Méthodes quantitatives de l'Economie (Partie C)

Résumée par
Hoang Ngoc Minh (hoang@univ-lille2.fr)

Licence AES,
Faculté des sciences juridiques, politiques et sociales
Université du droit et de la santé - Lille 2

2019

Plan

1. Fonctions réelles de n variables réelles,
   1.1 Limite, Continuité, Dérivations Partielles,
   1.2 Vecteur gradient et matrice hermitienne.
2. Optimisation dans $\mathbb{R}^n$
   2.1 Fonctions concaves, fonctions convexes,
   2.2 Optimum.

Ensemble de $\mathbb{R}^n$

- Soit $n \in \mathbb{N}_+$. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$.
- On munit $\mathbb{R}^n$ deux opérations
  - $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$
  - $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.
- Soit d une distance sur $\mathbb{R}^n$, c.à.d.l'apllication de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$,
$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$
- Une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ centrée en $a \in \mathbb{R}^n$ et de rayon r est l'ensemble $\underline{B}(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n | d(x, a) < r\}$.
- Une boule fermée de $\mathbb{R}^n$ centrée en $a \in \mathbb{R}^n$ et de rayon r est l'ensemble $\overline{B}(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n | d(x, a) \leq r\}$.
- Un voisinage de $a \in \mathbb{R}^n$ qui contient une boule ouverte (ou fermée) de $\mathbb{R}^n$ centrée en a.
- Un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ est dit ouvert s'il est voisinage de chacun de ses points.
- Un sous enensemble de $\mathbb{R}^n$ est dit fermé si son complémentaire dans $\mathbb{R}^n$ est ouvert.

Fonctions réelle de n variables réelles

Soit $n > 0$.
Soit $O \subset \mathbb{R}^n$ (c-à-d O est un ouvert de $\mathbb{R}^n$).
Soit $f : O \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (c-à-d f est une fonction de O dans $\mathbb{R}^n$).
L'image de O par f est notée par $\mathrm{Im} f$.
L'ensemble de définition de f est notée par D_f (c-à-d D_f est l'ensemble des x qui ont une image par f).

Exemple

- $f(x) = x_1^2 + x_2^2, D_f = \mathbb{R}^2.$
- $f(x) = \dfrac{1}{x_1 - x_2}, D_f = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1 \neq x_2\}.$
- $f(x) = \ln(x_1 x_2), D_f = (\mathbb{R}_+)^2 \cup (\mathbb{R}_-)^2.$

Soit f une fonction définie au voisinage de a sauf peut être en a.

- On dit que f a pour limite l quand x tend vers a lorsque

  $$\forall \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \text{ t.q. } \forall x \in V, \|x - a\| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

- f est dite continue en a lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Opérations et composition

- Soit f et g deux fonctions continues en a.
  - $f + g$ est continue en a,
  - $f \times g$ est continue en a,
  - f/g est continue en a (pourvue que g ne s'annule pas en a).
- Soit f une fonction continue en a et g une fonction continue en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est continue en a.

Exemple

$g(x) = \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + 5}{2 + x_1^4}$ *et* $h(x) = \exp(x_1 x_2)$ *sont continues sur* $\mathbb{R}^2$*.*

$f(x) = \dfrac{2x_1 - 5x_2 + x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^3$*.*

- Soit f une fonction continue en a. Alors les ensembles suivant

$$\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) > 0\} \quad \text{et} \quad \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) < 0\}$$

  sont ouverts de $\mathbb{R}^n$.
- Soit f une fonction continue en a. Alors les ensembles suivant

$$\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \geq 0\}, \quad \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = 0\}, \quad \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \leq 0\}$$

  sont fermés de $\mathbb{R}^n$.

Exercices

Exercice

Soit $f(x) = \dfrac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2}$ *si* $x = (x_1, x_2) \neq (0,0)$.

