

$$\Delta_\star S_n = \sum_{i=0}^n S_i \otimes S_{n-i} \quad \text{et} \quad \Delta_\star \Lambda_n = \sum_{i=0}^n \Lambda_i \otimes \Lambda_{n-i}, \quad (7.18)$$

$$\Delta_\star \Psi_n = 1 \otimes \Psi_n + \Psi_n \otimes 1 \quad \text{et} \quad \Delta_\star \Phi_n = 1 \otimes \Phi_n + \Phi_n \otimes 1. \quad (7.19)$$

et par convention $S_0 = S^\emptyset = 1$ et $\Lambda_0 = \Lambda^\emptyset = 1$.

Ce coproduit munit de $\mathbf{Sym}_{\mathbb{K}}$ nous permet de définir une structure d'algèbre de Hopf cocommutative graduée par $deg(S_n) = n$ c'est à dire pour toute composition de I on a $w(S_I) = w(I)$. On la désigne par $\mathbf{Sym}_{\mathbb{K}_n}$ et on a

$$\mathbf{Sym}_{\mathbb{K}} = \mathbf{k}1_{\mathbf{Sym}_{\mathbb{K}}} \oplus \bigoplus_{n \geq 1} \mathbf{Sym}_{\mathbb{K}_n}. \quad (7.20)$$

Avec le produit de concaténation et le coproduit Δ_\star , la counité ϵ est définie par

$$\forall I \in (\mathbb{N}_+)^*, \quad \epsilon(S^I) = \langle S^I \mid 1 \rangle, \quad (7.21)$$

et on obtient la bigèbre, $(\mathbf{Sym}_{\mathbb{K}} \langle S_1, S_2, \dots \rangle, \bullet, 1, \Delta_\star, \epsilon)$ sur \mathbb{K} .

7.3.3 Fonctions quasi-symétriques [8]

Définition 39. *L'algèbre des fonctions quasi-symétriques, notée par*

$\mathbf{QSym}_{\mathbb{K}} = (\mathbb{K} \langle M_1, M_2, \dots \rangle, \bullet, 1)$, *est une algèbre associative libre engendrée par une suite infinie $\{M_n\}_{n \geq 1}$ de générateurs non commutatifs sur un corps \mathbb{K} de caractéristique 0. Les $\{M_n\}_{n \geq 1}$ sont aussi appelées fonctions quasi-symétriques monomiales. $\{M_I\}_{I \in (\mathbb{N}_+)^*} \in \mathbf{QSym}_{\mathbb{K}}$:*

$$M_\emptyset = 1 \quad \text{et} \quad \forall I = (i_1, \dots, i_k) \in (\mathbb{N}_+)^*, \quad M_I = M_{i_1} \cdots M_{i_k}.$$

Les éléments $\{M_I\}_{I \in (\mathbb{N}_+)^*} \in \mathbf{QSym}_{\mathbb{K}}$ sont des polynômes homogènes de degré $w(I)$ et la famille $\{M_I\}_{I \in (\mathbb{N}_+)^*}$ forme une base de $\mathbf{QSym}_{\mathbb{K}}$. Par dualité on a :

$$\forall I, J \in (\mathbb{N}_+)^*, \quad \langle S^I \mid M_J \rangle_{\text{ext}} = \delta_{I, J}, \quad (7.22)$$

et on construit alors la bigèbre duale à $\mathbf{Sym}_{\mathbb{K}}$, $(\mathbf{QSym}_{\mathbb{K}} \langle M_1, M_2, \dots \rangle, \star, 1, \Delta_\bullet, \epsilon)$ sur \mathbb{K} .

1. le coproduit Δ_\bullet est défini par

$$\forall I \in (\mathbb{N}_+)^*, \quad \Delta_\bullet(M_I) = \sum_{I_1, I_2 \in (\mathbb{N}_+)^*, I_1 \cdot I_2 = I} M_{I_1} \otimes M_{I_2}, \quad (7.23)$$

2. la counité ε est définie par

$$\forall I \in (\mathbb{N}_+)^*, \quad \varepsilon(M_I) = \langle M_I \mid 1 \rangle, \quad (7.24)$$

3. le produit \star est commutatif et associatif au coproduit Δ_\star et est définie, pour toute composition $I \in (\mathbb{N}_+)^*$, par

$$M_I \star M_\emptyset = M_\emptyset \star M_I = M_I \quad (7.25)$$

et pour toutes compositions $I = (i, I')$ et $J = (j, J') \in (\mathbb{N}_+)^*$

$$M_I \star M_J = M_i(M_{I'} \star M_J) + M_j(M_I \star M_{J'}) + M_{i+j}(M_{I'} \star M_{J'}). \quad (7.26)$$

Ce coproduit munit de $\mathbf{QSym}_{\mathbb{K}}$ nous permet de définir une structure d'algèbre de Hopf cocommutative graduée par $\deg(M_n) = n$ c'est à dire pour toute composition de I on a $w(M_I) = w(I)$. On la désigne par $\mathbf{QSym}_{\mathbb{K}_n}$ et on a :

$$\mathbf{QSym}_{\mathbb{K}} = \mathbf{k}1_{\mathbf{QSym}_{\mathbb{K}}} \oplus \bigoplus_{n \geq 1} \mathbf{QSym}_{\mathbb{K}_n} \quad (7.27)$$

Effet, on peut vérifier que, pour tout $K, I, J \in (\mathbb{N}_+)^*$,

$$\langle \Delta_\star(S^K) \mid M_I \otimes M_J \rangle_{\text{ext}} = \langle S^K \mid M_I \star M_J \rangle_{\text{ext}} \quad (7.28)$$

$$\langle \Delta_\bullet(M_K) \mid S^I \otimes S^J \rangle_{\text{ext}} = \langle M_K \mid S^I S^J \rangle_{\text{ext}}. \quad (7.29)$$

7.3.4 Encodage des fonctions symétriques non commutatives et des fonctions quasi-symétriques via les mots [8]

Proposition 27. Soit $\mathcal{Y}(t)$ une série génératrice ordinaire de $\{y_n\}_{n \geq 1}$:

$$\mathcal{Y}(t) = 1 + \sum_{n \geq 1} y_n t^n \in \mathbb{Q}\langle Y \rangle[[t]]. \quad (7.30)$$

Alors $\mathcal{Y}(t)$ est groupe-like, pour le coproduit Δ_{\sqcup} .

Preuve : $\mathcal{Y}(t)$ est groupe-like, pour le coproduit Δ_{\sqcup} si $\Delta_{\sqcup}(\mathcal{Y}(t)) = \mathcal{Y}(t) \hat{\otimes} \mathcal{Y}(t)$. En posant $y_0 = 1$, nous pouvons écrire que :

$$\Delta_{\sqcup}(\mathcal{Y}(t)) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{r+s=n} y_s \otimes y_r \right) t^n = \sum_{n \geq 0} \sum_{r+s=n} (y_s t^s) \otimes (y_r t^r) = \mathcal{Y}(t) \hat{\otimes} \mathcal{Y}(t).$$

avec $\mathbf{e}(\mathcal{Y}(t)) = 1$.

□

7.3. AUTRES RÉSULTATS : BASES DUALES POUR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES NON COMMUTATIVES ET LES QUASI-SYMÉTRIQUES VIA LA FACTORISATION MONOÏDALE [?]05-

Proposition 28. Soit \mathcal{G} une algèbre de Lie engendrée par $\{\langle \log(\mathcal{Y}) \mid t^n \rangle\}_{n \geq 1}$. Alors $\mathcal{G} = \text{Prim}(\mathcal{H}_{\sqcup})$.

Preuve : La série de puissance $\log(\mathcal{Y}(t)) \in \mathbb{Q}\langle Y \rangle[[t]]$ est primitive. Par un développement de $\log(\mathcal{Y}(t))$, nous obtenons successivement

$$\log(\mathcal{Y}(t)) = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\sum_{n \geq 1} y_n t^n \right)^k = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\sum_{\substack{s_1, \dots, s_n \geq 1 \\ s_1 + \dots + s_n = k}} y_{s_1} \cdots y_{s_n} \right) t^k.$$

et, pour tout $n \geq 1$, $\langle \log(\mathcal{Y}(t)) \mid t^n \rangle = \pi_1(y_n)$ et puisque $\{\pi_1(y_n)\}_{n \geq 1}$ engendrent librement $\text{Prim}(\mathcal{H}_{\sqcup})$, voir (3.51) et (3.52).

□

A partir de cette proposition, nous pouvons écrire le Corollaire suivant :

Corollaire 11. A partir de (3.51) et (3.52), nous avons

$$\mathcal{Y}(t) = 1 + \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \sum_{s_1 + \dots + s_k = n} \pi_1(y_{s_1}) \cdots \pi_k(y_{s_k}) \right) t^n \quad (7.31)$$

Corollaire 12. Soient la série de puissance \mathcal{Y}^{-1} , \mathcal{Y}^{-1} est groupe-like et $\dot{\mathcal{Y}}$ sa différenciation. On pose

$$\mathcal{Y}(t)^{-1} = 1 + \sum_{n \geq 1} X_n t^n \in \mathbb{Q}\langle Y \rangle[[t]] \quad \text{et} \quad \dot{\mathcal{Y}}^{-1} = -\mathcal{Y}^{-1} \dot{\mathcal{Y}} \mathcal{Y}^{-1} \quad (7.32)$$

Alors, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\sum_{0 \leq i \leq n} y_i X_{n-i} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{0 \leq i \leq n} X_i y_{n-i} = 0 \quad (7.33)$$

Preuve : En utilisant l'identité $\mathcal{Y} \mathcal{Y}^{-1} = \mathcal{Y}^{-1} \mathcal{Y} = 1_{Y^*}$, on a :

Soient $J = (s_1, \dots, s_k) \in (\mathbb{N}_+)^*$ avec $Y^J = y_{s_1} y_{s_2} \cdots y_{s_k}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier $w(J) = 0$ si $J = (0)$.

$$\mathcal{Y}(t) = 1 + \sum_{n \geq 1} y_n t^n = 1 + \sum_{l(J)=1} Y^J t^{w(J)},$$

$$\mathcal{Y}^{-1}(t) = 1 + \sum_{n \geq 1} X_n t^n$$

$$\mathcal{Y}^{-1}(t) = 1 + \sum_{n \geq 1} X_n t^n = \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} y_n t^n}.$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Y}^{-1}(t) &= \frac{1}{\mathcal{Y}(t)} \\
 &= \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} y_n t^n} \\
 &= 1 + \sum_{k \geq 1} (-1)^k \left(\sum_{n \geq 1} y_n t^n \right)^k \\
 &= 1 + \sum_{k \geq 1} (-1)^k \sum_{l(J)=k} Y^J t^{w(J)} \\
 &= 1 + \sum_{k \geq 1} (-1)^k \sum_{w(J)=k} (-1)^{l(J)-k} Y^J t^k \\
 &= 1 + \sum_{k \geq 1} \sum_{w(J)=k} (-1)^{l(J)} Y^J t^k \\
 &= 1 + \sum_{k \geq 1} X_k t^k
 \end{aligned} \tag{7.34}$$

□

Corollaire 13. *Il existe deux séries génératrices (unique et primitives) L et $R \in \mathbb{Q}\langle Y \rangle[[t]]$ telles que : $\dot{\mathcal{Y}} = L\mathcal{Y} = \mathcal{Y}R$. Si*

$$L(t) = \sum_{n \geq 1} L_n t^{n-1} \quad \text{et} \quad R(t) = \sum_{n \geq 1} R_n t^{n-1} \tag{7.35}$$

