ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год пятнадцатый

№ 2 (58)

апрель – июнь 2011 г.

Москва

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 2 (58), апрель – июнь 2011 г.

Содержание

Динамика качества математического образования. Причины деградации (статья первая)

И. П. Костенко

Редакция начинает публикацию серии статей, посвящённых проблеме качества отечественного математического образования. Предполагается осветить историю идей и управленческих действий, направлявших наше образование после 1918 г. вплоть до настоящего времени, и попытаться возможно более объективно оценить результаты всех этих действий. Центральное место в исследовании займёт история подготовки и реализации реформы 1970-1978 гг. и её последствия в современном образовании. Тезисно эта история набросана в статье автора, опубликованной в 50-м номере нашего журнала. Статья вызвала противоречивые отклики. Редакция призывает читателей принять участие в обсуждении заявленной проблемы, актуальность которой не может вызвать сомнений.

"И это не край бездны: мы уже на дне."
А. Николаева, доцент МГУ

1. Последние ЕГЭ-данные о качестве образования

За последние несколько лет ЕГЭ приоткрыл обществу более-менее объективную оценку качества нашего общего образования, не только математического. Правда, эта оценка намеренно затуманена сложными числовыми подсчётами (не из пяти, а из ста баллов и пр.) и блуждающим "проходным баллом", который каждый год вычисляется по-разному (в 2010 г. был равен 21).

Непредвиденный позитивный результат внедрения ЕГЭ состоит в том, что он заставил руководителей вузов проводить объективный контроль качества знаний поступивших к ним учиться студентов. Раньше, до ЕГЭ они не желали этого делать потому, что сами отбирали своих студентов. Их контроль официально проявил, наконец, страшную деградацию нашего массового школьного образования.

Ректор МГУ В. А. Садовничий заявил на сентябрьском 2009 г. заседании Российского союза ректоров, что "примерно 60% первокурсников двух факультетов университета провалили контрольную по математике единого госэкзамена (факультеты математики и вычислительной математики и кибернетики)" [1, с. 3]. И это в самом элитном российском вузе! А что в не столь элитных и в совсем не элитных?

Вот строгий вывод преподавателей Московского автомобильно-дорожного института, которые в 2009 г. провели тестирование своих первокурсников и сравнили его результаты с их же результатами ЕГЭ: "меньше 60 баллов по ЕГЭ набрали 58%, а по тестированию — 80%, т. е. результаты по ЕГЭ сильно завышены" [2, (2010, №2), с. 42].

Оценим результат МАДИ с точки зрения качества образования. "Меньше 60 баллов по ЕГЭ" — это, в сущности, значит, что решены не более 11 задач из 20 (не более двух задач из пяти) и по пятибалльной системе это оценка меньше "тройки", т. е. "двойка". Если оценивать качество процентом выпускников, знающих школьный курс математики не менее, чем удовлетворительно, то выборка МАДИ оценивает это качество в **20%**. Существует где-либо в мире производство, выпускающее 80% брака? Вузовские управленцы пытаются имитировать исправление брака организацией "факультативов по некоторым разделам элементарной математики" [там же].

Если же оценивать качество настоящим качеством, т.е. процентом хороших и отличных знаний, то по данным тестирования МАДИ придётся принять его за **2,4%**, если не ниже [там же, с. 42]. Этот процент согласуется с результатами ЕГЭ по стране: "доля выпускников с хорошими (более 75) и, тем более, отличными (более 90) баллами ничтожно мала" [там же, с. 57].

А вот **другой аспект качества**. Преподаватель Ростовского государственного экономического университета Дёминский провёл в начале учебного года самостоятельную работу (количество участников 190 человек) и выявил основные ошибки, допущенные студентами при решении примеров:

- "плохое знание таблицы умножения;

- непонимание алгоритма решения системы линейных алгебраических уравнений (попытка решить уравнения независимо друг от друга, нахождение только одного неизвестного и т. д.);

- неправильное применение формул для нахождения корней квадратного уравнения (ошибки при вычислении дискриминанта, второго корня, не удваивание знаменателя);

- незнание элементарных действий с обыкновенными дробями" [там же, с. 65].

О чём говорят эти "ошибки"? О неумении выполнять действия с целыми и дробными числами, т. е. <u>о неумении считать</u> . Далее, — <u>о неспособности применить</u> простейшую формулу к решению квадратного уравнения. Наконец, <u>о непонимании смысла</u> простейших математических действий и методов (решение системы уравнений).

"Ошибки" эти свидетельствуют, прежде всего, о незнании арифметики претендентами на высшее образование, т. е. <u>о разрушении фундамента</u> математического образования. Второй важнейший факт, который вскрывают эти "ошибки", — <u>атрофию способности осмыслять</u> свои действия, что доказывает эффективность <u>отупления</u> молодёжи современным российским образованием. Но мы, как всегда, легкомысленно стараемся делать вид, что всё не так уж плохо, и даже верим, что всё это можно быстро исправить какими-то придуманными инновациями. Обманываем сами себя.

Преподаватели Уральского государственного педагогического университета констатируют: "у студентов 1-го курса, только что сдавших ЕГЭ-2009 по математике и поступивших в вуз, имеются выраженные проблемы даже с элементарной геометрией, с элементами математического анализа, с пониманием и умением решать текстовые задачи" [2, (2009, №2), с. 60]. Это опять симптомы *повреждения фундамента математических знаний, умений и необратимой атрофии смыслового и логического мышления.*

Из полученных фактов авторы делают вывод: "одной из наиболее острых проблем современного среднего образования является слабая (?) математическая подготовка школьников. Причины этого явления имеют комплексный характер. Однако, несомненно (?), что одной из основных является слабая подготовка к работе в стиле ЕГЭ (?) самих учителей математики" [3, с. 51]. И ставят задачу перед педагогическими вузами "обеспечить (?) надлежащий (?) уровень результатов математического ЕГЭ за счёт подготовки своих выпускников" [там же]. Т. е. даже не вникая в эти "комплексные" причины, хотят быстро решать проблему качества в рамках того же ЕГЭ.

Деградация. Из представленных данных надо делать более трезвые выводы. Надо признать практически полное отсутствие базовых математических знаний и умений (содержательных, логических, вычислительных) у "большой доли студентов". И констатировать не "слабую математическую подготовку школьников", а отсутствие у них всякой подготовки к учёбе в высшем учебном заведении, вплоть до неумения писать и читать, до неспособности понимать смыслы слов, вплоть до неумения говорить.

Вот ещё одно подтверждение. Директор института возрастной физиологии РАО М. М. Безруких: "Результаты ЕГЭ показывают, что только 55 процентов детей умеют выделять главную мысль в тексте. Что это? Это значит, что дети не умеют читать. ...Мы знаем, что у нас от 40 до 60 процентов детей, оканчивающих школу, не умеют читать и писать" [4, с. 3]. Но если учесть, что официальные результаты ЕГЭ "сильно завышены", то процент детей, не способных понимать смыслы слов и предложений должен быть “сильно повышен”, наверное, до тех же 80 процентов, что следует из ещё одного исследования.

В том же МГУ на первом курсе факультета журналистики провели проверочный диктант. О результатах рассказала корреспонденту газеты “Московский комсомолец” доцент кафедры стилистики русского языка Анастасия Николаева: “82%, включая 15 стобалльников ЕГЭ, сделали в среднем по 24-25 ошибок. Практически в каждом слове по 3-4 ошибки, искажающие его смысл до неузнаваемости. Понять многие слова просто невозможно. Фактически это и не слова, а их условное воспроизведение”. И далее примеры: “Ну что такое, например, по-вашему, рыца? Рыться. Или, скажем, поциэнт (пациент), удастса (удастся), врочи (врачи), нез наю (не знаю), генирал, через-чюр, оррестовать. ... По сути дела, в этом году мы набрали инопланетян ... **они не умеют не только писать, но и читать:** просьба прочесть коротенький отрывок из книги ставит их в тупик”.

Из полученных фактов делаются здесь более откровенные и более общие выводы: ***“люди, которые не могут ни писать, ни говорить, идут на все специальности: медиков, физиков-ядерщиков. И это еще не самое страшное. Дети не понимают смысла написанного друг другом.*** А это значит, что мы идем к потере адекватной коммуникации, без которой не может существовать общество. Мы столкнулись с чем-то страшным. **И это не край бездны: мы уже на дне”** [5, с. 3].

То ли это образование, “которое мы можем потерять”? Можно ли, в свете данной реальности утверждать (как это делают наши академики, министры и президенты), что наше образование “пока ещё (?) одно из лучших в мире”? Подтверждающий аргумент академиков, касающийся “неоспоримых олимпиадных успехов наших школьников” [6, с. 42], не логичен и рассчитан на впечатление. Ведь из существования в России XVIII в. Ломоносова не выводится суждение о качестве тогдашнего образования.

Практические педагоги делают совсем иной вывод: “Отвратительное (!) качество современного российского среднего образования известно любому преподавателю вуза. ... В настоящее время средняя оценка на вступительных экзаменах по физике, математике (за исключением небольшого количества элитных вузов) оказывается в пределах 45-55 баллов по 100-балльной шкале, т. е., по сути, ниже оценки “удовлетворительно”. Результат — существенные трудности в усвоении студентами начальных курсов требуемых дисциплин” [7]. Это заключение преподавателей Сибирской автомобильно-дорожной академии проф. Б. А. Калвачевского и инженера А. В. Носова.

А вот скромное суждение учителя Д. Д. Гущина, заместителя директора школы: “наше “лучшее физико-математическое образование” уже настолько не лучшее, что даже и не образование” [2, (2009, №2), с. 43]. И вместе тем, автор простодушно верит, что “наиболее быстро и эффективно решить проблему катастрофического (!) падения уровня российского математического образования может только изменение экзаменационного материала” [там же]. Т. е. мыслит, опять же, в официально заданных рамках “совершенствования” ЕГЭ.

Выводы. Итак, надеюсь, доказано следующее утверждение: сегодня качество математических знаний и уровень мыслительного развития подавляющего большинства российских учащихся (школы и вуза) устрашающе низки. Правильнее даже сказать, что у них нет никаких знаний и никакого развития. А есть деградация личности, сформированная школой.

Численная оценка качества математического образования к концу 2000-х гг. может быть принята за **20%** (примерно 80% абитуриентов знают математику на “двойку”). *Оценку же настоящего качества придётся принять за* **2,4%** (процент хороших и отличных знаний).

2. 1990-е гг. То же качество, что и сегодня

Причина в ЕГЭ? Сегодня распространено мнение, что причина падения качества — это само ЕГЭ, которое уродует учебный процесс и преобразует его в натаскивание в решении стандартных задач, а учащихся зачастую ориентирует на случайный выбор ответов (нажимание кнопок) и на использование услуг репетиторов.

Мнение отчасти верное, — ЕГЭ, безусловно, ложно ориентирует работу учителя и провоцирует учащихся и родителей. Но ЕГЭ не может быть причиной тех фундаментальных ученических "ошибок", которые фиксировались выше, — незнание таблицы умножения, формулы корней квадратного уравнения, элементов геометрии и пр. ЕГЭ лишь способствует дальнейшему падению качества, а вернее, закреплению свершившихся ранее результатов, но не он первопричина этого падения. Не с ЕГЭ началось падение.

Международные оценки. Давайте заглянем в недавнее прошлое. Десять лет назад высшие управленцы стали вдруг публично заявлять о низком качестве образования. В 2000 г. заместитель министра образования РФ В. Болотов признал, что **70%** *школьников "не осваивают математику и физику"* [8, (2000), с. 9]. Возможно, он основывался на достаточно объективных данных секретных проверок. Тогдашний министр В. Филиппов сослался на международное тестирование, по результатам которого наши школьники оказались "в последней, самой слабой группе" стран [6, с. 117]. Эти данные "озвучивали" и другие представители Правительства РФ, например, В. Матвиенко [8, (2001), с. 5].

Действительно, в 1990-х и начале 2000-х гг. в стране были проведены международные исследования, результаты которых публиковались в педагогических журналах и в прессе. Так, по данным международного тестирования 1995 г. российские школьники оказались на 52-м месте. Главный качественный вывод — *неспособность наших детей мыслить* [9, с. 6-11]. Страна дураков?? Исследование ОЭСР 2001 г. констатировало: "большая часть подростков в России испытывает трудности с пониманием содержания текстов" [10, с. 11]. Страна дебилов??

Лица, которым не хочется признавать деградацию нашего образования, пытаются опровергать международные исследования следующим аргументом: в международных тестах "наше образование оценивается по критериям и материалам, разработанным для принципиально другой системы образования" [6, с. 117]. Аргумент, возможно, справедливый. Но из него следует только то, что надо бы провести собственные исследования, по собственным критериям, соответствующим нашей системе образования. Но этого почему-то никто не делает.

Собственные оценки. Учительница С. А. Проклюшина пишет: "По данным исследования PISA-2003 по математике Россия заняла 29 место из 41... *Ребята натасканы на механическое запоминание фактов* и, что самое страшное, привыкли так учиться" [2, (2008), с. 28]. Заметьте, учительница не ставит под сомнение справедливость международной оценки и объясняет нам глубинную причину деградации, — детей приучили "так учиться".

Проблему качества образования затрагивала и педагогическая печать тех лет. "Больше половины старшеклассников не знают предмет даже на тройку — вот главная беда школы", — делала в 1996 г. вывод газета "Первое сентября" [11, с. 1] на основании многочисленных учительских опросов. Неопределённая фраза "более половины" уточняется в 2000 г. В. Болотовым так: **70%**.

В 1996 г. преподаватели МГУ писали министру в открытом письме: "Почти каждый второй абитуриент Московского университета не в состоянии решить несложное алгебраическое неравенство; почти две трети абитуриентов (почти 70%, — И.К.) не могут решить планиметрическую задачу" [2, (1996), с. 1]. "Почти". А если точно? И какой процент "двоек"? Действует постсоветская инерция осторожности в публичных выступлениях.

Результаты вступительных экзаменов в МАДИ в 2000 г. более определённые: "не решили ни одной задачи (из 10-ти, – И.К.) 30% абитуриентов и только 35% решили не менее 4-х задач. Но самую большую трудность, как и всегда, вызывают задачи по геометрии (задачи 9 и 10): их решил всего 1% экзаменуемых" [2, (2002), с. 63].

Надо отметить некоторую осторожность и в этих подсчётах, — процент "не менее 4-х задач" включает часть "двоек" ("тройка" ставится за 3 правильно решённые задачи из 5-ти, или 6 из 10-ти). Так что если сложить 30% не решивших ни одной задачи и 35% решивших менее 4-х задач (получится 65%) и добавить к ним процент "двоек", включённый в категорию "не менее 4-х задач", мы и получим процент, опять приближающийся к 70%, если не больше.

Так что и до ЕГЭ, в 1990-х гг. был статистически установлен процент некачественного образования (процент "двоек"), скажем так: *около семидесяти процентов.* Процент удовлетворительного качества, следовательно, около **30%**. Отметим, что качественные симптомы неудовлетворительного уровня в 1990-х гг. были те же самые, что и в 2009 г., — *отсутствие элементарных знаний, неумение решать простейшие математические примеры и задачи, неспособность учащихся рассуждать, мыслить, понимать.*

Сравнение качеств 1949 г. и 1998 г. Добавлю ещё один статистический результат. В одной из обычных школ г. Краснодара в 1998 г. проведено сравнение уровней обученности учащихся сегодня и полвека назад [12]. Для этого использовались результаты проверочных работ, приведённые в книге [13, с. 5], изданной Сектором методики математики Института методов обучения АПН РСФСР в 1949 г. Простые примеры и задачи брались тогда и сегодня из действующих задачников. Все ученики решали одинаковые задания. Ниже приведён фрагмент получившейся картины (проценты округлены). Заметьте, — геометрия исключена нами из этой таблицы, поскольку сегодня геометрии в школе как бы не существует (по данным МАДИ геометрические задачи решает 1% абитуриентов).

Таблица 1

Темы	Решение верное		Решение не начато или не окончено	
	1949 г.	1998 г.	1949 г.	1998 г.
Арифметика V-VI кл.				
Текстовая задача	82%	44%	7%	28%
Вычислительный пример	70%	50%	4%	16%
Алгебра VII-IX кл.				
Тождественные преобразования	75%	19%	9%	54%
Задача на составление уравнения	73%	27%	9%	37%

Выводы:

Все показатели ухудшились в 1,5 - 6 раз.

В 1940-х гг. полноценно усваивали основные разделы математики почти 75% старшеклассников, в 1990-х - менее 20%.

В 1940-х гг. наблюдалась стабильность знаний по всем годам обучения, в 1990-х — резкое ухудшение в старших классах.

В 1990-х гг. больше половины 5-6-класссников не решают текстовую задачу и лишь четверть старшеклассников решают её с помощью уравнения. Симптом *обессмысливания обучения и деградации мышления детей.* В 1940-х гг. уверенно решали смысловые задачи более 80% (!) пятиклассников.

В 1990-х гг. — резкое увеличение числа детей, абсолютно не владеющих математикой: не заканчивает решение каждый третий ученик (в старших классах каждый второй), в то время как в 1940-х — лишь каждый четырнадцатый (в старших — каждый одиннадцатый).

Отметим, что данные 1949 г. получены на очень большом статистическом материале (14193 работы из 72 школ 15 областей РСФСР), а данные 1998 г. — только по одной школе. Тем не менее, наши результаты согласуются с другими, приведёнными выше, и качественно дополняют их.

Из таблицы 1 можно извлечь характеристику качества обучения послевоенных 1940-х годов, — оценить её можно в **73%** (мы взяли минимальный процент верных решений старшеклассников). Поскольку верные решения предполагают хорошую или отличную оценку, то 73% - это качество по максимально жёсткому критерию. Сравните его с качеством-2009, — **2,4%**.

Вывод: *сегодняшнее качество школьного математического образования, сравнительно с 1940-ми годами и началом 1950-х, ухудшилось примерно в* **30** *раз.*

Это сравнение может свидетельствовать о том, что количество молодых людей, способных стать качественными специалистами, сократилось, сравнительно с 1940-ми годами, во столько же раз, если не больше. А количество самих качественных специалистов сократилось намного-намного больше. О какой модернизации в этих условиях можно вести речь?

Отметим также, что, как видно из таблицы, качество знаний V-VI классов в 1949 г. было столь же высоким, более 70%. Этот факт опровергает аргумент реформаторов, которым они пытались оправдать неудачу, а именно, будто её причиной стало обязательное десятилетнее обучение.

Репрезентативны ли оценки? Все вышеприведённые оценки основаны на статистических фактах, взятых из открытой печати. Причём, на разнообразных фактах, которые (что очень важно) согласуются между собой. В дальнейшем мы существенно дополним эти оценки, приведём другие и подтвердим их качественно.

Конечно, наши оценки приближённые (как всякие оценки) и при желании их можно подвергнуть критике. Но если кто-то сможет привести другие факты, сделать более строгие оценки и дополнить или опровергнуть наши выводы, пусть сделает это.

3. Когда катастрофически упало качество и что было причиной?

Мнения. Сегодня слышатся различные мнения о причинах: недостаток финансирования, некомпетентное управление, демократизация школы, коррупция, издержки компьютеризации, развращающее влияние телевидения, рекламы, и пр., и пр., вплоть до "отсутствия в больших городах дворовых игр" [Д. Э. Шноль]. Но всё это не более чем мнения, которые лишь отражают сопутствующие катастрофе симптомы.

Оживлённый разговор о качестве спровоцирован ЕГЭ [2, (2009); (2010, №5-6); 3]. И он слишком злободневен и эмоционален, а потому направляется, скорее, желанием высказаться, облегчиться, а не потребностью понять. Выплёскиваются эмоции, возмущение, приводятся видимые факты, высказываются легковесные предложения (примеры были выше).

Иногда можно заметить стремление запутать вопрос и увести от правильного направления. Такова, например, статья вышеупомянутого Д. Э. Шноля, в которой он, в итоге, высказывает интересное предложение: "Если выпускник показывает такие же знания, как средний взрослый, который в своей жизни никак не связан с математикой, то такой выпускник, на мой взгляд, имеет полное право (?) получить аттестат с оценкой "удовлетворительно" по математике" [2, (2009), с. 8-9]. Странно, что предложение учителя предвосхищает действия министерства, которое в своём очередном реформаторском проекте запланировало сделать математику в старших классах "предметом по выбору".

Надо признать, что в обществе нет понимания причин катастрофы образования. И даже не просматривается желания понять. Ни в среде научной и педагогической общественности, ни у управленцев, ни среди учителей, ни, тем более, у родителей учащихся. Возмущённо фиксируются последствия свершившейся катастрофы, и только.

Как всегда, настоящее заслоняет прошедшее. И многим кажется, что катастрофа происходит сейчас. Другие считают, что катастрофа началась немного раньше, в начале 1990-х годов, когда новые реформаторы запустили в общество и в школу "демократию". Безусловно, это время опустило уровень школы, развратило учащихся и учителей, сказалось на снижении качества обучения и знаний. Но, как увидим дальше, это снижение лишь продолжило процесс, начавшийся гораздо раньше.

Момент катастрофы — 1978 г. Мы знаем, что в 1940-х годах качество знаний учащихся было очень высоким, а в 1990-х стало очень низким. С какого момента началось падение?

В 1950-х годах качество знаний оставалось высоким, — это признали американцы, которые после запуска СССР в 1957 г. первого в мире спутника стали специально изучать нашу систему образования и признали её лучшей в мире. Их рассуждения были примерно такими: неожиданно поразительные успехи советской науки и техники нельзя объяснить только наличием выдающихся талантов; такого рода успехи возможны благодаря очень большому числу хорошо подготовленных специалистов в самых различных областях науки и техники; т. е., в конечном счёте, благодаря "феноменальному" (их термин) развитию советского образования.

Значит, крах образования случился где-то в 1960-80-х годах. Что же произошло с лучшей в мире системой образования в этот период? Ответ прост, — её реформировали. Известны точные сроки реформы — 1970-1978 гг. (будем называть её *реформа-70*). Известен результат, он стал ошеломляюще очевиден всем и сразу, — летом 1978 г., когда первый выпуск "отреформированной" молодёжи пошёл в вузы. Свидетельствует не рядовой участник этой реформы, академик РАО Ю. М. Колягин: "Когда были обнародованы результаты приёмных экзаменов, среди учёных АН СССР и преподавателей вузов началась паника. Было повсеместно отмечено, что математические знания выпускников страдают формализмом, навыки вычислений, элементарных алгебраических преобразований, решения уравнений фактически отсутствуют. Абитуриенты оказались практически не подготовленными к изучению математики в вузе" [14, с. 200].

Приведу ещё одно свидетельство профессора Воронежского государственного университета Ю. В. Покорного: "Школьной математикой я болею более 30 лет, наблюдая на вступительных экзаменах школьные выпуски. Более 10 раз был председателем предметной комиссии по математике ВГУ. Итоги колмогоровских "новаций" (в том числе, первые выпуски школ в параллель с выпуском по старой программе) я ощутил воочию. Хорошо помню весь ужас (!!) — уровни подготовки оказались несопоставимыми — это было хорошо видно на двух параллельных потоках, где для выпускников по новой "колмогоровской" программе пришлось радикально менять экзаменационные материалы, так как сильно встревожили наблюдения за абитуриентами уже на консультациях. Моё тогдашнее итоговое впечатление — уровень подготовки упал на порядок, а по геометрии буквально раз в пять, не по зубам оказались задачи вполне "троешного", по старому, уровня"[1].

Итак, установлен *момент* резкого *падения качества школьного математического образования* — 1978 г. Точнее, момент, отчётливо проявивший это падение, — лето 1978 г. (вступительные экзамены в вузы). Обращаю внимание, это момент резкого падения, но не момент начала падения. Начало падения нам ещё предстоит найти, анализируя процесс многолетней подготовки реформы.

1980-е гг. Продолжение деградации. В педагогических кругах существует ещё одно мнение, будто в 1980-х гг. пороки реформы были исправлены и качество обучения стабилизировалось или даже возросло.

Но посмотрим на факты. И опять нам помогут преподаватели МАДИ (М. А. Воробьёва, В. Н. Голдина, И. М. Петров). В конце 1980-х гг. они проанализировали решаемость экзаменационных заданий абитуриентов по всем разделам программы за 8 лет, — с 1981 г. по 1988 г. Их итоговый вывод: "из таблицы видно, что знания абитуриентов по большинству разделов программы становятся от года к году слабее, особенно резкое ухудшение отмечается по геометрии" [2, (1989), с. 57].

Т.е. идёт процесс непрерывной деградации, запущенный реформой-70. Если в 1981 г. в МАДИ средний процент решаемости по всем разделам был 74%, то в 1988 г. — 38%. Следовательно, в течение первой пореформенной десятилетки *качество математического образования к концу 1980-х гг., сравнительно с их началом, упало почти в два раза.*

Заметим, — последняя оценка сделана иначе, нежели предыдущие, не по проценту "двоек". Дело в том, что из-за ослабления абитуриентов и необходимости обеспечить набор, вузы вынуждены были снижать трудность заданий и порой значительно завышать экзаменационные баллы абитуриентов (этот факт подтверждается хотя бы Ю. В. Покорным, — см. выше). Потому сравнение качества образования по среднему проценту решаемости заданий более объективно

[1] Приведённая цитата из письма мне Ю. В. Покорного от 22.07.2003.

отражает реальность.

Заметим также, что из-за падения качества экзаменационных работ их анализ в министерском журнале ведётся осторожно [2, (1989), с. 40-57]. А именно, анализируются ошибки по разным разделам программы, но не приводятся обобщённые количественные показатели. Единственно, кто показал сравнительные цифры, это преподаватели МАДИ.

Качественные показатели знаний. Сравним их в динамике.

1978 г. Свидетельствуют Ю. М. Колягин и Ю. В. Покорный (см. выше). *Формализм*, т.е. *обессмысливание* знаний, что предопределяет блокировку мышления. Отсутствие простейших и базовых для дальнейшего изучения математики *навыков — вычислительных, арифметических.* Закономерное отсутствие *навыков алгебраических преобразований*, которые базируются на арифметических. Неумение решать *уравнения.* Неспособность решать *простые задачи*, текстовые и геометрические, т. е. паралич *мышления и логики.*

1981 г. Учителя, методисты и учёные Уральской зоны пишут в журнал "Коммунист": "Студенты первых курсов испытывают затруднения при операциях с *дробями*, при выполнении простейших алгебраических преобразований, решении квадратных *уравнений*, действиях с комплексными числами, построении простейших геометрических фигур и *графиков* элементарных функций" [15, с. 125].

1988 г. Совещание-семинар вузов Северо-Западного региона: "В ходе совещания неоднократно возникал вопрос о слабой математической подготовке выпускников средней школы. Особенно плохо знают они *тригонометрию и геометрию*, слабо владеют техникой элементарных *преобразований*, не умеют *логически мыслить*, рассуждать, проводить доказательства" [16, с. 148].

2000 г. На Всероссийской конференции "Математика и общество" те же уральские учёные во главе с академиком Н. Н. Красовским заявили, в сущности, то же самое: "Вызывает сомнение недооценка *арифметики*, ограниченное внимание к содержательным *задачам*, отсутствие раздела "комплексные числа" в массовой школе, ослабление *геометрии*, как со стороны пространственной интуиции, так и стороны *логики* рассуждений, вообще, представляется недостаточной тренировка в логических рассуждениях" [17, с. 26].

Обратим внимание, — в этом заявлении не только указываются недостатки знаний (арифметика, задачи, геометрия, логика), а вскрываются их причины, связанные с процессом *обучения* (программы, учебники, методика). Этот процесс задан реформой-70. Реформаторские программы были скорректированы в 1985 г. и с тех пор принципиально не менялись. Даже учебники реформаторов (Колмогорова, Виленкина, Макарычева, Погорелова и др.) до сих пор действуют в школе и определяют объём, последовательность и методику преподавания.

2009 г. Те же показатели, которые фиксировались в 1978 г. (а также в 1981 г., 1988 г., 1996 г., 1998 г., 2000 г.), фиксируются и через 30 лет (дроби, вычисления, уравнения, логика, обессмысленность знаний и действий, — см. выше результаты Дёминского).