Montrer que $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x)$ *n'existe pas.*

Exercice

Parmi les ensembles suivants lesquels sont ouverts, fermés, bornés, compacts dans $\mathbb{R}^2$

$$\{x \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 \leq 4\} \quad et \quad \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1 + 5x_2 - x_1x_2 > 0\}?$$

Dérivées partielles (cas $n = 2$)

Soit f une fonction définie au voisinage de $a = (a_1, a_2)$ de $\mathbb{R}^2$ sauf peut être en a. Considérons

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ x_1 & \longmapsto & \phi(x_1) = f(x_1, a_2). \end{array}$$

Si ϕ dérivable en a_1, on appelle dérivée partielle de f par rapport à x_1 en $a = (a_1, a_2)$ le nombre

$$\phi'(a_1) = \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} = \lim_{x_1 \to a_1} \frac{f(x_1, a_2) - f(a_1, a_2)}{x_1 - a_1}.$$

De même, considérons

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ x_2 & \longmapsto & \psi(x_2) = f(a_1, x_2). \end{array}$$

Si ψ dérivable en a_2, on appelle dérivée partielle de f par rapport à x_2 en $a = (a_1, a_2)$ le nombre

$$\psi'(a_2) = \frac{\partial f(a)}{\partial x_2} = \lim_{x_2 \to a_2} \frac{f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2)}{x_2 - a_2}.$$

Exercices

Exercice

Soit $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4$. *Donner* $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1}$ *et* $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2}$ *?*

Exercice

Soit $f(x) = x_1 + 5x_2 - x_1 x_2$. *Donner* $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1}$ *et* $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2}$ *?*

Exercice

Soit $f(x) = \exp(x_1 x_2)$. *Donner* $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1}$ *et* $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2}$ *?*

Exercice

Soit $f(x) = \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + 5}{2 + x_1^4}$. *Donner* $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1}$ *et* $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2}$ *?*

Dérivées partielles (cas général)

Soit f une fonction définie au voisinage de $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$ sauf peut être en a.

- Pour tout $i = 1, \ldots, n$, on appelle dérivée partielle de f par rapport à x_i en $a = (a_1, \ldots, a_n)$ la limite suivante lorsqu'elle existe

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = \lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, \ldots, x_i, \ldots a_n) - f(a_1, \ldots, a_i, \ldots a_n)}{x_i - a_i}.$$

- f est dite dérivable en $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$ lorsque ses dérivées partielles existent.
- f est dite différentiable en $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$ lorsqu'ils existent des réels $r_1, \ldots, r_n$ et une fonction ε de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ tels que pour tout $h = (h_1, \ldots, h_n)$ on ait

$$f(a+h) = f(a) + r_1 h_1 + \ldots + r_n h_n + \|h\| \varepsilon(h), \text{ où } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

- f est dite de classe C^1 en a lorsque ses dérivées partielles existent et sont continues en a.

Opérations et lien entre différentes notions

- f, g dérivables (resp. différentiables, de classe C^1) en a, $g(a) \neq 0$.
  - $f + g$ est dérivable (resp. différentiable, de classe C^1) en a,
  - $f \times g$ est dérivable (resp. différentiable, de classe C^1) en a,
  - f/g est dérivable (resp. différentiable, de classe C^1) en a.
- Si f est dérivable sur un ouvert A de $\mathbb{R}^n$ et g est dérivable sur $f(A)$ alors $g \circ f$ est dérivable sur A et
$$\frac{\partial (g \circ f)(a)}{\partial x_i} = g'(f(x_1, \dots, x_n)) \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}.$$
- Si f est différentiable en a alors pour tout $h = (h_1, \dots, h_n)$, on ait
$$f(a+h) = f(a) + h_1 \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} + \|h\| \varepsilon(h), \text{ où } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$
- Soit f différentiable en a. La différentielle de f en a est l'application linéaire définie par
$$\forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n, \quad df(a) = h_1 \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial f(a)}{\partial x_n}.$$
- f est de classe C^1 en $a \Rightarrow f$ est différentiable en $a \Rightarrow f$ est dérivable sur en a (les réciproques sont fausses en général).

Théorèmes fondamentaux

f est homogène de degré k sur $D \in \mathbb{R}^n$ lorsque pour tout $\forall x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda > 0$, on ait $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$.
f est homogène de degré k et dérivable alors ses dérivées partielles de f sont homogènes de degré $k - 1$.

Théorème (Formule d'Euler)

f est homogène de degré k et dérivable alors , pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on ait

$$x_1 \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} = kf(x).$$

Théorème (des fonctions implicites)

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$ telle que $f(x_1, x_2) = c$. Soit $a = (a_1, a_2) \in D$ et $f(a_1, a_2) = c$. Si $f'(a_1, a_2) \neq 0$, alors il existe un intervalle ouvert I contenant a_1, un intervalle ouvert J contenant a_2 et une unique fonction $\varphi : I \to J$ de classe C^1 tels que pour tout $\forall x_1 \in I$, $f(x_1, \varphi(x_1)) = c$. En particulier, $\varphi(a_1) = a_2$. De plus

$$\varphi'(a_1) = -\frac{\dfrac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x_2}}.$$

Exercices

Exercice

Etudier la dérivabilité et calculer les dérivées partielles de $f(x_1, x_2) = \ln(2 - x_1^2 - x_2^2)$.