Alors, pour tout $n \geq 1$,

$$ny_n = \sum_{1 \leq i \leq n} L_i y_{n-i} \quad \text{et} \quad ny_n = \sum_{1 \leq i \leq n} y_i R_{n-i}, \tag{7.36}$$

$$L_n = \sum_{0 \leq i \leq n-1} (i+1)y_{i+1}X_{n-1-i} \quad \text{et} \quad R_n = \sum_{0 \leq i \leq n-1} (i+1)X_{n-1-i}y_{i+1}. \tag{7.37}$$

Preuve : Posons $y_0 = X_0 = 1$, $L_0 = R_0 = 0$ et

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathcal{Y}} &= \frac{d}{dt} \mathcal{Y}(t) = \sum_{n \geq 1} n y_n t^{n-1}. \\
 \dot{\mathcal{Y}} &= L\mathcal{Y} \quad \text{et} \quad \dot{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y}R, \\
 \iff L &= \dot{\mathcal{Y}}\mathcal{Y}^{-1} \quad \text{et} \quad R = \mathcal{Y}^{-1}\dot{\mathcal{Y}}.
 \end{aligned}$$

7.3. AUTRES RÉSULTATS : BASES DUALES POUR LES FONCTIONS
 SYMÉTRIQUES NON COMMUTATIVES ET LES
 QUASI-SYMÉTRIQUES VIA LA FACTORISATION MONOÏDALE [?]07-

Pour $\dot{\mathcal{Y}} = L\mathcal{Y}$ on a :

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathcal{Y}}(t) &= \mathcal{L}(t)\mathcal{Y}(t) \\
 &= \left(\sum_{k \geq 1} L_k t^{k-1}\right) \left(\sum_{p \geq 1} y_{p-1} t^{p-1}\right) \\
 &= \sum_{k \geq 1} \sum_{p \geq 1} L_k y_{p-1} t^{k-1+p-1} \\
 &= \sum_{k \geq 1} \sum_{p \geq 1} L_k y_{p-1} t^{(k-1+p)-1} \\
 &= \sum_{k \geq 1} \left(\sum_{1 \leq i \leq k} L_i y_{k-i} t^{k-1}\right) \\
 &= \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{1 \leq i \leq n} L_i y_{n-i}\right) t^{n-1} \\
 &= \sum_{n \geq 1} n y_n t^{n-1}
 \end{aligned}$$

(7.38)

Par identification $n y_n = \sum_{1 \leq i \leq n} L_i y_{n-i}$.

Pour $\dot{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y}R$ on a :

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathcal{Y}}(t) &= \mathcal{Y}(t)\mathcal{R}(t) \\
 &= \left(\sum_{k \geq 1} y_{k-1} t^{k-1}\right) \left(\sum_{p \geq 1} R_p t^{p-1}\right) \\
 &= \sum_{k \geq 1} \sum_{p \geq 1} y_k R_{p-1} t^{k-1+p-1} \\
 &= \sum_{k \geq 1} \sum_{p \geq 1} y_k R_{p-1} t^{(k-1+p)-1} \\
 &= \sum_{k \geq 1} \left(\sum_{1 \leq i \leq k} y_i R_{k-i} t^{k-1}\right) \\
 &= \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{1 \leq i \leq n} y_i R_{n-i}\right) t^{n-1} \\
 &= \sum_{n \geq 1} n y_n t^{n-1}
 \end{aligned}$$

(7.39)

Par identification $n y_n = \sum_{1 \leq i \leq n} y_i R_{n-i}$.

Pour $L = \dot{\mathcal{Y}}\mathcal{Y}^{-1}$ on a :

$$\begin{aligned}
 L(t) &= \dot{\mathcal{Y}}(t)\mathcal{Y}^{-1}(t) \\
 &= \left(\sum_{k \geq 1} k y_k t^{k-1}\right) \left(\sum_{p \geq 1} X_{p-1} t^{p-1}\right) \\
 &= \sum_{k \geq 1} \sum_{p \geq 1} k y_k X_{p-1} t^{k-1+p-1} \\
 &= \sum_{k \geq 1} \sum_{p \geq 1} k y_k X_{p-1} t^{(k-1+p)-1} \\
 &= \sum_{k \geq 1} \left(\sum_{1 \leq i \leq k} i \cdot y_i X_{k-i} t^{k-1}\right) \\
 &= \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{1 \leq i \leq n} i \cdot y_i X_{n-i}\right) t^{n-1} \\
 &= \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{0 \leq i \leq n-1} (i+1) \cdot y_{i+1} X_{n-i-1}\right) t^{n-1} \\
 &= \sum_{n \geq 1} L_n t^{n-1}
 \end{aligned} \tag{7.40}$$

Par identification $L_n = \sum_{0 \leq i \leq n-1} (i+1) y_{i+1} X_{n-i-1}$.

Pour $R = \mathcal{Y}^{-1}\dot{\mathcal{Y}}$ on a :

$$\begin{aligned}
 R(t) &= \mathcal{Y}^{-1}(t)\dot{\mathcal{Y}}(t) \\
 &= \left(\sum_{k \geq 1} X_{k-1} t^{k-1}\right) \left(\sum_{p \geq 1} p y_p t^{p-1}\right) \\
 &= \sum_{k \geq 1} \sum_{p \geq 1} p X_{k-1} y_p t^{k-1+p-1} \\
 &= \sum_{k \geq 1} \sum_{p \geq 1} p X_{k-1} y_p t^{(k-1+p)-1} \\
 &= \sum_{k \geq 1} \left(\sum_{1 \leq i \leq k} i X_{k-i} y_i t^{k-1}\right) \\
 &= \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{1 \leq i \leq n} i \cdot X_{n-i} y_i\right) t^{n-1} \\
 &= \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{0 \leq i \leq n-1} (i+1) \cdot X_{n-i-1} y_{i+1}\right) t^{n-1} \\
 &= \sum_{n \geq 1} R_n t^{n-1}
 \end{aligned} \tag{7.41}$$

7.3. AUTRES RÉSULTATS : BASES DUALES POUR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES NON COMMUTATIVES ET LES QUASI-SYMÉTRIQUES VIA LA FACTORISATION MONOÏDALE [?]09-

Par identification $R_n = \sum_{0 \leq i \leq n-1} (i+1)X_{n-i-1}y_{i+1}$.

Montrons que les séries génératrices L et $R \in \mathbb{Q}\langle Y \rangle[[t]]$ sont primitives.

Δ_{\sqcup} commute avec d/dt et aussi un morphisme pour la concaténation. Alors,

$$\begin{aligned} \Delta_{\sqcup}(L) &= (\dot{y} \hat{\otimes} y + y \hat{\otimes} \dot{y})(y^{-1} \hat{\otimes} y^{-1}) = \dot{y} y^{-1} \hat{\otimes} y y^{-1} + y y^{-1} \hat{\otimes} \dot{y} y^{-1} = \dot{y} y^{-1} \hat{\otimes} 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \hat{\otimes} \dot{y} \\ \Delta_{\sqcup}(R) &= (y^{-1} \hat{\otimes} y^{-1})(\dot{y} \hat{\otimes} y + y \hat{\otimes} \dot{y}) = y^{-1} \dot{y} \hat{\otimes} y^{-1} y + y^{-1} y \hat{\otimes} y^{-1} \dot{y} = y^{-1} \dot{y} \hat{\otimes} 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \hat{\otimes} \dot{y} \end{aligned}$$

Par conséquent, $\Delta_{\sqcup}(L) = 1_{Y^*} \hat{\otimes} L + L \hat{\otimes} 1_{Y^*}$ et $\Delta_{\sqcup}(R) = 1_{Y^*} \hat{\otimes} R + R \hat{\otimes} 1_{Y^*}$ qui prouvent que L et R sont primitives.

□

Corollaire 14. *Pour tout $n \geq 1$, on a :*

$$ny_n = \begin{vmatrix} R_1 & R_2 & \dots & R_{n-1} & \boxed{R_n} \\ -1 & R_1 & \dots & R_{n-2} & R_{n-1} \\ 0 & -2 & \dots & R_{n-3} & R_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & -n+1 & R_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_1 & R_2 & \dots & R_{n-1} & \boxed{R_n} \\ -1 & R_1 & \dots & R_{n-2} & R_{n-1} \\ 0 & -1 & \dots & \frac{1}{2}R_{n-3} & \frac{1}{2}R_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \frac{1}{n+1}R_1 \end{vmatrix} \quad (7.42)$$

$$ny_n = \begin{vmatrix} L_1 & L_2 & \dots & L_{n-1} & \boxed{L_n} \\ -n+1 & L_1 & \dots & L_{n-2} & L_{n-1} \\ 0 & -n+2 & \dots & L_{n-3} & L_{n-2} \\ \cdot & 0 & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & -1 & L_1 \end{vmatrix} \quad (7.43)$$

$$L_n = \begin{vmatrix} y_1 & y_0 & 0 \dots 0 \\ 2y_2 & y_1 & y_0 \dots 0 \\ 3y_3 & y_2 & y_1 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \\ \boxed{ny_n} & y_{n-1} & y_{n-2} \dots y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & 2y_2 & \dots & (n-1)y_{n-1} & \boxed{ny_n} \\ y_0 & y_1 & \dots & y_{n-2} & y_{n-1} \\ 0 & y_0 & \dots & y_{n-3} & y_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & y_0 & y_1 \end{vmatrix} \quad (7.44)$$

$$R_n = \begin{pmatrix} y_1 & y_0 & 0 \dots 0 \\ y_2 & y_1 & y_0 \dots 0 \\ y_3 & y_2 & y_1 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \\ \boxed{ny_n} & (n-1)y_{n-1} & (n-2)y_{n-2} \dots y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_{n-1} & \boxed{ny_n} \\ y_0 & y_1 & \dots & y_{n-2} & (n-1)y_{n-1} \\ 0 & y_0 & \dots & y_{n-3} & (n-2)y_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & y_0 & y_1 \end{pmatrix} \quad (7.45)$$

Proposition 29. *Pour tout $k \geq 1$, il existe deux séries génératrices (unique) $\mathcal{L}_k, \mathcal{R}_k \in \mathbb{Q}\langle Y \rangle[[t]]$ telles que $\mathcal{Y}^{(k)} = \mathcal{L}_k \mathcal{Y} = \mathcal{Y} \mathcal{R}_k$. Les familles $\{\mathcal{L}_k\}_{k \geq 1}$ et $\{\mathcal{R}_k\}_{k \geq 1}$ sont définies récursivement comme suit :*

$$\mathcal{L}_1 = L \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_k = \dot{\mathcal{L}}_{k-1} + \mathcal{L}_{k-1} L, \quad (7.46)$$

$$\mathcal{R}_1 = R \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_k = \dot{\mathcal{R}}_{k-1} + R \mathcal{R}_{k-1}. \quad (7.47)$$

Preuve : A partir de la Proposition 27 et du Corollaire 13 , on peut écrire que

$$\frac{d^k}{dt^k} \mathcal{Y}(t) = \sum_{n \geq k} (n)_k y_n t^{n-k},$$

où $(n)_k = n(n-1) \dots (n-k)$ est le symbol de Pochhammer .