Новые "недостатки" (таблица умножения), к которым можно добавить сокращение на "икс" дроби "синус икс, делённое на икс", незнание площади параллелограмма и др., свидетельствуют об абсолютной математической безграмотности части (небольшой?) претендентов на современное высшее образование.

Более того, в 2000-х гг. стала отчётливо заметна атрофия памяти учащихся, — многие не могут держать в сознании более одного элемента мысли ("однобайтовая память"). Предельный результат обессмысливания обучения. Практика показывает, что объяснения преподавателя, которые, как будто, поняты учащимися, забываются на следующий день почти бесследно.

Эти "недостатки" появились, конечно, благодаря демреформам 1990-2000-х гг., одним из главных достижений которых стало массовое (!) освобождение детей от ответственности и от желания учиться. Но и этот результат был подготовлен реформой-70, сделавшей обучение непонимаемым. Достаточно привести отрывок из письма тринадцати старшеклассниц, опубликованное в "Комсомольской правде" 1 марта 1978 г.: "Нам никак не одолеть программу по математике. Вот и ходим мы в “дебилах”, как называют нас учителя”.

Ухудшение памяти учащихся тоже берёт начало с реформы-70. В 1986 г. психологи констатировали: “У современного ученика память значительно (!) хуже, чем у тех, кто учился по старой, “донаучной” программе. Он меньше знает и существенно (!) хуже соображает” [Известия, 8 февраля 1986 г.].

Выводы. Качество знаний как упало в 1978 г., так и продолжало оставаться на этом же обвально низком уровне все следующие десятилетия, постепенно сползая всё ниже и ниже.

Все основные, фундаментальные “недостатки” знаний школьников (дроби, вычисления, навыки, задачи, логика, формализм лоскутных знаний и др.), резко проявившиеся в результате реформы-70, сохраняются и усугубляются на протяжении всех последующих тридцати лет. В следующих статьях, анализируя длительную подготовку реформы, мы покажем, в результате каких реформаторских действий возникали эти “недостатки”.

Более того, реформой запущен процесс деградации личности учащихся, одним из симптомов которого является “существенное” ухудшение их памяти и мышления. Этот процесс и его связь с реформой должен был бы стать предметом научного изучения психологами и физиологами.

Первопричина низкого качества современного математического образования заключена в реформе-70. Эту причину нам предстоит раскрыть.

4. Почему качество образования не улучшается?

Ответ прост: — потому, что это не нужно власти. С какого момента стало не нужно? За ответом обратимся опять к истории.

После 1917 г. первоочередная задача власти (как и всякой власти) была утвердиться. Эта задача, задача социализации населения, решалась через школу. Отсюда поиски новых форм организации обучения и воспитания, попытки связи школы с производством, рабфаки, нелепые методы обучения (метод проектов, бригадный) и пр., и пр. В результате этой первой “коренной” реформы, к концу 1920-х гг. страна стала безграмотной. Как и сегодня.

Сегодняшняя ситуация в образовании сходна с той, что была в 1920-х гг. То же тупое навязывание школе разрушительных прожектов. Тот же “слом” традиций. Та же всесторонняя безграмотность молодёжи.

В начале 1930-х гг. властью была жёстко поставлена перед управленцами точная, определённая, проверяемая цель, — дать стране грамотных специалистов. И цель была быстро достигнута, — за 5-6 лет. Достигнута не на пути “инноваций”, а в результате решительного возврата к традиционным формам, методам и ценностям русской гимназии.

Член-корреспондент РАН Л. Д. Кудрявцев, который окончил школу в 1940 году, свидетельствует: “к концу тридцатых годов, если отвлечься от идеологической направленности образования, средняя школа в нашей стране, по моему мнению, достигла своего наивысшего уровня. Этот уровень был достаточно высок и отвечал потребностям своего времени” [6, с. 47].

Установка на качество знаний действовала до середины 1950-х гг., — “центральной задачей была и остаётся задача борьбы за высококачественные и прочные знания учащихся” [2, (1950), с. 6]. За реальные знания! Так заявил министр просвещения И. А. Каиров в 1950 г., выступая на Всесоюзном совещании лучших учителей страны.

В 1956 г. на XX съезде партии вдруг зазвучала иная установка, — преодолеть “отрыв обучения от жизни”. И установка эта придумана не Н. С. Хрущёвым. Ещё в 1939 г. её постулировал А. Я. Хинчин, — “программы страдают оторванностью от жизни” [2, (1939), с. 1].

Реформаторы умело воспользовались изменившейся политической ситуацией и в 1960-х гг. незаметно подменили эту задачу задачей преодоления разрыва “между содержанием школьного преподавания и современным состоянием науки” [2, (1965), с. 54]. Отсюда уже легко было перейти к “повышению научно-теоретического уровня обучения”, — главной задаче реформы-70. Эту политику мы детально проиллюстрируем и проанализируем в последующих статьях.

После реформы вплоть до сегодняшних дней Министерство даже не ставило цели поднять качество, даже декларативно не заявляло такой цели. Более того, с 2000 г. высшие управленцы стали бравировать низким качеством знаний. Почему? Потому что они замыслили новые реформы, оправданием которых стало именно низкое качество знаний школьников. Эти факты доказывают, что качественные специалисты сегодняшней власти не нужны.

Вся суетливая деятельность Министерства направлялась все эти годы ложными целями (демократизация, вариативность, компьютеризация, информационные технологии, егэизация, и пр., и пр.). Эти цели вели к непрерывной хаотизации работы школ, отвлекали и уводили всех от главной и, в сущности, единственной (забытой) цели — качественного обучения и качественных знаний.

Похоже, что низкое качество учебного процесса специально поддерживалось и стимулировалось демократическим развращением учащихся, созданием невыносимых моральных и материальных условий для учителей, бессмысленной формализацией и бюрократизацией работы управленцев и сокрытием истинного качества знаний завесой процентомании. Результат — массовое отвращение детей от учёбы.

Вывод: *причина того, что низкое качество образования стабильно сохраняется четыре десятилетия, находится в системе высшего управления образованием.*

Вопрос о влиянии на качество образования управленческих действий 1990-2000 гг. составляет отдельную проблему, которой мы будем касаться лишь эпизодически, и которая требует специального исследования, в основном, политико-социологического. Наше исследование историко-педагогическое.

5. Качество образования и творческий потенциал общества

А теперь обратим внимание на *важнейшие следствия реформы-70.*

Приведём обобщённый вывод авторитетного специализированного научного учреждения — Исследовательского Центра Гособразования СССР по проблемам управления качеством подготовки специалистов, сделанный в 1980-е годы, вскоре после реформы-70: “В последний период всё больший размах приобретает снижение качества обучения на всех ступенях школы. Это уже сказалось на квалификации и культуре специалистов и учёных. Допущенные ими профессиональные ошибки стали одной из основных причин недавних промышленных и экологических катастроф” [18, с. 127].

Вот они, *главные результаты реформы-70 — падение качества специалистов и, как следствие этого, техногенные катастрофы.*

И ещё одно важнейшее следствие — *падение научного, технического, культурного и вообще, интеллектуального и духовного потенциала общества.* Именно этим, в конце концов, оценивается качество образования. Именно по этому признаку американцы оценили советское образование 1950-х годов.

И есть строгие научные данные, измеряющие этот признак: “наукометрический анализ научных открытий СССР за последние сорок лет показывает, что 34% всего фонда научных открытий было сделано в 50-е, 46% — в 60-е, 18% — в 70-е и только 2% — в 80-е годы” [19, с.4]. В период расцвета нашего образования (1950-60-е гг.) было сделано 80% научных открытий, а после реформы — 2%!

Проанализируем приведённые наукометрические данные более внимательно. Падение научной производительности общества (с 46% до 18%, - в 2,5 раза) началось в 1970-е годы, когда шла реформа. В этот период в науке работала молодёжь, закончившая школу и получившая высшее образование в 1960-е годы. Значит, падение качества образования началось не в 1970-е годы, а ранее. В 1970-х же годах произошло обвальное падение, именно катастрофа. И, как всякая катастрофа, она имеет предысторию, которую нам предстоит изучить.

Что же было причиной ухудшения качества специалистов в 1970-х гг.? Наверное, что-то, что происходило в системе образования в предшествующее десятилетие, в 1960-х гг. В средней школе в это время шла активная подготовка реформы-70 и нам ещё предстоит исследовать, что там конкретно происходило и как это влияло на качество знаний. Но мало кто уже помнит, что в высшей школе в начале 1960-х гг. была проведена реформа, идейно аналогичная будущей школьной реформе-70. Так что и школьники, и студенты 1960-х годов получали уже повреждённое математическое и общетехническое образование. Реформу высшей школы (технической и педагогической) мы тоже проанализируем в последующих статьях.

И ещё одну интересную цифру можно извлечь из приведённого наукометрического анализа: *после реформы, в 1980-х гг., сравнительно с 1960-ми*, научный потенциал страны упал в **23** раза *(с 46% до 2%)*.

Сопоставим этот факт с падением качества школьного математического образования в 1970-х, сравнительно с 1950-ми годами. Но числовой оценки качества для 1970-х у нас нет. Однако есть оценки для 1940-х – начала 1950-х (73%) и для 2009 г. (2,4%). За этот период качество упало примерно в **30** раз. Поскольку после реформы (в 1980-х гг. и далее) качество продолжало медленно снижаться, то качество в 1970-х было повыше, чем в 2009 г. Следовательно, падение качества образования в 1970-х, сравнительно с 1950-ми годами, можно оценить примерно так же, как и падение научного потенциала страны. Вот как тесно связаны наука и образование! Эта числовая корреляция ещё раз подтверждает объективность наших оценок, их соответствие реальности.

Наконец, следует признать, что реформа-70 предопределила дальнейшую историю страны, создав необходимые предварительные условия для, так называемой, "демократической" революции-91. Без шокового опускания в 1978 г. интеллектуального, морального и культурного уровня молодёжи была бы невозможна переориентация её сознания с труда учёбы и дальнейшего профессионального служения обществу на добывание фиктивных, по сути, дипломов и последующее мещанское потребленчество, вещизм и гедонизм.

6. Вывод

Теперь можно сказать, что мы нашли ответ или, во всяком случае, гипотезу, отвечающую на вопрос о первопричине падения качества образования, качества знаний учащихся и, как следствие, падения научно-технического потенциала страны: *причина заключена в двух согласованных реформах — вузовской реформе-60 и школьной реформе-70.*

Но такой ответ будет формальным, он ничего не объясняет. Надо ещё понять: почему *результатом реформ 60-70 стало столь резкое падение качества?* Ответ на этот сущностный вопрос надо будет искать в *идеологии реформ ("повышение научно-теоретического уровня обучения")* и в методах её реализации. Поиск заведёт нас ещё глубже в историю, в 1930-е годы, — именно тогда эта идеология отчётливо проявилась в нашей стране.

Следующая статья будет посвящена 1920-1930-м годам.

Литература

1. Коммерсант, №180, 29 сентября 2009.

2. Математика в школе. 1939, №6; 1950, №6; 1965, №4; 1989, №2; 1996, №1; 2001, №9; 2002, №2; 2008, №1; 2009, №2, 8; 2010, №2, 5, 6.

3. Alma Mater, 2009, №1.

4. Педагогический вестник. 2009, №1.

5. Московский комсомолец. 3 ноября 2009.

6. Образование, которое мы можем потерять. М. 2002.

7. Калвачевский Б. А., Носов А. В. Высшее образование — реформа или уничтожение? Contr-tv.ru. 15 сентября 2008.

8. Учительская газета. 2000, №34-35; 2001, .№37.

9. Народное образование. 1998, №4.

10. Эксперт. 2001, №46.

11. Первое сентября. 1996, №34.

12. Костенко И. П., Захарова Н. М. Причины деградации математических умений и пути её преодоления // Математика в школе. 2001, №9.

13. О преподавании математики в V-IX классах. АПН РСФСР. М., 1949.

14. Колягин Ю. М. Русская школа и математическое образование. М., 2001.

15. Коммунист. 1989, №2.

16. Сборник научно-методических статей по математике. 1988. Вып. 15.

17. Всероссийская конференция “Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков”. М., 2000.

18. Современная высшая школа. 1991, №4.

19. Поиск. 1993, №14.

Костенко Игорь Петрович,
Ростовский государственный университет
путей сообщения (филиал в г. Краснодаре),
доцент, кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: kost@kubannet.ru

Теоремы о гранях ограниченного числового множества как выражение непрерывности множества действительных чисел

В. В. Цукерман

В статье приводятся доказательства теорем о существовании точных граней у ограниченного множества действительных чисел, на основе определения действительного числа как бесконечной десятичной дроби, не содержащей девятки в периоде.

Умножение двух положительных действительных чисел a и b естественно определить как число, заключенное между всеми произведениями их рациональных приближений по недостатку — $\rho_a\rho_b$ и по избытку — r_ar_b, если только такое число существует и единственно.

Степень с действительным показателем a^x естественно определить как число, заключенное между всеми значениями a^{ρ_x} и a^{r_x}, где ρ_x и r_x — рациональные приближения к x по недостатку и по избытку, если такое число существует и единственно.

Наконец, длину дуги окружности можно определить как число, заключенное между всеми значениями Λ — длин вписанных ломаных и T — длин описанных ломаных, опять же, если такое число существует и единственно.

Возможность подобных определений связана с вопросом: "Существует ли у последовательно расположенных числовых множеств $X = \{x\}$ и $Y = \{y\}$ ($\forall x, x \in X$ и $\forall y, y \in Y : x \leq y$) число c, разделяющее эти множества?".

Для последовательно расположенных множеств рациональных чисел может не существовать рационального числа, их разделяющего (см. [2]). В случае действительных чисел такое число всегда существует. Вопрос о его единственности решается проще: для единственности разделяющего числа множеств X и Y должны существовать сколь угодно близкие элементы. Существование разделяющего числа двух последовательно расположенных множеств действительных чисел является одной из эквивалентных формулировок непрерывности множества действительных чисел (пожалуй, самой естественной).

В этой статье доказываются теоремы о существовании граней у ограниченного числового множества (нижней грани $m = \inf\{x\}$ — наибольшей нижней границы для ограниченного снизу числового множества $X = \{x\}$ и верхней грани $M = \sup\{x\}$ — наименьшей верхней границы множества, ограниченного сверху). Для последовательно расположенных множеств $X = \{x\}$ и $Y = \{y\}$ (см. выше) отрезок $[c_*; c^*]$, где $c_* = \sup\{x\}$ и $c^* = \inf\{y\}$, представляет собой всё множество разделяющих чисел для X и Y. Разделяющее число единственно, если $c_* = c^*$.

В статье используется определение действительных чисел как бесконечных десятичных дробей без девятки в периоде (см. [1, 2, 3]). Основные доказательства предваряются установлением соотношения между конечными десятичными приближениями чисел $a = a_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$ и $b = b_0, \beta_1\beta_2...\beta_n...$ в случае $a < b$. Здесь, следуя [1,2], $a_0, b_0 \in \mathbf{Z}$ и являются целыми частями чисел a и b, а $0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$ и $0, \beta_1\beta_2...\beta_n...$ — их *неотрицательные* дробные части. Неравенство $a < b$ означает, что либо $a_0 < b_0$, либо $b = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_{k-1}\beta_k\beta_{k+1}..., \beta_k > \alpha_k$, $k \in \mathbf{N}$).

Лемма.

Если $a < b$, то для достаточно больших номеров n ($n \geq j$, $j \in \mathbf{N}$): $a < a'_n < b_n \leq b$, где $a'_n = a_n + \frac{1}{10^n} = a_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n + \frac{1}{10^n}$ и $b_n = b_0, \beta_1\beta_2...\beta_n$.

Как очевидное следствие леммы получаем, что *если $a < b$, то для достаточно больших номеров n и десятичное приближение к числу a по избытку a'_n меньше числа b ($a'_n < b$), а также число a меньше конечного десятичного приближения к b по недостатку* ($a < b_n$).

Доказательство леммы.

По определению отношения $a < b$ (см. выше)

$$a = a_0, \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_{k-1} \alpha_k \alpha_{k+1} ... < b_k = a_0, \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_{k-1} \beta_k \ \ (\alpha_k < \beta_k).$$

Если $k = 0$, то $a = a_0, \alpha_1 \alpha_2 ... < b_0$ $(a_0 < b_0)$.

Числа α_{k+1}, α_{k+2}, ... не могут быть все равны 9. Пусть $\alpha_j < 9$ $(j > k)$, тогда:

$$a = a_0, \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_{k-1} \alpha_k \alpha_{k+1} ... < a'_j = a_0, \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k \alpha_{k+1} ... \alpha_j + \frac{1}{10^j} < b_k = a_0, \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_{k-1} \beta_k \le b$$

Так как последовательность (a'_n) невозрастающая, а (b_n) неубывающая (см. [1, 2]), то $a < a'_n < b_n \le b$ при $n \ge j$.

Теорема о нижней грани.

Непустое множество, ограниченное снизу, имеет нижнюю грань.

Доказательство.

Сначала строится бесконечная десятичная дробь, которая далее оказывается искомой нижней гранью множества $X = \{x\}$.

Пусть A — целое число, являющееся нижней границей непустого множества $X = \{x\}$, а B — целое число, не являющееся нижней границей (например, $B = [x_0] + 1$, где $x_0 \in X$).

Среди чисел $A, A+1, A+2, ..., B-1, B$ выбираем наибольшее, являющееся нижней границей. Обозначим его m_0, число $m'_0 = m_0 + 1$ уже не является нижней границей, то есть $\exists\, x_1$, $x_1 \in X$: $x_1 < m_0 + 1$.

Затем находится число $m_1 = m_0, \mu_1$ — наибольшая десятичная дробь с одним десятичным знаком среди чисел $m_0, 0$, $m_0, 1$, $m_0, 2$, ... $m_0, 9$, $m_0 + 1$, являющаяся нижней границей множества X.

Последовательно строится бесконечная десятичная дробь $m_0, \mu_1 \mu_2 ... \mu_n ...$ такая, что $m_n = m_0, \mu_1 \mu_2 ... \mu_n$ — наибольшая нижняя граница среди десятичных дробей с n десятичными знаками, число $m'_n = m_n + \frac{1}{10^n} = m_0, \mu_1 \mu_2 ... \mu_n + \frac{1}{10^n}$ нижней границей для множества X не является.

Для построенной бесконечной десятичной дроби доказывается:

1) $m_0, \mu_1 \mu_2 ... \mu_n ...$ не имеет 9 в периоде, то есть является действительным числом $m = m_0, \mu_1 \mu_2 ... \mu_n ...$;

2) число m является нижней границей множества $X = \{x\}$;

3) любое число $\tilde{m}$, большее m, уже не является нижней границей.

Таким образом, $m = \inf\{x\}$.

Рассматриваются отдельно пункты 1), 2), 3).

1) Допустим противное: $m_0, \mu_1 \mu_2 ... \mu_n ... = m_0, \mu_1 \mu_2 ... \mu_k 99...$ $(\mu_k < 9)$. По построению бесконечная дробь $m'_k = m_0, \mu_1 \mu_2 ... \mu_k + \frac{1}{10^k}$ не является нижней границей множества $X = \{x\}$, то есть существует элемент $\tilde{x} \in X$ такой, что $m_k \le \tilde{x} < m'_k$. Тогда $\tilde{x}$ представляется в виде $\tilde{x} = m_0, \mu_1 \mu_2 ... \mu_k \xi_{k+1} \xi_{k+2} ...$. Цифры ξ_{k+1}, ξ_{k+2} не могут быть все равны 9. Пусть $\xi_j < 9$ $(j > k)$. Тогда

$$\tilde{x} = m_0, \mu_1 \mu_2 ... \mu_k \xi_{k+1} \xi_{k+2} ... \xi_j \xi_{j+1} ... < m_j = m_0, \mu_1 \mu_2 ... \mu_k \underbrace{99...9}_{j-k \text{ девяток}},$$

что невозможно, так как m_j — нижняя граница множества $X = \{x\}$.

2) Допустим противное. Существует элемент $\tilde{x} \in X$ такой, что $\tilde{x} < m$. Тогда по следствию из Леммы существует такой номер j, что $\tilde{x} < m_j$, что невозможно, так как по построению числа m его приближенное значение по недостатку — m_j — является нижней границей множества X.

3) Пусть $m < \tilde{m}$. По следствию из Леммы существует такой номер j, что $m'_j < m$. Число m'_j не является нижней границей множества $X = \{x\}$ и, следовательно, существует элемент $\tilde{x} \in X$ такой, что $\tilde{x} < m'_j < \tilde{m}$. Таким образом, число $\tilde{m}$ не является нижней границей для множества $X = \{x\}$.

Теорема о верхней грани.
Непустое множество, ограниченное сверху, имеет верхнюю грань.

Доказательство.
Пусть $X = \{x\}$ — непустое множество, ограниченное сверху. Таким образом, существует число B — верхняя граница множества X. Рассматривается множество всех верхних границ множества X. Обозначим его $Y = \{y\}$. Оно не пусто, так как $B \in Y$. Множество $Y = \{y\}$ ограничено снизу любым элементом множества X. По теореме о нижней грани существует число $M = \inf\{y\}$. Так как множество $Y = \{y\}$ — это множество всех верхних границ множества X, то верхних границ множества X, меньших M, быть не может. Остается доказать, что число M является верхней границей множества X и, следовательно, наименьшей.

Допустим противное, M не является верхней границей множества X. Следовательно, существует элемент $\tilde{x} \in X$ такой, что $M < \tilde{x}$. Поскольку M — наибольшая нижняя граница множества Y и $\tilde{x}$ не является таковой, то существует элемент $\tilde{y} \in Y$ такой, что $\tilde{x} < \tilde{y}$. Это невозможно, так как $\tilde{y}$ принадлежит множеству верхних границ множества X.

Структура множества разделяющих чисел.
Пусть $X = \{x\}$ и $Y = \{y\}$ — последовательно расположенные множества ($x \leq y$ при $x \in X$ и $y \in Y$). Ясно, что множество X ограничено сверху (любым элементом множества Y), а множество Y ограничено снизу (любым элементом множества X). Обозначим $c_* = \sup\{x\}$ и $c^* = \inf\{y\}$.

Так как любой элемент $x \in X$ является нижней границей множества Y, а c^* — такой наибольшей границей, то $x \leq c^*$ при произвольном $x \in X$. Таким образом, c^* является верхней границей множества X. А поскольку c_* — наименьшая верхняя граница X, то $c_* \leq c^*$.

Итак, для любых $x \in X$ и $y \in Y$ справедливо соотношение $x \leq c_* \leq c^* \leq y$. Любое число, разделяющее множества X и Y, является верхней границей для множества X и нижней границей множества Y, и потому, в силу смысла чисел c_* и c^*, чисел, разделяющих множества X и Y, вне отрезка $[c_*; c^*]$ быть не может. Значит, отрезок $[c_*; c^*]$ — это множество всех разделяющих чисел множеств $X = \{x\}$ и $Y = \{y\}$.

Литература

1. Цукерман В. В. К понятию действительного числа / В. В. Цукерман // Математическое образование. - 2010. - №3-4(55-56).

2. Цукерман В. В. Действительные числа и основные элементарные фукции. - М., 2010.

3. Никольский С. М., Потапов М. К., Решетников Н. Н., Шевкин А. В. Арифметика 6. - М., 2006.

Цукерман Виталий Владимирович,
профессор кафедры математики и физики
Московского государственного гуманитарного
университета им. М. А. Шолохова,
кандидат физ.-мат. наук.

Email: tsuckerman@front.ru

Об ограниченности функции, непрерывной на отрезке

Е. В. Гераськина

В статье излагается нетрадиционное доказательство 1-ой и 2-ой теорем Вейерштрасса для функции, непрерывной на отрезке.

Предлагаемое доказательство 1-ой и 2-ой теорем Вейерштрасса для функции, непрерывной на отрезке, основано на существовании граней ограниченного числового множества: нижней грани (наибольшей нижней границы) множества, ограниченного снизу, и верхней грани (наименьшей верхней границы) множества, ограниченного сверху (см., например, [1] — предыдущую статью настоящего номера журнала). Используется также ограниченность функции в некоторой окрестности точки ее непрерывности. Так, если $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ и x_0 — внутренняя точка отрезка $[a;b]$, то требование $|f(x) - f(x_0)| < 1$ влечет существование окрестности $x_0 - \delta < x_0 < x_0 + \delta$, где указанное требование реализуется. Тогда в этой окрестности

$$|f(x)| = |(f(x) - f(x_0)) + f(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| < 1 + |f(x_0)| = L,$$

или $-L < f(x) < L$.

Если точкой непрерывности является конец отрезка $[a;b]$ (a или b), то соотношение $|f(x)| < L$ ($-L < f(x) < L$) имеет место на промежутке $[a; a+\delta)$ или на $(b-\delta; b]$ соответственно.

Теорема 1. *Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a;b]$, ограничена на этом отрезке, то есть существует такое положительное число H, что во всех точках отрезка выполняется соотношение $|f(x)| < H$ ($-H < f(x) < H$).*

Доказательство. На отрезке $[d;b]$, где $d \in (b-\delta; b]$, имеем $|f(x)| < H = L$. Множество точек $\{d\}$, для которых функция $f(x)$ ограничена на $[d;b]$, само ограничено снизу точкой a — левым концом отрезка.

Обозначим c нижнюю грань множества $\{d\}$. Покажем, что точка c не может быть внутренней точкой отрезка $[a;b]$. Допустим противное (см. рисунок 1). На интервале $(c-\delta; c+\delta)$ выполняется соотношение $|f(x)| < L$. Точка $c+\delta$ не является нижней границей множества $\{d\}$, а потому на интервале $(c; c+\delta)$ существует такая точка $d_1 \in \{d\}$, что на $[d_1; b]$ выполняется соотношение $|f(x)| < H$, где H — некоторое положительное число. С другой стороны, на $[d_2; d_1]$, где d_2 — любая точка интервала $(c-\delta; c)$, выполнено соотношение $|f(x)| < L$. Тогда на отрезке $[d_2; b]$ выполняется соотношение $|f(x)| \leq \max\{L, H\}$. Это противоречит тому, что c — нижняя граница множества $\{d\}$, так как $d_2 \in \{d\}$ и $d_2 < c$.

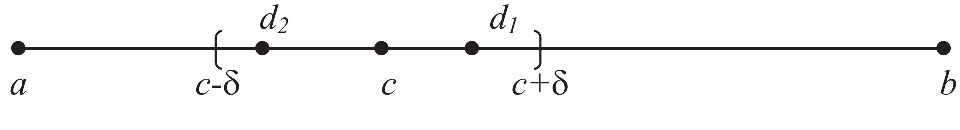


Рис. 1

Таким образом, нижней гранью множества $\{d\}$ является левый конец отрезка — точка a.

Докажем, что $a \in \{d\}$, то есть функция $f(x)$ ограничена на $[a;b]$. На некотором промежутке $[a; a+\delta)$ функция $f(x)$ ограничена, то есть $|f(x)| \leq L$. Число $a+\delta$ не является нижней границей множества $\{d\}$, и потому на интервале $(a; a+\delta)$ существует такая точка $d_1 \in \{d\}$, что на $[d_1; b]$ (см. рисунок 2) выполнено соотношение $|f(x)| \leq H_1$, где H_1 — некоторое положительное число. На $[a; d_1] \subset [a; a+\delta)$ выполнено соотношение $|f(x)| \leq L$. Тогда на отрезке $[a;b]$ выполняется $|f(x)| \leq H = \max\{L, H_1\}$.

Рис. 2

Итак, функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$.

Теорема 2. *Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a;b]$, достигает своего наибольшего и наименьшего значений на этом отрезке.*

Лемма. *Если множество $Y = \{y\}$ ограничено и сверху, и снизу, и не существует таких элементов y_1 и y_2 множества Y, что $y_1 = m = \inf\{y\}$, $y_2 = M = \sup\{y\}$, то множества $\{\frac{1}{y-m}\}$ и $\{\frac{1}{M-y}\}$ не ограничены.*

Докажем для первого из них. Число $m + \frac{1}{E}$ не является нижней границей для множества Y (E — произвольное положительное число), и потому на интервале $(m; m + \frac{1}{E})$ существует элемент $y_0 \in \{y\}$ такой, что $m < y_0 < m + \frac{1}{E}$. Тогда $y_0 - m < (m + \frac{1}{E}) - m = \frac{1}{E}$. Следовательно, $\frac{1}{y_0 - m} > 1/(\frac{1}{E}) = E$. Так как E — произвольное положительное число, то множество $\{\frac{1}{y-m}\}$ не ограничено.