Exercice

Etudier la dérivabilité et calculer les dérivées partielles de $F(t) = f(e^{t^2} t^3, \ln(t^3 + 1))$.
Application avec $f(u, v) = uv^2$.

Exercice

Soit $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 3}$.

- *Donner l'ensemble de définition* D_f *de* f.
- *Démontrer que* f *est différentiable sur* D_f.
- *Calculer le différentielle de* f *en* $(2, 3)$, *et notée par* $df(2, 3)$.
- *Donner une valeur approchée* $f(2.1, 3.08)$.

Le vecteur gradient et la matrice hessienne

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Lorsque f est dérivable en $a \in \mathbb{R}^n$, on définit le gradient de f en a le vecteur $\mathrm{grad}_f(a) = \left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f(a)}{\partial x_n}\right)^T$.
- Lorsque $\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(a)}{\partial x_n}$ existent et admettent des dérivées partielles, par rapport à $x_1, \dots, x_n$, en a, on les appelle dérivées partielles secondes, notées par $\frac{\partial f^2(a)}{\partial x_i \partial x_j}$, pour $i, j = 0, \dots, n$.
- Lorsque les dérivées partielles secondes de f existent, la matrice hessienne de f en a, notée $\mathrm{Hess}_f(a)$, la matrice de terme générale $\frac{\partial f^2(a)}{\partial x_i \partial x_j}$.
- f est dite de classe C^2 en a lorsque ses dérivées partielles secondes existent et sont continues en a.

Théorème (de Schwarz)

Si f admet des dérivées partielles secondes telles que ces dérivées sont continues en a alors $\frac{\partial f^2(a)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial f^2(a)}{\partial x_j \partial x_i}$, pour $i \neq j$.

Exercices

Exercice

Soit $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4$.

Donner $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2}, \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2}$ *et* $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2}$? *Vérifier que* $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} = \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1}$?

Exercice

Soit $f(x) = x_1 + 5x_2 - x_1 x_2$.

Donner $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2}, \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2}$ *et* $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2}$? *Vérifier que* $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} = \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1}$?

Exercice

Soit $f(x) = \exp(x_1 x_2)$.

Donner $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2}, \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2}$ *et* $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2}$? *Vérifier que* $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} = \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1}$?

Exercice

Soit $f(x) = \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + 5}{2 + x_1^4}$.

Donner $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2}, \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2}$ *et* $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2}$? *Vérifier que* $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} = \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1}$?

Exercices

Exercice

Soit $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4$. *Donner* $grad_f(a)$ *et* $Hess_f(a)$*?*

Exercice

Soit $f(x) = x_1 + 5x_2 - x_1x_2$. *Donner* $grad_f(a)$ *et* $Hess_f(a)$*?*

Exercice

Soit $f(x) = \exp(x_1x_2)$. *Donner* $grad_f(a)$ *et* $Hess_f(a)$*?*

Exercice

Soit $f(x) = \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + 5}{2 + x_1^4}$. *Donner* $grad_f(a)$ *et* $Hess_f(a)$*?*

Formules de Taylor

Théorème (Formule de Taylor-Lagrange)

Soit f de classe C^2 sur un ouvert O de R^n contenant a. Alors, pour tout $h = (h_1, \ldots, h_n)$ tel que $a + h \in O$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $(i \neq i)$

$$
\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a) + h_1 \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} + \ldots + h_n \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} + \frac{h_1^2}{2} \frac{\partial f^2(a+\theta h)}{\partial x_1^2} \\
&\quad + \ldots + h_i h_j \frac{\partial f^2(a+\theta h)}{\partial x_i \partial x_j} + \ldots + \frac{h_n^2}{2} \frac{\partial f^2(a+\theta h)}{\partial x_n^2}.
\end{aligned}
$$

Théorème (Formule de Taylor-Young)