Nous allons procéder à un raisonnement par recurrence sur $n \geq 1$:

- Pour $k = 1$, on obtient le Corollaire 13 .
- Supposons que l'hypothèse est vraie pour tout n avec $1 \leq n \leq k-1$.
- Et montrons pour $n = k$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}^{(k)} &= \dot{\mathcal{L}}_{k-1} \mathcal{Y} + \mathcal{L}_{k-1} \dot{\mathcal{Y}} = \dot{\mathcal{L}}_{k-1} \mathcal{Y} + \mathcal{L}_{k-1} L \mathcal{Y} = (\dot{\mathcal{L}}_{k-1} + \mathcal{L}_{k-1} L) \mathcal{Y}, \\ \mathcal{Y}^{(k)} &= \dot{\mathcal{Y}} \mathcal{R}_{k-1} + \mathcal{Y} \dot{\mathcal{R}}_{k-1} = \mathcal{Y} R \mathcal{R}_{k-1} + \mathcal{Y} \dot{\mathcal{R}}_{k-1} = \mathcal{Y} (R \mathcal{R}_{k-1} + \dot{\mathcal{R}}_{k-1}). \end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathcal{L}_k = \dot{\mathcal{L}}_{k-1} + \mathcal{L}_{k-1} L$ et $\mathcal{R}_k = R \mathcal{R}_{k-1} + \dot{\mathcal{R}}_{k-1}$.

□

Corollaire 15. *Pour toute série de puissance propre A, B , soit $ad_A^n B$ le crochet de Lie itéré défini récursivement par $ad_A^0 B = B$ et $ad_A^{n+1} B = [ad_A^n, B]$, pour $n \geq 1$. Alors, avec les notations du Corollaire 13 , on a*

$$\mathcal{L}_k = \sum_{n \geq 0} \frac{ad_{\log \mathcal{Y}}^n R}{n!} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_k = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{ad_{\log \mathcal{Y}}^n \mathcal{L}_k}{n!}.$$

Preuve : Puisque $\mathcal{L}_k \mathcal{Y} = \mathcal{Y} \mathcal{R}_k$ alors $\mathcal{L}_k = \mathcal{Y} \mathcal{R}_k \mathcal{Y}^{-1} = e^{\log \mathcal{Y}} \mathcal{R}_k e^{-\log \mathcal{Y}} = e^{ad_{\log \mathcal{Y}}} \mathcal{R}_k$ et alors $\mathcal{R}_k = \mathcal{Y}^{-1} \mathcal{L}_k \mathcal{Y} = e^{-\log \mathcal{Y}} \mathcal{L}_k e^{\log \mathcal{Y}} = e^{ad_{-\log \mathcal{Y}}} \mathcal{L}_k$. En developpant e , on obtient le résultat.

□

7.3. AUTRES RÉSULTATS : BASES DUALES POUR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES NON COMMUTATIVES ET LES QUASI-SYMÉTRIQUES VIA LA FACTORISATION MONOÏDALE [?]11-

Proposition 30. Soit \mathcal{G} une algèbre de Lie engendrée par $\{R_n\}_{n \geq 1}$ (resp. $\{L_n\}_{n \geq 1}$). Alors $\mathcal{G} = \text{Prim}(\mathcal{H}_{\sqcup})$.

Preuve : A partir du Corollaire 13 , nous pouvons écrire que,

$$\sum_{n \geq 1} (\Delta_{\sqcup}(L_n)) t^{n-1} = 1_{Y^*} \otimes \left(\sum_{n \geq 1} L_n t^{n-1} \right) + \left(\sum_{n \geq 1} L_n t^{n-1} \right) \otimes 1_{Y^*} = \sum_{n \geq 1} (1_{Y^*} \otimes L_n + L_n \otimes 1_{Y^*}) t^{n-1}.$$

Ainsi, par identification du coefficient de t^{n-1} , on a $\Delta_{\sqcup}(L_n) = 1_{Y^*} \otimes L_n + L_n \otimes 1_{Y^*}$ qui prouve que L_n est primitive, et

$$\sum_{n \geq 1} (\Delta_{\sqcup}(R_n)) t^{n-1} = 1_{Y^*} \otimes \left(\sum_{n \geq 1} R_n t^{n-1} \right) + \left(\sum_{n \geq 1} R_n t^{n-1} \right) \otimes 1_{Y^*} = \sum_{n \geq 1} (1_{Y^*} \otimes R_n + R_n \otimes 1_{Y^*}) t^{n-1}.$$

Ainsi, par identification du coefficient de t^{n-1} , on a $\Delta_{\sqcup}(R_n) = 1_{Y^*} \otimes R_n + R_n \otimes 1_{Y^*}$ qui prouve que R_n est primitive.

A partir du Corollaire 14, on peut dire que : y_n est triangulaire et homogène (en poids) en $\{L_k\}_{k \geq 1}$. Inversement, L_n est aussi triangulaire et homogène (en poids) en $\{y_k\}_{k \geq 1}$. Les L_n sont alors linéairement indépendant et constituent un nouvel alphabet.

De même, on peut dire que : y_n est triangulaire et homogène (en poids) en $\{R_k\}_{k \geq 1}$. Inversement, R_n est aussi triangulaire et homogène (en poids) en $\{y_k\}_{k \geq 1}$. Les R_n sont alors linéairement indépendant et constituent un nouvel alphabet.

□

7.3.5 Construction d'une nouvelle base de Poincaré - Birkhoff - Witt via L et R [8] :

Définition 40. On définit les familles $\{\Pi_w^{(S)}\}_{w \in Y^*}$, pour $S = L$ ou $S = R$, de \mathcal{H}_{\sqcup} comme suit :

- i) $\Pi_{y_n}^{(S)} = L_n$ si $S = L$ ou R_n si $S = R$, pour $y_n \in Y$,
- ii) $\Pi_{\ell}^{(S)} = [\Pi_{\ell_1}^{(S)}, \Pi_{\ell_2}^{(S)}]$, si $\ell = \sigma(\ell_1, \ell_2) \in \mathcal{Lyn}(Y)$,
- iii) $\Pi_w^{(S)} = (\Pi_{\ell_1}^{(S)})^{i_1} \cdots (\Pi_{\ell_k}^{(S)})^{i_k}$, si $w = \ell_1^{i_1} \cdots \ell_k^{i_k}$, $\ell_1 > \cdots > \ell_k \in \mathcal{Lyn}(Y)$.

Proposition 31. Les familles $\{\Pi_{\ell}^{(S)}\}_{\ell \in \mathcal{Lyn}(Y)}$ et (resp. $\{\Pi_w^{(S)}\}_{w \in Y^*}$), pour $S = L$ ou $S = R$, sont les bases de $\text{Prim}(\mathcal{H}_{\sqcup})$ (resp. \mathcal{H}_{\sqcup}), ces bases sont homogènes en poids.

Preuve : Voir [13, 4].

A partir du Corollaire 13, Corollaire 14 et la Proposition 29 , nous pouvons dire que les familles $\{\Pi_{\ell}^{(S)}\}_{\ell \in \mathcal{Lyn}(Y)}$ et (resp. $\{\Pi_w^{(S)}\}_{w \in Y^*}$) sont homogènes en poids (en $\{y_k\}_{k \geq 1}$), primitives et linéairements indépendantes

□

Définition 41. Soit $\{\Sigma_w^{(S)}\}_{w \in Y^*}$ la famille de \mathcal{H}_{\sqcup} obtenue par dualité avec $\{\Pi_w^{(S)}\}_{w \in Y^*}$.
 $\forall u, v \in Y^*, \langle \Pi_u^{(S)} | \Sigma_v^{(S)} \rangle = \delta_{uv}$

Théorème 13. *i) La famille $\{\Pi_\ell^{(S)}\}_{\ell \in \mathcal{Lyn}(Y)}$ forme une base de l'algèbre de Lie engendrée par $\text{Prim}(\mathcal{H}_{\sqcup})$.*

ii) La famille $\{\Pi_w^{(S)}\}_{w \in Y^}$ forme une base de $\mathcal{U}(\text{Prim}(\mathcal{H}_{\sqcup}))$.*

iii) La famille $\{\Sigma_w^{(S)}\}_{w \in Y^}$ est librement engendrée par l'algèbre de stuffle.*

iv) La famille $\{\Sigma_\ell^{(S)}\}_{\ell \in \mathcal{Lyn}(Y)}$ forme une base de transcendance de l'algèbre de stuffle.

Preuve : Voir [13, 4].

□

Nous pouvons maintenant écrire la série diagonale (3.60) comme suit :

$$\text{Corollaire 16. } \mathcal{D}_Y = \sum_{w \in Y^*} w \otimes w = \sum_{w \in Y^*} \Sigma_w^{(S)} \otimes \Pi_w^{(S)} = \prod_{\ell \in \mathcal{Lyn}(Y)}^{\searrow} e^{\Sigma_\ell^{(S)} \otimes \Pi_\ell^{(S)}}$$

$$\text{Corollaire 17. } \mathcal{D}_Y = \sum_{w \in Y^*} w \otimes w = \sum_{w \in Y^*} \Sigma_w^{(L)} \otimes \Pi_w^{(L)} = \prod_{\ell \in \mathcal{Lyn}(Y)}^{\searrow} e^{\Sigma_\ell^{(L)} \otimes \Pi_\ell^{(L)}}$$

$$\text{Corollaire 18. } \mathcal{D}_Y = \sum_{w \in Y^*} w \otimes w = \sum_{w \in Y^*} \Sigma_w^{(R)} \otimes \Pi_w^{(R)} = \prod_{\ell \in \mathcal{Lyn}(Y)}^{\searrow} e^{\Sigma_\ell^{(R)} \otimes \Pi_\ell^{(R)}}$$

7.3.6 Construction d'un isomorphisme entre l'algèbre de Hopf de stuffle et l'algèbre de Hopf des fonctions symétriques non commutatives et des fonctions quasi-symétriques [8]

Pour tout mot $u = y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_k} \in Y^*$ correspond à une composition d'entiers $I = (i_1, i_2, \cdots, i_k) \in (\mathbb{N}_+)^*$ et le mot vide 1_{Y^*} correspond à une composition vide (\emptyset). Les fonctions symétriques non commutatives et les fonctions quasi-symétriques peuvent être indexées par des mots Y^* associés par des compositions $(\mathbb{N}_+)^*$. En effet, soit J une composition, plus fine que I , associée au mot v et soit $J = (J_1, J_2, \cdots, J_k)$ une composition de J telle que, pour tout $p = 1, 2, \cdots, k$, $w(J_p) = i_p$ et J_p est associé au mot u_p et $w(u_p) = i_p$. Alors $v \leq u = u_1 \cdots u_k$ est une unique factorisation de v .

Exemple 34. .

$$ii) (1, 2, 2) \leq (1, (1, 1), 2) = (1, 1, 1, 2) \longleftrightarrow y_1 y_2 y_2 \leq y_1 (y_1 y_1) y_2 = y_1 y_1 y_1 y_2.$$

$$i) (1, 2, 2) \leq (1, 2, (1, 1)) = (1, 2, 1, 1) \longleftrightarrow y_1 y_2 y_2 \leq y_1 y_2 (y_1 y_1) = y_1 y_2 y_1 y_1.$$

$$iii) (1, 2, 2) \leq (1, (1, 1), (1, 1)) = (1, 1, 1, 1, 1) \longleftrightarrow y_1 y_2 y_2 \leq y_1 (y_1 y_1) (y_1 y_1) = y_1 y_1 y_1 y_1 y_1.$$

7.3. AUTRES RÉSULTATS : BASES DUALES POUR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES NON COMMUTATIVES ET LES QUASI-SYMÉTRIQUES VIA LA FACTORISATION MONOÏDALE [?]13-

Par conséquent, nous pouvons écrire la définition suivante :

Définition 42. Soient \mathcal{S} et \mathcal{M} les applications linéaires suivantes :

i)

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : (\mathbb{K}\langle Y \rangle, \bullet, 1, \Delta_{\sqcup}, e) &\longrightarrow (\mathbb{K}\langle S_1, S_2 \cdots \rangle, \bullet, 1, \Delta_{\star}, \epsilon), \\ u = y_{i_1} \cdots y_{i_k} &\longmapsto \mathcal{S}(u) = S^{(i_1 \cdots i_k)} = S_{i_1} \cdots S_{i_k}. \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : (\mathbb{K}\langle Y \rangle, \sqcup, 1, \Delta_{\bullet}, e) &\longrightarrow (\mathbb{K}\langle M_1, M_2 \cdots \rangle, \star, 1, \Delta_{\bullet}, \epsilon), \\ u = y_{i_1} \cdots y_{i_k} &\longmapsto \mathcal{M}(u) = M_{(i_1 \cdots i_k)} = M_{i_1} \cdots M_{i_k}. \end{aligned}$$

Théorème 14. Les applications \mathcal{S} et \mathcal{M} sont des isomorphismes d'algèbre de Hopf.