Аналогично доказывается неограниченность множества $\{\frac{1}{M-y}\}$.

Вернемся к доказательству теоремы 2.

Пусть $m = \inf f(x)$ — наибольшая нижняя граница значений $f(x)$, $M = \sup f(x)$ — наименьшая верхняя граница значений $f(x)$.

Предположение, что функция $f(x)$ не принимает значений m и M, приводит к противоречию. С одной стороны, функции $\frac{1}{f(x)-m}$ и $\frac{1}{M-f(x)}$ непрерывны на $[a;b]$ как частное непрерывных функций в точках, где знаменатель отличен от нуля, и следовательно, ограничены на $[a;b]$, а с другой стороны, на основе леммы они не могут быть ограничены.

Литература

1. Цукерман В. В. Теоремы о гранях ограниченного числового множества как выражение непрерывности множества действительных чисел / В. В. Цукерман // Математическое образование. - 2011. - №2(58).

Гераськина Елена Викторовна,
учитель математики ГОУ СОШ с углубленным
изучением отдельных предметов №1367, г. Москва,
кандидат педагогических наук.

Email: geraskinae@gmail.com

Криптосистема с открытым ключом, созданная на основе математического бильярда

Д. А. Лачинов, А. Ф. Ляхов

В настоящее время проблема защита информации стала одной из самых важных массовых задач. В статье показана принципиальная возможность использования бильярда в качестве кодирующего устройства. На основе математической модели бильярда создано программное кодирующее устройство с открытым ключом.

Первые коды, шифрующие сообщения, были созданы в глубокой древности. Историк Геродот (V век до нашей эры) упоминает о шифровании писем и существовании специальных механических шифровальных машин в Спарте. Во все времена шифровалась дипломатическая и военная переписка, купцами шифровалась информация о коммерческих сделках, учёными — об открытиях с целью подтверждения своего приоритета. Интересно отметить, что все алхимические и астрологические трактаты зашифрованы специальными кодами, ключи к которым имели только посвящённые.

Роль шифрования и кодирования сообщений непрерывно увеличивалась в связи с усложнением и развитием общества и техники. Огромный всплеск интереса к шифрованию был вызван первой и второй Мировыми Войнами. Хорошо известна история с похищением немецкой шифровальной машины Энгима и раскрытием её кода английскими математиками.

Заметим, что работы над проблемами кодирования и декодирования информации и связи этих процессов с техническими устройствами легли в основу теории информации.

В настоящее время в связи с развитием средств коммуникаций проблема защита информации стала одной из самых важных массовых задач, стоящих перед человечеством. Основной путь её решения состоит в преобразовании (шифровании) передаваемой информации, исключающем несанкционированное прочтение и использование. Процесс преобразования информации, осуществляется с помощью специальных технических и программных криптосистем. Наибольшее распространение получили программные криптосистемы. Однако следует заметить, что криптосистемы, построенные на основе физических принципов, обладают более высокой защищённостью. Это связано с тем, что реальные системы не поддаются точному математическому описанию и, следовательно, не могут декодироваться с помощью формальных математических методов.

В данной работе показана принципиальная возможность использования в качестве кодирующего устройства бильярда. На основе математической модели бильярда было создано программное кодирующее устройство с открытым ключом.

При создании криптосистем с открытым ключом для кодирования и декодирования генерируются два ключа: один ключ объявляется открытым, а другой закрытым. Открытый ключ публикуется и доступен любому, кто желает послать сообщение адресату. Секретный ключ сохраняется в тайне.

Для создания ключей используют необратимые или односторонние функции. Причём под необратимостью понимается не теоретическая необратимость, а практическая невозможность вычислить обратное значение функции с помощью современных вычислительных средств за допустимые интервалы времени.

На первом этапе шифрования с помощью арифметического кодирования сообщению ставится в соответствие пара чисел, которые выступают в роли координат начального положения шара на бильярдном столе. Пользователем задаётся площадь бильярдного стола $S = n \times m$, где n, m — простые числа. Задаётся вектор скорости, а также время движения шара t — простое число относительно $\varphi(\mathrm{S})$ — функции Эйлера.

В открытом сообщении передаются конечные координаты шара, площадь бильярдного стола и время движения. Пара $(t,\, S)$ образуют открытый ключ.

Для несанкционированной расшифровки необходимо определить закрытый ключ d и по S определить n, m. При санкционированной расшифровке ключ $(d,\, S)$ задан, и размеры биллиардного стола определяются из системы

$$S = m \cdot n,$$
$$t \cdot d = (m-1)(n-1) + 1.$$

Зная конечное положение шара, его скорость, размеры биллиардного поля и время движения, можно найти начальное положение, которое дешифруется с помощью метода арифметического декодирования.

Предложенный подход может быть распространён на бильярды различной формы.

Арифметическое кодирование

Статистические исследования текстов написанных на самых различных языках показали, что каждая буква в текстах встречаются с некоторой определённой частотой [1]. Это свойство широко используется при создании кодов.

При арифметическом кодировании результат кодирования всего сообщения представляется одним или парой вещественных чисел в интервале [0, 1) [2].

Поясним идею арифметического кодирования на простейшем примере. Пусть нам нужно закодировать следующую текстовую строку: ***ПЛАНЕТА.***

Для упрощения демонстрации метода, будем полагать, что буквы, входящие в сообщение, встречаются в с вероятностью (частотой), приведённой в таблице 1. В соответствии с этими частотами определим интервалы, пропорциональные этим частотам.

Таблица 1

Символ	Частота	Интервал
А	0.2	0 – 0.2
Е	0.2	0.2 – 0.4
Л	0.2	0.4 – 0.6
Н	0.2	0.6 – 0.8
П	0.1	0.8 – 0.9
Т	0.1	0.9 – 1

При арифметическом кодировании интервал каждой буквы сообщения вкладывается в интервал предыдущих символов. Причём вставляемый интервал приводится в соответствие с интервалом, в который он вставляется. Нормировка осуществляется по следующему правилу: значение переменной x из единичного интервала $[b_1, b_2)$ $([b_1 = 0, b_2 = 1))$, переводится в значение y некоторого текущего интервала кодирования $[a_1, a_2)$, на котором расположена буква из сообщения по формуле

$$y = \frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1}(x - b_1). \qquad (1)$$

Первый символ кодируемого сообщения ***П*** согласно значению из таблицы 1 выделит в начальном интервале интервал [0,8; 0,9).

Следующим символом сообщения будет буква ***Л***. Она расположена в интервале буквы ***П***. Используя формулу (1) для пересчёта границ интервала буквы ***Л***, получим интервал [0,04 — 0,06). Интервал, кодирующий две буквы, будет равен [0,84 — 0,86).

Для следующей буквы ***А*** значение интервала на котором размещена эта буква [0,04 — 0,06); в этом интервале ей соответствует значение интервала [0,000 — 0,004). Итоговый интервал для трёх букв [0,840 — 0,844).

Продолжая эту процедуру, получим:

	$[0,0-1,0)$
П	$[0,8-0,9)$
Л	$[0,84-0,86)$
А	$[0,840-0,844)$
Н	$[0,8424-0,8432)$
Е	$[0,84256-0,84272)$
Т	$[0,842704-0,842720)$
А	$[0,842704-0,8427056)$

Результат кодирования: интервал [0,842704 — 0,8427056). Любое число, заключенное внутри этого интервала, однозначно декодируется в исходное сообщение.

Возьмем число из этого интервала, например 0,8427050. Декодеру известна таблица распределения выделенных алфавиту интервалов. Декодируемое число принадлежит интервалу $[0,8-0,9)$, следовательно первый символ буква ***П***. Исключим из результата кодирования влияние первого символа ***П***, для этого вычтем из результата кодирования нижнюю границу диапазона, отведенного для ***П,*** $0,8427050-0,8=0,\ 0427050$ — и разделим полученный результат на ширину интервала, отведенного для ***П*** — 0,1. В результате получим 0,427050. Это число целиком вмещается в интервал, отведенный для буквы ***Л*** — $[0,4-0,6)$, следовательно, вторым символом декодированной последовательности будет ***Л***. Доведя описанную процедуру до конца, получим исходное слово ***ПЛАНЕТА***.

Заметим, что при арифметическом кодировании возникает несколько проблем. Первая состоит в том, что не определено окончание процедуры декодирования, поскольку остаток 0,0 может означать букву **А** или последовательность **АА**, **ААА** и т.д. Для её решения в программе вводится специальный символ $\#$ — конец закодированного блока.

Вторая проблема — это возрастание числа десятичных знаков представления сообщения при увеличении длины кодируемого сообщения. В программе, описанной в данной статье, для того, чтобы остаться в рамках обычного представления числа на компьютере, вводимая строка делится на строки по восемь символов.

Кодирование с открытым ключом

Основной принцип систем с открытым ключом состоит в том, что каждым адресатом генерируются два ключа, используемые при кодировании и декодировании сообщения, связанные между собой по определенному правилу. Один ключ объявляется открытым, а другой закрытым. Открытый ключ публикуется и доступен любому, кто желает послать сообщение адресату. Секретный ключ сохраняется в тайне.

Исходный текст шифруется открытым ключом адресата и передается. Дешифрование сообщения возможно только с использованием закрытого ключа, который известен второму адресату.

Криптографические системы с открытым ключом используют так называемые необратимые или односторонние функции, которые обладают следующим свойством: при заданном значении x относительно просто вычислить значение $f(x)$, однако если $y=f(x)$, то нет простого пути для вычисления значения x.

Множество классов необратимых функций порождает множество систем с открытым ключом.

Заметим, что под необратимостью понимается не теоретическая необратимость, а практическая невозможность вычислить обратное значение, используя современные вычислительные средства за обозримый интервал времени.

Алгоритмы шифрования с открытым ключом получили широкое распространение в современных информационных системах. Так, алгоритм RSA стал мировым стандартом для открытых систем.

Криптосистема RSA разработана в 1977 году. При её создании использовался тот факт, что разложение числа на простые множители является NP-сложной задачей, то есть вычислительная сложность задачи разложения числа на простые множители растет экспоненциально с ростом длины записи числа, которое раскладывается на множители. В настоящее время алгоритм RSA используется во стандартах SSL, S-HHTP, S-MIME, S/WAN, STT и PCT.

Рассмотрим математические основы этого алгоритма.

Теорема 1 (Малая теорема Ферма) [3]. *Если p — простое число, то*

$$x^{p-1} = 1 \ (\mathrm{mod} p) \tag{2}$$

для любого x, простого относительно p, или

$$x^p = x \ (\mathrm{mod} p). \tag{3}$$

Доказательство. Уравнения (2) и (3) справедливы для $x \in Z^p$. Очевидно, что уравнение (3) выполняется при $x = 0$ и $x = 1$. Записав разложение степени числа по биному Ньютона и учитывая, что $C(p, j) = 0 \ (\mathrm{mod} p)$ при $0 < j < p$, получим

$$x^p = (x - 1 + 1)^p = \sum_{0 \le j \le p} C(p, j)(x - 1)^j = (x - 1)^p + 1(\mathrm{mod} p).$$

Продолжая, можно записать $(x - 1)^p = (x - 2)^p + 1(\mathrm{mod} p)$. Выполнив эту процедуру x раз и просуммировав, получим (3).

Методом математической индукции можно показать, что уравнения (2) и (3) справедливы для всех $x \in Z^p$.

Для любого натурального числа n можно определить функцию Эйлера.

Функцией Эйлера $\varphi(n)$ называется число положительных целых, меньших n и простых относительно n, то есть она определяет количество остатков r взаимно простых с n чисел.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
φ(n)	1	1	2	2	4	2	6	4	6

Приведём без доказательства несколько теорем.

Теорема 2. *Если $n = pq$ (p и q — отличные друг от друга простые числа), то*

$$\varphi(n) = (p - 1)(q - 1).$$

Теорема 3. *Если $n = pq$ (p и q — отличные друг от друга простые числа) и x — простое относительно p и q, то $x^{\varphi(n)} = 1 \ (\mathrm{mod} n)$.*

Следствие. *Если e — простое относительно $\varphi(n)$, то существует целое d, такое, что*

$$ed = 1 \ (\mathrm{mod}\varphi(n)). \tag{4}$$

На этих математических фактах и основан популярный алгоритм RSA. Рассмотрим пример, иллюстрирующий применение алгоритма RSA.

Пример кодирования с открытым ключом

Зашифруем сообщение “КОД”. Для простоты будем использовать простые числа p=3 и q=11. Определим $n = 3{\cdot}11 = 33$. Найдем функцию Эйлера $\varphi(33) = (p{-}1)(q{-}1) = 20$. Возьмём в качестве числа d число, взаимно простое с 20, например, d=3.

В качестве числа e может быть взято любое число, которое удовлетворяет соотношению (4): $(e \cdot 3)$ (mod20) $= 1$, например число 7.

Представим шифруемое сообщение как последовательность целых чисел с помощью отображения: К$\to$1, О$\to$2, Д$\to$3. Тогда сообщение “КОД” принимает вид (1,2,3). Зашифруем сообщение с помощью ключа {7,33}.

ШТ1 = (1^7) (mod 33) = 1 (mod 33) = 1,

ШТ2 = (2^7) (mod 33) = 128 (mod 33) = 29,

ШТ3 = (3^7) (mod 33) = 2187 (mod 33) = 9.

Получим зашифрованное сообщение (1,29,9). Декодируем его на основе закрытого ключа {3,33}:

ИТ1 = (1^3) (mod 33) = 1 (mod 33) = 1,

ИТ2= (29^3) (mod 33) = 24389 (mod 33) = 2,

ИТ3 = (9^3) (mod 33) = 729 (mod 33) = 3.

В реальных системах алгоритм RSA реализуется следующим образом: выбираются два больших простых числа (p и q) определяется n, и в соответствии с описанным выше алгоритмом выбираются два простых числа e и d. $\{e, n\}$ образует открытый ключ, а d, n — закрытый. Открытый ключ публикуется и доступен каждому, кто желает послать владельцу ключа сообщение, которое зашифровывается указанным алгоритмом.

Для того чтобы осуществить несанкционированное прочтение шифрограммы, необходимо определить закрытый ключ d. Для этого необходимо разложить большое число n на простые сомножители, а эта задача является NP-сложной задачей.

Математический бильярд

Для усложнения процесса дешифровки включим в процесс шифрования модель механической системы — математический бильярд [4].

Математический бильярд — идеальная модель реального бильярда. Это абсолютно гладкий стол без луз с упругими бортами, и единственным шаром в виде материальной точки, способной двигаться поступательно и упруго отражаться от стенок бильярда. Форма бильярдного стола может быть различной, но в рассматриваемом случае бильярдный стол прямоугольный (см. рис. 1).

Постановка задачи об определении местоположения бильярдного шара с течением времени имеет следующий вид.

Дан бильярдный стол с размерами X_1, Y_1. В начальный момент времени $t_0 = 0$, шар находится в точке с координатами x_0, y_0 и имеет скорость $V_x \geq 0$, $V_y \geq 0$.

Требуется определить, в какой точке будет находиться шар в момент времени t.

Рассмотрим движение по оси x. За время t шар прошел путь $S_x = V_x t$. Если шар во время движения ни разу не достиг стенки бильярда, то его координата x_2 в момент времени t определится выражением $x_2 = x_0 + S_x$. Во время движения шар может отражаться от стенок бильярда. Количество полных прохождений бильярдного стола по горизонтали может быть определено с помощью выражения $n = (S_x - (X_1 - x_0))/X_1$.

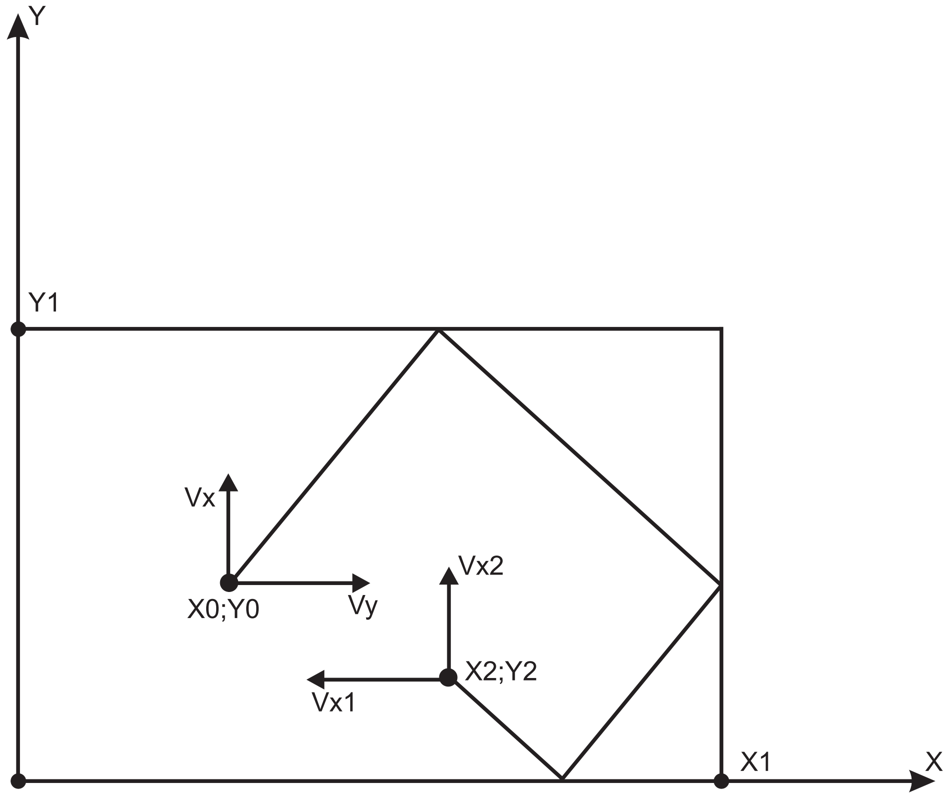


Рис. 1

Если шар ударялся о стенки нечетное количество раз, то его конечное положение определяется по формуле $x_2 = S_x - nX_1 - (X_1 - x_0)$. Если же количество соударений было четное, то - $x_2 = X_1 - (S_x - nX_1 - (X_1 - x_0))$.

Аналогично находится координата шара по оси y.

Очевидно, что по найденным конечным координатам шара начальные координаты определяются однозначно.

Начальное положение шара определяется сообщением, которое шифруется с помощью арифметического кодирования и полученные числа используются в качестве координат. Найденные конечные значения x_2, y_2 передаются в открытом сообщении.

Описание кодирующей и декодирующей программы

Для создания программы необходимо задать частоты, соответствующие 32 буквам русского алфавита, пробела и символ конца строки. Созданная программа носит демонстрационный характер и её нельзя использовать для передачи длинных сообщений. Для упрощения программы был создан равномерный массив символов. Массив заполняется следующим образом:

a[34] = 1; a[33] = 0.98; a[32] = 0.96; $\ldots$ a[0] = 0.03;

Шифруемая фраза считывается из поля ввода (рис. 2) и разделяется на несколько строк, длиной не более восьми символов.

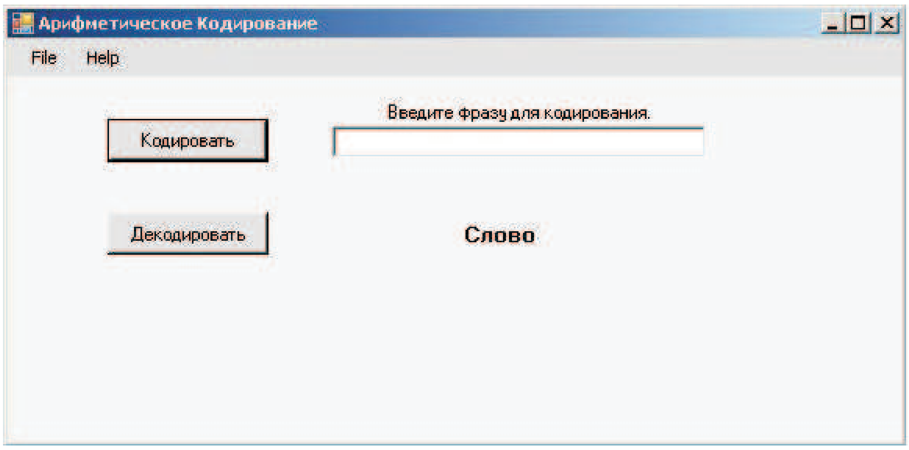


Рис. 2

Разбиение на короткие строки связано с тем, что при представлении чисел с плавающей запятой в компьютере возникают погрешности, которые могут приводить к неоднозначному декодированию. Слово, состоящее из 8 символов, будет кодироваться десятичным числом, содержащим 17 значащих цифр. Это количество цифр является предельным для формата “тип данных double”.

Полученные кодируемые значения сохраняются в файл kody.txt.

Интерфейс программы “Арифметическое кодирование” показан на рис.2.

Поле Ввода - используется для ввода кодируемого сообщения.

Кнопка “Кодировать”. При нажатии на данную кнопку будет выполнен алгоритм арифметического кодирования фразы, находящейся в текстбоксе. В директории программы будет создан файл kody.txt.

Кнопка “Декодировать”. При нажатии на данную кнопку будет выполнен алгоритм декодирования. Для декодирования в директории программы должен находиться файл kody1.txt

Меню “File”. Содержит кнопку для Выхода.

Меню “Help”. Оно содержит краткую информацию о программе и встроенную справку.

Заметим, что вводимые символы должны быть русскими строчными буквами, в противном случае кодер их не воспримет.

Программа “Бильярд”

Данная программа выполняет моделирование физической системы — бильярда. Скриншот программы показан на рис.3.

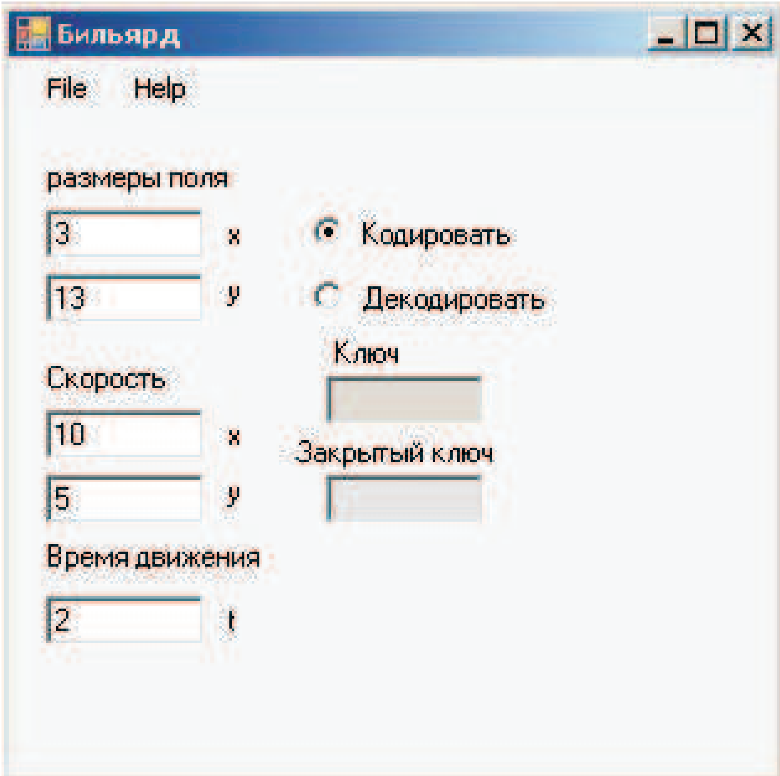


Рис. 3

Меню ‘File’ содержится два элемента.

1. Open. Открывает требуемый текстовый файл для кодирования или декодирования.

2. Exit. Выход из программы.

В меню ’Help’ имеется встроенная справка и информация о программе. Некоторые ограничения на вводимую информацию:

1. Размер поля по оси x должен быть меньше размера поля по оси y.

2. Кодируются только те файлы, которые были получены программой “Арифметическое кодирование”.

3. Координаты поля по осям x и y должны быть простыми числами. В конечном файле передается произведение этих величин. Произведение должно быть больше 33, то есть $x * y > 33$.

При использовании программы в качестве кодера, задаются размеры бильярдного поля, составляющие скорости и время движения. Начальные значения координат шара считываются из файла, полученного при арифметическом кодировании (kody.txt). В директории программы будет создан файл biliard.txt, в котором записаны конечные координаты бильярдного шара, площадь бильярдного стола и закрытый ключ.

При декодировании необходимо выбрать файл biliard.txt и ввести закрытый ключ. После нажатия кнопки декодировать сообщение будет создан файл kody1.txt, содержащий начальные координаты. Дальнейшее декодирование может быть осуществлено с помощью программы “Арифметическое кодирование”.

Тестовый пример работы программ

Введем в текстовое поле фразу “конкурс научных работ юниор” и закодируем ее.

Получим закодированную фразу.

0,312959573757214 0,390531966063694

0,480038801171515 0,25305846

Закодируем ее при помощи программы, как показано на рисунке 4

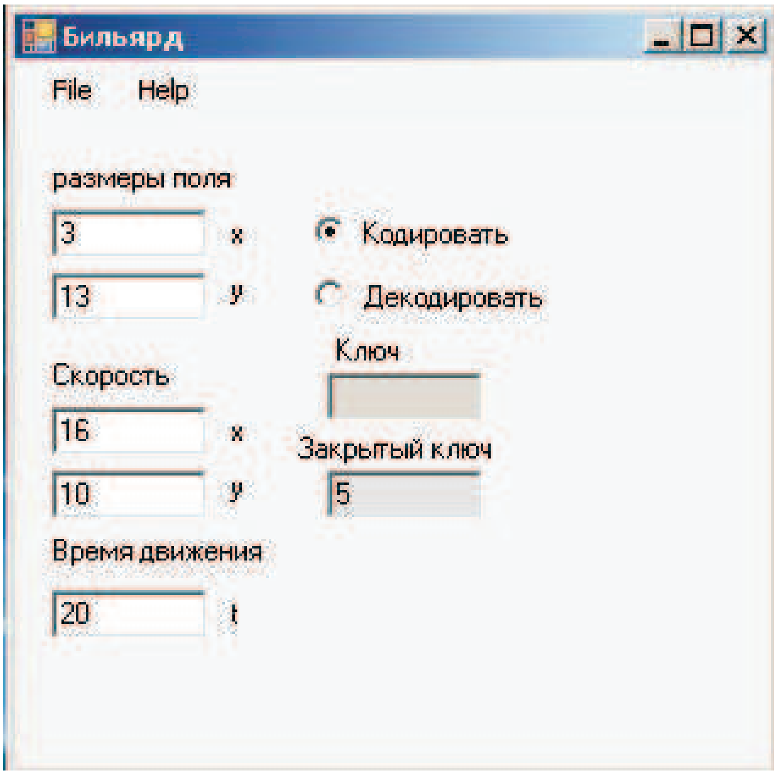


Рис. 4

и получим следующие значения:

2,31295957375721 7,60946803393631

2,48003880117151 7,74694154

В файле biliard.txt будет записана следующая информация:

#39,22,4,

где $S = 39$ — площадь бильярда, $V_x = 22$, $V_y = 4$ — проекции скорости шара по координатам. Также будет создан закрытый ключ $d = 5$.

Заметим, что в данной реализации программы открытый ключ генерируется в процессе кодирования и остаётся скрытым для пользователя.

Декодируем полученные значения при помощи закрытого ключа (5).

0,31295957375721 0,390531966063699

0,48003880117151 0,25305846

Можно видеть, что декодируемые значения получены с небольшой погрешностью, вызванной потерей или изменением одного или нескольких значимых десятичных разрядов в процессе преобразования.