Soit f de classe C^2 sur un ouvert O de R^n contenant a. Alors, pour tout $h = (h_1, \ldots, h_n)$ tel que $a + h \in O$, il existe une fonction ε tel que $(i \neq i)$

$$
\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a) + h_1 \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} + \ldots + h_n \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} + \frac{h_1^2}{2} \frac{\partial f^2(a)}{\partial x_1^2} \\
&\quad + \ldots + h_i h_j \frac{\partial f^2(a)}{\partial x_i \partial x_j} + \ldots + \frac{h_n^2}{2} \frac{\partial f^2(a)}{\partial x_n^2} + (h_1^2 + \ldots + h_n^2)\varepsilon(h),
\end{aligned}
$$

où $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Fonctions concaves – Fonctions convexes

- Soit f une fonction définie sur un sous ensemble convexe A de $\mathbb{R}^n$, c-à-d. A contient tout segment joignant deux de ses points :
$$\forall x, y \in A, \forall \lambda \in [0,1], \quad \lambda x + (1-\lambda)y \in A.$$
- f est dite concave lorsque, pour tout $x, y \in A$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on ait
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \in A.$$
- f est dite strictement concave lorsque, pour tout $x, y \in A$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on ait
$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$
- f est dite convexe lorsque, pour tout $x, y \in A$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on ait
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$
- f est dite strictement convexe lorsque, pour tout $x, y \in A$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on ait
$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Opérations et caractérisations

- Si f et g sont concaves (resp. convexes) sur A alors $f+g$ est concave (resp. convexe) sur A.
- Si f est concave (resp. convexe) sur A et $\lambda \geq 0$ alors λf est concave (resp. convexe) sur A.
- Si f est concave (resp. convexe) sur A et $\lambda \leq 0$ alors λf est convexe (resp. concave) sur A.

Soit f de classe C^2 sur un sous-ensemble ouvert A de $\mathbb{R}$.

- Si f est concave ssi pour tout $x \in A$, on ait $\text{Hess}_f(a)$ est semi-définie négative.
- Si pour tout $x \in A, \text{Hess}_f(a)$ est définie négative alors f est strictement concave.
- Si f est convexe ssi pour tout $x \in A$, on ait $\text{Hess}_f(a)$ est semi-définie positive.
- Si pour tout $x \in A, \text{Hess}_f(a)$ est définie positive alors f est strictement convexe.

Exemple

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x_1, x_2) &\longmapsto f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2 + 6x_2 + 4. \end{aligned}$$

f est de clasee C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}_f(a) &= \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}, \\ \det \mathrm{Hess}_f(a) &= 24, \\ \mathrm{trace}\ \mathrm{Hess}_f(a) &= 14. \end{aligned}$$

$\det \mathrm{Hess}_f(a) > 0$, donc la matrice hessienne admed deux valeurs propres qui ont le même signe.
$\mathrm{trace}\ \mathrm{Hess}_f(a) > 0$, les deux valeurs propres sont strictement positives.
Par conséquent, $\mathrm{Hess}_f(a)$ est définie positive et f est donc convexe.

Exercices

Exercice

Soit $c \in \mathbb{R}$. On considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & f(x_1, x_2) = cx_1^2 - 5x_2^2 + 4x_1x_2 - 6x_2 - 4. \end{array}$$

Pour quelles valeurs de c, f est elle concave ?

Exercice

On considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & f(x_1, x_2) = -\exp((x_1 - 2)^2 + x_2^2). \end{array}$$

Montrer que f est strictement convexe et de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Optimisation dans $\mathbb{R}^n$ (1/2)

- f admet un minimum global en a sur D lorsque
$$\forall x \in D, \qquad f(x) \geq f(a).$$
On dit alors que a fournit un minimum global à f sur D ou a est solution globale du problème
$$\min_{x \in D} f(x).$$
- f admet un minimum global strict en a sur D lorsque
$$\forall x \in I, x \neq a, \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(a).$$
- f admet un minimum local en a sur D lorsqu'il existe $r > 0$
$$\forall x \in B(a; r) \cap D, \qquad f(x) \geq f(a).$$
- f admet un minimum local strict en a si l'inégalité précédente est stricte pour $x \neq a$.

Optimisation dans $\mathbb{R}^n$ (2/2)

Soit f une fonction définie sur un sous ensemble D de $\mathbb{R}^n$ et $a \in D$.