Corollaire 19. Soit \mathcal{G} une algèbre de Lie engendrée par $\{\Pi_y\}_{y \in Y^*}$. Alors $\mathbf{Sym}_{\mathbb{K}} \cong \mathcal{U}(\mathcal{G})$.

Corollaire 20. Les familles $\{\mathcal{M}(\ell)\}_{\ell \in \mathcal{L}^{yn}(Y)}$ et $\{\mathcal{M}(\Sigma_{\ell})\}_{\ell \in \mathcal{L}^{yn}(Y)}$ sont des bases de transcendance du \mathbb{K} -algèbre $\mathbf{QSym}_{\mathbb{K}}$ commutative libre.

Corollaire 21. Soit $w = y_{i_1} \cdots y_{i_k} \in Y^*$ associé à $I = (i_1, \dots, i_k) \in (\mathbb{N}_+)^*$. Alors, nous avons

$$S^I = \mathcal{S}(w), \quad \frac{\Phi^I}{\pi(I)} = \mathcal{S}(\pi_1(y_{i_1}) \cdots \pi_1(y_{i_k})), \quad \Psi^I = \mathcal{S}(R_w).$$

Preuve : Les séries de puissances $\mathcal{Y}, \log(\mathcal{Y})$ et $L, R \in \mathbb{K}\langle Y \rangle[[t]]$ sont sommables. Et de plus \mathcal{S} est continue et commute avec \log , alors nous pouvons déduire que

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \mathcal{S}(\mathcal{Y}(t)) = 1 + \sum_{k \geq 1} \mathcal{S}(y_k) t^k, \\ \sum_{k \geq 1} \frac{\Phi_k}{k} t^k &= \log \sigma(t) = \mathcal{S}(\log \mathcal{Y}(t)) = \sum_{k \geq 1} \mathcal{S}(\pi_1(y_k)) t^k, \\ \sum_{k \geq 1} \Psi_k t^{k-1} &= \psi(t) = \mathcal{S}(R(t)) = \sum_{k \geq 1} \mathcal{S}(R_k) t^{k-1}, \\ \sum_{k \geq 1} t^{k-1} \Psi_k^* &= \psi^*(t) = \mathcal{S}(L(t)) = \sum_{k \geq 1} \mathcal{S}(L_k) t^{k-1}. \end{aligned}$$

□

7.3.7 Bases duales pour les fonctions symétriques non commutatives et les fonctions quasi-symétriques via la factorisation monoïdale [8]

Définition 43. On définit les séries génératrices non commutatives $\{\mathcal{M}(w)\}_{w \in Y^*}$ et $\{\mathcal{S}(w)\}_{w \in Y^*}$ comme suit :

- i) $M = \sum_{w \in Y^*} \mathcal{M}(w) w \in \mathbf{QSym}_{\mathbb{K}}\langle\langle Y \rangle\rangle$, et
- ii) $S = \sum_{w \in Y^*} \mathcal{S}(w) w \in \mathbf{QSym}_{\mathbb{K}}\langle\langle Y \rangle\rangle$.

Proposition 32. Par le coproduit Δ_{\sqcup} et $\mathcal{D}_Y = \prod_{\ell \in \mathcal{L}yn(Y)}^{\rightarrow} e^{\Sigma_\ell \otimes \Pi_\ell}$, nous obtenons :

- i) La série génératrice non commutative M est groupe-like.
- ii) La série génératrice non commutative $\log(M)$ est primitive.

Preuve : M est équivalent à l'image de la série diagonale \mathcal{D}_Y par le tenseur $\mathcal{M} \otimes \text{Id}$.
 $M = (\mathcal{M} \otimes \text{Id})(\mathcal{D}_Y) = (\mathcal{M} \otimes \text{Id})(\sum_{w \in Y^*} w \otimes w) = \sum_{w \in Y^*} \mathcal{M}(w) \otimes w = \sum_{w \in Y^*} \mathcal{M}(w)w$.
 $\log(M) = (\mathcal{M} \otimes \text{Id})(\log(\mathcal{D}_Y)) = (\mathcal{M} \otimes \text{Id})(\sum_{w \in Y^*} w \otimes \pi_1(w)) = \sum_{w \in Y^*} \mathcal{M}(w) \otimes \pi_1(w) = \sum_{w \in Y^*} \mathcal{M}(w)\pi_1(w)$.

Il suit le critère de Friedrichs [13, 4].

Par le résultat précédant, on applique la fonction \log sur la série de puissance M .
 \square

Corollaire 22. i) $M = \prod_{\ell \in \mathcal{L}yn(Y)}^{\rightarrow} e^{\mathcal{M}(\Sigma_\ell)\Pi_\ell} \in \mathbf{QSym}_{\mathbb{K}}\langle\langle Y \rangle\rangle$,
 ii) $\log(M) = \sum_{w \in Y^*} \mathcal{M}(w)\pi_1(w) \in \mathbf{QSym}_{\mathbb{K}}\langle\langle Y \rangle\rangle$.

Preuve : i) est équivalent à l'image de la série diagonale \mathcal{D}_Y par le tenseur $\mathcal{M} \otimes \text{Id}$.
 ii) est équivalent à l'image de $\log(M)$ par le tenseur $\text{Id} \otimes \pi_1$. Il est aussi équivalent à l'image de \mathcal{D}_Y par le tenseur $\mathcal{M} \otimes \pi_1$.

\square

Finalement, en partant de [13, 4], nous déduisons le Corollaire suivant.

Corollaire 23. Nous avons :

i) $\sum_{w \in Y^*} \mathcal{M}(w)\mathcal{S}(w) = \prod_{\ell \in \mathcal{L}yn(Y)}^{\rightarrow} e^{\mathcal{M}(\Sigma_\ell)\mathcal{S}(\Pi_\ell)} = \prod_{\ell \in \mathcal{L}yn(Y)}^{\rightarrow} e^{\mathcal{M}(\Sigma_\ell^{(S)})\mathcal{S}(\Pi_\ell^{(S)})}$,
 ii) $\sum_{w \in Y^*} M_w S_w = \prod_{\ell \in \mathcal{L}yn(Y)}^{\rightarrow} e^{M_{\Sigma_\ell} S_{\Pi_\ell}} = \prod_{\ell \in \mathcal{L}yn(Y)}^{\rightarrow} e^{M_{\Sigma_\ell^{(S)}} S_{\Pi_\ell^{(S)}}}$.

Preuve : Par le Théorème 14, il est équivalent à l'image de la série diagonale \mathcal{D}_Y par le tenseur $\mathcal{M} \otimes \mathcal{S}$, de plus, il est équivalent à l'image de M par le tenseur $\text{Id} \otimes \pi_1$.
 \square

Remarque 13. Ces formules tiennent pour toute paire de bases en dualité, compatible avec la factorisation monoïdale de Y^* . On voit qu'elles sont indépendantes sur les alphabets infinis non commutatifs ou commutatifs, d'habitude noté par A et X qui dépendent des fonctions symétriques non commutatives $S(A) \in \mathbf{Sym}_{\mathbb{K}}(A)$ et fonctions quasi-symétriques

7.3. AUTRES RÉSULTATS : BASES DUALES POUR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES NON COMMUTATIVES ET LES QUASI-SYMÉTRIQUES VIA LA FACTORISATION MONOÏDALE [?]15-
 $M(X) \in \mathbf{QSym}_{\mathbb{K}}(X)$.

Exemple 35. (*Identité de Cauchy* [17]).

Soit A un alphabet non commutatif et X un alphabet commutatif totalement ordonné . Les fonctions symétriques de l'alphabet non commutatif XA sont définies par :

$$\sigma(XA; t) = \sum_{n \geq 0} S_n(XA)t^n := \prod_{x \in X}^{\leftarrow} \sigma(A; xt).$$

Soient $\{U_I\}_{I \in (\mathbb{N}_+)^*}$ et $\{V_I\}_{I \in (\mathbb{N}_+)^*}$ deux bases linéaires de $\mathbf{Sym}_{\mathbb{K}}(A)$ et $\mathbf{QSym}_{\mathbb{K}}(X)$ respectivement. La dualité de ces deux bases nous permet d'écrire

$$\sigma(XA; 1) = \sum_{I \in (\mathbb{N}_+)^*} M_I(X)S^I(A) = \sum_{I \in (\mathbb{N}_+)^*} V_I(X)U_I(A). \quad (7.48)$$

Typiquement, la base linéaire $\{U_I\}_{I \in (\mathbb{N}_+)^*}$ est une base de ribbon des fonctions Schur $\{R_I\}_{I \in (\mathbb{N}_+)^*}$ et, par dualité, $\{V_I\}_{I \in (\mathbb{N}_+)^*}$ est une base quasi-ribbon des fonctions Schur $\{F_I\}_{I \in (\mathbb{N}_+)^*}$:

$$\sigma(XA; 1) = \sum_{I \in (\mathbb{N}_+)^*} M_I(X) \left[\sum_{\substack{I, J \in (\mathbb{N}_+)^* \\ J \leq I}} R_J(A) \right] = \sum_{J \in (\mathbb{N}_+)^*} \left[\sum_{\substack{I, J \in (\mathbb{N}_+)^* \\ I \geq J}} M_I(X) \right] R_J(A) = \sum_{J \in (\mathbb{N}_+)^*} F_J(X)R_J(A).$$

De même, si on spécialise les alphabets des fonctions quasi-symétriques $\{M_I\}_{I \in (\mathbb{N}_+)^*}$ et $\{F_I\}_{I \in (\mathbb{N}_+)^*}$ à l'alphabet $X_q = \{1, q, q^2, \dots\}$, alors la série génératrice $\sigma(X_q A; t)$ peut être vue comme l'image de la série diagonale \mathcal{D}_Y par le tenseur $f \otimes \mathcal{S}$, où $f : x_i \mapsto q^i t$ et on a :

Exemple 36. (*série génératrice des fonctions Hall-Littlewood* [17]) Soit $X_q = 1/(1-q)$ un alphabet commutatif totalement ordonné : $X_q = \{\dots < q^n < \dots < q < 1\}$. Les fonctions symétriques complètes de l'alphabet non commutatif $A/(1-q)$ sont données par la série génératrice ordinaire suivante

$$\sigma\left(\frac{A}{1-q}; t\right) = \sum_{n \geq 0} S_n\left(\frac{A}{1-q}\right)t^n := \prod_{n \geq 0}^{\leftarrow} \sigma(A; q^n t). \quad (7.49)$$

Par conséquent,

$$\sigma\left(\frac{A}{1-q}; 1\right) = \prod_{n \geq 0}^{\leftarrow} \sum_{i \geq 0} S_i q^{ni} = \sum_{I=(i_1, \dots, i_r) \in (\mathbb{N}_+)^*} \left[\sum_{n_1 > \dots > n_r \geq 1} q^{n_1 i_1 + \dots + n_r i_r} \right] S^I(A) = \sum_{I \in (\mathbb{N}_+)^*} M_I(X)S^I(A) \quad (7.50)$$

comme une spécialisation de chaque lettre $x_i \in X$ à q^i de la fonction quasi-symétrique $M_I(X)$.