Используем арифметический декодер и расшифруем фразу. Получим, см. рис. 5:

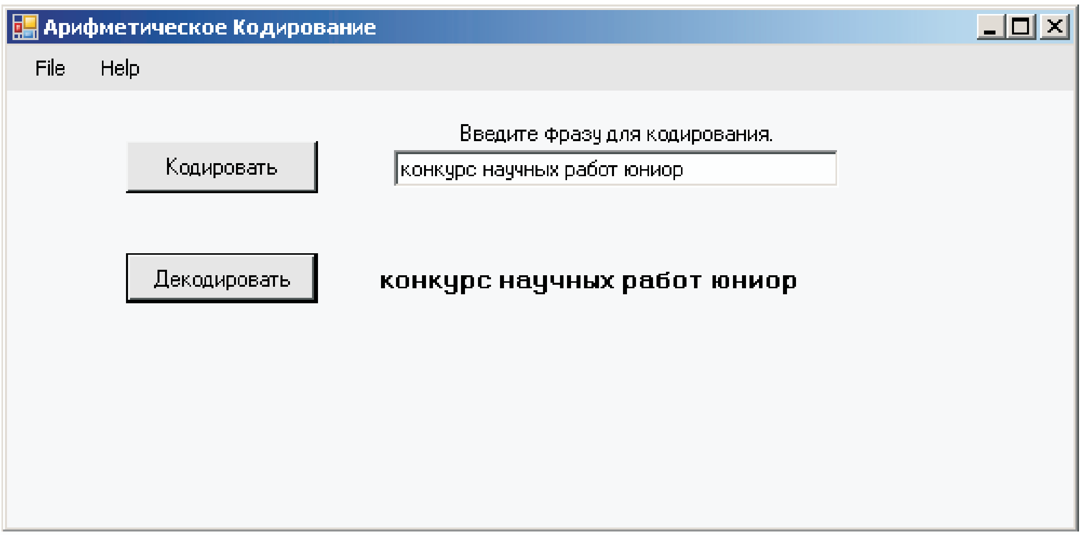


Рис. 5

В заключение заметим, что при кодировании не использовались три параметра: две проекции скорости шара и время его движения. Используя их, можно изменить процедуру кодировки и существенно повысить криптостойкость кода.

Работающую программу и исходные коды можно получить, обратившись по электронным адресам авторов.

Литература

[1] Яглом А.М., Яглом И.М. Вероятность и информация. — М. Наука, 1973, — 541 с.

[2] Кузьмин И.В. Основы теории информации и кодирования. — Минск: Вышэйш. шк., 1986. — 240 с.

[3] В. Сендеров, А. Малая теорема Ферма — Квант, 2000, 1, стр. 9-16.

Ляхов Александр Федорович,
доцент кафедры теоретической механики
механико-математического факультета
Нижегородского государственного университета
имени Н. И. Лобачевского, кандидат физ.-мат. наук.

Email: Lyakhov@mm.unn.ru

Лачинов Дмитрий Александрович,
студент второго курса факультета ВМК
Нижегородского государственного университета
имени Н. И. Лобачевского.

Email: kak5006@yandex.ru

Анализ энтропии вычислений алгебраических тождеств

А. Ф. Ляхов

В работе показано, что различные формы записи алгебраических выражений несут разное количество информации о распределении вычислительных погрешностей. В случае развернутых формул вычислений интервал оценивания расширяется, но при этом распределение погрешности становится неравномерным. Для оценки степени неравномерности распределения погрешностей используется понятие энтропии.

При выполнении вычислений, как правило, приходится сталкиваться с возникновением и ростом погрешности вычислений. Если вычисления не очень громоздки и производятся вручную, то в процессе счета человек может контролировать рост погрешности вычислений и предпринимать меры для её уменьшения. Заметим, что ручные вычисления обычно производятся способом, который может быть назван "вычисления с переменной длиной числа, с квазификсированной-квазиплавающей запятой", то есть длина используемых чисел регулируется.

Объёмы современных машинных вычислений при решении сложных задач могут содержать 10^{10} и более элементарных арифметических операций. Машинные вычисления обычно осуществляются с плавающей запятой и с фиксированной длиной числа. В этом случае оценки погрешностей могут быть получены только в результате сложных исследований и вычислений.

Известно, что, с одной стороны, все оценки погрешности измерений величин, с которыми производятся вычисления, носят вероятностный характер, то есть наряду с интервалом погрешности указывается соответствующая доверительная вероятность, с другой стороны, реальные погрешности вычислений всегда много меньше теоретических оценок. Всё это подталкивает исследователей к построению статистических подходов оценки погрешности. Эти подходы базируются на идее, что процесс округления есть случайный процесс, и, следовательно, можно построить его модель, основываясь на теории вероятностей. Для того чтобы формально применить методы математической статистики, необходимо создать вероятностное пространство результатов вычислений. Это может быть осуществлено путем создания некоторой умозрительной модели или многократного повторения процесса вычислений с использованием современных технологий распараллеливания и многопроцессорных вычислительных машин[1].

Построим вероятностное пространство, полагая числа, над которыми производятся арифметические операции, варьирующимися. Представим, что вычисление может быть сделано с бесконечной точностью, но на каждом арифметическом шаге осуществляется округление, и присоединяется некоторая погрешность [2]. Будем полагать, что эта погрешность — случайная величина, равномерно распределенная на интервале длиной единицы последнего значащего разряда.

Заметим, что в этой модели допускается непрерывное распределение и игнорируется тот факт, что действительное распределение машинного округления дискретно, так как вычислительные машины оперирует с числами конечной длины.

Одним из главных свойств случайных величин является отсутствие уверенности в их значении. Эта неопределенность изменяется при выполнении связанных с этими величинами операций.

В теории информации за меру неопределенности случайной величины X с плотностью распределения $f(x)$ принимается величина, называемая энтропией и равная

[1]Погрешности вычислений одной и той же задачи при её повторных выполнениях на многопроцессорных компьютерах различны. Это является следствием того, что распараллеливание задачи определяется общим состоянием, занятости процессоров, участвующих в работе.

$$H(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log f(x) dx$$

Заметим, что максимальную энтропию имеет равномерно распределенная случайная величина [1,3]. Следовательно, чем меньше можно сказать о значении, которое примет случайная величина, то есть чем меньше информации о ней мы имеем, тем энтропия больше.

Энтропия показывает, что погрешность вычислений распределена неравномерно на интервале погрешности.

Выполняя арифметические действия над числами, погрешности которых имеют некоторые распределения, получим новые погрешности с распределениями, отличными от исходных. В зависимости от порядка выполнения действий, как величина погрешности, так и мера неопределенности результата, то есть энтропия, будет различной.

Постановка задачи. Рассмотрим различную запись одного и того же выражения:

$$I_1 = (a+b)^2, \quad I_2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Оценим энтропию этих выражений с точки зрения предложенной модели округления чисел.

Пусть a — случайная величина, равномерно распределенная на интервале $(a - \Delta a; a + \Delta a)$ и имеющая математическое ожидание, равное a. Плотность распределения

$$f_a(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\Delta a}, & x \in (a - \Delta a; a + \Delta a), \\ 0, & x \notin (a - \Delta a; a + \Delta a), \end{cases}$$

Пусть b — случайная величина, равномерно распределенная на интервале $(b - \Delta b; b + \Delta b)$, с математическим ожиданием, равным b. Плотность распределения

$$f_b(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\Delta b}, & x \in (b - \Delta b; b + \Delta b), \\ 0, & x \notin (b - \Delta b; b + \Delta b). \end{cases}$$

Для того, чтобы ответить на вопрос, какая запись — I_1 или I_2 содержит в себе больше информации, требуется найти плотности распределения $f_{(a+b)^2}(x)$ и $f_{a^2+2ab+b^2}(x)$, а затем вычислить энтропию этих распределений.

Из теории вероятностей известно [2], что, если имеется непрерывная с. в. X с плотностью $f(x)$, то с. в. $Y = \varphi(X)$ имеет плотность распределения

$$g(y) = \sum_{i=1}^{k} f(\psi_i(y)) \left|\psi_i'(y)\right|, \tag{1}$$

где k — число значений функции, обратной к $\varphi(x)$, соответствующее данному y, $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$,..., $\psi_k(y)$ — значения обратной функции, соответствующие данному y [1].

Найдём законы распределения случайных величин, входящих в искомые выражения. Определим плотность распределения квадрата с.в. $\varphi(x) = x^2$. Функция $y = x^2$ не монотонна; $\psi_1(y) = -\sqrt{y}$, $\psi_2(y) = \sqrt{y}$. Из (1) получим

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2y}} \left(f(-\sqrt{y}) + f(\sqrt{y})\right), \quad (y > 0). \tag{2}$$

Рассмотрим функцию двух случайных аргументов

$$Y = \varphi(X_a, X_b),$$

функция распределения с.в. Y равна

$$G\left(y\right)=\iint\limits_{\varphi\left(x_a,x_b\right)<y} f\left(x_a,x_b\right)dx_a dx_b, \tag{3}$$

где область интегрирования на плоскости $x_a O x_b$ определяется из условия $\varphi\left(x_a,x_b\right)<y$. Дифференцируя (3) по величине y, найдем плотность распределения с. в. Y $g(y)=\frac{dG(y)}{dy}$.

Полагаем, что с. в. X_a и X_b независимы, то есть $f\left(x_a,x_b\right)=f_a(x_a)f_b\left(x_b\right)$ и положительны. Найдем функцию распределения с. в. $Y=\varphi\left(X_a,X_b\right)=X_a+X_b$

$$G(y)=\iint\limits_{x_a+x_b<y} f_a(x_a)f_b(x_b)dx_a dx_b$$

В этом случае область интегрирования – часть прямоугольника, отсеченная прямой $x_a+x_b=y$ (рис. 1).

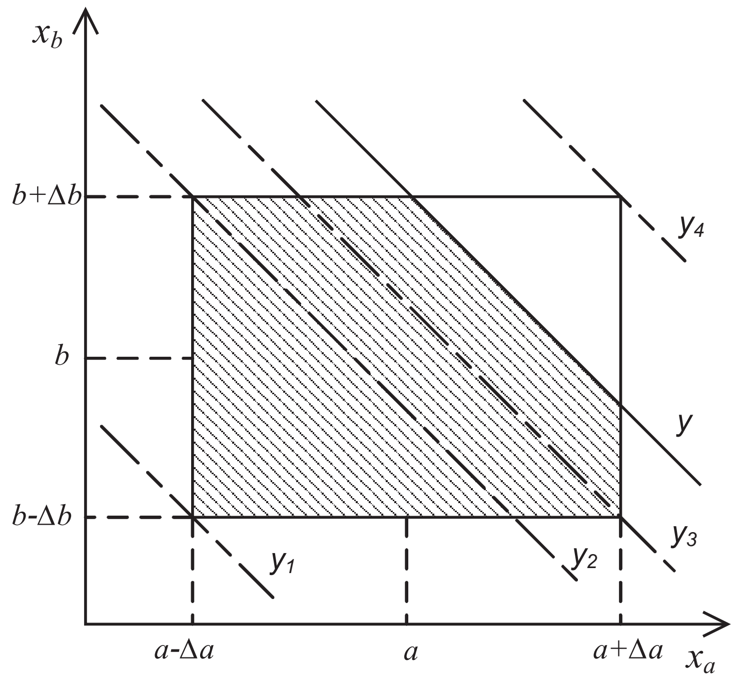


Рис. 1

1) $y_1=a-\Delta a+b-\Delta b$, $y_2=a-\Delta a+b+\Delta b$, $y_3=a+\Delta a, b-\Delta b$, $y_4=a+\Delta a+b+\Delta b$. Предположим, что $\Delta a>\Delta b$. Покажем, как определяется функция $G(y)$ на интервале $y_1\le y\le y_2$:

$$G(y)=\frac{1}{4\Delta a\Delta b}\int\limits_{-a-\Delta a}^{-y-(b-\Delta b)} dx_a \int\limits_{b-\Delta b}^{y-x_a} dx_b =$$

$$=\frac{1}{4\Delta a\Delta b}\left[\frac{1}{2}\left(y-b+\Delta b\right)^2-\left(y-b+\Delta b\right)(a-\Delta a)+\frac{1}{2}(a-\Delta a)^2\right].$$

На остальных интервалах $G(y)$ определяется аналогичным образом.

$$G(y)=\frac{1}{4\Delta a\Delta b}\begin{cases} 0, \quad y<y_1,\\ \frac{1}{2}\left(y-b-\Delta b\right)^2-\left(y-b+\Delta b\right)\left(a-\Delta a\right)+\frac{1}{2}\left(a-\Delta a\right)^2, \quad y_1\le y<y_2,\\ 2\Delta b^2+2\Delta b\left(y-a+\Delta b-b-\Delta b\right), \quad y_2\le y<y_3,\\ 4\Delta a\Delta b-\frac{1}{2}(y-b-\Delta b)^2+\left(y-b-\Delta b\right)\left(a+\Delta a\right)-\frac{1}{2}\left(a+\Delta a\right)^2, \quad y_3\le y<y_4,\\ 4\Delta a\Delta b, \quad y_4\le y \end{cases}$$

График функции $G(y)$ изображен на рис. 2

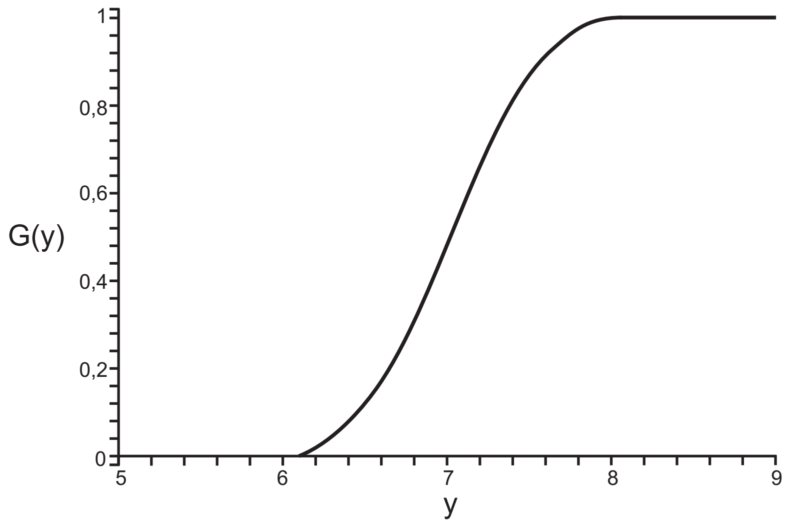


Рис. 2

Дифференцируя по y, находим плотность распределения суммы двух случайных величин:

$$g(y)=\frac{1}{4\Delta a\Delta b}\begin{cases} 0, \ \ y<y_1,\\ \left(y-b+\Delta b\right), \ \ y_1\le y<y_2,\\ 2\Delta b, \ \ y_2\le y\le y_3,\\ -\left(y-b-\Delta b\right)+\left(a+\Delta a\right), \ \ y_3\le y<y_4,\\ 0, \ \ y_4\le y. \end{cases}$$

График плотности распределения $g(y)$ изображен на рис. 3

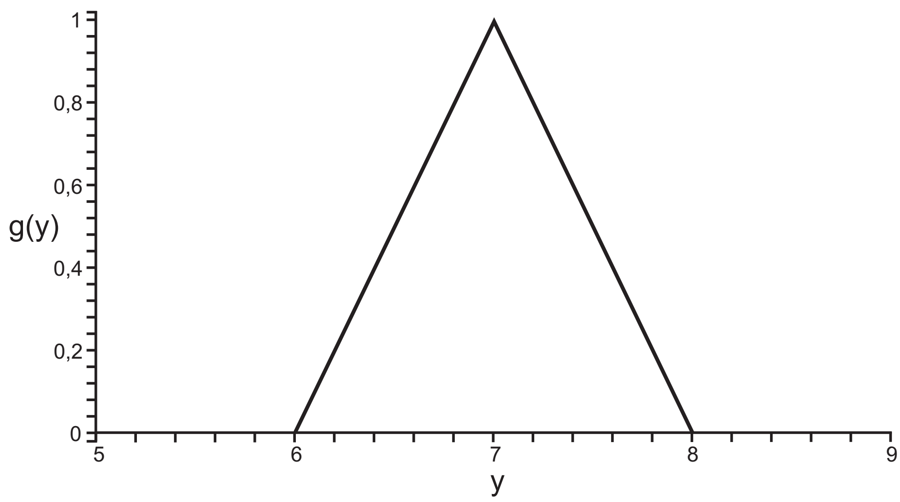


Рис. 3

Функция распределения произведения случайных величин $Y = \varphi(X_a, X_b) = X_a \cdot X_b$

$$G(y) = \iint\limits_{x_a \cdot x_b < y} f_a(x_a) f_b(x_b) dx_a dx_b.$$

Область интегрирования — часть прямоугольника, отсеченная кривой $x_a \cdot x_b = y$.

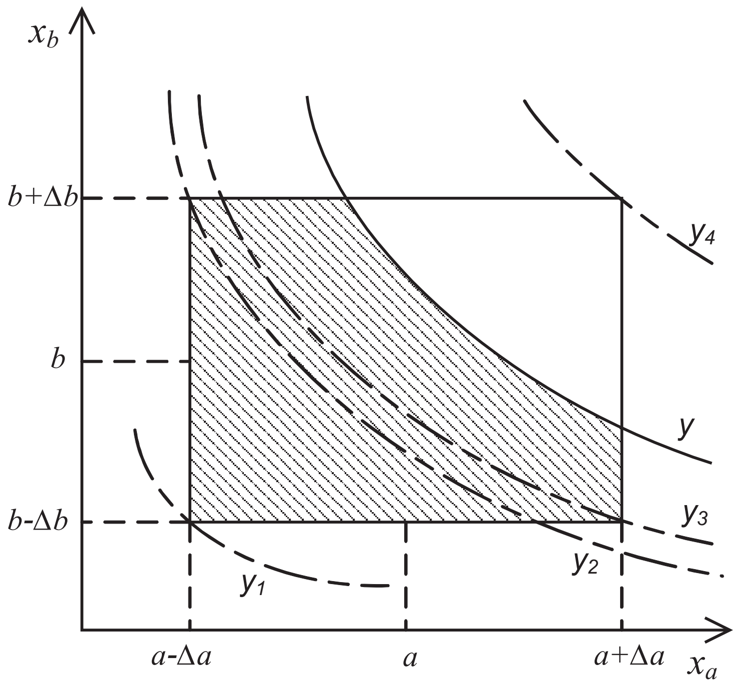


Рис. 4

$$y_1 = (a - \Delta a)(b - \Delta b), \quad y_2 = (a - \Delta a)(b + \Delta b), \quad y_3 = (a + \Delta a)(b - \Delta b), \quad y_4 = (a + \Delta a)(b + \Delta b)$$

Предположим, что $a\Delta b < b\Delta a$, тогда $y_1 \le y_2 \le y_3 \le y_4$. В этом случае получим:

$$G(y) = \frac{1}{4\Delta a \Delta b} \begin{cases} 0, \; y < y_1, \\ y\left(\ln\left|\frac{y}{(a-\Delta a)(b-\Delta b)}\right| - 1\right) + (a - \Delta a)(b - \Delta b), \; y_1 \le y < y_2, \\ y \ln\left|\frac{b+\Delta b}{b-\Delta b}\right| - 2\Delta b(a - \Delta a), \; y_2 \le y < y_3, \\ 4\Delta a \Delta b - y\left(\ln\left|\frac{y}{(a+\Delta a)(b+\Delta b)}\right| - 1\right) - (a + \Delta a)(b + \Delta b), \; y_3 \le y < y_4, \\ 4\Delta a \Delta b, \; y_4 \le y. \end{cases}$$

График функции $G(y)$ изображен на рис. 5:

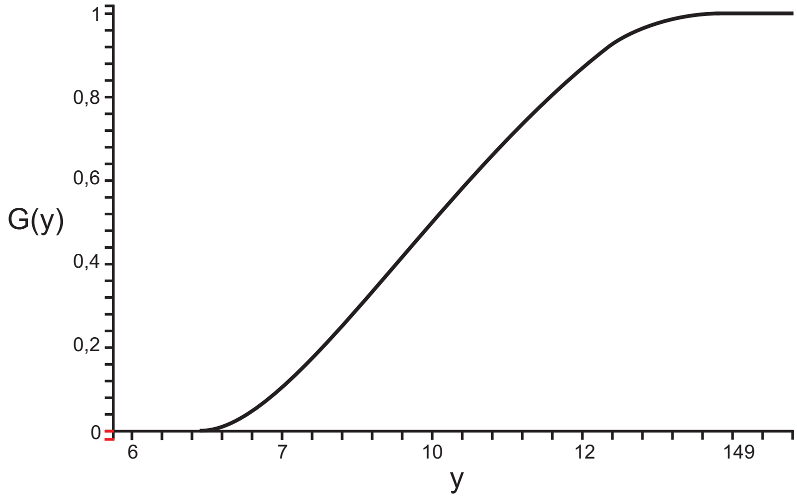


Рис. 5

Дифференцируя по y, находим плотность распределения произведения двух случайных величин:

$$g(y)=\frac{1}{4\Delta a\Delta b}\begin{cases} 0, & y<y_1,\\ \ln\left|\frac{y}{(a-\Delta a)(b-\Delta b)}\right|, & y_1\le y<y_2,\\ \ln\left|\frac{b+\Delta b}{b-\Delta b}\right|, & y_2\le y<y_3,\\ -\ln\left|\frac{y}{(a+\Delta a)(b+\Delta b)}\right|, & y_3\le y<y_4,\\ 0, & y_4\le y.\end{cases}$$

График плотности распределения $g(y)$ показан на рис. 6:

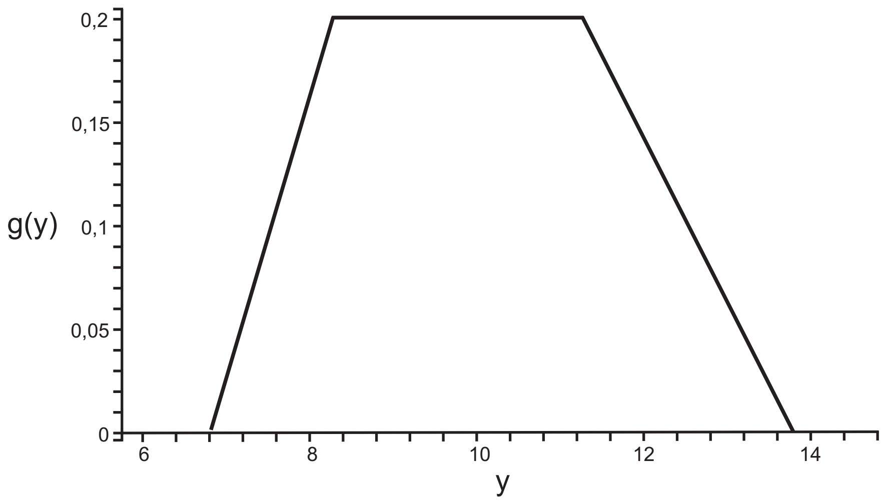


Рис. 6

Численный пример нахождения энтропии выражения

Поскольку определить плотность распределения $f_{(a+b)^2}(x)$ и $f_{a^2+2ab+b^2}(x)$ в общем виде невозможно, приведём пример решения поставленной задачи для конкретных значений a,b,Δa,Δb.

Расчеты были проведены в системе Maple. На каждом этапе вычислений выполнялась проверка выполнения основных свойств плотности распределения для полученных функций.

Примем $a=2$, $b=5$, $\Delta a=\Delta b=0,5$. $I_1=(2+5)^2$

Согласно ранее выведенным формулам, плотность распределения с.в. (2+5) имеет следующий график (рис. 7)

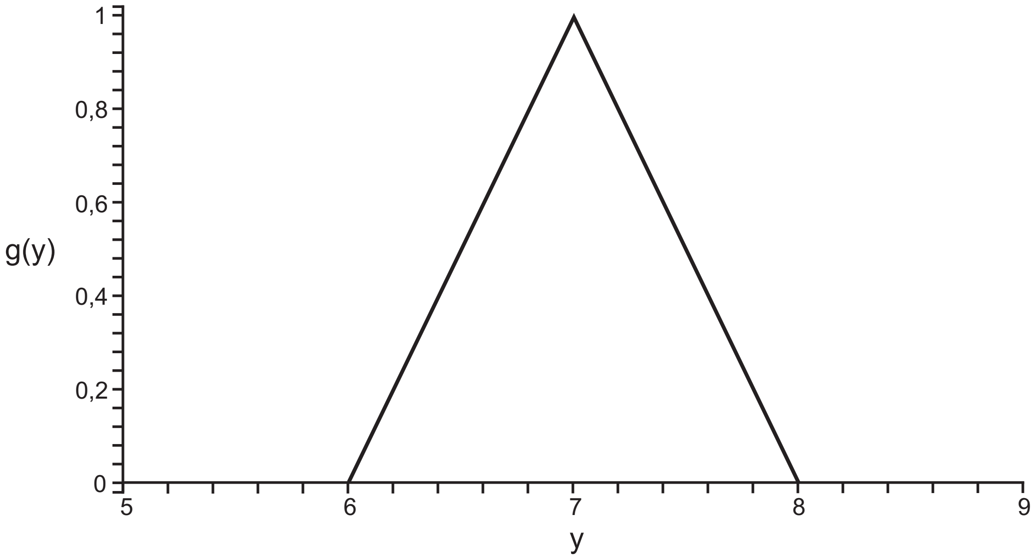


Рис. 7

Из графика видно, что результатом сложения может быть любое число из интервала(6;8), возводя его в квадрат, получим плотность выражения $I_1 f_{(2+5)^2(x)}$ (рис.8).

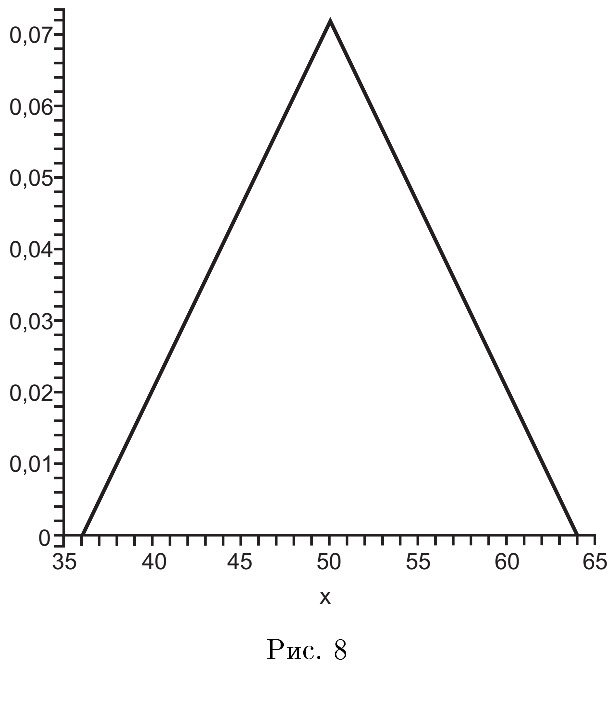


Рис. 8

Энтропия выражения I_1 численно равна: $H\left(I_1\right) \approx 3,1373$

Вычислим энтропию выражения $I_2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 5 + 5^2$.

График плотности распределения с.в. 2·5 имеет следующий вид (рис. 9):

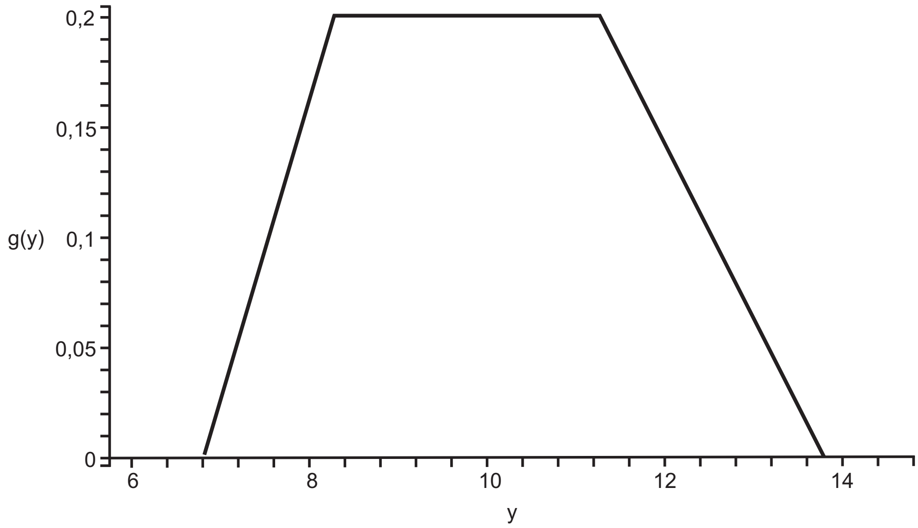


Рис. 9

Произведение может принимать все значения из интервала (6,75;13,75). Максимальная плотность вероятностей имеет место для интервала (8,25;11,25).

