Нурлигареев Хайдар Джамилевич
Аспирант механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Дебют Гаусса

Для всех интересующихся геометрией задачи на построение никогда не потеряют своей привлекательности. В них как будто содержится дух геометрии, самое её естество. В настоящей статье речь пойдёт о построении циркулем и линейкой правильных многоугольников, и в конце мы рассмотрим одну замечательную задачу древности о построении правильного семнадцатиугольника, ключ к решению которой был подобран на рубеже XVIII и XIX веков знаменитым Гауссом.

Первое сообщение о своём открытии Карл Фридрих Гаусс опубликовал 1 июня 1796 года в газете «Jenenser Intelligenzblatt». На тот момент человеку, которого в будущем назовут королём математиков, всего 19 лет, и он лишь в самом начале своего творческого пути. Однако несмотря на столь юный возраст, Гаусс уже имеет богатый опыт и широту кругозора в области теории чисел, которые он приобрёл, в первую очередь, благодаря любви к искусству счёта и неутомимому прилежанию. Приведём текст самого Гаусса из той публикации:

«Всякому начинающему геометру известно, что можно геометрически (т. е. циркулем и линейкой) строить разные правильные многоугольники, а именно: треугольник, пятиугольник, пятнадцатиугольник и те, которые получаются из каждого из них путём последовательного удвоения числа его сторон. Это было известно во времена Евклида, и, как кажется, до сих пор было распространено убеждение, что дальше область элементарной геометрии не распространяется: по крайней мере, я не знаю удачной попытки распространить её в эту сторону.

Тем более кажется мне заслуживающим внимания открытие, что кроме этих правильных многоугольников может быть геометрически построено множество других, например, семнадцатиугольник».

После столь блестящего математического дебюта судьба юного Гаусса была предрешена. Гаусс на всю жизнь сохранил любовь к своему первому открытию. Подобно Архимеду, он выразил желание, чтобы в памятнике на его могиле был увековечен семнадцатиугольник.

Чтобы понять степень важности открытия Гаусса, мы тоже будем строить правильные многоугольники. Начнём с самых простых.

Треугольник, квадрат, шестиугольник

Древние греки при помощи циркуля и линейки умели делить окружность на 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 и 15 равных частей, т. е. строить правильные многоугольники с соответствующим числом сторон.

Мы начнём, конечно, с равностороннего треугольника – его построение производится совсем просто. Если мы хотим получить треугольник со стороной AB, достаточно провести лишь две вспомогательные линии: окружности с центрами в точках A и B радиуса AB (см. рис. 1). Нельзя сказать, что построение квадрата проводится намного сложнее. Если нам дана сторона квадрата a, то сам он получается последовательным откладыванием перпендикуляров длины a к уже построенным сторонам.

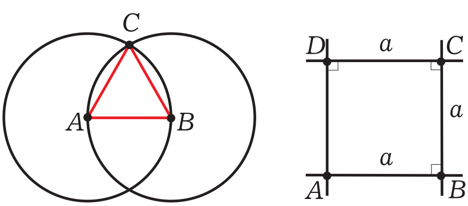

Рис. 1

Получить правильный шестиугольник можно несколькими способами. В основе своей эти способы содержат построение равностороннего треугольника. Так, правильный шестиугольник нетрудно сложить из шести одинаковых равносторонних треугольников (см. рис. 2), так что достаточно построить один треугольник, а потом откладывать в нужных местах равные ему треугольники. Однако такой способ построения не слишком экономичен:

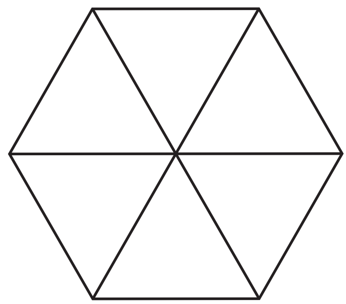
Рис. 2

он использует последовательное построение большого числа дополнительных линий. Ту же картинку можно получить заметно более простым путём. Допустим, мы хотим построить правильный шестиугольник, длина стороны которого равна a. Для начала построим окружность радиуса a и проведём через центр этой окружности какую-либо прямую. Эта прямая пересечёт нашу окружность в двух диаметрально противоположных точках A и D. Они и будут двумя из шести вершин искомого шестиугольника. Оставшиеся четыре вершины получатся как точки пересечения исходной окружности с окружностями радиуса a, центрами которых являются точки A и D (см. рис. 3). Этот способ построения основан на том, что длина стороны правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна радиусу этой окружности.