Exemple 37.

$$\begin{aligned}
 \Pi_{y_1}^{(L)} &= y_1, \\
 \Pi_{y_2}^{(L)} &= 2y_2 - y_1^2, \\
 \Pi_{y_2 y_1}^{(L)} &= 2y_2 y_1 - 2y_1 y_2, \\
 \Pi_{y_3 y_1 y_2}^{(L)} &= 6y_3 y_1 y_2 - 3y_3 y_1^3 - 3y_1^2 y_2 y_1^2 + 2y_1^2 y_2^2 \\
 &\quad - 6y_2 y_1^2 y_2 + 2y_2 y_1^4 + 2y_1 y_2 y_1 y_2 - y_1 y_2 y_1^3 \\
 &\quad + 3y_1 y_3 y_1^2 - 6y_1 y_3 y_2 + y_1^3 y_2 y_1 + 3y_1^2 y_3 y_1 \\
 &\quad + y_1^4 y_2 - 3y_1^3 y_3 - 2y_2 y_1 y_2 y_1 + 4y_2^2 y_1 - 6y_3 y_2 y_1 + 6y_2 y_1 y_3, \\
 \Pi_{y_3 y_1 y_2 y_1}^{(L)} &= 6y_3 y_1 y_2 y_1 + 2y_2 y_1^3 y_2 - 6y_2 y_1^2 y_2 y_1 + 4y_1 y_2 y_1 y_2 y_1 \\
 &\quad - 6y_3 y_1^2 y_2 + 2y_1^2 y_2^2 y_1 - 2y_1^2 y_2 y_1 y_2 - 6y_1 y_3 y_2 y_1 \\
 &\quad + 6y_1 y_3 y_1 y_2 + 4y_2 y_1 y_2 y_1^2 - 6y_2 y_1 y_3 y_1 + 6y_2 y_1^2 y_3 \\
 &\quad - 4y_1 y_2^2 y_1^2 + 6y_1 y_2 y_3 y_1 - 6y_1 y_2 y_1 y_3. \\
 \Sigma_{y_1}^{(L)} &= y_1, \\
 \Sigma_{y_2}^{(L)} &= \frac{1}{2} y_2, \\
 \Sigma_{y_2 y_1}^{(L)} &= \frac{1}{2} y_2 y_1 + \frac{1}{3} y_3, \\
 \Sigma_{y_3 y_1 y_2}^{(L)} &= \frac{1}{6} y_3 y_1 y_2 + \frac{1}{6} y_3 y_2 y_1 + \frac{1}{6} y_3^2 + \frac{1}{8} y_4 y_2 + \frac{1}{10} y_5 y_1 + \frac{1}{12} y_6, \\
 \Sigma_{y_3 y_1 y_2 y_1}^{(L)} &= \frac{1}{6} y_3 y_1 y_2 y_1 + \frac{1}{6} y_3 y_1 y_3 + \frac{1}{3} y_3 y_2 y_1^2 + \frac{1}{6} y_3 y_3^2 + \frac{5}{18} y_3^2 y_1 + \frac{1}{9} y_3 y_4 \\
 &\quad + \frac{1}{8} y_4 y_2 y_1 + \frac{1}{12} y_4 y_3 + \frac{1}{5} y_5 y_1^2 + \frac{1}{10} y_5 y_2 + \frac{3}{36} y_6 y_1 + \frac{1}{21} y_7.
 \end{aligned}$$

Exemple 38.

$$\begin{aligned}
 \Pi_{y_1}^{(R)} &= y_1, \\
 \Pi_{y_2}^{(R)} &= 2y_2 - y_1^2, \\
 \Pi_{y_2 y_1}^{(R)} &= 2y_2 y_1 - 2y_1 y_2, \\
 \Pi_{y_3 y_1 y_2}^{(R)} &= 6y_3 y_1 y_2 + y_2 y_1^4 - 6y_2 y_1^2 y_2 + y_1 y_2 y_1^3 - 2y_1 y_2 y_1 y_2 - 3y_3 y_1^3 \\
 &\quad - 3y_1^2 y_2 y_1^2 + 4y_1^2 y_2^2 + 3y_1 y_3 y_1^2 - 6y_1 y_3 y_2 + 2y_2 y_1 y_2 y_1 - 6y_2 y_3 y_1 \\
 &\quad - y_1^3 y_2 y_1 + 3y_1^2 y_3 y_1 + y_1^4 y_2 - 3y_1^3 y_3 + 2y_2^2 y_1^2 + 6y_2 y_1 y_3, \\
 \Pi_{y_3 y_1 y_2 y_1}^{(R)} &= 6y_3 y_1 y_2 y_1 - 2y_2 y_1^3 y_2 - 4y_1 y_2 y_1 y_2 y_1 + 6y_1 y_2 y_1^2 y_2 - 6y_3 y_1^2 y_2 \\
 &\quad + 4y_1^2 y_2^2 y_1 - 4y_1^2 y_2 y_1 y_2 - 6y_1 y_3 y_2 y_1 + 6y_1 y_3 y_1 y_2 + 6y_1 y_2 y_3 y_1 \\
 &\quad + 2y_2 y_1 y_2 y_1^2 - 6y_2 y_1 y_3 y_1 + 6y_2 y_1^2 y_3 - 2y_1 y_2^2 y_1^2 - 6y_1 y_2 y_1 y_3. \\
 \Sigma_{y_1}^{(R)} &= y_1, \\
 \Sigma_{y_2}^{(R)} &= \frac{1}{2} y_2, \\
 \Sigma_{y_2 y_1}^{(R)} &= \frac{1}{2} y_2 y_1 + \frac{1}{6} y_3, \\
 \Sigma_{y_3 y_1 y_2}^{(R)} &= \frac{1}{6} y_3 y_1 y_2 + \frac{1}{40} y_6 + \frac{1}{15} y_5 y_1 + \frac{1}{24} y_4 y_2 + \frac{1}{6} y_3^2 + \frac{1}{6} y_3 y_2 y_1, \\
 \Sigma_{y_3 y_1 y_2 y_1}^{(R)} &= \frac{1}{6} y_3 y_1 y_2 y_1 + \frac{1}{18} y_3 y_1 y_3 + \frac{13}{2520} y_7 + \frac{13}{360} y_6 y_1 + \frac{1}{15} y_5 y_2 \\
 &\quad + \frac{7}{72} y_4 y_3 + \frac{1}{24} y_4 y_2 y_1 + \frac{1}{18} y_3 y_4 + \frac{2}{9} y_3^2 y_1 + \frac{1}{6} y_3 y_2^2 \\
 &\quad + \frac{2}{15} y_5 y_1^2 + \frac{1}{3} y_3 y_2 y_1^2.
 \end{aligned}$$

Conclusion

Une fois de plus, la factorisation monoïdale de Schützenberger joue un rôle centrale dans la construction de paire de bases en dualité, comme exemplifié pour le cas des algèbres de Hopf des fonctions quasi-symétriques ($\mathbf{QSym}_{\mathbb{K}}$) et des fonctions symétriques non commutatives ($\mathbf{Sym}_{\mathbb{K}}$), obtenue comme les images isomorphiques de l’algèbre de Hopf de stuffle (\mathcal{H}_{\sqcup}) et son dual ($\mathcal{H}_{\sqcup}^{\vee}$), par \mathcal{M} et \mathcal{S} .

7.4 Feuilles de calculs Maple

Voici la liste de tous les polynômes associés aux mots de Lyndon de longueur $|\ell| \leq 5$.

(1)

```

> restart
> read "basesinduality_qShuffle5.txt";
> with(basesinduality);
[Compute_Ln, Compute_Rn, Compute_Xn, Compute_pi1, Compute_pi1_q,
DeltaLetter, DeltaStuffle_q, Factori, FindDualBasis, GetMatrixDual,
GetSigmaLyndon, IsPrimitive, ListLength, ListLessLength,
ListOfStandarSequences, ListSameWeight, LyndonBasis, LyndonFact,
LyndonLen, LyndonLex, MatrixPBWL, MatrixPBWL_L, MatrixPBWL_R,
MatrixPBWL_Shuffle, MatrixPBWL_q, MatrixSShuffle_q, PBWL_wordShuff,
PBWL_wordStuff, PBWL_wordStuff_q, PBWL_word_L, PBWL_word_R,
PLynwordShuff, PLynwordShuff_q, PLynwordStuff, PLynwordStuff_q,
P_qShuffle, ProductTensorPoly, S_qShuffle, ScalarProduct, SchutBasisShuff,
SchutBasisStuff, SearchWords, SigmaOfWord, StandFact, TautologicNumber,
TestOrthogonalShuffle, TestOrthogonal_q_Stuffle, WittFormula,
concaproduct, conjClass, factor2expand, genword, greatLen, greatLex,
homogeneousPart, init, isFactor, isLeftFactor, leftSubs, leftrem, lessLen,
lessLex, letterOrder, mono_decompose, mono_melange, mono_mul,
mono_weight, pbwlExp, pbwlExpand, pbwlLog, pbwlProduct, pbwl_poly_Mul,
plog_melange, plog_word_compact, plog_word_root_simplify,
plog_word_uncompact, poly2pbwl, poly_cat, q_ShuffleProduct,
q_ShuffleTautologicNumber, q_StuffleProduct, rightrem, shuffleproduct,
x_mono_ctuffle, x_mono_shuffle, x_mono_shuffle_q, x_mono_stuffle_q,
x_poly_ctuffle, x_poly_shuffle, x_poly_shuffle_q, x_poly_stuffle_q, xcoeff,
xcoeff_q, xcoeffs, xdegree, xexpand, xlcoeff, xpoly, xpower, xsort, xstar,
xsubs, xtcoeff, xterm]
> with(combinat) :
> with(StringTools) :
> with(numtheory) :
> with(LinearAlgebra) :
> with(PolynomialTools) :
> AllPermutations := proc( s :: string)
local p;
seq( StringTools-Permute( s, p ),
p = combinat[ 'permute' ]( length( s ) ) )
end :
> multidegre := proc( w :: string) sort( map( parse,
( convert( convert( [ AllPermutations( w ) ], set ), list ) ) ) ) end:
> analog := proc( l :: list) local i, j; mul( add( qj·(l[1])2, j = 0..i), i = 1..l[2]-1 ) end:
> uncat := proc( word) if length( word ) ≤ 1 then [ word ] else map( proc( x,

```

```

    y) substring(y, x..x) end, [ $ 1 ..length(word) ], word) fi; end:
> post := proc(p, L) local i, k, pos; pos := [ ] : for i from 1 to nops(L) do if member(p,
    L, 'k') then pos := k: fi: od: pos; end:
> lyndon := proc(n, w :: string) local K, L, M, N, O, Q; K := map(sort, Generate(n,
    w)); L := map(LyndonFactors, K); M := (map2(op, 1, L)); N := convert(M, set);
    O := convert(N, list); Q := sort(O); map(parse, select(length = n, Q)) end:

```

Calculer des polynomes

```

> Polly := proc(n, w, X :: string, L :: list, Y, q) local i, j, r, K, P, T, A, B, C; A
    := convert(ListLength(Y, L, n), list) : B
    := Matrix([seq(simplify([seq(coeff(S_qShuffle(temp, Y, L, q), A[j]), j = 1
    ..nops(A))]), temp in A)]):
    C := MatrixInverse(Transpose(B)) : T := map(parse, Generate(n, X)); i := post(w,
    T); K := [seq(C[i, j], j = 1 ..nops(A))]; print(P^q[T[i]] = add(K[r]·T[r], r = 1
    ..nops(K))) end:

```

Polly := proc(n, w, X:string, L:list, Y, q) (2)

```

    local i, j, r, K, P, T, A, B, C;
    A := convert(basesinduality.-ListLength(Y, L, n), list);
    B := Matrix([seq(simplify([seq(coeff(basesinduality.-S_qShuffle(temp, Y, L,
    q), A[j]), j = 1 ..nops(A))]), in(temp, A))]);
    C := LinearAlgebra.-MatrixInverse(LinearAlgebra.-Transpose(B));
    T := map(parse, StringTools.-Generate(n, X));
    i := post(w, T);
    K := [seq(C[i, j], j = 1 ..nops(A))];
    print(P^q* [ T[i]] = add(K[r]* T[r], r = 1 ..nops(K)))

```

end proc

```

> Polly(3, aab, "ab", [1, 2], Y, q);
    P^q [ aab ] = aab + (-q - q^2) aba + q^3 baa (3)

```

Calculer des polynomes associés aux mots de Lyndon pour X={a < b}

```

> T := lyndon(2, "ab");
    T := [ ab ] (4)

```

```

> for j from 1 to nops(T) do Polly(2, T[j], "ab", [1, 2], Y, q) end;
    P^q [ ab ] = ab - q ba (5)

```

```

> TA := lyndon(3, "ab");
    TA := [ aab, abb ] (6)

```

```

> for j from 1 to nops(TA) do Polly(3, TA[j], "ab", [1, 2], Y, q) end;
    P^q [ aab ] = aab + (-q - q^2) aba + q^3 baa
    P^q [ abb ] = abb + (-q - q^2) bab + q^3 bba (7)

```

```

> TB := lyndon(4, "ab");
    TB := [ aaab, aabb, abbb ] (8)

```

> for j from 1 to nops(TB) do Polly(4, TB[j], "ab", [1, 2], Y, q)end;

$$P^q [aaab] = aaab + (-q - q^2 - q^3) aaba + (q^3 + q^4 + q^5) abaa - q^6 baaa$$

$$P^q [aabb] = aabb - \frac{q(2q + q^2 + 1) abab}{1 + q^4} - \frac{q^3(-1 - q + q^3 + q^4) abba}{1 + q^4}$$

$$- \frac{q^3(-1 - q + q^3 + q^4) baab}{1 + q^4} + \frac{q^7(2q + q^2 + 1) baba}{1 + q^4} - q^6 bbaa$$

$$P^q [abbb] = abbb + (-q - q^2 - q^3) babb + (q^3 + q^4 + q^5) bbab - q^6 bbba \quad (9)$$

> TC := lyndon(5, "ab");

$$TC := [aaaab, aaabb, aabab, aabbb, ababb, abbbb] \quad (10)$$

> for j from 1 to nops(TC) do Polly(5, TC[j], "ab", [1, 2], Y, q)end;

$$P^q [aaaab] = aaaab + (-q - q^2 - q^3 - q^4) aaaba + (q^3 + q^4 + 2q^5 + q^6 + q^7) aabaa + (-q^6 - q^7 - q^8 - q^9) abaaa + q^{10} baaaa$$

$$P^q [aaabb] = aaabb - \frac{q(2q + q^2 + 1) aabab}{1 + q^4} - \frac{q^3(-1 + q^5 + q^4 + q^3) aabba}{1 + q^4}$$

$$- \frac{q^3(-1 - q + q^3 + q^4) abaab}{1 + q^4} + \frac{q^5(2q^2 + 2q + 1 + 2q^3 + q^4) ababa}{1 + q^4}$$

$$+ \frac{q^6(q^5 - 1 - q - q^2) abbaa}{1 + q^4} + \frac{q^7(-1 - q + q^3 + q^4) baaba}{1 + q^4}$$

$$- \frac{q^{11}(2q + q^2 + 1) babaa}{1 + q^4} + q^{10} bbaaa$$

$$P^q [aabab] = aabab - q aabba + (-q - q^2 - q^6) abaab + (q^6 + q^5 + q + 1) q^2 ababa - q^9 abbaa + (q^3 + q^7) baaab - (q^5 + q^4 + 1) q^4 baaba + q^{10} babaa$$

$$P^q [aabbb] = aabbb + (-q - q^2 - q^3) ababb + (q^7 + q^8 + q^9) abbab + (-q^8 + q^5 - q^9 - q^{10}) abbba - (q^7 + 2q^6 + 2q^5 + q^4 - q^3 - 2q^2 - 2q - 1) q^4 babab + (q^6 + 2q^5 + 2q^4 + q^3 - q^2 - q - 1) q^6 babba + (q^6 + q^5 + q^4 - q^2 - q - 1) q^6 bbaab - q^{11}(1 + q + q^2) bbaba + q^{10} bbbaa$$

$$P^q [ababb] = ababb + (-q - q^2 - q^6) abbab + (q^3 + q^7) abbba - q baabb + (q^6 + q^5 + q + 1) q^2 babab - (q^5 + q^4 + 1) q^4 babba - q^9 bbaab + q^{10} bbaba$$

$$P^q [abbbb] = abbbb + (-q - q^2 - q^3 - q^4) bbbbb + (q^3 + q^4 + 2q^5 + q^6 + q^7) bbabb + (-q^6 - q^7 - q^8 - q^9) bbbab + q^{10} bbbba \quad (11)$$

>
>
>

>

Calcul des polynômes associés aux mots de Lyndon pour $X=\{a < b < c\}$

> $TF := \text{lyndon}(3, "abc");$

$$TF := [aab, aac, abb, abc, acb, acc, bbc, bcc]$$

(12)

> **for** j **from** 1 **to** $\text{nops}(TF)$ **do** $\text{Polly}(3, TF[j], "abc", [1, 2, 3], Y, q)$ **end;**

$$P^q[aab] = aab + (-q - q^2) aba + q^3 baa$$

$$P^q[aac] = aac + (-q - q^2) aca + q^3 caa$$

$$P^q[abb] = abb + (-q - q^2) bab + q^3 bba$$

$$P^q[abc] = abc - q acb + (q^3 - q) bac - q^4 bca + q^3 cba$$

$$P^q[acb] = acb - q^2 bac + q^3 bca - q cab$$

$$P^q[acc] = acc + (-q - q^2) cac + q^3 cca$$

$$P^q[bbc] = bbc + (-q - q^2) bcb + q^3 cbb$$

$$P^q[bcc] = bcc + (-q - q^2) cbc + q^3 ccb$$

(13)

> $TG := \text{lyndon}(4, "abc");$

$$TG := [aaab, aaac, aabb, aabc, aacb, aacc, abac, abbb, abbc, abcb, abcc, acbb, acbc, accb, accc, bbbc, bbcc, bccc]$$

(14)

> **for** j **from** 1 **to** $\text{nops}(TG)$ **do** $\text{Polly}(4, TG[j], "abc", [1, 2, 3], Y, q)$ **end;**

$$P^q[aaab] = aaab + (-q - q^2 - q^3) aaba + (q^5 + q^4 + q^3) abaa - q^6 baaa$$

$$P^q[aaac] = aaac + (-q - q^2 - q^3) aaca + (q^5 + q^4 + q^3) acaa - q^6 caaa$$

$$P^q[aabb] = aabb - \frac{q(1 + 2q + q^2) abab}{1 + q^4} - \frac{q^3(-1 - q + q^3 + q^4) abba}{1 + q^4}$$

$$- \frac{q^3(-1 - q + q^3 + q^4) baab}{1 + q^4} + \frac{q^7(1 + 2q + q^2) baba}{1 + q^4} - q^6 bbaa$$

$$P^q[aabc] = aabc - q aacb + (q^3 - q) abac + (-q^4 - q^3) abca + (-q^7 + q^5) acab \\ + (q^8 - q^6 + q^3 + q^4) acba + (-q^6 + q^4) bac a + q^7 bcaa + (q^8 - q^6) caab + (-q^9 + q^7) caba - q^6 cbaa$$

$$P^q[aaacb] = aaacb - q^2 abac + q^3 abca + (q^6 - q^2 - q) acab - q^7 acba + q^5 bac a \\ - q^6 bcaa + (-q^7 + q^3) caab + q^8 caba$$

$$P^q[aacc] = aacc - \frac{q(1 + 2q + q^2) acac}{1 + q^4} - \frac{q^3(-1 - q + q^3 + q^4) acca}{1 + q^4}$$

$$- \frac{q^3(-1 - q + q^3 + q^4) caac}{1 + q^4} + \frac{q^7(1 + 2q + q^2) caca}{1 + q^4} - q^6 ccaa$$

$$P^q[abac] = abac - q abca - q^4 acab + q^5 acba - q baac + q^2 bac a + q^5 caab \\ - q^6 caba$$

$$P^q[abbb] = abbb + (-q - q^2 - q^3) babb + (q^5 + q^4 + q^3) bbab - q^6 bbba$$

$$P^q[abbc] = abbc + (-q^2 - q) abcb + q^3 acbb + (q^4 + q^5 - q^2 - q) babc + (-q^6$$

$$-q^5 + q^3 + q^2) bacb + (q^8 - q^6 - q^5 + q^3) bbac - q^9 bbca + (q^8 + q^7) bcba - q^6 cbba$$

$$P^q [abcb] = abcb - q acbb - q^3 babc + (q^4 + q^3 - q) bacb + (-q^6 + q^4) bbac + q^7 bbca - q^4 bcab - q^6 bcba + q^3 cbab$$

$$P^q [abcc] = abcc + (-q^2 - q) acbc + q^3 accb + (-q^6 + q^4 + q^3 - q) bacc + (q^7 + q^8 - q^5 - q^4) bcac - q^9 bcca + (-q^6 - q^7 + q^3 + q^4) cbac + (q^8 + q^7) cbca - q^6 ccba$$

$$P^q [acbb] = acbb + (-q^3 - q^2) bacb + q^5 bbac - q^6 bbca + q^3 (1 + q) bcab - q cabb$$

$$P^q [acbc] = acbc - q accb + (q^4 - q^2) bacc + (-q^5 - q^6 + q^3) bcac + q^7 bcca - q cabc + q^2 cacb + q^5 cbac - q^6 cbca$$

$$P^q [accb] = accb - q^3 bacc + q^4 (1 + q) bcac - q^6 bcca + (-q^2 - q) cacb + q^3 ccab$$

$$P^q [accc] = accc + (-q - q^2 - q^3) cacc + (q^5 + q^4 + q^3) ccac - q^6 ccca$$

$$P^q [bbbc] = bbbc + (-q - q^2 - q^3) bbcb + (q^5 + q^4 + q^3) bcbb - q^6 cbbb$$

$$P^q [bbcc] = bbcc - \frac{q(1 + 2q + q^2) bcbc}{1 + q^4} - \frac{q^3(-1 - q + q^3 + q^4) bccb}{1 + q^4} - \frac{q^3(-1 - q + q^3 + q^4) cbbc}{1 + q^4} + \frac{q^7(1 + 2q + q^2) cbcb}{1 + q^4} - q^6 cccb$$

$$P^q [bccc] = bccc + (-q - q^2 - q^3) cbcc + (q^5 + q^4 + q^3) ccbc - q^6 cccb \quad (15)$$

>

po

> TH := lyndon(4, "abcd");

TH := [aaab, aaac, aaad, aabb, aabc, aabd, aacb, aacc, aacd, aadb, aadc, aadd, abac, abad, abbb, abbc, abbd, abcb, abcc, abcd, abdb, abdc, abdd, acad, acbb, acbc, acbd, accb, accc, accd, acdb, acdc, acdd, adbb, adbc, adbd, adcb, adcc, adcd, addb, addc, addd, bbbc, bbbd, bbcc, bbcd, bbdc, bbdd, bcbd, bccc, bccd, bcdc, bcdd, bdcc, bdcd, bddc, bddd, cccd, ccdd, cddd] (16)