- f admet un maximum global en a sur D lorsque
$$\forall x \in D, \qquad f(x) \leq f(a).$$
On dit alors que a fournit un maximum global à f sur D ou a est solution globale du problème
$$\max_{x \in D} f(x).$$
- f admet un maximum global strict en a sur D lorsque
$$\forall x \in D, x \neq a, \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(a).$$
- f admet un maximum local en a sur D lorsqu'il existe $r > 0$
$$\forall x \in B(a; r) \cap D, \qquad f(x) \leq f(a).$$
- f admet un maximum local strict en a si l'inégalité précédente est stricte pour $x \neq a$.

Un extremum est un maximum ou un minimum.

Théorèmes fondamentaux (1/2)

Théorème (Condition nécessaire du premier ordre)

Si f admet un extremum local en a alors $\mathrm{grad}_f(a) = 0$*, c.-à-d, pour tout* $i = 1, \ldots, n$, $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0$.

La réciproque est fausse en général.

Exemple

$f(x) = x^3$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et vérifie* $f'(0) = 0$ *mais* 0 *est ni un maximum ni un minimum car f est strictement croissant sur* $\mathbb{R}$.

Théorème (Condition nécessaire du second ordre)

Soit f une fonction 2 fois dérivable au voisinage de a.

- *Si f admet un maximum local en a alors* $\mathrm{Hess}_f(a)$ *est semi-définie négative.*
- *Si f admet un minimum local en a alors* $\mathrm{Hess}_f(a)$ *est semi-définie positive.*

Théorèmes fondamentaux (2/2)

Théorème (Condition suffisante du second ordre)

Soit f une fonction 2 fois dérivable au voisinage de a.

- *Si* $\mathrm{grad}_f(a) = 0$ *et* $\mathrm{Hess}_f(a)$ *est définie négative alors f admet un maximum local strict en a.*
- *Si* $\mathrm{grad}_f(a) = 0$ *et* $\mathrm{Hess}_f(a)$ *est définie positive alors f admet un minimum local strict en a.*

Théorème (Condition nécessaire et suffisante)

Soit f une fonction dérivable sur un ouvert convexe D de $\mathbb{R}$ et qui contient a. Si

- *f est concave alors f admet un maximum global en a ssi* $\mathrm{grad}_f(a) = 0$.
- *f est convexe alors f admet un minimum global en a ssi* $\mathrm{grad}_f(a) = 0$.

Exemple

Soit $f(x_1, x_2) = x_1^3 + 2x_2^3 - 4x_1x_2$. Cherchons les extrema de f. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Nous avons Nous avons

$$\mathrm{grad}_f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - 4x_2 \\ 6x_2^2 - 4x_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Hess}_f(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 & -4 \\ -4 & 12x_2 \end{pmatrix}.$$

En résolvant $\mathrm{grad}_f(x) = 0$, $(0, 0)$ et $(\frac{2^{5/3}}{3}, \frac{4^{2/3}}{3})$ sont candidats.

- $\det \mathrm{Hess}_f(0, 0) = -16 < 0$ donc les deux valeurs proppres sont de signe opposé. D'où, f n'admet pas d'optimum en $(0, 0)$.
- $\det \mathrm{Hess}_f(\frac{2^{5/3}}{3}, \frac{4^{2/3}}{3}) = 48 > 0$ trace $\mathrm{Hess}_f(\frac{2^{5/3}}{3}, \frac{4^{2/3}}{3}) > 0$, donc la matrice hessienne admed deux valeurs proppres de même signe et sont positives. Elle est donc définie positive. D'après la condition suffisante du second ordre, f admet un minimum local strict en $(\frac{2^{5/3}}{3}, \frac{4^{2/3}}{3})$.

Exemple

Etudions $\max_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*} \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}-4x_1-x_2$. f est deux fois dérivable sur $]0,2[$. Nous avons

$$\mathrm{grad}_f(x)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{x_1}}-4\\ \frac{1}{2\sqrt{x_2}}-1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Hess}_f(x)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4x_1^{3/2}} & 0\\ 0 & -\frac{1}{4x_1^{3/2}}\end{pmatrix}.$$

En résolvant $\mathrm{grad}_f(x)=0$, $(\frac{1}{64},\frac{1}{4})$ est alors candidat.
Puisque $\mathrm{Hess}_f(x)$ est définie négative. Alors f est strictement concave sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$.
D'après la condition nécessaire et suffisante, 1 fournit un maximum global strict à f sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$.

Exercices

Exercice

Etudier les extrema locaux et globaux, sur $\mathbb{R}^2$*, de la fonction*

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 x_2 - x_1^2 - x_2^2.$$

Exercice

Etudier les extrema locaux et globaux de la fonction

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^2 + \frac{1}{2} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{3}{2}.$$

Optimisation sous contraines d'égalité

Soit K en sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. K est dit compact si il est à la fois fermé et borné.