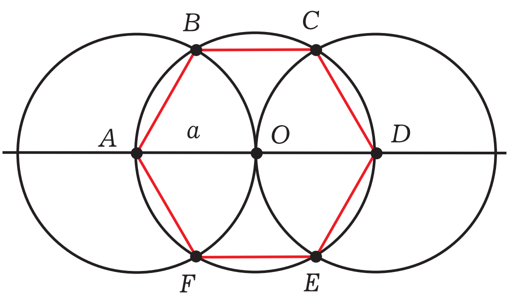

Рис. 3

Приведём также ещё один способ построения правильного шестиугольника. Нам он будет важен, главным образом, не из-за простоты конструкции, а благодаря более широкой возможности его применения. Итак, сначала построим равносторонний треугольник ABC и описанную около него окружность. Далее центр окружности O соединим со всеми вершинами треугольника. Таким образом мы получаем три равных друг другу центральных угла, каждый из которых соответствует некоторой стороне первоначального треугольника (см. рис. 4).

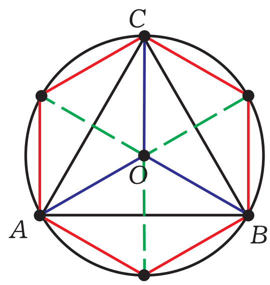

Рис. 4

Нетрудно убедиться, что если мы проведём биссектрисы этих углов (на чертеже они обозначены пунктиром), то в пересечении с окружностью (вкупе с вершинами треугольника ABC) они дадут нам вершины требуемого шестиугольника.

Не ограничивая себя рассмотрением равностороннего треугольника, мы можем обобщить приведённое выше рассуждение на случай правильного многоугольника с любым количеством сторон. Именно, точно тем же способом, что и раньше, доказывается, что если нам дан правильный n-угольник, то на его основе мы можем изготовить правильный $2n$-угольник. Более того, продолжая использовать всё ту же конструкцию, мы построим правильный $2^m n$-угольник для каждого натурального m. Верно и обратное. То есть если в нашем распоряжении имеется правильный $2n$-угольник, то с его помощью можно получить правильный n-угольник.

Пятиугольник и пятнадцатиугольник

Теперь обратим внимание читателя на то, что если в окружность вписаны правильные p-угольник и q-угольник, а числа p и q взаимно просты, то мы можем построить правильный pq-угольник. Поясним, как это делается, на следующем примере. Пусть в окружность вписаны правильные треугольник и пятиугольник. Расположим эти фигуры так, чтобы у них была общая вершина. Тогда наименьшая из дуг, на которые вершины многоугольников разобьют окружность, будет равна $360^\circ/15$, поскольку $2/5-1/3 = 1/15$ (см. рис. 5). Следовательно, соединяя соответствующие вершины, мы получим сторону правильного 15-угольника, вписанного в эту же окружность.

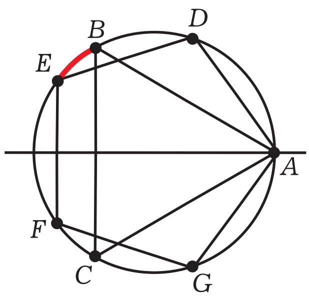

Рис. 5

Теперь самое время научиться строить правильный пятиугольник. Для этого мы воспользуемся «алгебраическим» методом, то есть сначала явным образом вычислим участвующие в построении длины отрезков, а потом применим наши наработки из предыдущего раздела. Итак, предположим, что пятиугольник $ABCDE$ построен. Проведём диагонали AC и BE и обозначим точку их пересечения через F (см. рис. 6). Пусть $AB = a$, $AC = x$.

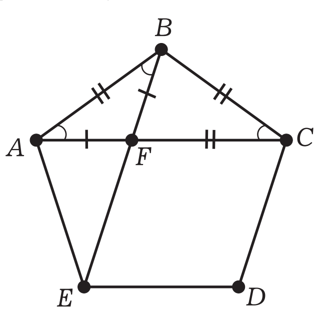

Рис. 6

Так как $\angle BAC = \angle ABE = \angle BCA = 36^\circ$ и $\angle CBE = 72^\circ$, то $\angle BFC = 180^\circ - 72^\circ - 36^\circ = 72^\circ$. Отсюда следует, что треугольник BCF равнобедренный и $BC = CF$. Поэтому условие подобия треугольников ABC и AFB можно записать следующим образом:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AB} = \frac{AC-CF}{AB} = \frac{AC-AB}{AB}.$$

После соответствующих преобразований оно превращается в квадратное уравнение $x^2 - ax - \quad -a^2 = 0$, откуда легко найти $x = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$.