Плотности распределения величин 2^2 и 5^2 показаны на рис. 10:

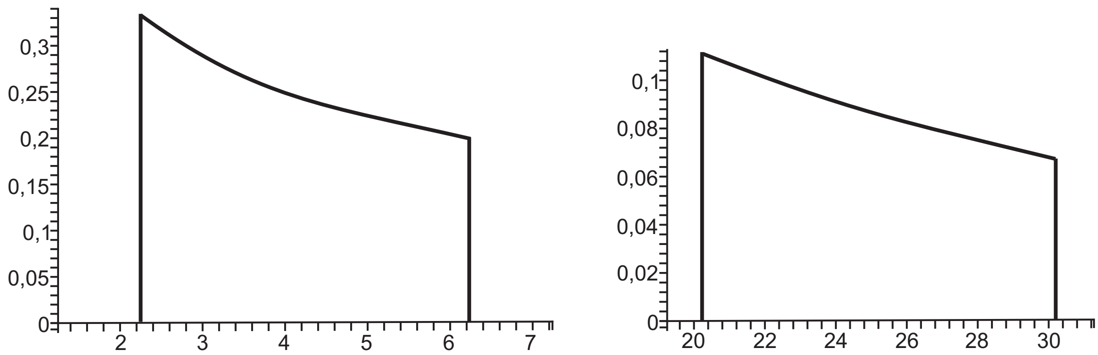


Рис. 10

Плотность распределения суммы квадратов $2^2 + 5^2$ имеет следующий вид (рис. 11):

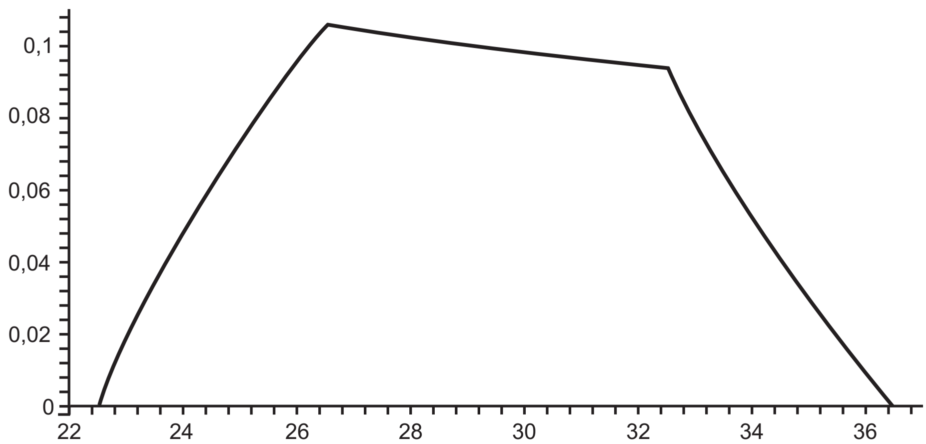


Рис. 11

Плотность распределения выражения I_2 показана на рис. 12.

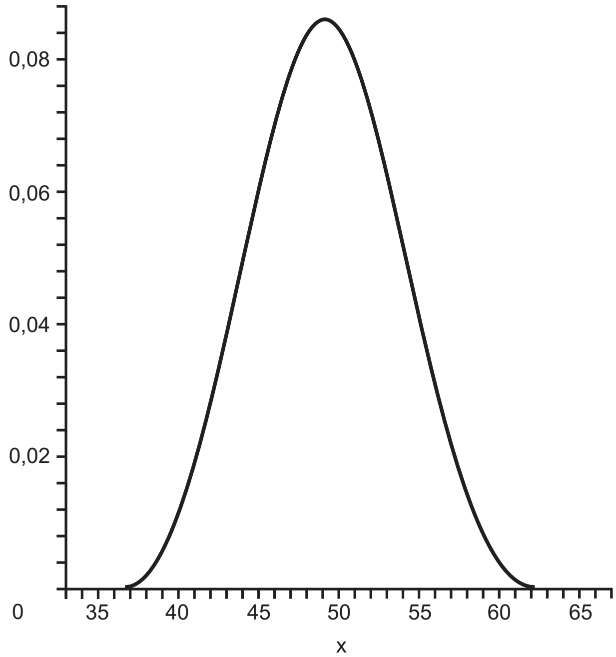


Рис. 12

Энтропия такого распределения численно равна $H(I_2) \approx 2,8923$.

Можно видеть, что закон распределения выражения I_2 близок к нормальному распределению. Это обусловлено тем, что выражение I_2 содержит 3 операции сложения. Из центральной предельной теоремы теории вероятностей известно, что при сложении большого количества независимых случайных величин закон распределения их суммы приближается к нормальному [1].

Математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение полученного распределения $m_I \approx 49,167$, $\sigma_I \approx 4,4014$.

Значение энтропии выражения I_2 можно вычислить приближённо, как энтропию соответствующего нормального распределения. Энтропия нормального закона имеет простую аналитическую запись [1]:

$$H(N(m,\sigma)) = \log\left(\sigma\sqrt{2\pi\cdot e}\right)$$

Вычислим энтропию нормального распределения с параметрами m_I, σ_I : $H(N(m_I,\sigma_I)) \approx 2,9009$.

Можно видеть, что энтропии, вычисленные по определению и с помощью предельной теоремы, отличаются не более чем на 0,01.

Сравнивая энтропии выражений $I_1 = (2+5)^2$ и $I_2 = 2^2 + 2\cdot 2\cdot 5 + 5^2$ можно видеть, что $H(I_1) \approx 3,1373 > H(I_2) \approx 2,8923$.

Приведём оценки погрешности выражений по правилам элементарной теории погрешности. Погрешностями округления после выполнения арифметических операций будем пренебрегать.

Для первого выражения можно записать

$$\delta_{(a+b)^2} = 2\delta_{(a+b)} = 2\left(\frac{\Delta a + \Delta b}{a+b}\right),$$

для второго выражения формула погрешности будет сложнее

$$\delta_{a^2+b^2+2ab} = 2\left(\frac{a\Delta a + b\Delta b + 2(b\Delta a + a\Delta b)}{a^2+b^2+2ab}\right).$$

Заметим, что первая оценка несколько занижена, так как при её получении пренебрегли членом $\frac{(\Delta a+\Delta b)^2}{(a+b)^2}$.

Численные значения погрешности $\delta_{(a+b)^2} = 0,28$, $\delta_{a^2+b^2+2ab} = 0,42$.

Количественный анализ показывает, что с точки зрения предложенной модели округления чисел запись I_2 содержит в себе больше информации, чем запись I_1, так как запись I_2 является развернутой формой I_1. Следовательно, результат во втором случае более определён.

Аналогичные вычисления для ряда других чисел показали, что во всех случаях развернутые формы выражений имеют меньшую энтропию, чем формы свёрнутые.

Аналогичный анализ проводился для следующего тождества: $\sin(x + y) = \sin(x) * \cos(y) + \cos(x) * \sin(y)$.

В этом случае $I_1 = \sin(x+y)$ и $I_2 = \sin(x)*\cos(y)+\cos(x)*\sin(y)$, X, Y случайные величины, равномерно распределённые на интервале $[0, \pi/4]$, то есть $x = \pi/8, y = \pi/8$, а $\Delta x = \pi/8, \Delta y = \pi/8$. Основные вероятностные характеристики для правой части тождества: математическое ожидание $M[I_1] = 0,6715$, дисперсия $D[I_1] = 0,4909$, энтропия: $H[I_1] = 0,2216$. Вероятностные характеристики левой части тождества: математическое ожидание $M[I_2] = 0,6703$, дисперсия $D[I_2] = 0,0718$, энтропия: $H[I_2] = 0,1835$. Интервалы изменения случайных величин $I_1 \in [0;1]$, $I_2 \in [0;\sqrt{2}]$.

Проведенное исследование показывает, что в случае развернутых формул вычислений интервал оценивания расширяется, но при этом распределение погрешности становится неравномерным. Следовательно, применяя методы статистической оценки погрешности, можно уменьшить интервал учитываемой погрешности и получить её доверительную вероятность.

Заметим, что если операции сложения преобладают в исследуемом выражении, то энтропия такого выражения может быть найдена как энтропия нормального закона с соответствующими параметрами распределения.

Литература

[1] Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и её инженерные приложения. М.: Наука, 1976. — С. 480.

[2] Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1968.— С.400.

[3] Яглом А.М., Яглом И. М. Вероятность и информация, — М.: Наука, 1973. — С.511.

Ляхов Александр Федорович,
доцент кафедры теоретической механики
механико-математического факультета
Нижегородского государственного университета
имени Н. И. Лобачевского, кандидат физ.-мат. наук.

Email: Lyakhov@mm.unn.ru

Равноугольные многоугольники на правильных паркетах

Х. Д. Нурлигареев

В статье изучен вопрос о том, какие равноугольные многоугольники можно расположить на различных правильных паркетах. Получено полное решение поставленной задачи. Статья доступна учащимся старших профильных физико-математических классов средней школы.

Введение

Целью данной статьи является получение ответа на вопрос, какие равноугольные многоугольники можно расположить на различных правильных паркетах. Хорошо известно (см. [2], [3] и [4]), что разных типов правильных паркетов ровно 11, все они отображены в Приложении 1. Для одного из них — квадратного паркета — ответ на поставленный вопрос был получен Боллом в 1973 году (см. [1], [6]). Кроме того, в 2001 году заслуживающих внимания результатов удалось достичь десятиклассникам И. Седошкину и Е. Мычке (СУНЦ МГУ). Именно, ими было доказано, что на каждом из правильных паркетов можно расположить лишь те из правильных многоугольников, которые “видны невооружённым глазом”.

В настоящей работе приведён полный ответ на поставленный вопрос. Статья состоит из шести разделов и трёх приложений с иллюстрациями. В первом разделе даются необходимые определения и понятия, в обзорном порядке приводится классификация типов правильных паркетов, а также доказывается несколько несложных вспомогательных фактов. Второй раздел является базой для получения основного результата; он посвящён изучению вопроса о том, при каких натуральных n тангенс угла $\frac{2\pi}{n}$ может быть рациональным или иметь вид $q\sqrt{3}$, $(p+q\sqrt{2})$ или $(p+q\sqrt{3})$, где p, $q \in \mathbb{Q}$. Ответ на этот вопрос приведён в следующей таблице:

Вид	p	$q\sqrt{3}$	$p+q\sqrt{2}$	$p+q\sqrt{3}$
n	1, 2, 4, 8	1, 2, 3, 4, 6, 12	1,2,4,8,16	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

Третий раздел — ключевое место статьи. В нём для каждого правильного паркета мы находим те значения $n \in \mathbb{N}$, для которых некоторый равноугольный n-угольник можно расположить па соответствующем паркете. Результаты отражены в нижеследующей таблице:

Тип	(4)4	(6)3	(3)6	4,8,8	3,12,12	(2)3,4,3,4	(4)3,6
n	4, 8	3, 4, 6, 12	3, 4, 6, 12	4, 8, 16	3, 4, 6, 8, 12, 24	3, 4, 6, 8, 12, 24	3, 4, 6, 12

Тип	3,6,3,6	(3)3,(2)4	3,4,6,4	4,6,12
n	3, 4, 6, 12	3, 4, 6, 8	3, 4, 6, 8, 12, 24	3, 4, 6, 8, 12, 24

Исключение составляет удлинённый треугольный паркет, поскольку для него методы, развитые во втором и третьем разделах, позволяют лишь ограничить спектр принимаемых натуральным числом n значений, не каждое из которых реализуются на практике. Доказательству невозможности расположения на этом паркете равноугольных 12-угольника и 24-угольника посвящены заключительные три раздела статьи.

Автор весьма признателен В. В. Вавилову, во многом благодаря которому появление этой работы стало возможным, а также Е. Поршневу, высказавшему ряд ценных замечаний, заметно упростивших изложение.

1. Определения и обозначения

Паркетом называется такое покрытие плоскости правильными многоугольниками (которые мы будем называть *базисными плитками),* при котором любые два многоугольника имеют либо общую сторону, либо общую вершину, либо не пересекаются вовсе. Говорят, что паркет — *правильный,* если его можно наложить самого на себя так, чтобы любая заданная вершина совместится с другой произвольной наперёд заданной вершиной.

Для каждого паркета мы будем обозначать множество всех его вершин буквой V, а множество всех рёбер — буквой E. Количество базисных плиток паркета, сходящихся в данной вершине, будем называть *степенью вершины.* Ясно, что в случае правильных паркетов степени всех вершин одинаковы, а значит, можно говорить и о *степени паркета* в целом.

Под *типом вершины* мы будем подразумевать порядок, в котором встречаются прилегающие к этой вершине базисные плитки паркета при обходе данной вершины (против часовой стрелки). *Типом правильного паркета* мы будем называть тип вершины этого паркета. Так, например, (2)3,4,3,4 обозначает тип паркета, в котором в каждой вершине сходятся два квадрата и три правильных треугольника, причём при обходе вершины они встречаются в следующем порядке: сначала идут два треугольника, затем квадрат, потом треугольник и, наконец, снова квадрат.

Будем говорить, что *многоугольник F расположен на паркете,* если множество его вершин является подмножеством множества вершин паркета. При этом фактически многоугольники (точно также, как и паркеты) рассматриваются с точностью до преобразования подобия. Для удобства иногда мы будем считать, что длина стороны базисных плиток паркета фиксирована. Там, где будет необходимо различать разные паркеты, множество всех вершин (рёбер) правильного паркета типа T будет обозначаться $V(T)$ (соответственно $E(T)$).

Хорошо известно, что различных типов правильных паркетов ровно 11. Среди них три являются покрытиями одинаковыми правильными многоугольниками: квадратный паркет — (4)4, треугольный паркет — 6(3) и гексагональный (шестиугольный) паркет — (3)6. Ещё шесть представляют собой покрытия двумя типами базисных плиток: усечённый квадратный (4,8,8) и усечённый гексагональный (3,12,12) паркеты, курносый квадратный ((2)3,4,3,4) и курносый гексагональный ((4)3,6) паркеты, а также тригексагональный (3,6,3,6) и удлинённый треугольный ((3)3,(2)4) паркеты. И наконец, последние два паркета — ромботригексагональный (3,4,6,4) и усечённый тригексагональный (4,6,12) — являются покрытиями тремя различными типами правильных многоугольников.

Установим теперь, каким образом различные паркеты могут быть связаны между собой. Для этого введём на типах правильных паркетов отношение "$\twoheadrightarrow$". Именно, скажем, что $T_i \twoheadrightarrow T_2$ в том случае, если $V(T_1) \subset V(T_2)$. Очевидно, отношение $\twoheadrightarrow$ рефлексивно и транзитивно, но, вообще говоря, не симметрично, а потому отношением эквивалентности не является. Также очевидной является следующая фундаментальная лемма, которая ляжет в основу наших дальнейших рассуждений.

Лемма 1. *Если $T_i \twoheadrightarrow T_2$, то любой многоугольник, который может быть расположен на паркете типа T_1, может быть расположен и на паркете типа T_2.*

Доказательство. Напрямую следует из определения. □

Установим, какие типы паркетов находятся в отношении $\twoheadrightarrow$ друг с другом.

Теорема 2. *Следующие типы правильных паркетов являются эквивалентными по отношению $\twoheadrightarrow$: (6)3; (3)6; 3,6,3,6 и (4)3,6. Кроме того, имеют место следующие отношения:*

- (4)4 $\twoheadrightarrow$ (2)3,4,3,4;
- (4)4 $\twoheadrightarrow$ 4,8,8;
- (3)3 $\twoheadrightarrow$ 3,12,12;

- (3)3 $\twoheadrightarrow$ 4,6,12 $\twoheadrightarrow$ 3,4,6,4.

Доказательство. Не представляет труда. Соответствующие иллюстрации можно найти в приложении 2. $\square$

2. Леммы о тангенсах

В этом разделе мы исследуем вопрос о том, какие значения может принимать $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{n}$ при различных натуральных n.

Лемма 3. *При всех натуральных n, за исключением, случаев n=1, 2, 4, 8, число $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{n}$ является иррациональным.*

Доказательство. Пусть $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ Тогда из формул Муавра и Ньютона мы получаем следующее:

$$\cos n\alpha + i\sin n\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n =$$
$$(\cos^n\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha - ...)+$$
$$+i(C_n^1\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - C_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + C_n^5\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha - ...).$$

Приравнивая действительные и мнимые части, имеем:

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha - ...,$$
$$\sin n\alpha = C_n^1\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - C_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + C_n^5\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha - ....$$

Предположим, n — нечётное простое число. Учитывая, что $\operatorname{tg} n\alpha = 0$, из выведенных формул легко находим, что

$$0 = \operatorname{tg} n\alpha = \frac{\sin n\alpha}{\cos n\alpha} = \frac{C_n^1\operatorname{tg}\alpha - C_n^3\operatorname{tg}^3\alpha + C_n^5\operatorname{tg}^5\alpha - ... + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\operatorname{tg}^n\alpha}{1 - C_n^2\operatorname{tg}^2\alpha + C_n^4\operatorname{tg}^4\alpha - ... + (-1)^{\frac{n-1}{n}}\operatorname{tg}^{n-1}\alpha}$$

Таким образом, ввиду того, что $\operatorname{tg}\alpha \neq 0$, число $x = \operatorname{tg}\alpha$ является корнем следующего уравнения с целыми коэффициентами:

$$n - C_n^3x^2 + C_n^5x^4 - ... + (-1)^{\frac{n-1}{n}}x^{n-1} = 0 \tag{1}$$

Ясно, что во множестве рациональных чисел это уравнение может иметь только целые решения. Кроме того, x^2 является делителем простого числа n. Отсюда вытекает, что $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{n} = x = \pm 1$. Однако в случае нечётного простого n последнее равенство невозможно.

Пусть теперь $n = mp$, где p — нечётное простое число. В этом случае число $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{n}$ также является иррациональным. Действительно, если бы оно было рациональным, то, как нетрудно видеть, рациональным также оказалось бы и $\operatorname{tg}\frac{2m\pi}{n} = \operatorname{tg}\frac{2\pi}{p}$. Последнее же противоречит доказанному выше.

Осталось рассмотреть последний вариант, когда n есть степень двойки. Прямым вычислением легко убедиться в том, что $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{16} = \sqrt{2} - 1$. Это число иррационально, откуда вытекает, что $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{2^m}$ является иррациональным при $m > 3$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 4. *При всех натуральных n, за исключением случаев n= 1, 2, 3, 4, 6, 12, число $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{n}$ может быть представлено в виде $q\sqrt{3}$, где $q \in \mathbb{Q}$.*

Доказательство. Применяя те же рассуждения, что и в лемме 3, мы можем заключить (предполагая, что n — нечётное простое число), что число $x = \operatorname{tg}\frac{2\pi}{n}$ является корнем уравнения (1). Другими словами, если мы сделаем замену переменных $x = y\sqrt{3}$, то число $y = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{n}$ будет корнем уравнения

$$n - 3C_n^3y^2 + 3C_n^5y^4 - ... + (-3)^{\frac{n-1}{2}}y^{n-1} = 0. \tag{2}$$

Во множестве рациональных чисел это уравнение может иметь решение только при $n = 3$.

Аналогично ранее проведённым рассуждениям получаем, что в случае составных n, имеющих нечётный простой делитель, отличный от тройки, $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{n}$ не может быть представлен в виде $q\sqrt{3}$. Также $n \neq 3^m$ для $m > 1$, поскольку уже для $n = 9$ уравнение (2) принимает вид

$$9 - 3C_9^3y^2 + 9C_9^5y^4 - 27C_9^7y^6 + 81y^8 = 0 \qquad \Leftrightarrow$$
$$1 - 28y^2 + 9\cdot 14y^4 - 9\cdot 28y^6 + 9y^8 = 0.$$

Ясно, что приведённое уравнение не имеет решений в рациональных числах.

Учитывая результат леммы 3, осталось заметить, что $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{24} = 2 - \sqrt{3}$ и $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{8} = 1$. □

Лемма 5. *При всех натуральных n, за исключением, случаев n =1, 2, 4, 8, 16, число* $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{n}$ *не может быть представлено в виде $p + q\sqrt{2}$, где p, $q \in \mathbb{Q}$.*

Доказательство. Точно так же, как и в лемме 3, из предположения, что n — нечётное число, мы приходим к выводу, что число $x = \operatorname{tg}\frac{2\pi}{n}$ является корнем уравнения (1). Допустим, полученное уравнение имеет корень $x = p + q\sqrt{2}$, где p, $q \in \mathbb{Q}$. Это означает, что

$$n - C_n^3(p^2 + 2pq\sqrt{2} + 2q^2) + C_n^5(p^4 + 4p^3q\sqrt{2} + 6p^2q^2\cdot 2 + 4pq^3\cdot 2\sqrt{2} + q^4\cdot 4) -$$
$$- ... + (-1)^{\frac{n-1}{2}}(p^{n-1} + C_{n-1}^1p^{n-2}q\sqrt{2} + C_{n-1}^2p^{n-3}q^2\cdot 2 + ... + q^{n-1}2^{\frac{n-1}{2}}) = 0.$$

Отсюда мы переходим к следующей системе уравнений относительно переменных p и q:

$$\begin{cases} n - C_n^3(p^2+2q^2) + C_n^5(p^4 + 12p^2q^2 + 4q^4) - ... \\ \qquad\qquad + (-1)^{\frac{n-1}{2}}(p^{n-1} + 2C_{n-1}^2p^{n-3}q^2 + ... + 2^{\frac{n-1}{2}}q^{n-1}) = 0 \\ -2C_n^3pq + C_n^5(4p^3q + 8pq^3\cdot 2) - ... \\ \qquad\qquad + (-1)^{\frac{n-1}{2}}(C_{n-1}^1p^{n-2}q + 2C_{n-1}^3p^{n-4}q^3 + ... + C_{n-1}^{n-2}pq^{n-2}2^{\frac{n-3}{2}}) = 0. \end{cases}$$

Из доказательств лемм 3 и 4 ясно, что $q \neq 0$. Поэтому, домножая второе уравнение на $\frac{p}{q}$, мы перейдём к следующему следствию:

$$\begin{cases} n - C_n^3(p^2+2q^2) + C_n^5(p^4 + 12p^2q^2 + 4q^4) - ... \\ \qquad\qquad + (-1)^{\frac{n-1}{2}}(p^{n-1} + 2C_{n-1}^2p^{n-3}q^2 + ... + 2^{\frac{n-1}{2}}q^{n-1}) = 0 \\ -2C_n^3p^2 + C_n^5(4p^4 + 8p^2q^2\cdot 2) - ... \\ \qquad\qquad + (-1)^{\frac{n-1}{2}}(C_{n-1}^1p^{n-1} + 2C_{n-1}^3p^{n-3}q^2 + ... + C_{n-1}^{n-2}p^2q^{n-3}2^{\frac{n-3}{2}}) = 0. \end{cases}$$

Итак, предположим, что полученная система уравнений имеет решения. Среди всех решений $(p = \frac{k}{l}$, $q = \frac{r}{s})$, где $k, r \in \mathbb{Z}$, l, $s \in \mathbb{N}$, выберем такое, для которого величина $|k| + |l| + |r| + |s|$ является наименьшей. Тогда, подставляя это решение в уравнения и домножая каждое из них на $l^{n-1}s^{n-1}$, получим следующие два тождества:

$$\begin{cases} nl^{n-1}s^{n-1}C_n^3(k^2l^{n-3}s^{n-1} + 2l^{n-1}r^2s^{n-3}) + ... \\ \qquad\qquad + (-1)^{\frac{n-1}{2}}(k^{n-1}s^{n-1} + 2C_{n-1}^2k^{n-3}l^2r^2s^{n-3} + ... + 2^{\frac{n-1}{2}}l^{n-1}r^{n-1}) = 0 \\ -2C_n^3k^2l^{n-3}s^{n-1} + ... \\ \qquad\qquad + (-1)^{\frac{n-1}{2}}(C_{n-1}^1k^{n-1}s^{n-1} + 2C_{n-1}^3k^{n-3}l^2r^2s^{n-3} + ... + C_{n-1}^{n-2}k^2l^{n-3}r^{n-3}s^22^{\frac{n-3}{2}}) = 0. \end{cases}$$

Поскольку $C_n^t \vdots n$ и $0 < t < n$, то мы получаем следующее:

$$\begin{cases} (k^{n-1}s^{n-1} + 2C_{n-1}^2k^{n-3}l^2r^2s^{n-3} + ... + 2^{\frac{n-1}{2}}l^{n-1}r^{n-1}) \vdots n \\ (C_{n-1}^1k^{n-1}s^{n-1} + 2C_{n-1}^3k^{n-3}l^2r^2s^{n-3} + ... + C_{n-1}^{n-2}k^2l^{n-3}r^{n-3}s^22^{\frac{n-3}{2}}) \vdots n. \end{cases}$$

Складывая между собой левые части и пользуясь соотношением $C_{n-1}^{t} + C_{n-1}^{t+1} = C_n^{t+1}$, имеем:

$$(C_n^1 k^{n-1}s^{n-1} + 2C_n^3 k^{n-3}l^2r^2s^{n-3} + \ldots + C_n^{n-2}k^2l^{n-3}r^{n-3}s^2 2^{\frac{n-3}{2}} + 2^{\frac{n-1}{2}}l^{n-1}r^{n-1}) \vdots n.$$

Отсюда уже нетрудно заметить сначала, что $lr \vdots n$, а потом также и что $ks \vdots n$. Учитывая, что дроби $p = \frac{k}{l}$ и $q = \frac{r}{s}$ не могут быть сократимыми, мы приходим к выводу, что либо $k \vdots n$ и $r \vdots n$, либо $l \vdots n$ и $s \vdots n$. В каждом из этих случаев мы получаем новое решение исходной системы уравнений, для которого величина $|k|+|l|+|r|+|s|$ будет меньше, чем у выбранного изначально решения (так, в первом случае надо взять пару $(\frac{k/n}{l}, \frac{r/n}{s})$, а во втором — $(\frac{k}{l/n}, \frac{r}{s/n})$). Полученное противоречие доказывает, что решений нет вовсе.

Дальнейшие рассуждения дословно повторяют рассуждения, проведённые в предыдущих леммах. Поэтому для завершения доказательства достаточно заметить, что $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{32} = \sqrt[4]{2} - \sqrt{\sqrt{2}-1}$. □

Лемма 6. *При всех натуральных n, за исключением случаев $n = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$, число $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{n}$ не может быть представлено в виде $p + q\sqrt{3}$, где p, $q \in \mathbb{Q}$.*

Доказательство. Разобьём доказательство на четыре шага.