> for j from 1 to nops(TH) do Polly(4, TH[j], "abcd", [1, 2, 3, 4], Y, q)end;

$$P^q [aaab] = aaab + (-q - q^2 - q^3) aaba + (q^3 + q^4 + q^5) abaa - q^6 baaa$$

$$P^q [aaac] = aaac + (-q - q^2 - q^3) aaca + (q^3 + q^4 + q^5) acaa - q^6 caaa$$

$$P^q [aaad] = aaad + (-q - q^2 - q^3) aada + (q^3 + q^4 + q^5) adaa - q^6 daaa$$

$$P^q [aabb] = aabb - \frac{q(1 + 2q + q^2) abab}{1 + q^4} - \frac{q^3(-1 - q + q^3 + q^4) abba}{1 + q^4} - \frac{q^3(-1 - q + q^3 + q^4) baab}{1 + q^4} + \frac{q^7(1 + 2q + q^2) baba}{1 + q^4} - q^6 bbaa$$

$$P^q [aabc] = aabc - q aacb + (q^3 - q) abac + (-q^4 - q^3) abca + (-q^7 + q^5) acab$$

$$+ (q^8 - q^6 + q^3 + q^4) acba + (-q^6 + q^4) baca + q^7 bcaa + (q^8 - q^6) caab + (-q^9 + q^7) caba - q^6 cbaa$$

$$P^q [aabd] = aabd - q aadb + (q^3 - q) abad + (-q^4 - q^3) abda + (-q^7 + q^5) adab + (q^8 - q^6 + q^3 + q^4) adba + (-q^6 + q^4) bada + q^7 bdaa + (q^8 - q^6) daab + (-q^9 + q^7) daba - q^6 dbaa$$

$$P^q [aacb] = aacb - q^2 abac + q^3 abca + (q^6 - q^2 - q) acab - q^7 acba + q^5 baca - q^6 bcaa + (-q^7 + q^3) caab + q^8 caba$$

$$P^q [aacc] = aacc - \frac{q(1 + 2q + q^2) acac}{1 + q^4} - \frac{q^3(-1 - q + q^3 + q^4) acca}{1 + q^4} - \frac{q^3(-1 - q + q^3 + q^4) caac}{1 + q^4} + \frac{q^7(1 + 2q + q^2) caca}{1 + q^4} - q^6 ccaa$$

$$P^q [aacd] = aacd - q aadc + (q^3 - q) acad + (-q^4 - q^3) acda + (-q^7 + q^5) adac + (q^8 - q^6 + q^3 + q^4) adca + (-q^6 + q^4) cada + q^7 cdaa + (q^8 - q^6) daac + (-q^9 + q^7) daca - q^6 dcaa$$

$$P^q [aadb] = aadb - q^2 abad + q^3 abda + (q^6 - q^2 - q) adab - q^7 adba + q^5 bada - q^6 bdaa + (-q^7 + q^3) daab + q^8 daba$$

$$P^q [aadc] = aadc - q^2 acad + q^3 acda + (q^6 - q^2 - q) adac - q^7 adca + q^5 cada - q^6 cdaa + (-q^7 + q^3) daac + q^8 daca$$

$$P^q [aadd] = aadd - \frac{q(1 + 2q + q^2) adad}{1 + q^4} - \frac{q^3(-1 - q + q^3 + q^4) adda}{1 + q^4} - \frac{q^3(-1 - q + q^3 + q^4) daad}{1 + q^4} + \frac{q^7(1 + 2q + q^2) dada}{1 + q^4} - q^6 ddaa$$

$$P^q [abac] = abac - q abca - q^4 acab + q^5 acba - q baac + q^2 baca + q^5 caab - q^6 caba$$

$$P^q [abad] = abad - q abda - q^4 adab + q^5 adba - q baad + q^2 bada + q^5 daab - q^6 daba$$

$$P^q [abbb] = abbb + (-q - q^2 - q^3) babb + (q^3 + q^4 + q^5) bbab - q^6 bbba$$

$$P^q [abbc] = abbc + (-q^2 - q) abcb + q^3 acbb + (q^4 + q^5 - q^2 - q) babc + (-q^6 - q^5 + q^3 + q^2) bacb + (q^8 - q^6 - q^5 + q^3) bbac - q^9 bbca + (q^8 + q^7) bcba - q^6 cbba$$

$$P^q [abbd] = abbd + (-q^2 - q) abdb + q^3 adbb + (q^4 + q^5 - q^2 - q) babd + (-q^6 - q^5 + q^3 + q^2) badb + (q^8 - q^6 - q^5 + q^3) bbad - q^9 bbda + (q^8 + q^7) bdba - q^6 dbba$$

$$P^q [abcb] = abcb - q acbb - q^3 babc + (q^4 + q^3 - q) bacb + (-q^6 + q^4) bbac$$

$$+ q^7 bbca - q^4 bcab - q^6 bcba + q^3 cbab$$

$$P^q [abcc] = abcc + (-q^2 - q) acbc + q^3 accb + (-q^6 + q^4 + q^3 - q) bacc + (q^7 + q^8 - q^5 - q^4) bcac - q^9 bcca + (-q^6 - q^7 + q^3 + q^4) cbac + (q^8 + q^7) cbca - q^6 ccba$$

$$P^q [abcd] = abcd - q abdc + (q^3 - q) acbd - q^4 acdb + q^3 adcb + (q^7 - q^5 + q^3 - q) bacd + (q^2 - q^6) badc + (q^6 - q^4) bcad - q^9 bcda + (-q^9 + q^7) bdac + q^{10} bdca + (-q^5 + q^3) cbad + q^7 cdba + (q^8 - q^6) dbac + (-q^9 + q^7) dbca - q^6 dcba$$

$$P^q [abdb] = abdb - q adbb - q^3 babd + (q^4 + q^3 - q) badb + (-q^6 + q^4) bbad + q^7 bbda - q^4 bdab - q^6 bdba + q^3 dbab$$

$$P^q [abdc] = abdc - q^2 acbd + q^3 acdb - q adbc - q^4 (q^2 - 1) bacd + (q^3 - q) badc + q^5 (q^2 - 1) bcad + (q^8 - q^4) bdac - q^9 bdca - q^4 (q^2 - 1) cbad + q^7 cbda - q^6 cdba + (-q^7 + q^3) dbac + q^8 dbca$$

$$P^q [abdd] = abdd + (-q^2 - q) adbd + q^3 addb + (-q^6 + q^4 + q^3 - q) badd + (q^7 + q^8 - q^5 - q^4) bdad - q^9 bdda + (-q^6 - q^7 + q^3 + q^4) dbad + (q^8 + q^7) dbda - q^6 ddba$$

$$P^q [acad] = acad - q acda - q^4 adac + q^5 adca - q caad + q^2 cada + q^5 daac - q^6 daca$$

$$P^q [acbb] = acbb + (-q^3 - q^2) bacb + q^5 bbac - q^6 bbca + q^3 (1 + q) bcab - q cabb$$

$$P^q [acbc] = acbc - q accb + (q^4 - q^2) bacc + (-q^5 - q^6 + q^3) bcac + q^7 bcca - q cabc + q^2 cacb + q^5 cbac - q^6 cbca$$

$$P^q [acbd] = acbd - q acdb + (q^4 - q^2) bacd + (-q^5 + q^3) bcad - q^6 bdac + q^7 bdca - q cabd + q^2 cadb + q^5 dbac - q^6 dbca$$

$$P^q [accb] = accb - q^3 bacc + q^4 (1 + q) bcac - q^6 bcca + (-q^2 - q) cacb + q^3 ccab$$

$$P^q [accc] = accc + (-q - q^2 - q^3) cacc + (q^3 + q^4 + q^5) ccac - q^6 ccca$$

$$P^q [accd] = accd + (-q^2 - q) acdc + q^3 adcc + (q^4 + q^5 - q^2 - q) cacd + (-q^6 - q^5 + q^3 + q^2) cadc + (q^8 - q^6 - q^5 + q^3) ccad - q^9 ccda + (q^8 + q^7) cdca - q^6 dcca$$

$$P^q [acdb] = acdb - q adcb - q^3 bacd + q^4 badc - q^4 (q^2 - 1) bcad + q^7 bcda - q^6 bdca + (q^3 - q) cadb - q^4 cdab + q^3 dcab$$

$$P^q [acdc] = acdc - q adcc - q^3 cacd + (q^4 + q^3 - q) cadc + (-q^6 + q^4) ccad + q^7 ccda - q^4 cdac - q^6 cdca + q^3 dcac$$

$$P^q [acdd] = acdd + (-q^2 - q) adcd + q^3 addc + (-q^6 + q^4 + q^3 - q) cadd + (q^7$$

$$+ q^8 - q^5 - q^4) cdad - q^9 cdda + (-q^6 - q^7 + q^3 + q^4) dcad + (q^8 + q^7) dcda - q^6 ddca$$

$$P^q [adbb] = adbb + (-q^3 - q^2) badb + q^5 bbad - q^6 bbda + q^3 (1 + q) bdab - q dabb$$

$$P^q [adbc] = adbc - q adcb + (q^4 - q^2) badc - q^6 bcad + q^7 bcda + (-q^5 + q^3) bdac + q^5 cbad - q^6 cbda - q dabc + q^2 dacb$$

$$P^q [adbd] = adbd - q addb + (q^4 - q^2) badd + (-q^5 - q^6 + q^3) bdad + q^7 bdda - q dabd + q^2 dadb + q^5 dbad - q^6 dbda$$

$$P^q [adcb] = adcb - q^3 badc + q^5 bcad - q^6 bcda + q^4 bdac - q^2 cadb + q^3 cdab - q dacb$$

$$P^q [adcc] = adcc + (-q^3 - q^2) cadc + q^5 ccad - q^6 ccda + q^3 (1 + q) cdac - q dacc$$

$$P^q [adcd] = adcd - q addc + (q^4 - q^2) cadd + (-q^5 - q^6 + q^3) cdad + q^7 cdda - q dacd + q^2 dadc + q^5 dcad - q^6 dcda$$

$$P^q [adbb] = adbb - q^3 badd + q^4 (1 + q) bdad - q^6 bdda + (-q^2 - q) dadb + q^3 ddab$$

$$P^q [adcc] = addc - q^3 cadd + q^4 (1 + q) cdad - q^6 cdda + (-q^2 - q) dadc + q^3 ddac$$

$$P^q [addd] = addd + (-q - q^2 - q^3) dadd + (q^3 + q^4 + q^5) ddad - q^6 ddda$$

$$P^q [bbbc] = bbbc + (-q - q^2 - q^3) bbcb + (q^3 + q^4 + q^5) bccb - q^6 cbbb$$

$$P^q [bbbd] = bbbd + (-q - q^2 - q^3) bbdb + (q^3 + q^4 + q^5) bdbb - q^6 dbbb$$

$$P^q [bbcc] = bbcc - \frac{q(1 + 2q + q^2) bcbc}{1 + q^4} - \frac{q^3(-1 - q + q^3 + q^4) bccb}{1 + q^4} - \frac{q^3(-1 - q + q^3 + q^4) cbcb}{1 + q^4} + \frac{q^7(1 + 2q + q^2) cbcb}{1 + q^4} - q^6 cccb$$

$$P^q [bbcd] = bbcd - q bbdc + (q^3 - q) bcbd + (-q^4 - q^3) bcdb + (-q^7 + q^5) bdbc + (q^8 - q^6 + q^3 + q^4) bdcb + (-q^6 + q^4) cbdb + q^7 cdbb + (q^8 - q^6) dbbc + (-q^9 + q^7) dbcb - q^6 dcbb$$