Словом, если мы хотим построить правильный пятиугольник со стороной a, нам достаточно сначала получить отрезок длины x (его построение см. на рис. 7), а потом по

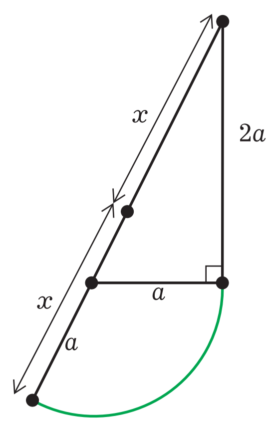

Рис. 7

данным трём сторонам построить треугольник ABC. Как только в нашем распоряжении окажется угол ABC, градусная мера которого составляет 108°, дальнейшие действия не составят труда.

Отметим, что попутно у нас появляется возможность вычислить значения тригонометрических функций для углов 36° и 72°. Так,

$$\cos 36^\circ = \frac{AC}{2BC} = \frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

$$\sin 36^\circ = \sqrt{1-\cos^2 36^\circ} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}. \quad (1)$$

Значения $\cos 72^\circ$ и $\sin 72^\circ$ получаются применением формул двойного угла.

Общий случай

Попробуем сделать общий вывод о том, какие правильные многоугольники мы можем построить с помощью только циркуля и линейки. Нетрудно показать, что если длина отрезка квадратично-иррациональна, то построение такого отрезка возможно. *Квадратично-иррациональными* называются числа, которые можно выразить через единицу конечным числом операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня. Оказывается, никакие другие отрезки построить при помощи циркуля и линейки нельзя. Более того, вдумчивый анализ каждого шага в любом построении показывает: всё, что можно построить с использованием этих инструментов, является рациональным или квадратично-иррациональным выражением от исходных данных (в нашем случае от длин отрезков). То есть если нам даны отрезки a, b и c, то мы можем построить отрезки $a+b$, $a-b$, ab/c, $\sqrt{ab}$ и т. п.

Как известно из школьного курса геометрии, длина стороны многоугольника, вписанного в окружность единичного радиуса, равна $2\sin\frac{180^\circ}{n}$. Если это число квадратично-иррационально, то построение возможно. Очевидно, что построить правильные 7-угольник и 9-угольник нельзя.

А вообще, при каких натуральных n число $\sin\frac{180^\circ}{n}$ квадратично-иррационально?

Фактически, именно на этот вопрос дал ответ в своё время великий Гаусс. Исследуя квадратичные вычеты и первообразные корни, в один прекрасный день он осознал, что из его теории вытекает построение семнадцатиугольника. А некоторое время спустя ему удалось установить, что $2\sin\frac{180^\circ}{p}$ является квадратичной иррациональностью, если простое число p имеет вид $2^{2^k}+1$ (числа такого вида называются *числами Ферма*). Гаусс подозревал, что не существует других простых чисел, удовлетворяющих этому условию, но строго его гипотеза была доказана только в 1836 году Пьером-Лораном Ванцелем. Тем самым, в окончательном виде интересующий нас результат стало возможным сформулировать следующим образом.

Теорема Гаусса–Ванцеля. Правильный n-угольник можно построить при помощи циркуля и линейки тогда и только тогда, когда число n представимо в виде $2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m$, где $p_1, p_2, \ldots, p_m$ – различные простые числа Ферма.

Здесь необходимо сделать важное замечание. Теорема Гаусса–Ванцеля даёт ответ на вопрос, в каких случаях правильный многоугольник может быть построен, а потому по существу этот вопрос считается решённым. Тем не менее, исчерпывающим такой ответ признать нельзя, поскольку на данный момент ничего не известно о характере расположения на числовой оси простых чисел Ферма. Так, никто не знает, является ли множество простых чисел Ферма конечным. Более того, неизвестно даже, ограничивается ли их количество пятью: 3, 5, 17, 257, 65537. Словом, использование теоремы Гаусса–Ванцеля даёт нам возможность для каждого конкретного n выяснить, проведя соответствующие вычисления (порой весьма трудоёмкие), возможно ли построение правильного n-угольника или нет. Перечислить же все такие натуральные числа лёгким движением руки не удаётся.

В заключение мы приведём без доказательства построение правильного семнадцатиугольника, найденное Йоханнесом Эрхингером в 1825 году, и предлагаем читателям в качестве исследовательского проекта самим разобраться в этом построении.

Построение правильного 17-угольника

1. Проводим большую окружность S_1 (описанную около 17-угольника) с центром O.