Шаг 1. Докажем лемму для простого $n > 3$. Здесь рассуждения дословно повторяют те, что приведены в лемме 5. Именно, прежде всего число $x = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{n}$ должно являться корнем уравнения (1). Предполагая, что полученное уравнение имеет корень $x = p + q\sqrt{3}$, где $p = \frac{k}{l}$, $q = \frac{r}{s}$, k, $r \in \mathbb{Z}$, l, $s \in \mathbb{N}$, мы приходим к выводу, что выполняются тождества

$$\begin{cases} n - C_n^3(p^2+3q^2) + C_n^5(p^4 + 18p^2q^2 + 9q^4) - \ldots \\ \qquad\qquad + (-1)^{\frac{n-1}{2}}(p^{n-1} + 3C_{n-1}^2 p^{n-3}q^2 + \ldots + 3^{\frac{n-1}{2}}q^{n-1}) = 0 \\ -2C_n^3p^2 + C_n^5(4p^4 + 12p^2q^2\cdot 2) - \ldots \\ \qquad\qquad + (-1)^{\frac{n-1}{2}}(C_{n-1}^1p^{n-1} + 3C_{n-1}^3p^{n-3}q^2 + \ldots + C_{n-1}^{n-2}p^2q^{n-3}3^{\frac{n-3}{2}}) = 0. \end{cases}$$

Переписав их в таком виде:

$$\begin{cases} nl^{n-1}s^{n-1} - C_n^3(k^2l^{n-3}s^{n-1} + 3l^{n-1}r^2s^{n-3}) + \ldots \\ \qquad\qquad + (-1)^{\frac{n-1}{2}}(k^{n-1}s^{n-1} + 3C_{n-1}^2k^{n-3}l^2r^2s^{n-3} + \ldots + 3^{\frac{n-1}{2}}l^{n-1}r^{n-1}) = 0 \\ -2C_n^3k^2l^{n-3}s^{n-1} + \ldots \\ \qquad\qquad + (-1)^{\frac{n-1}{2}}(C_{n-1}^1k^{n-1}s^{n-1} + 3C_{n-1}^3k^{n-3}l^2r^2s^{n-3} + \ldots + C_{n-1}^{n-2}k^2l^{n-3}r^{n-3}s^2 3^{\frac{n-3}{2}}) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

легко убедиться, что

$$\begin{cases} (k^{n-1}s^{n-1} + 3C_{n-1}^2k^{n-3}l^2r^2s^{n-3} + \ldots + 3^{\frac{n-1}{2}}l^{n-1}r^{n-1}) \vdots n \\ (C_{n-1}^1k^{n-1}s^{n-1} + 3C_{n-1}^3k^{n-3}l^2r^2s^{n-3} + \ldots + C_{n-1}^{n-2}k^2l^{n-3}r^{n-3}s^2 3^{\frac{n-3}{2}}) \vdots n \end{cases}$$

Складывая между собой левые части и пользуясь соотношением $C_{n-1}^{t} + C_{n-1}^{t+1} = C_n^{t+1}$, имеем:

$$(C_n^1 k^{n-1}s^{n-1} + 3C_n^3 k^{n-3}l^2r^2s^{n-3} + \ldots + C_n^{n-2}k^2l^{n-3}r^{n-3}s^2 3^{\frac{n-3}{2}} + 3^{\frac{n-1}{2}}l^{n-1}r^{n-1}) \vdots n.$$

Отсюда уже нетрудно заметить сначала, что $lr \vdots n$, а потом также и что $ks \vdots n$. Однако предположив, что величина $|k|+|l|+|r|+|s|$ для исходного решения была наименьшей, путём несложных рассуждений можно получить противоречие, построив новое решение, для которого данная величина будет меньше. Следовательно, n не может быть простым числом, большим трёх.

Шаг 2. Докажем лемму для $n = 9$. Рассмотрим второе из уравнений (3). После соответствующих преобразований оно принимает следующий вид:

$$-12(ls)^6+63(ls)^4((ks)^2+3(lr)^2)-27(ls)^2((ks)^4+10(kslr)^2+9(lr)^4)+$$
$$+((ks)^6+21(ks)^4(lr)^2+63(ks)^2(lr)^4+27(lr)^6)=0.$$

Отсюда видно, что $ks \vdots 3$. Пользуясь этим фактом, из того же уравнения получим, что $lr \vdots 3$. Снова, как и при разборе шага 1, предполагая наличие некоторого ненулевого решения, нетрудно предъявить решение, у которого величина $|k|+|l|+|r|+|s|$ меньше. Таким образом, воспользовавшись методом спуска, мы придём к тому, что требуемых решений у рассматриваемого уравнения нет.

Шаг 3. Для $n=16$ имеем: $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{n}=\operatorname{tg}\frac{2\pi}{16}=\sqrt{2}-1$. Полученное число, очевидно, не может быть представлено в искомом виде.

Шаг 4. Осталось доказать лемму для $n=mp$, где p — либо нечётное простое число, большее трёх, либо $p=9$, либо $p=16$. В каждом из этих случаев число $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{n}$ также является иррациональным. Действительно, если бы оно было рациональным, то рациональным также оказалось бы и число $\operatorname{tg}\frac{2m\pi}{n}=\operatorname{tg}\frac{2\pi}{p}$. Последнее же противоречит доказанному выше.

Лемма полностью доказана. □

3. Равноугольные многоугольники на паркетах

Используя доказанные в предыдущих частях статьи утверждения, покажем, какие равноугольные многоугольники могут быть расположены на различных паркетах. Начнём с известного результата (см. [1], [6]).

Теорема 7. *На паркете (4)4 можно расположить равноугольный n-угольник лишь при* $n=4,\ 8$.

Доказательство. Рассмотрим стандартную систему координат, для которой множество узлов паркета является решёткой $\mathbb{Z}^2$. Прежде всего заметим, что если два луча, исходящие из начала координат, проходят через точки $(a,\,b)$ и $(c,\,d)$ плоскости, то тангенс угла θ между этими лучами удовлетворяет следующему условию[1]:

$$|\operatorname{tg}\theta|=|\operatorname{tg}(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\right|=\left|\frac{d/c-b/c}{1+(bd)/(ac)}\right|=\left|\frac{ad-bc}{ac+bd}\right|. \tag{4}$$

Здесь α и β — углы между лучами и осью абсцисс. Таким образом, если координаты исходных точек целые, то тангенс θ либо является рациональным числом, либо не определён.

Теперь предположим, что мы разместили на паркете типа (4)4 равноугольный n-угольник. Тогда векторы, образующие его стороны, имеют целочисленные координаты. С другой стороны, угол между любыми двумя соседними векторами сторон равен $\frac{2\pi}{n}$. Следовательно, величина $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{n}$ не должна быть иррациональной. Согласно лемме 3 это возможно только при $n=4$ и $n=8$.

Примеры равноугольных четырёхугольника и восьмиугольника можно найти в Приложении 3. □

Теорема 8. *На паркетах типа (6)3; (3)6; 3,6,3,6 и (4)3,6 можно расположить равноугольный n-угольник только при* $n=$ 3, 4, 6, 12.

Доказательство. В силу леммы 1 и теоремы 2 достаточно рассмотреть паркет типа (6)3. Введём декартову систему координат таким образом, чтобы координаты любого узла паркета (6)3 имели вид $(a,\,b\sqrt{3})$, $a,\,b\in\mathbb{Z}$ (см. Приложение 2). Тогда в соответствии с формулой (4), а также согласно соображениям, приведённым в теореме 7, $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{n}$ должен иметь вид $q\sqrt{3}$, $q\in\mathbb{Q}$. По лемме 4 это возможно лишь при $n=3,\ 4,\ 6,\ 12$.

---

[1]Случай, когда один из задействованных тангенсов не существует, нам придётся рассмотреть отдельно, однако для него также справедливо равенство $|\operatorname{tg}\varphi|=\left|\frac{ad-bc}{ac+bd}\right|$.

Примеры равноугольных n-угольников, расположенных на паркетах (6)3; (3)6; 3,6,3,6 и (4)3,6 можно найти в Приложении 3. □

Теорема 9. *На паркетах типа 4,8,8 можно расположить равноугольный n-угольник лишь при n=* 4, 8, 16.

Доказательство. Для этого паркета можно ввести декартову систему координат таким образом, чтобы координаты любого узла паркета имели вид $(a+b\sqrt{2},\ c+d\sqrt{2})$, где $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{Z}$ (см. Приложение 2). Тогда в соответствии с формулой (4), а также согласно соображениям, приведённым в теореме 7, $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{n}$ должен иметь вид $p+q\sqrt{2}$, $p,\ q\in\mathbb{Q}$. По лемме 5 это возможно лишь при $n=4,\ 8,\ 16$.

Примеры равноугольных n-угольников, расположенных на паркетах 4,8,8 можно найти в Приложении 3. □

Теорема 10. *На паркетах типа (2)3,4,3,4; 3,12,12; 3,4,6,4 и 4,6,12 можно расположить равноугольный n-угольник лишь при $n=3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24$.*

Доказательство. Для каждого из рассматриваемых паркетов можно ввести декартову систему координат таким образом, чтобы координаты любого узла паркета имели вид $(a+b\sqrt{3},$ $c+d\sqrt{3})$, где $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{Z}$ (см. Приложение 2). Тогда в соответствии с формулой (4). а также согласно соображениям, приведённым в теореме 7, величина $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{n}$ должна иметь вид $p+q\sqrt{3}$, p, $q\in\mathbb{Q}$. По лемме 6 это возможно лишь при $n=3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24$.

Примеры равноугольных n-угольников, расположенных на паркетах (2)3,4,3,4; 3,12,12; 3,4,6,4 и 4,6,12, можно найти в Приложении 3.

Теорема 11. *На паркете типа (3)3,2(4) можно расположить равноугольный n-угольник лишь при $n=3,\ 4,\ 6,\ 8$.*

Доказательство. Для паркета типа (3)3,(2)4 можно ввести декартову систему координат таким образом, чтобы координаты любого узла паркета имели вид $(a,\ c+d\sqrt{3})$, где $a,\ c,\ d\in\mathbb{Z}$ (см. Приложение 3). Тогда в соответствии с формулой (4), а также согласно соображениям, приведённым в теореме 7, величина $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{n}$ должна иметь вид $p+q\sqrt{3}$, $p,\ q\in QQ$. По лемме 6 это возможно лишь при $n=3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24$.

Примеры равноугольных n-угольников, соответствующих значениям n= 3, 4, 6, 8, можно найти в приложении 2. Тот факт, что для $n=12$ и $n=24$ расположить равноугольный n-угольник на паркете (3)3,(2)4 нельзя, является предметом отдельного исследования. Его доказательству посвящены три нижеследующие раздела статьи. □

4. Дальнейшие определения и обозначения

Объектом нашего текущего исследования станет паркет (3)3,(2)4. Мы будем считать, что сторона каждой базисной плитки нашего паркета равна 2. Введем систему координат таким образом, как указано на рис. 1; при этом множество узлов паркета естественным образом разбивается на следующие два типа.

Первый тип: $\{(m,n(2+\sqrt{3}))|m,n\in\mathbb{Z},(m+n)\vdots 2\}$.

Второй тип: $\{(m,n(2+\sqrt{3})+2)|m,n\in\mathbb{Z},(m+n)\vdots 2\}$.

Вполне очевидно, что множество узлов первого типа образует решётку на плоскости (на рис. 1 они отмечены черными точками). Множество узлов второго типа (они отмечены на рис. 1 пустыми кружочками) также образует решётку, причём последняя получается из первой сдвигом на вектор (0, 2).

Докажем несколько важных лемм, касающихся расположения узлов паркета (3)3,(2)4 на прямых.

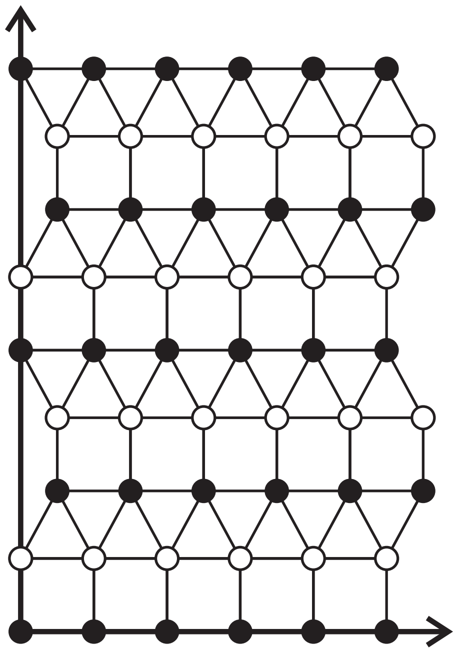


Рис. 1 Координаты

Лемма 12. *Прямая, проходящая через два узла первого типа, проходит через бесконечное количество узлов первого типа, удалённых друг от друга на одно и то же расстояние.*

Доказательство. Немедленно следует из того, что множество узлов первого типа образует решётку. □

Лемма 13. *Прямая, проходящая через два узла второго типа, проходит через бесконечное количество узлов второго типа, удалённых друг от друга на одно и то же расстояние.*

Доказательство. Немедленно следует из того, что множество узлов второго типа образует решётку. □

Лемма 14. *Если прямая, не параллельная оси ординат, проходит через узел первого типа и узел второго типа, то других узлов паркета (3)3,(2)4 на ней нет.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что узел первого типа, через который проходит данная прямая l, совпадает с началом координат O, а узел второго типа A имеет координаты $(m, n(2+\sqrt{3})+2)$. Допустим сначала, что на прямой l также лежит узел первого типа M_1, заданный координатами $(m_1, n_1(2+\sqrt{3}))$ и отличный от O. Поскольку тангенсы углов наклона лучей OA и OM_1 определены и совпадают, мы можем выписать следующее уравнение:

$$\frac{n(2+\sqrt{3})+2}{m} = \frac{n_1(2+\sqrt{3})}{m_1} \quad \Rightarrow \quad (m_1 n - m n_1)(2+\sqrt{3}) = 2m_1 = 0.$$

Учитывая, что m, n, m_1, $n_1 \in \mathbb{Z}$, отсюда вытекают такие два равенства: $(m_1 n - m n_1) = m_1 = 0$. Однако равенство $m_1 = 0$ противоречит либо тому, что $M_1 \neq O$, либо тому, что прямая l не параллельна оси ординат. Таким образом, l содержит ровно один узел первого типа.

Аналогично, если прямая l проходит через узел второго типа M_2, заданный координатами $(m_2, n_2(2+\sqrt{3})+2)$, то выполняются соотношения.

$$\frac{n(2+\sqrt{3})+2}{m} = \frac{n_2(2+\sqrt{3})+2}{m_2} \quad \Rightarrow \quad (m_2 n - m n_2)(2+\sqrt{3}) + 2(m_2 - m) = 0.$$

Из полученного мы извлекаем $(m_2n - mn_2) = (m_2 - m) = 0$, а учитывая $m \neq 0$, приходим к выводу, что $m_2 = m$ и $n_2 = n$. То есть прямая содержит ровно один узел второго типа. Лемма полностью доказана. □

Замечание. Очевидно, что если прямая, параллельная оси ординат, проходит хотя бы через один узел паркета (3)3,(2)4, то на ней расположено бесконечно много узлов как первого, так и второго типа.

Теперь займёмся рассмотрением углов, лежащих на паркете (3)3,(2)4. Будем считать, что вершина угла совпадает с началом координат, а его стороны проходят через узлы паркета A и B. В зависимости от типов узлов A и B мы можем отнести угол AOB к одному из следующих типов:

Первый тип: обе точки A и B являются узлами первого типа.

Второй тип: обе точки A и B являются узлами второго типа.

Третий тип: одна из точек A и B является узлом первого типа, а другая — второго.

Совершенно ясно, что тип угла не зависит от выбора начала координат. Определяющим фактором здесь является количество горизонтальных "полос", разделяющих прямые, на которых лежат A, O и B (каждая "полоса" — это либо объединение всех прилегающих друг к другу базисных квадратов, либо объединение всех прилегающих друг к другу базисных треугольников). Так, угол первого типа отличается тем, что количество "полос", разделяющих точки A и O, а также O и B, чётно. Для угла второго типа оба эти числа будут нечётными. И наконец, угол третьего типа характеризуется тем, что для него одно из этих чисел чётное, а другое — нечётное.

Из последнего замечания следует, что тип некоторых углов определён неоднозначно. В самом деле, если одна из сторон угла параллельна оси ординат, то на ней лежат узлы как первого типа, так и второго. Таким образом, сам угол можно будет отнести к первому и к третьему типу (если на второй его стороне лежит узел первого типа) или ко второму и к третьему типу (в противном случае) одновременно.

Сопоставим каждому n-угольнику, расположенному на паркете (3)3,(2)4, последовательность длины n из единиц и двоек. Для этого зафиксируем одну из вершин многоугольника и начнем обходить его против часовой стрелки. Очередной член последовательности — это тип узла, являющегося очередной вершиной многоугольника. Естественно, каждому многоугольнику при таком сопоставлении соответствует несколько последовательностей, каждая из которых определяется выбором системы координат и начальной вершины. Но несмотря на это, последовательность является важной характеристикой многоугольника.

Лемма 15. *Если на паркете (3)3,(2)4 расположен равноугольный $2n$-угольник, то соответствующая ему последовательность не может иметь вид 1212... 12 (иными словами, хотя бы один из его n углов будет иметь тип, отличный от второго).*

Доказательство. Предположим противное, то есть что все углы многоугольника $A_1A_2...A_{2n}$ имеют второй тип. Без ограничения общности можно считать, что вершины A_{2i+1} являются узлами первого типа, а вершины A_{2j} — узлами второго типа. Заметим тогда, что векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}}$ (как, впрочем, и любые два вектора, соответствующих парам противоположных сторон) параллельны, но не сонаправлены. Следовательно, рассматривая равные им векторы $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$, где O — начало координат, мы получим прямую CD, на которой расположен один узел первого типа и два узла второго типа. Это противоречит лемме 14. Значит, равноугольный $2n$-угольник должен содержать хотя бы один угол, тип которого отличен от второго. □

Замечание. На самом деле мы доказали более сильное утверждение. Именно, многоугольник, расположенный на паркете (3)3,(2)4, не может иметь двух параллельных сторон, хотя бы две вершины которых являются узлами разных типов, за исключением двух случаев. Во-первых, эти стороны могут быть параллельны оси Oy. А во-вторых, они могут быть равны между собой, причём началами образованных ими равных векторов должны являться узлы одного типа, а концами — узлы другого типа.

5. Равноугольный 12-угольник на паркете (3)3,(2)4

Этот раздел посвящается следующему утверждению: на паркете (3)3,(2)4 невозможно расположить равноугольный n-угольник при $n = 12$.

Допустим, что на паркете (3)3,(2)4 можно расположить равноугольный 12-угольник. Тогда на нём можно расположить угол φ величиной $\frac{5\pi}{6}$. Будем считать, что вершина этого угла находится в начале координат O, а стороны проходят через точки $M_1(a_1, b_1)$ и $M_2(a_2, b_2)$. Распишем теорему косинусов для треугольника OM_1M_2:

$$(a_1 - b_1)^2 + (b_1 - b_2)^2 = (a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) - 2\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}.$$

Преобразовав, получим такое равенство: $\sqrt{3(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} = 2(a_1b_1 + a_2b_2)$. Отсюда следует, что $3a_1^2b_2^2 + 3a_2^2b_1^2 = a_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + 8a_1a_2b_1b_2$ или

$$3(a_1b_2 - a_2b_1)^2 = (a_1a_2 + b_1b_2)^2. \tag{5}$$

Предположим сначала, что узлы M_1 и M_2 оба имеют первый тип (то есть угол M_1OM_2 также имеет первый тип). Тогда учитывая, что координаты точки M_i есть $(m_i,n_i(2+\sqrt{3}))$, уравнение (5) можно переписать следующим образом:

$$(m_1n_2 - m_2n_1)(2+\sqrt{3})\sqrt{3} = m_1m_2 + n_1n_2(2+\sqrt{3})^2.$$

Здесь необходимо отметить, что точки M_1 и M_2 равноправны. Если же поменять местами точки M_1 и M_2, то правая часть останется неизменной, в то время как левая поменяет знак. Поэтому нам достаточно рассмотреть этот случай снятия квадратов. Далее, поскольку все задействованные в полученном уравнении переменные являются целыми, то оно эквивалентно такой системе:

$$\begin{cases} 3(m_1n_2 - m_2n_1) = m_1m_2 + 7n_1n_2 \\ 2(m_1n_2 - m_2n_1) = 4n_1n_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3\left(\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2}\right) = \frac{m_1}{n_1}\frac{m_2}{n_2} + 7 \\ \left(\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2}\right) = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{m_1}{n_1}\frac{m_2}{n_2} = -1 \\ \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left(\frac{m_2}{n_2}\right)^2 + 2\frac{m_2}{n_2} + 1 = 0 \\ \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} + 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{m_2}{n_2} = -1 \\ \frac{m_1}{n_1} = 1. \end{cases} \tag{6}$$

Конечно, нужно добавить, что $n_1 \neq 0$ ($n_2 \neq 0$), поскольку в противном случае из второго уравнения системы следует, что $m_1 = 0$ ($m_2 = 0$), а этот вариант нам не подходит, так как точки O, M_1 и M_2 должны быть различными. Найденному решению отвечают два зеркально симметричных друг другу угла, изображённые на рис. 2.

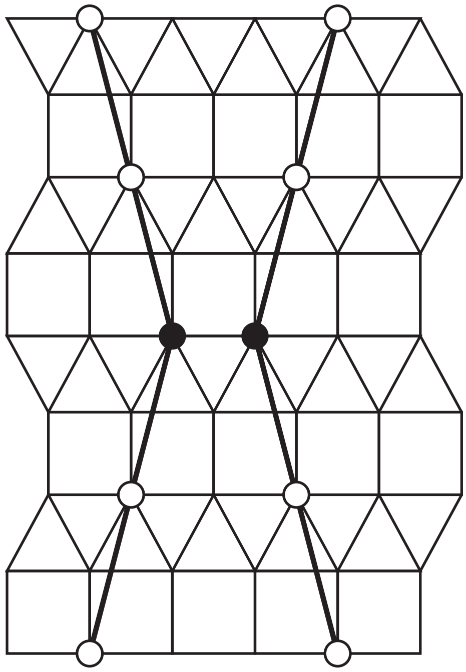


Рис. 2. Тип 1

Теперь допустим, что узлы M_1 и M_2 оба имеют второй тип (а значит, и угол M_1OM_2 имеет второй тип). Снова, меняя местами точки M_1 и M_2, мы сохраняем правую часть, а в левой меняем знак, а потому нам достаточно рассмотреть такой случай снятия квадратов (здесь координаты точки M_i имеют вид $(m_i, n_i(2+\sqrt{3})+2)$):

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\sqrt{3} = (a_1a_2 + b_1b_2) \quad \Leftrightarrow$$

$$(m_1m_2 + (n_1(2+\sqrt{3})+2)(n_2(2+\sqrt{3})+2)) = (m_1(n_2(2+\sqrt{3})+2) - m_2(n_1(2+\sqrt{3})+2))\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow$$

$$m_1m_2 + (4+2\sqrt{3})(n_1+n_2) + (7+4\sqrt{3})n_1n_2 + 4 = 2(m_1-m_2)\sqrt{3} + (3+2\sqrt{3})(m_1n_2 - m_2n_1).$$

Учитывая, что все задействованные переменные являются целыми, мы приходим к такой системе:

$$\begin{cases} m_1m_2 + 4(n_1+n_2) + 7n_1n_2 + 4 = 3(m_1n_2 - m_2n_1) \\ (n_1+n_2) + 2n_1n_2 = (m_1-m_2) + (m_1n_2 - m_2n_1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} m_1m_2 + (n_1+n_2) + n_1n_2 + 4 + 3(m_1-m_2) = 0 \\ (n_1+1)(m_2+n_2) = (n_2+1)(m_1-n_1). \end{cases}$$

Нетрудно показать, что переменные m_1 и n_1 выражаются через m_2 и n_2 следующим образом (в том случае, конечно, когда в знаменателе стоит не ноль):

$$m_1 = -1 + \frac{4m_2(m_2+2n_2+1)}{(m_2+n_2)^2 + 4(m_2+2n_2+1)}; \quad n_1 = -1 + \frac{4m_2(n_2+1)}{(m_2+n_2)^2 + 4(m_2+2n_2+1)}.$$

Можно, напротив, выразить m_2 и n_2 через m_1 и n_1:

$$m_2 = -1 + \frac{4m_1(m_1-2n_1-1)}{(m_1-n_1)^2 + 4(-m_1+2n_1+1)}; \quad n_2 = -1 + \frac{-4m_1(n_1+1)}{(m_1-n_1)^2 + 4(-m_1+2n_1+1)}.$$

Теперь решим уравнение (5), предполагая, что точка M_1 является узлом первого типа, а точка M_2 является узлом второго типа (то есть угол M_1OM_2 имеет третий тип). Считая, что координаты точек имеют вид $(a_1, b_1) = (m_1, n_1(2+\sqrt{3}))$ и $(a_2, b_2) = (m_2, n_2(2+\sqrt{3})+2)$, из рассматриваемого уравнения можно тогда вывести следующее:

$$\left[\begin{array}{l} (m_1m_2 + n_1(2+\sqrt{3})(n_2(2+\sqrt{3})+2)) = (m_1(n_2(2+\sqrt{3})+2) - m_2n_1(2+\sqrt{3}))\sqrt{3} \\ (m_1m_2 + n_1(2+\sqrt{3})(n_2(2+\sqrt{3})+2)) = (-m_1(n_2(2+\sqrt{3})+2) + m_2n_1(2+\sqrt{3}))\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} m_1m_2 + (4+2\sqrt{3})n_1 + (7+4\sqrt{3})n_1n_2 = 2m_1\sqrt{3} + (3+2\sqrt{3})(m_1n_2 - m_2n_1) \\ m_1m_2 + (4+2\sqrt{3})n_1 + (7+4\sqrt{3})n_1n_2 = -2m_1\sqrt{3} + (3+2\sqrt{3})(-m_1n_2 + m_2n_1) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{r} m_1m_2 + 4n_1 + 7n_1n_2 = 3(m_1n_2 - m_2n_1) \\ n_1 + 2n_1n_2 = m_1 + (m_1n_2 - m_2n_1) \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{r} m_1m_2 + 4n_1 + 7n_1n_2 = 3(-m_1n_2 + m_2n_1) \\ n_1 + 2n_1n_2 = -m_1 + (-m_1n_2 + m_2n_1) \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} m_1m_2 + n_1 + n_1n_2 + 3m_1 = 0 \\ \qquad\qquad n_1 + 2n_1n_2 = m_1 + (m_1n_2 - m_2n_1) \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} m_1m_2 + n_1 + n_1n_2 - 3m_1 = 0 \\ \qquad\qquad n_1 + 2n_1n_2 = -m_1 + (-m_1n_2 + m_2n_1). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Проделав необходимые преобразования (по сути — решив систему линейных уравнений), приходим к следующей совокупности (отдельно рассматриваем случаи $m_1 = n_1$ и $m_1 = -n_1$ соответственно, приходя к выводу, что решений в них нет):

$$\left[\begin{array}{ll} m_2 = -3 + \frac{4n_1^2}{(m_1-n_1)^2}, & n_2 = -\frac{(m_1+n_1)^2}{(m_1-n_1)^2} \\ m_2 = 3 - \frac{4n_1^2}{(m_1+n_1)^2}, & n_2 = -\frac{(m_1-n_1)^2}{(m_1+n_1)^2} \end{array}\right. \tag{7}$$

Проведём теперь анализ полученных результатов. Прежде всего, очевидно, что если на паркете (3)3,(2)4 можно расположить равноугольный 12-угольник $A_1A_2...A_{12}$, то среди его углов будет не более двух углов первого типа (это следует непосредственно из формулы (6). Более того, рассмотрение этого конкретного случая показывает, что никакой угол первого типа до равноугольного многоугольника продолжен быть не может. Таким образом, сопоставляемая многоугольнику последовательность не может содержать куски вида 111 и 222.

С другой стороны, по лемме 15 все углы равноугольного 12-угольника не могут иметь второй тип. Следовательно, он должен содержать углы третьего типа, то есть в сопоставляемой многоугольнику последовательности должны встречаться две подряд идущие одинаковые цифры. Выбирая подходящую систему координат, можно считать, что последовательность содержит кусок вида 2112. Без ограничения общности будем считать, что этот кусок соответствует ломаной $A_1A_2A_3A_4$. Если за начало координат положить точку A_2, то координаты точки A_1 выражаются через координаты точки A_3 посредством формулы (7). Если же считать началом координат вершину A_3, то с помощью всё той же формулы координаты точки A_4 выражаются через координаты точки A_2. При этом понятно, что выражаться они должны по-разному (иначе векторы $\overrightarrow{A_2A_1}$ и $\overrightarrow{A_3A_4}$ будут параллельны). Но последнее означает, что для некоторой пары ненулевых целых чисел m_1 и n_1 целыми являются также значения дробей $\frac{(m_1+n_1)^2}{(m_1-n_1)^2}$ и $\frac{(m_1-n_1)^2}{(m_1+n_1)^2}$. Следовательно, $|m_1+n_1| = |m_1-n_1|$, откуда либо $m_1 = 0$, либо $n_1 = 0$. Оба эти случая рассматриваются отдельно и ни один из них не приводит к построению равноугольного многоугольника.