Théorème (de Weiersstrass)

Soit f une fonction continue sur un compact K de $\mathbb{R}^n$.
Alors f atteint son maximum et son minimum sur K.

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
On considère le problème suivant (avec $p < n$) :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \min\limits_{x \in D} f(x), \\ \forall j = 1, \dots, p, \quad g_j(x) = 0. \end{cases}$$

Corollaire

S'il existe des candidats pour le problème $(\mathcal{P})$ alors les candidats qui donnent à f la plus grande valeur sont des solutions globales de $(\mathcal{P})$.

Méthode des multiplicateurs de Lagrange (1/3)

Théorème (Condition nécessaire du premier ordre)

Supposons que

1. *les fonctions* $f, \{g_i\}_{i=1,..p}$ *sont de classe* C^1 *au voisinage de* $a \in D$*,*
2. *le déterminant de la matrice formant par les vecteurs* $\{\mathrm{grad}_{g_i}\}_{i=1,..p}$ *est non nul*

$$\left|\mathrm{grad}_{g_1}(a) \ \ldots \ \mathrm{grad}_{g_p(a)}\right| \neq 0$$

(s'appelant la ***condition de qualification des contraintes****).*

Si a *est solution locale du probème* $(\mathcal{P})$ *alors il existe* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *tels que*

$$\mathrm{grad}_f(a) + \lambda_1 \mathrm{grad}_{g_1}(a) + \ldots + \lambda_p \mathrm{grad}_{g_p}(a) = 0.$$

Les nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des **multiplicateurs de Lagrange**.
Le **Lagrangien** est le vecteur

$$\mathcal{L}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \ldots + \lambda_p g_p(x).$$

Méthode des multiplicateurs de Lagrange (2/3)

Théorème (Conditions suffisantes du second ordre)

Supposons que

1. *les fonctions* $f, \{g_i\}_{i=1,..p}$ *sont de classe* C^2 *au voisinage de* $a \in D$*,*
2. *le déterminant de la matrice formant par les vecteurs* $\{\mathrm{grad}_{g_i}\}_{i=1,..p}$ *est non nul,*

S'il existe des $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ *tels que*

$$\mathrm{grad}_f(a) + \lambda_1 \mathrm{grad}_{g_1}(a), \dots, \lambda_p \mathrm{grad}_{g_p}(a) = 0,$$

et si pour tout vecteur non nul $h \in R^n$ *tel que*

$$\mathrm{grad}_f(a).h = \mathrm{grad}_{g_1}(a).h = \dots = \mathrm{grad}_{g_p}(a).h = 0,$$

on ait

$$h^T(\mathrm{Hess}_f(a) + \mathrm{Hess}_{g_1}(a) + \dots + \mathrm{Hess}_{g_p}(a))h < 0$$

alors a *est solution locale stricte du probème* $(\mathcal{P})$.

Méthode des multiplicateurs de Lagrange (3/3)

Théorème (Conditions nécessaires et suffisantes)

Soit f une fonction définie sur un ouvert convexe D de $\mathbb{R}^n$ et qui contient a. Supposons que

- *f est de classe C^1 au voisinage de $a \in D$,*
- *$\{g_i\}_{i=1,..p}$ sont affines,*
- *f est concave,*

f admet un maximum global en a ssi il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que

$$\text{grad}_f(a) + \lambda_1 \text{grad}_{g_1}(a), \dots, \lambda_p \text{grad}_{g_p}(a) = 0.$$

Ou encore,

$$\text{grad}_{\mathcal{L}}(a, \lambda_1, \dots, \lambda_p) = 0.$$

Exercice

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \max\limits_{x \in D} f(x) & = & \sqrt{4 - x_1^2 - x_2^2}, \\ x_1 + x_2 & = & 1. \end{array} \right.$$

Exercice

Chercher les extrema de

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(x) & = & -x_1^2 - x_2^2, \\ x_1^2 + x_2^2 + 3x_1 - 4 & = & 0. \end{array}\right.$$

Exercice

$$\begin{cases} \min\limits_{x_1>0, x_2>0, x_3>0} f(x_1, x_2, x_3) &= \ln x_1 + 5\ln x_2 + 2\ln x_3, \\ x_1 + x_2 &= 3, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4. \end{cases}$$