2. Проводим диаметр AB окружности S_1. Точка A – вершина P_0 искомого 17-угольника.

3. Строим серединный перпендикуляр к AB, пересекающий S_1 в точках C и D.

4. Отмечаем точку E – середину DO.

5. Посередине отрезка EO отмечаем точку F и проводим отрезок FA.

6. Строим биссектрису w_1 угла $\angle OFA$.

7. Строим w_2 – биссектрису угла, образованного лучами FC и w_1. Точку её пересечения с AB обозначаем буквой G.

8. Проводим s – перпендикуляр к w_2 из точки F.

9. Строим w_3 – биссектрису угла, образованного лучами s и w_2. Она пересекает AB в точке H.

10. Строим окружность S_2 на отрезке HA как на диаметре (центр окружности – точка M). Окружность пересекается с CD в точках J и K.

11. Проводим окружность S_3 с центром G через точки J и K. Она пересекается с AB в точках L и N (первая из них лежит на отрезке OB, вторая – на OA). Важно различать точки N и M; они расположены довольно близко друг к другу.

12. Строим касательную к S_3 через N. Она пересекается с окружностью S_1 в точках P_3 и P_{14}.

13. Осталось отложить на окружности дугу, равную дуге P_0P_3, достаточное число раз (рис. 8). 17-угольник $P_0P_1P_2 \dots P_{16}$ построен!

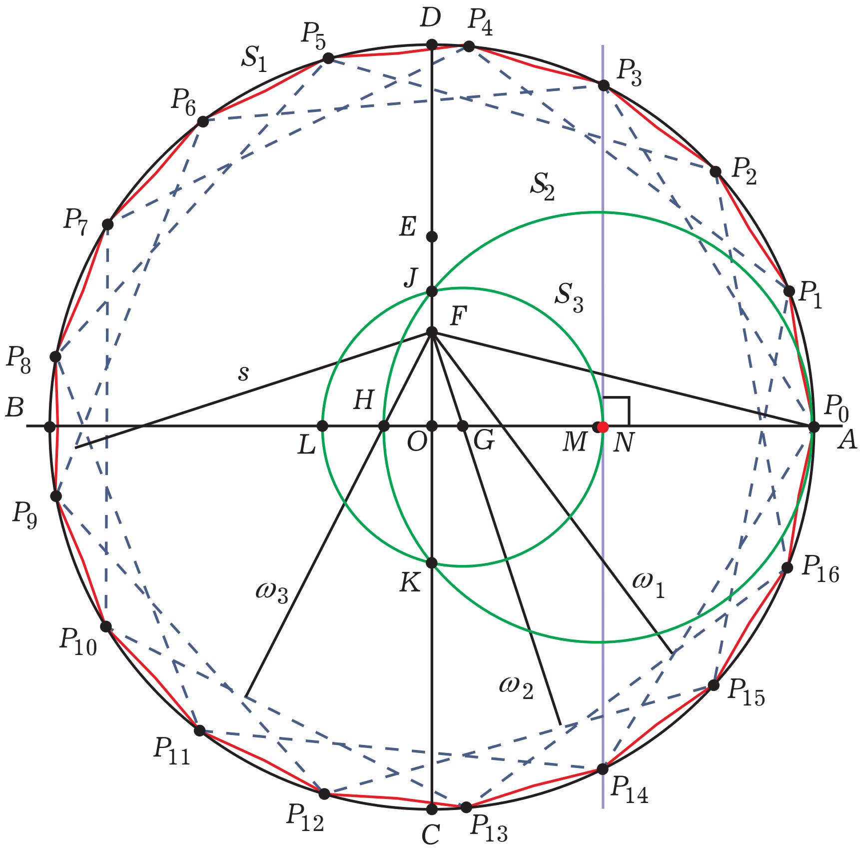

Рис. 8

Литература

1. *Гиндикин С.Г.* Рассказы о физиках и математиках. – М.: МЦНМО, НМУ, 2001,

2. *Кириллов А.* О правильных многоугольниках, функции Эйлера и числах Ферма //Квант. – 1977. – №7 (1994. – №6).

3. *Шарыгин И.Ф.* Геометрия, 7–9 классы. – М.: Издательский дом «Дрофа», 1999.

4. *Школьник А.Г.* Задача деления круга. Пособие для учителей. – М.: Учпедгиз, 1961.

5. Энциклопедия для детей, т. 11 (Математика). – М.: «Аванта+», 1999.

6. http://ru.wikipedia.org/wiki/Правильный_семнадцатиугольник.