Вывод: расположить на паркете (3)3,(2)4 равноугольный двенадцатиугольник нельзя.

6. Равноугольный 24-угольник на паркете (3)3,(2)4

Этот раздел посвящается следующему утверждению: на паркете (3)3,(2)4 невозможно расположить равноугольный n-угольник при $n = 24$.

Допустим, что на паркете (3)3,(2)4 можно расположить равноугольный 24-угольник. Тогда на нём можно расположить угол φ величиной $\frac{11\pi}{12}$. Будем считать, что вершина этого угла находится в начале координат O, а стороны проходят через точки $M_1(a_1, b_1)$ и $M_2(a_2, b_2)$. Считая, что лучи OM_1 и OM_2 образуют с осью абсцисс углы α_1 и α_2 соответственно, и используя известный факт, заключающийся в равенстве $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{12} = \sqrt{3} - 2$, запишем следующее тригонометрическое соотношение (знак модуля раскрывается в зависимости от взаимного расположения точек M_1 и M_2)[2]:

$$|\operatorname{tg}\varphi| = |\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1)| = \left|\frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1\alpha_2}\right| = \left|\frac{a_1b_2 - b_1a_2}{a_1a_2 + b_1b_2}\right| = 2 - \sqrt{3}. \qquad (8)$$

Предположим сначала, что как M_1, так и M_2 являются узлами первого типа. Меняя местами точки M_1 и M_2, мы меняем знак подмодульного выражения, в то время как суть происходящего остаётся прежней, так как M_1 и M_2 равноправны. Поэтому уравнение (8) можно переписать следующим образом:

$$\frac{a_1b_2 - b_1a_2}{a_1a_2 + b_1b_2} = 2 - \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad (a_1b_2 - b_1a_2) = (a_1a_2 + b_1b_2)(2 - \sqrt{3}).$$

Подставляя значения координат $(a_i, b_i) = (m_i, n_i(2 + \sqrt{3}))$, имеем

$$(m_1n_2 - m_2n_1)(2 + \sqrt{3}) = (m_1m_2 + n_1n_2(2 + \sqrt{3})^2)(2 - \sqrt{3}) = m_1m_2(2 - \sqrt{3}) + n_1n_2(2 + \sqrt{3}).$$

При домножении обеих частей равенства на $(2 - \sqrt{3})$ получаем

$$(m_1n_2 - m_2n_1) = m_1m_2(2 - \sqrt{3})^2 + n_1n_2 = m_1m_2(7 - 4\sqrt{3}) + n_1n_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 7m_1m_2 + n_1n_2 = (m_1n_2 - m_2n_1) \\ \qquad m_1m_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{m_1}{n_1} = 1, & \frac{m_2}{n_2} = 0 \\ \frac{m_1}{n_1} = 0, & \frac{m_2}{n_2} = -1. \end{cases}$$

Полученным решениям соответствуют углы, представленные на рис. 3. Отсюда видно, что вершины равноугольного 24-угольшка не могут быть узлами исключительно первого или исключительно второго типа.

Теперь допустим, что как M_1, так и M_2 являются узлами второго типа. Снова меняя местами точки $M_1(m_1, n_1(2 + \sqrt{3}) + 2)$ и $M_2(m_2,\ n_2(2 + \sqrt{3}) + 2)$, мы изменяем знак подмодульного выражения, а так как вершины в этом случае равноправны, нам достаточно рассмотреть такой случай снятия модуля:

$$(a_1b_2 - a_2b_1) = (a_1a_2 + b_1b_2)(2 - \sqrt{3}) \quad \Leftrightarrow$$

$$(m_1m_2 + (n_1(2+\sqrt{3})+2)(n_2(2+\sqrt{3})+2))(2-\sqrt{3}) = (m_1(n_2(2+\sqrt{3})+2) - m_2(n_1(2+\sqrt{3})+2)) \quad \Leftrightarrow$$

$$m_1m_2(2 - \sqrt{3}) + 2(n_1 + n_2) + (2 + \sqrt{3})n_1n_2 + 4(2 - \sqrt{3}) = 2(m_1 - m_2) + (2 + \sqrt{3})(m_1n_2 - m_2n_1).$$

[2]См. формулу (4).

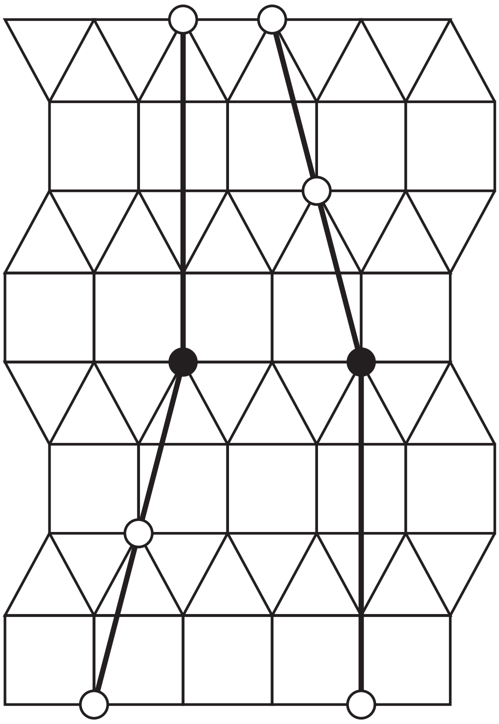


Рис. 3. Тип 1

Учитывая, что все задействованные переменные являются целыми, мы приходим к такой системе:

$$\begin{cases} m_1m_2 + (n_1+n_2) + n_1n_2 + 4 = (m_1 - m_2) + (m_1n_2 - m_2n_1) \\ -m_1m_2 + n_1n_2 - 4 = (m_1n_2 - m_2n_1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2m_1m_2 + (n_1+n_2) + 8 = (m_1 - m_2) \\ -m_1m_2 + n_1n_2 - 4 = (m_1n_2 - m_2n_1). \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что у полученной системы нет решений, при которых $(m_2+n_2) = 0$ или $m_2 = 0$. Следовательно, корректно следующее выражение переменных m_1 и n_1 через m_2 и n_2 (получающееся при решении системы как системы линейных уравнений относительно m_1 и n_1):

$$m_1 = -\frac{1}{2}\frac{(m_2+n_2)^2 + 8(m_2+n_2) + 4}{m_2(m_2+n_2)}; \quad n_1 = -\frac{1}{2}\frac{(m_2+n_2)^2 + 8n_2 + 4}{m_2(m_2+n_2)}.$$

Отсюда немедленно следует, что $4 \vdots (m_2+n_2)$. При этом $(m_2+n_2)^2 \vdots 2$, откуда сразу же вытекает, что $|m_2+n_2| \neq 1$. Однако $|m_2+n_2| \neq 4$, так как в противном случае необходимо выполнение условия $((m_2+n_2)^2 + 8n^2 + 4) \vdots 8$, которое, очевидно, не выполняется. Таким образом, $|m_2+n_2| = 2$.

Разберём по отдельности два случая раскрытия модуля.

Если $m_2 = k$, $n_2 = -k+2$, то $m_1 = -\frac{6}{k}$, $n_1 = -\frac{2(k-3)}{k}$. Решения реализуются только при $k = \pm1, \pm2, \pm3, \pm6$.

Если $m_2 = k$, $n_2 = -k-2$, то $m_1 = -\frac{2}{k}$, $n_1 = \frac{2(k+1)}{k}$. Решения реализуются при $k = \pm1, \pm2$.

Итого система уравнений имеет всего 12 решений. Простая проверка показывает, что только на их основе равноугольный 24-угольник построить нельзя. К тому же результату можно прийти, просто сославшись на лемму 15.

Теперь решим уравнение (8), предполагая, что вершина M_1 является узлом первого типа, а вершина M_2 — узлом второго типа. Считая, что их координаты имеют вид

$(a_1, b_1) = (m_1, n_1(2+\sqrt{3}))$ и $(a_2, b_2) = (m_2, n_2(2+\sqrt{3})+2)$, из уравнения в этом случае можно вывести следующее:

$$\left[\begin{array}{l} (m_1m_2 + n_1(2+\sqrt{3})(n_2(2+\sqrt{3})+2))(2-\sqrt{3}) = (m_1(n_2(2+\sqrt{3})+2) - m_2n_1(2+\sqrt{3})) \\ (m_1m_2 + n_1(2+\sqrt{3})(n_2(2+\sqrt{3})+2))(2-\sqrt{3}) = (-m_1(n_2(2+\sqrt{3})+2) + m_2n_1(2+\sqrt{3})) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} (2-\sqrt{3})m_1m_2 + 2n_1 + (2+\sqrt{3})n_1n_2 = 2m_1 + (2+\sqrt{3})(m_1n_2 - m_2n_1) \\ (2-\sqrt{3})m_1m_2 + 2n_1 + (2+\sqrt{3})n_1n_2 = -2m_1 + (2+\sqrt{3})(-m_1n_2 + m_2n_1) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{r} m_1m_2 + n_1 + n_1n_2 = m_1 + (m_1n_2 - m_2n_1) \\ -m_1m_2 + n_1n_2 = (m_1n_2 - m_2n_1) \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{r} m_1m_2 + n_1 + n_1n_2 = -m_1 - (m_1n_2 - m_2n_1) \\ -m_1m_2 + n_1n_2 = -(m_1n_2 - m_2n_1) \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{r} 2m_1m_2 + n_1 - m_1 = 0 \\ n_1(m_2+n_2) = m_1(n_2+m_2) \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{r} 2m_1m_2 + n_1 + m_1 = 0 \\ n_2(m_1+n_1) = m_2(n_1+m_1) \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{r} m_1(2m_2-1) + n_1 = 0 \\ (m_1-n_1)(m_2+n_2) = 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{r} m_1(2m_2+1) + n_1 = 0 \\ (m_2-n_2)(m_1+n_1) = 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Здесь наблюдаются следующие серии. Во-первых, $m_2 = 0, \quad n_2 = k, \frac{m_1}{n_1} = \pm 1$ (здесь $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$). Во-вторых, $m_2 = -k, \quad n_2 = k, \frac{m_1}{n_1} = \frac{1}{2k+1}$ (здесь $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$). В-третьих, $m_2 = k, \quad n_2 = k, \frac{m_1}{n_1} = \frac{-1}{2k+1}$ (здесь $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, этот вариант симметричен второму). Других решений нет.

Мы видим, что хотя решений в этом последнем случае и бесконечно много, все они друг с другом никак не связаны (имеется биекция между задействованными направлениями вершин первого типа и задействованными вершинами второго типа), то есть составить на их основе равноугольный 24-угольник не получается. Более того, даже комбинируя их с уже рассмотренными выше решениями для вершин только первого и только второго типов, получить требуемое не получится. Таким образом, расположить на паркете (3)3,(2)4 равноугольный 24-угольник невозможно.

Литература

[1] Вавилов В.В., Устинов А.В. *Многоугольники на решётках,* — Москва, МЦНМО, 2006.

[2] Колмогоров А.Н. *Паркеты из правильных многоугольников,* — “Квант”, 1986, №8, стр. 3-7.

[3] Михайлов О. *Одиннадцать правильных паркетов,* — “Квант”, 1972, №2, стр. 9-14.

[4] Штейнгауз Г. *Математический калейдоскоп,* — Москва - Ленинград, Государственное Издательство Технико-Теоретической Литературы, 1949.

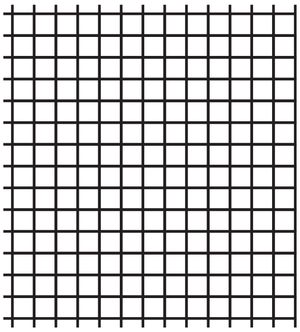
[5] Энциклопедия для детей, т. 11 (Математика), — Москва, “Аванта+”, 1999.

[6] Ball D.G. *The constractability of regular and equilateral polygons on square pinboard,* — Math. Teacher, 1973, V. 57. P. 119-122.

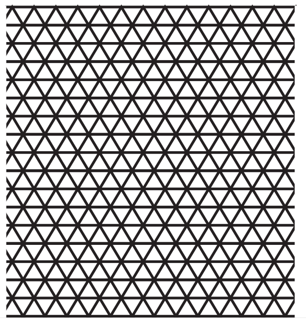
Нурлигареев Хайдар Джамилевич,
аспирант Кабинета методики преподавания
элементарной математики механико-математического
факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

Email: haidar_nur@yahoo.com

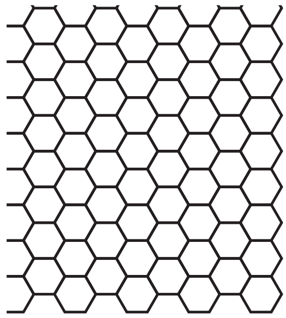
Приложение 1



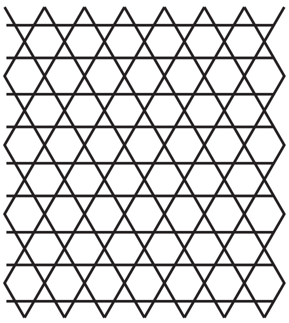
(4)4



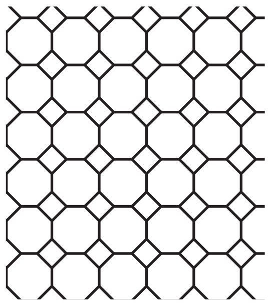
(6)3



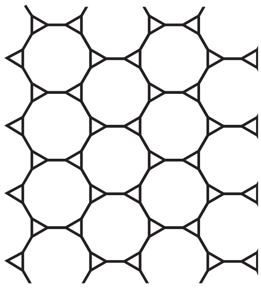
(3)6



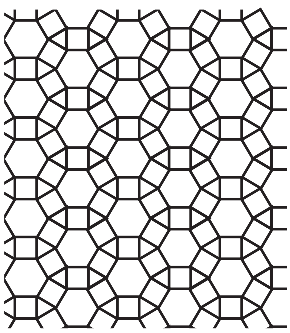
3,6,3,6



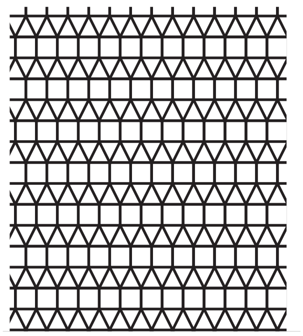
4,8,8



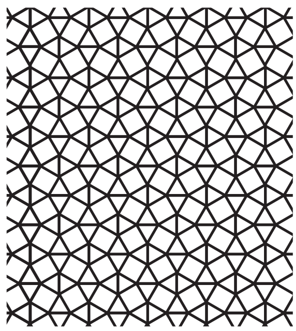
3,12,12



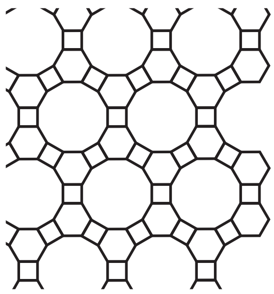
3,4,6,4



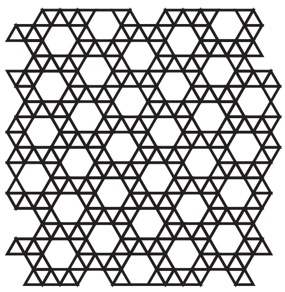
(3)3,(2)4



(2)3,4,3,4



4,6,12



(4)3,6

Приложение 2

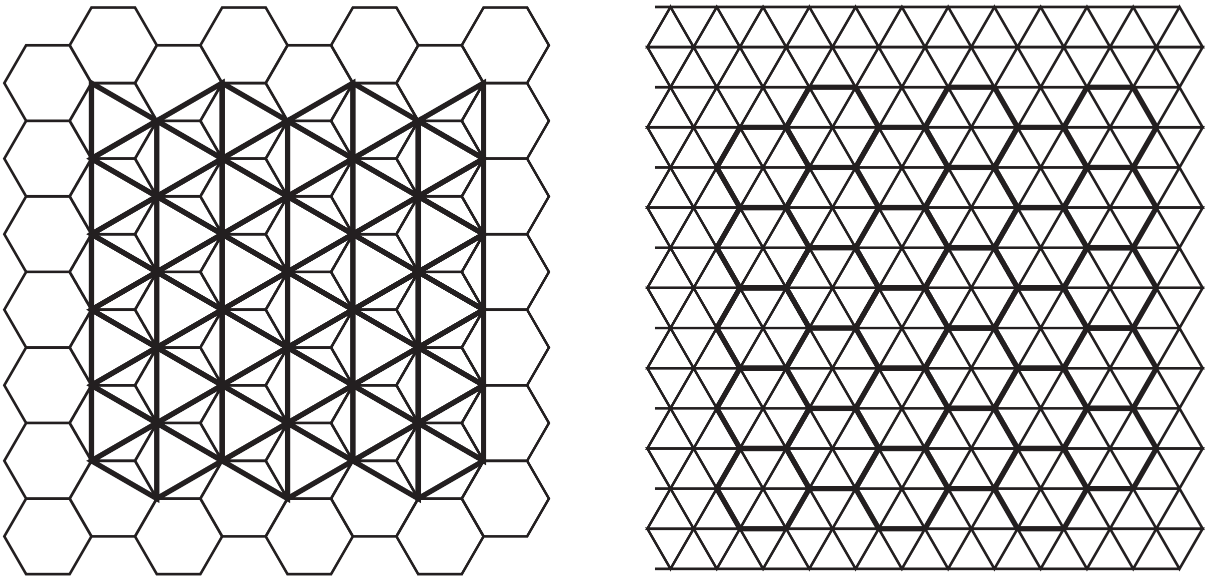


Рис. 4. $(6)3 \twoheadrightarrow (3)6$ и $(3)6 \twoheadrightarrow (6)3(3)6$

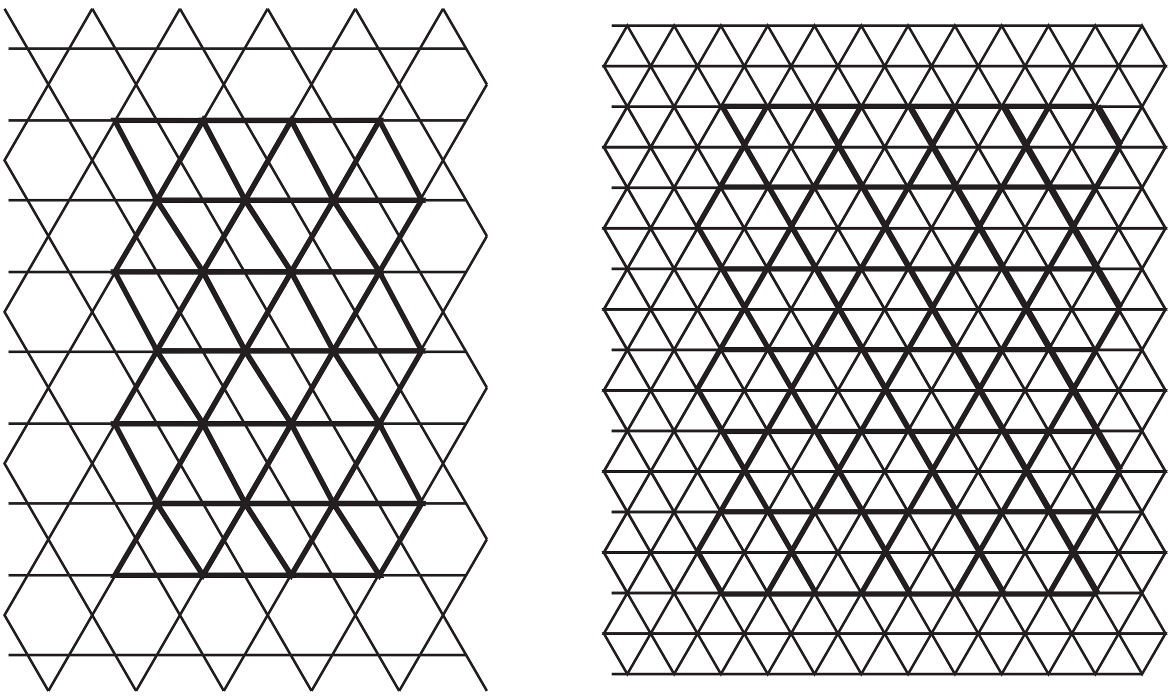


Рис. 5. $(6)3 \twoheadrightarrow 3, 6, 3, 6$ и $3, 6, 3, 6 \twoheadrightarrow (6)3$