$$P^q [bbdc] = bbdc - q^2 bcbd + q^3 bcdb + (q^6 - q^2 - q) bdbc - q^7 bdcdb + q^5 cbdb - q^6 cdbb + (-q^7 + q^3) dbbc + q^8 dbcb$$

$$P^q [bbdd] = bbdd - \frac{q(1 + 2q + q^2) bdbd}{1 + q^4} - \frac{q^3(-1 - q + q^3 + q^4) bddb}{1 + q^4} - \frac{q^3(-1 - q + q^3 + q^4) dbbd}{1 + q^4} + \frac{q^7(1 + 2q + q^2) dbdb}{1 + q^4} - q^6 ddbb$$

$$P^q [bcbd] = bcbd - q bcdb - q^4 bdbc + q^5 bdcdb - q cbdb + q^2 cbdb + q^5 dbbc - q^6 dbcb$$

$$\begin{aligned}
P^q [bccc] &= bccc + (-q - q^2 - q^3) cbcc + (q^3 + q^4 + q^5) ccbc - q^6 cccb \\
P^q [bccd] &= bccd + (-q^2 - q) bc dc + q^3 bdcc + (q^4 + q^5 - q^2 - q) cbcd + (-q^6 \\
&\quad - q^5 + q^3 + q^2) cbdc + (q^8 - q^6 - q^5 + q^3) cc bd - q^9 cc db + (q^8 + q^7) cdcb \\
&\quad - q^6 dc cb \\
P^q [bcd c] &= bcd c - q bdcc - q^3 cbcd + (q^4 + q^3 - q) cbdc + (-q^6 + q^4) cc bd \\
&\quad + q^7 cc db - q^4 cd bc - q^6 cd cb + q^3 dc bc \\
P^q [bcdd] &= bcdd + (-q^2 - q) bdcd + q^3 bddc + (-q^6 + q^4 + q^3 - q) cbdd + (q^7 \\
&\quad + q^8 - q^5 - q^4) cd bd - q^9 cd db + (-q^6 - q^7 + q^3 + q^4) dc bd + (q^8 + q^7) dc db \\
&\quad - q^6 dd cb \\
P^q [bdcc] &= bdcc + (-q^3 - q^2) cbdc + q^5 cc bd - q^6 cc db + q^3 (1 + q) cd bc - q dbcc \\
P^q [bdcd] &= bdcd - q bddc + (q^4 - q^2) cbdd + (-q^5 - q^6 + q^3) cd bd + q^7 cddb \\
&\quad - q dbcd + q^2 dbdc + q^5 dc bd - q^6 dc db \\
P^q [bddc] &= bddc - q^3 cbdd + q^4 (1 + q) cd bd - q^6 cddb + (-q^2 - q) dbdc \\
&\quad + q^3 dd bc \\
P^q [bddd] &= bddd + (-q - q^2 - q^3) dbdd + (q^3 + q^4 + q^5) ddbd - q^6 dddb \\
P^q [cccd] &= cccd + (-q - q^2 - q^3) cc dc + (q^3 + q^4 + q^5) cd cc - q^6 dccc \\
P^q [ccdd] &= ccdd - \frac{q(2q + q^2 + 1) cdcd}{1 + q^4} - \frac{q^3(-1 - q + q^3 + q^4) cddc}{1 + q^4} \\
&\quad - \frac{q^3(-1 - q + q^3 + q^4) dccd}{1 + q^4} + \frac{q^7(2q + q^2 + 1) dc dc}{1 + q^4} - q^6 ddcc \\
P^q [cddd] &= cddd + (-q - q^2 - q^3) dc dd + (q^3 + q^4 + q^5) ddcd - q^6 dddc
\end{aligned}$$

(17)

>

Bibliographie

- [1] Reutenauer, C., *Free Lie Algebras*, *London Math. Soc. Monographs*, New Series-7, Oxford Science Publications, 1993.
- [2] G.Mélançon and C.Reutenauer, Lyndon words, free algebras and shuffles, *Can. J.Math.* 41, 1989, p.577 – 591.
- [3] G.Mélançon, *Réécriture dans l'algèbre de Lie libre, le groupe libre et l'algèbre associative libre*, Thèse Math., Univ. du Québec à Montréal, 1991.
- [4] C.Bui, G.H.E. Duchamp, V.HoangNgoc Minh, *Schützenberger's factorisation on the (completed) Hopf of q -shuffle product*, *Journal of Algebra*, Number Theory and Applications, Volume 30, Number 2, 2013, Pages 191 – 215
- [5] Hoang Ngoc Minh, *Structure of polyzetas and Lyndon words*, *Vietnam Journal Mathematics* ISSN 2305 – 221X, volume 41, Number 4 December 2013.
- [6] Hoang Ngoc Minh, *On a conjecture by Pierre Cartier about a Group of associators*, *Acta Math Vietnam* DOI 10.1007/s40306 – 013 – 0024 – 1.
- [7] Matthieu Deneufchâtel, *Intégrales Itérées en Physique Combinatoire*, Le diplôme de docteur de l'Université Paris 13, Sorbonne Paris cité : 2012.
- [8] G.E.H. Duchamp, L.Kane, V.Hoang Ngoc Minh, C.Tollu, *Dual bases for non commutative symmetric and quasi-symmetric functions via monoidal factorisation*, (2013), pp.1 – 12, *arXiv* : [http : //arxiv.org/abs/1305.4447](http://arxiv.org/abs/1305.4447).
- [9] Christian COSTERMANS, *Calcul symbolique non commutatif : analyse des constantes d'arbre de fouille*, Doctorat de l'Université des Sciences et Technologies de Lille : Spécialité Informatique : 2008.
- [10] J. Berstel and C. Reutenauer, Rational series and their languages, *EATCS Monographs on Theoretical Computer Science*, Springer-Verlag, 1984.
- [11] J. Berstel, D. Perrin. Theory of codes, *Academic Press* (1985).
- [12] N.Bourbaki, *Lie Groups and Lie Algebras*, chapter 1-3, Springer.
- [13] C. Bui. Master dissertation, *arXiv* (2012).
- [14] P. Cartier, *Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes pro-unipotents*, Sém BOURBAKI, 53ème 2000 – 2001, *numero* : 885.

- [15] K.T. Chen, R.H. Fox, R.C. Lyndon, Free differential calculus, IV. The quotient groups of the lower central series, *Ann. of Math.*, 68 (1958) pp. 8195.
- [16] C. Costermans and Hoang Ngoc Minh, Noncommutative algebra, multiple harmonic sums and applications in discrete probability, *Journal of Symbolic Computation* (2009), pp. 801-817.
- [17] G.Duchamp, A.Klyachko, D.Krob and J.-Y.Thibon, *Noncommutative symmetric functions III : Deformations of Cauchy and convolution algebras*, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 1(2) (1997), 159 – 216.
- [18] V. Drinfel'd, *Quasi-Hopf Algebras*, *Len. Math. J.*, 1, 1419 – 1457, 1990.
- [19] V. Drinfel'd, On quasitriangular quasi-hopf algebra and a group closely connected with $\text{gal}(\bar{q}/q)$, *Leningrad Math. J.*, 4, 829 – 860, 1991.
- [20] J-Y. Enjalbert, Hoang Ngoc Minh, Combinatorial study of Hurwitz colored polyzêtas, *Discrete Mathematics*, 1. 24 no. 312 (2012), p. 3489 – 3497.
- [21] T.Q.T. Lê and J. Murakami, Kontsevich's integral for Kauffman polynomial, *Nagoya Math.*, pp 39-65, 1996.
- [22] M. Lothaire, *Combinatorics on words*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass, coll. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 17 (1983).
- [23] C. Malvenuto and C. Reutenauer, Duality between quasi-symmetric functions and the Solomon descent algebra, *J. of Alg.* 177 (1995), pp. 967 – 982.
- [24] Hoang Ngoc Minh, Petitot, M., and Van der Hoeven, J., L'algèbre des polylogarithmes par les séries génératrices, *Proceedings of FPSAC'99*, 1999.
- [25] Hoang Ngoc Minh, Finite polyzêtas, Poly-Bernoulli numbers, identities of polyzêtas and noncommutative rational power series, *Proceedings of 4th International Conference on Words*, pp. 232 – 250, 2003.
- [26] Hoang Ngoc Minh, On a conjecture by Pierre Cartier about a group of associators, *arXiv* (2013).
- [27] Hoffman, M., Quasi-shuffle products, *J. of Alg. Cominatorics*, 11 (2000), pages 49 – 68. [http : //arxiv.org/abs/math/9907173v1](http://arxiv.org/abs/math/9907173v1).
- [28] D.E. Radford., A natural ring basis for shuffle algebra and an application to group schemes *Journal of Algebra*, 58, pp. 432 – 454, 1979.
- [29] Ree R., *Lie elements and an algebra associated with shuffles* Ann. Math 68 210 – 220, 1958.
- [30] M. P.Schützenberger, *Sur une propriété combinatoire des algèbres de Schützenberger Lie libres pouvant être utilisée dans un problème de Mathématiques appliquées*, Séminaire Dubreuil - Pisot année 1958 - 1959, Inst. Henri - Poincaré, Paris (1958).
- [31] L. Solomon, A. Mackey formula in the group ring of a Coxeter group, *J. Algebra*, 41 (1976), pp. 255-264

- [32] Viennot, X.G (1978). *Algèbre de Lie libres et monodes libres*, Lecture Notes in Mathematics 691. Springer - Verlag.
- [33] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications, *in First European Congress of Mathematics, vol. 2, Birkhâser (1994), pp. 497 – 512.*
- [34] Lenny Tevlin, Noncommutative Monomial Symmetric Functions, Formal Power Series and Algebraic Combinatorics *Nankai University, Tianjin, China, 2007.*
- [35] I.M. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V.S. Retakh, J.Y. Thibon, *Noncommutative symmetric functions*, Advances in Mathematics 112 (1995), 218 – 348.
- [36] Jean-Paul Bultel, *Déformations d'algèbres de Hopf combinatoires et inversion de Lagrange non commutative*, Doctorat de l'Université Paris - Est : Spécialité Informatique 2011.
- [37] James E. Humphreys , *Reflection groups and coxeter groups*, Cambridge studies in advanced mathematics.
- [38] Anisse KASRAOUI, *Etudes combinatoires sur les permutations et partitions d'ensemble*, Doctorat de l'Université Claude Bernard-Lyndon 1 : présentée et soutenue publiquement le 12 Mars 2009.
- [39] A.Garsia and C.Reutenaeur, *A decomposition of Solomon's descent algebra*, Adv. in Math. 77(1989), 189 – 262.
- [40] B. Mielnik and J. Plebanski, *Combinatorial approach to Baker-Campbell-Hausdorff exponents*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A vol. XII(1970), 215 – 254.
- [41] M. Gerstenhaber and D. Schack, *A Hodge-type decomposition for commutative algebra cohomology*, J. Pure Appl. Alg. 48(1987), 229 – 247.
- [42] J. L. Loday, *Opérateur sur l'homologie cyclique des algèbres commutatives*, Invent. Math. 96(1989), 205 – 230.
- [43] L. Solomon, *A Mackey formula in the group ring of a Coxeter group*, J. Algebra 41(1976), 255 – 268.
- [44] D. Zagier, *Realizability of a model in infinite statistics*, Commun. Math. Phys. 147(1992), 199 – 210.
- [45] A. Varchenko, *Bilinear form of real configuration of hyperplanes*, Adv. in Math. 97(1993), 110 – 144.
- [46] M. Kashiwara, T. Miwa and E. Stern, *Decomposition of q -deformed Fock spaces*, preprint, 1995.