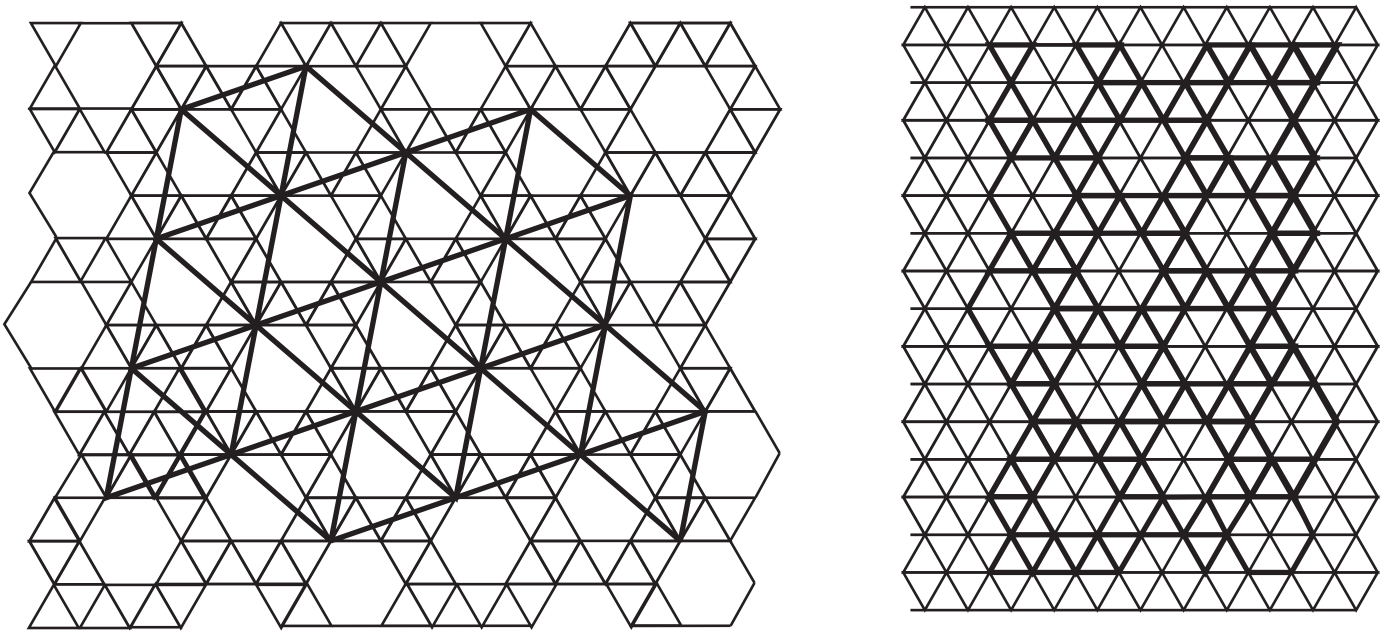


Рис. 6. $(6)3 \twoheadrightarrow (4)3,6$ и $(4)3,6 \twoheadrightarrow (6)3$

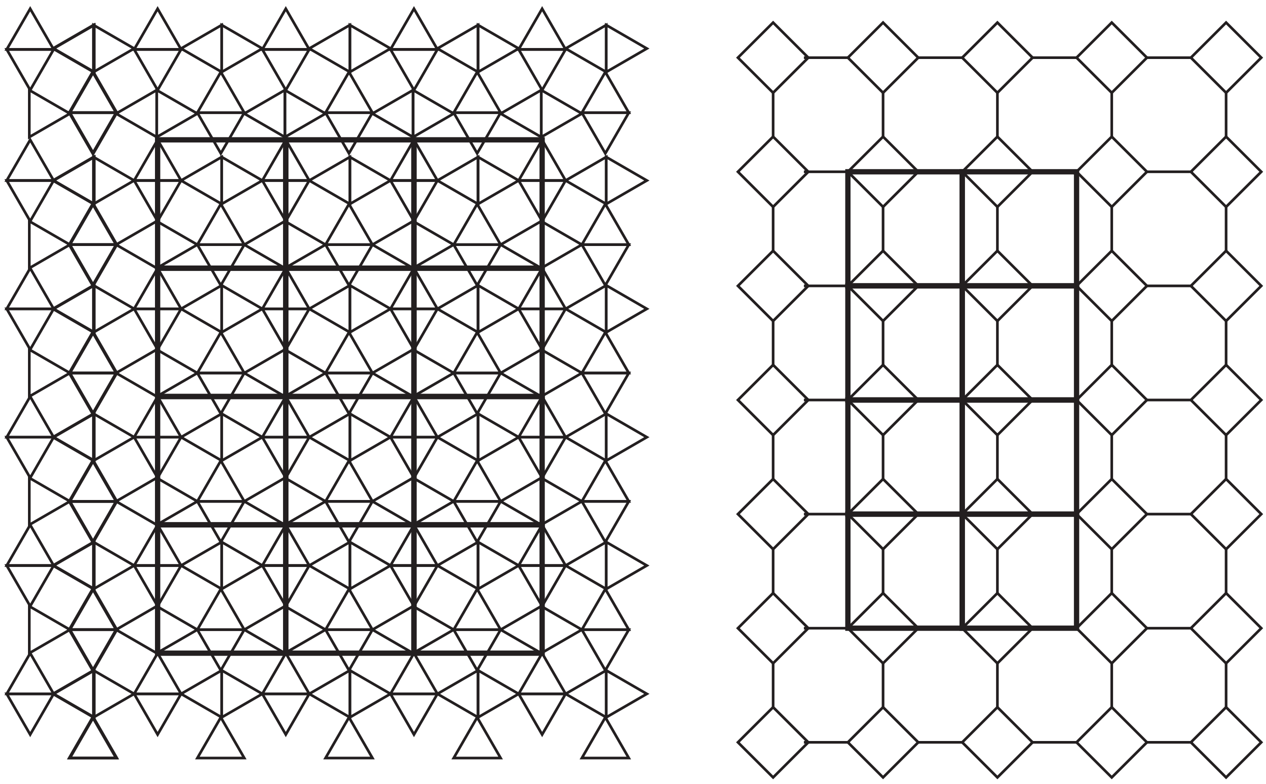


Рис. 7. $(4)4 \twoheadrightarrow (2)3,4,3,4$ и $(4)4 \twoheadrightarrow 4,8,8$

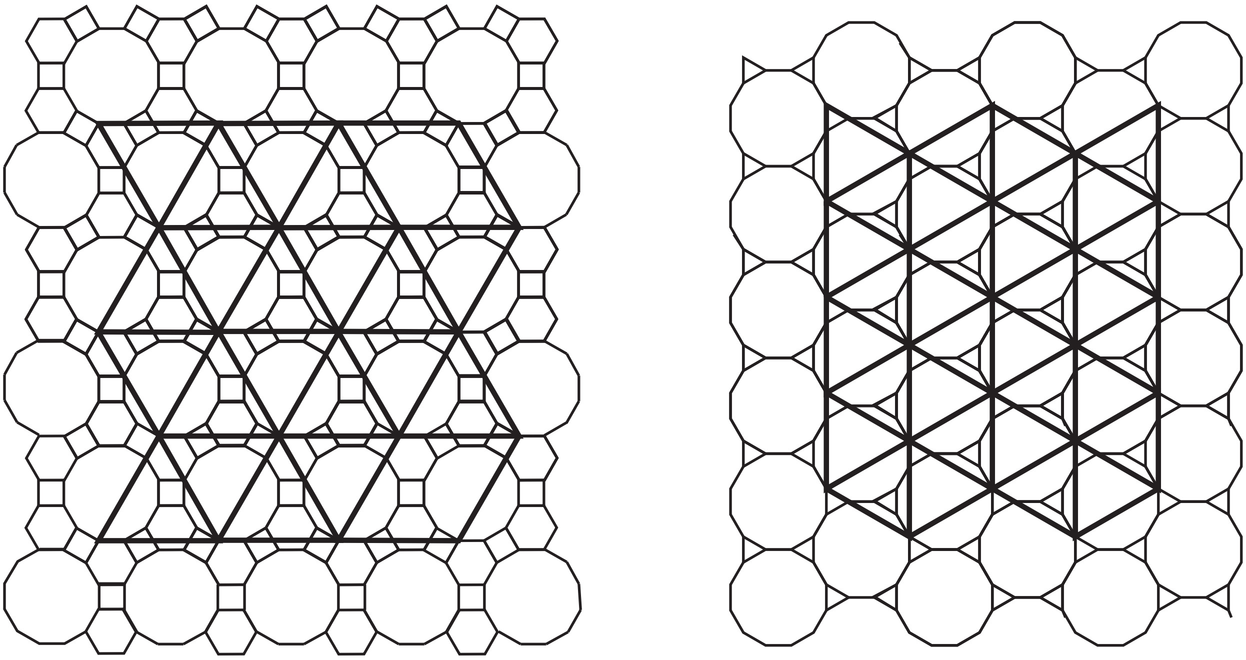


Рис. 8. (6)3 ↠ 4, 6, 12 и (6)3 ↠ 3, 12, 12

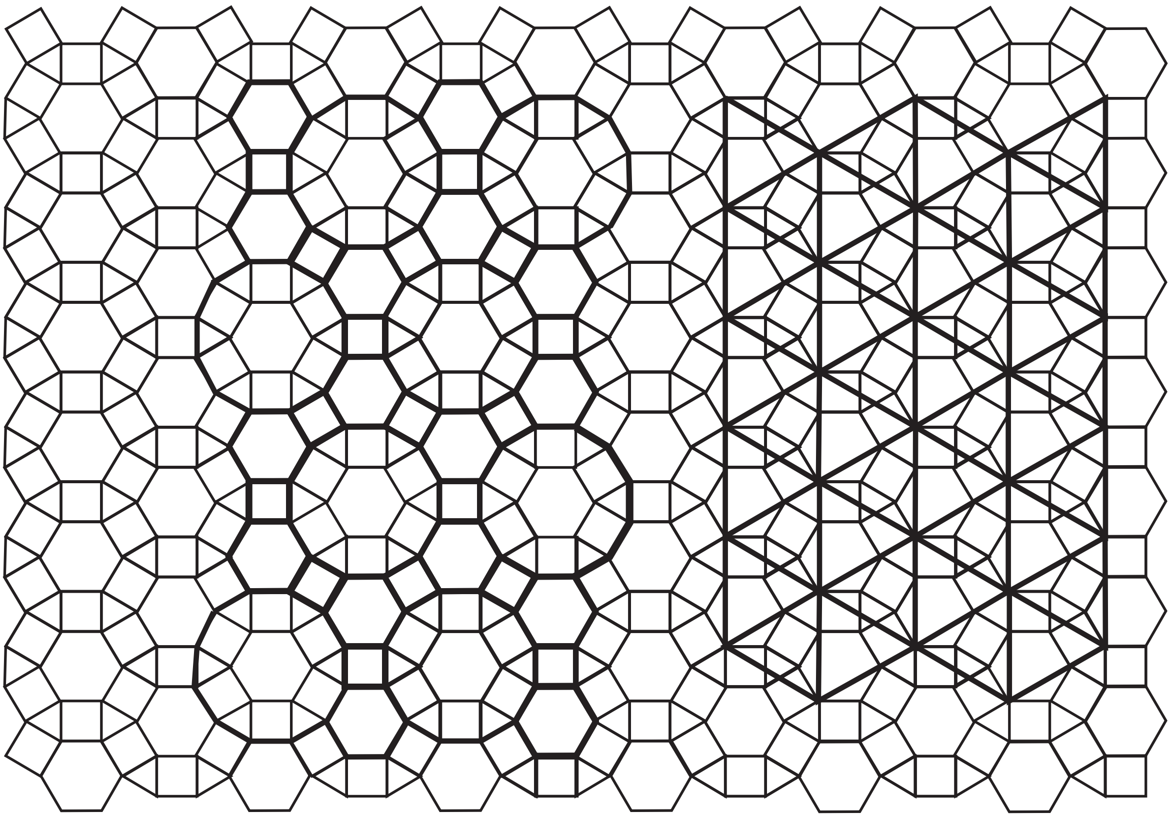


Рис. 9. 4, 6, 12 ↠ 3, 4, 6, 4 и (6)3 ↠ 3, 4, 6, 4

Приложение 3

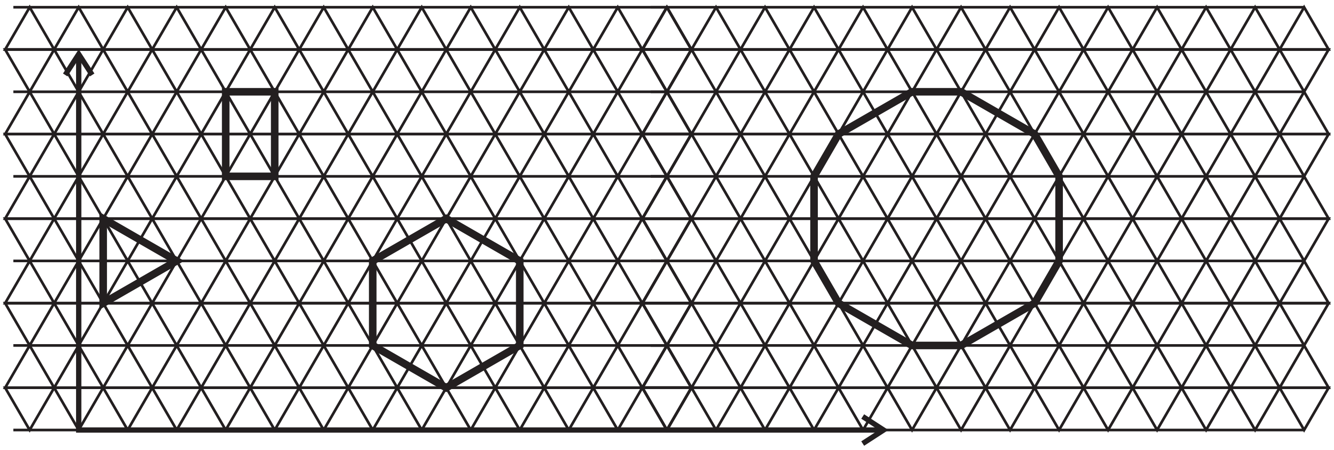


Рис. 10. (6)3

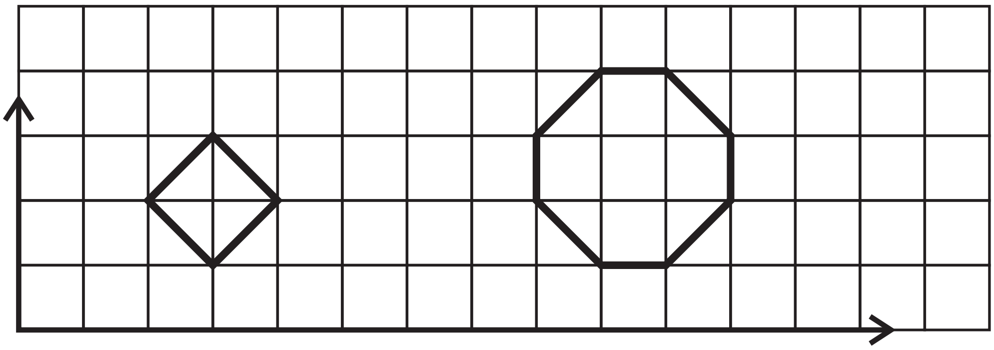


Рис. 11. (4)4

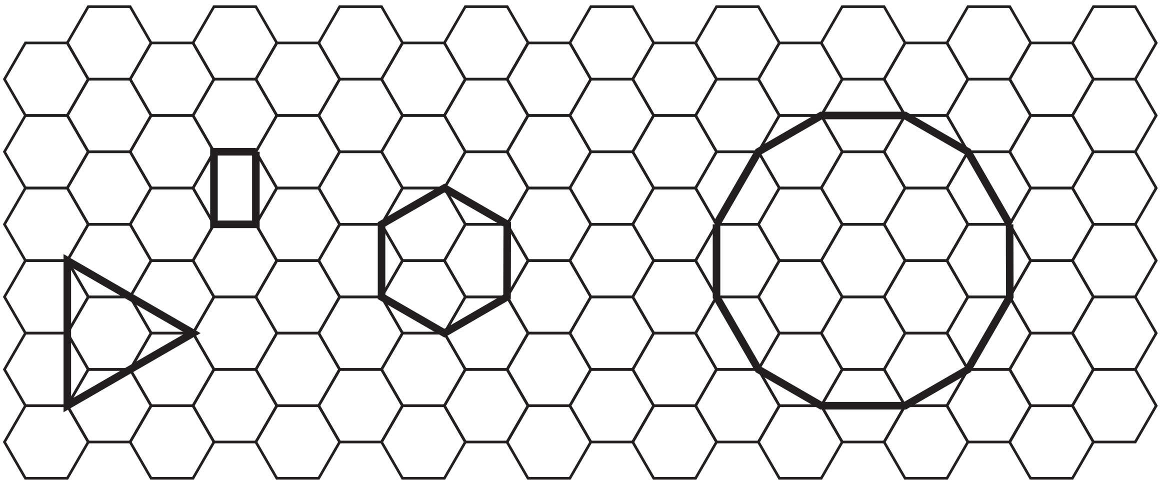


Рис. 12. (3)6

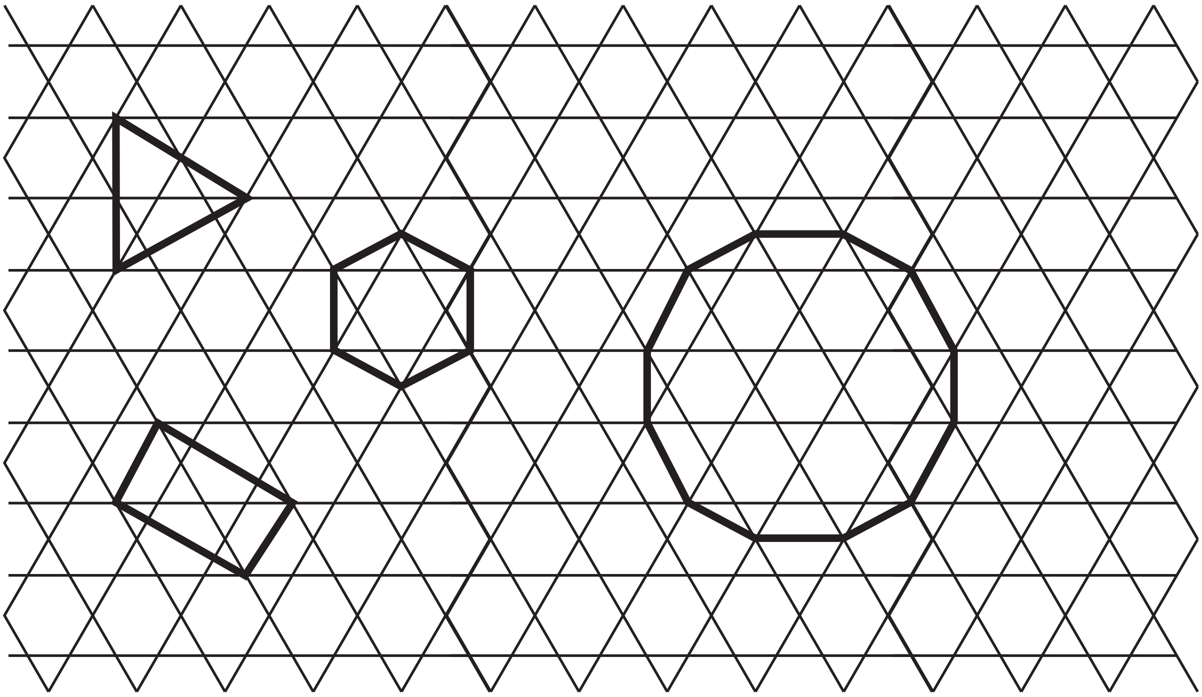


Рис. 13. $3, 6, 3, 6$

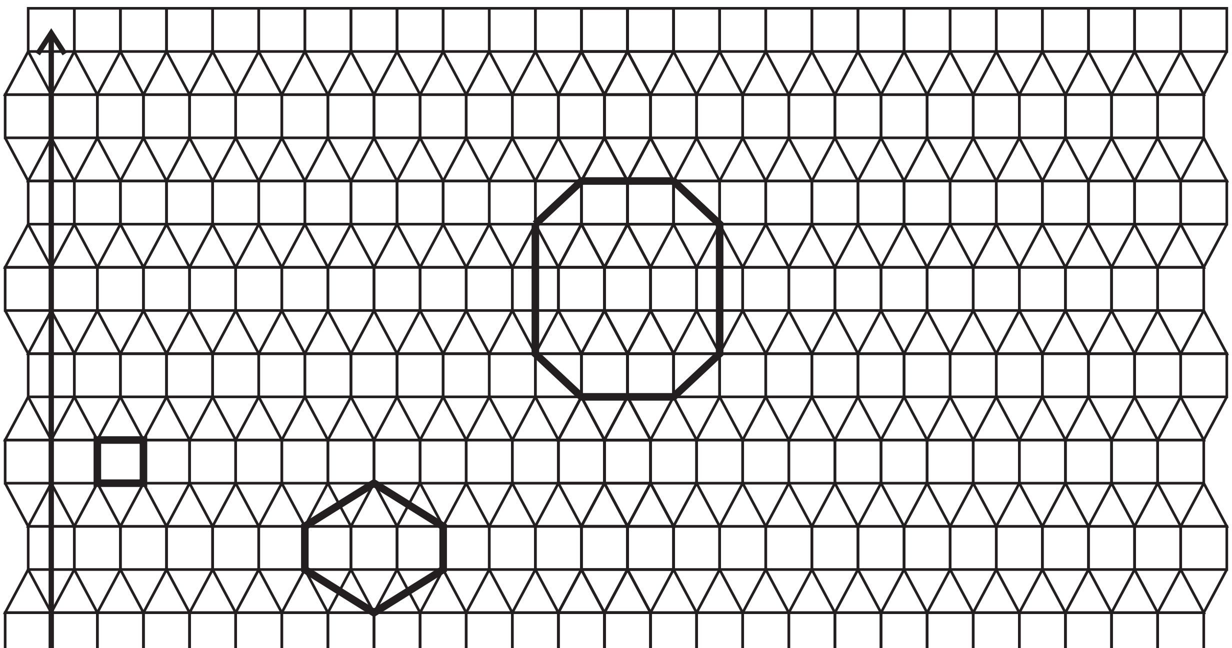


Рис. 14. $(3)3, (2)4$

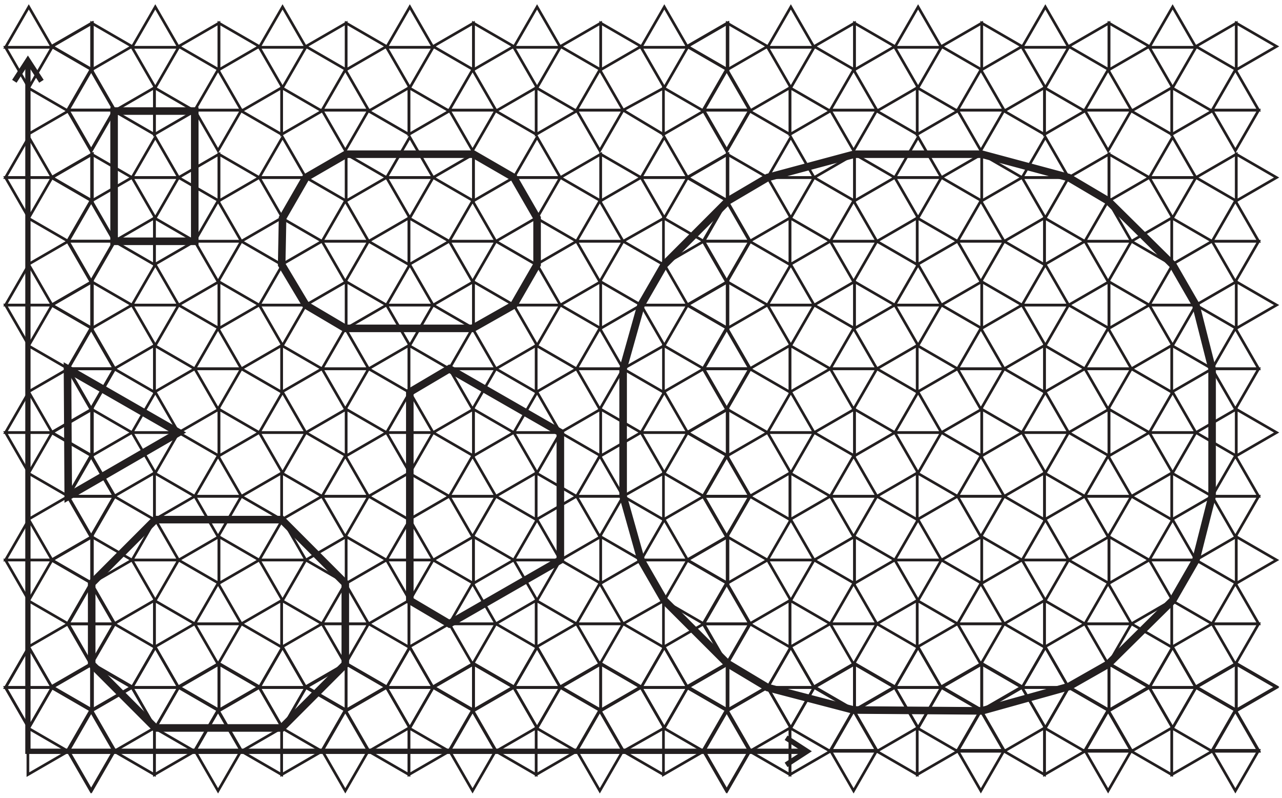


Рис. 15. (2)3, 4, 3, 4

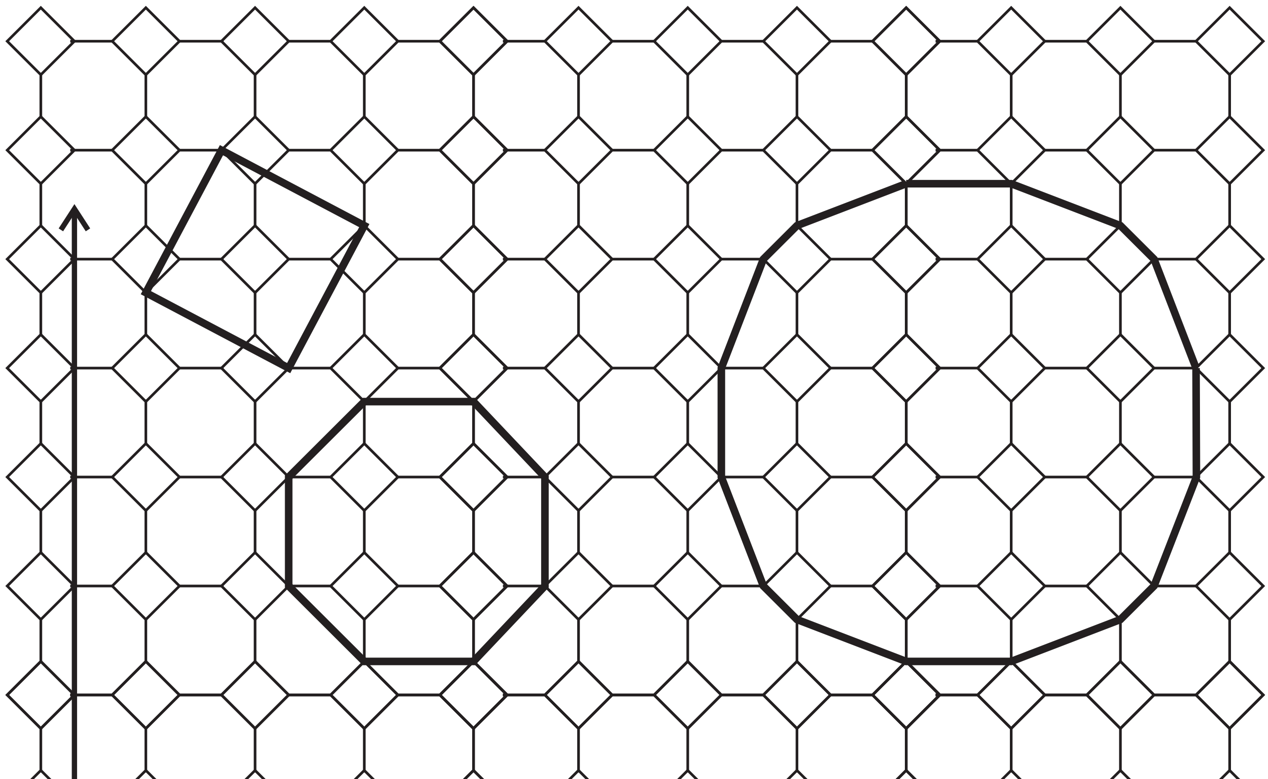


Рис. 16. 4, 8, 8

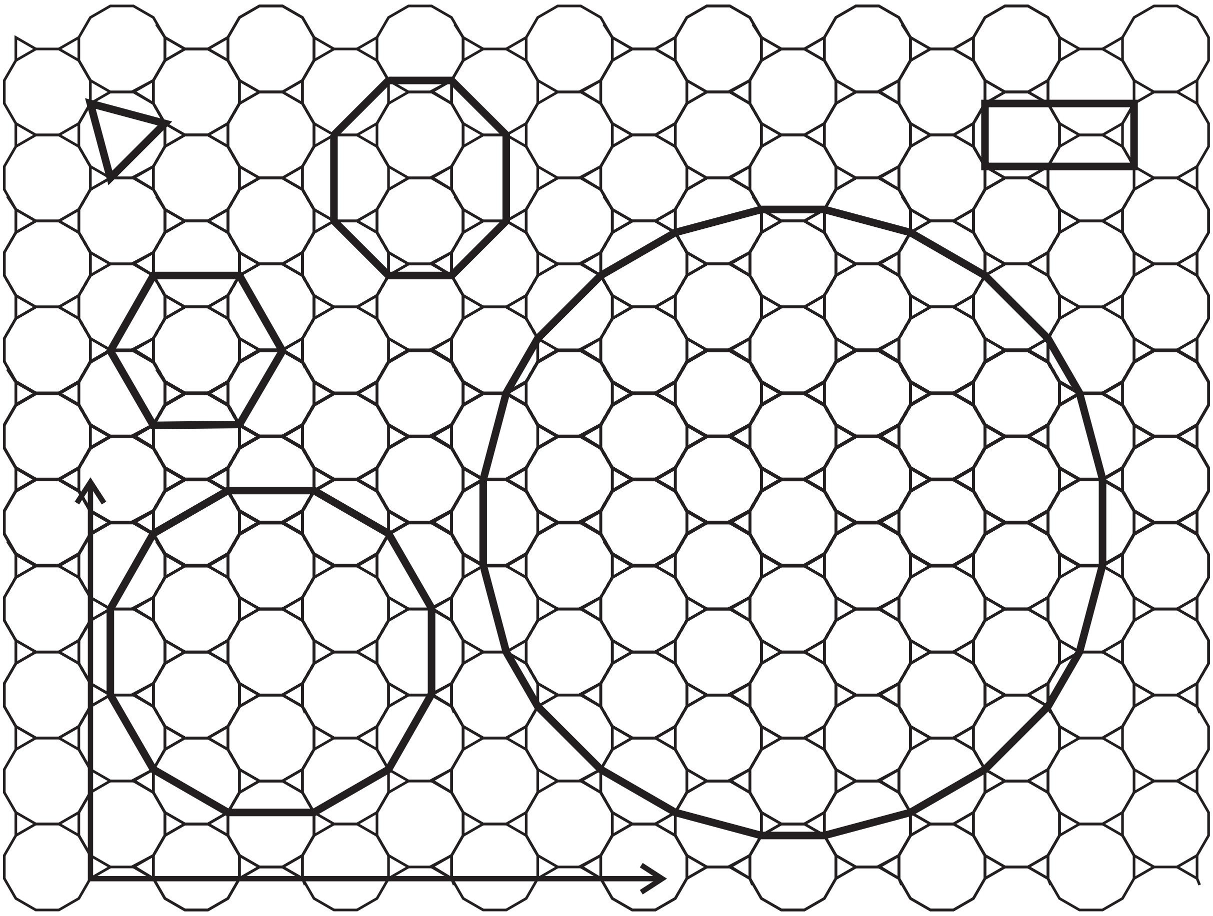


Рис. 17. $3, 12, 12$

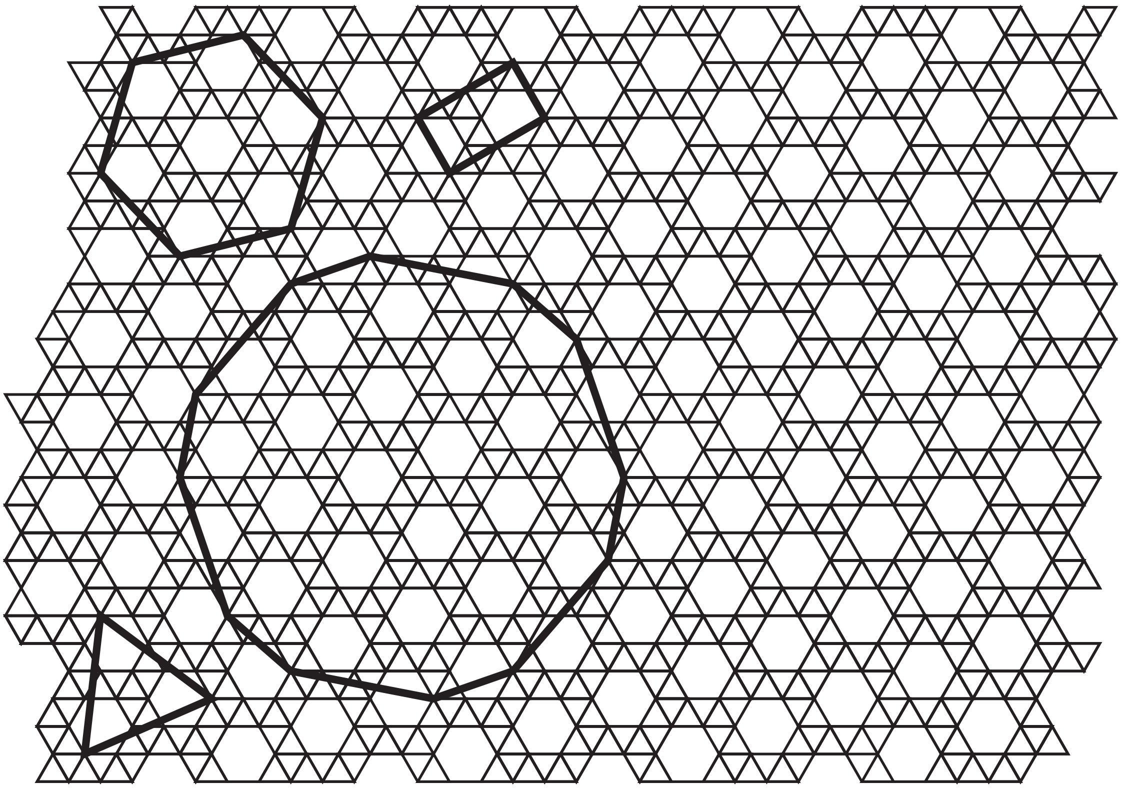


Рис. 18. $(4)3, 6$

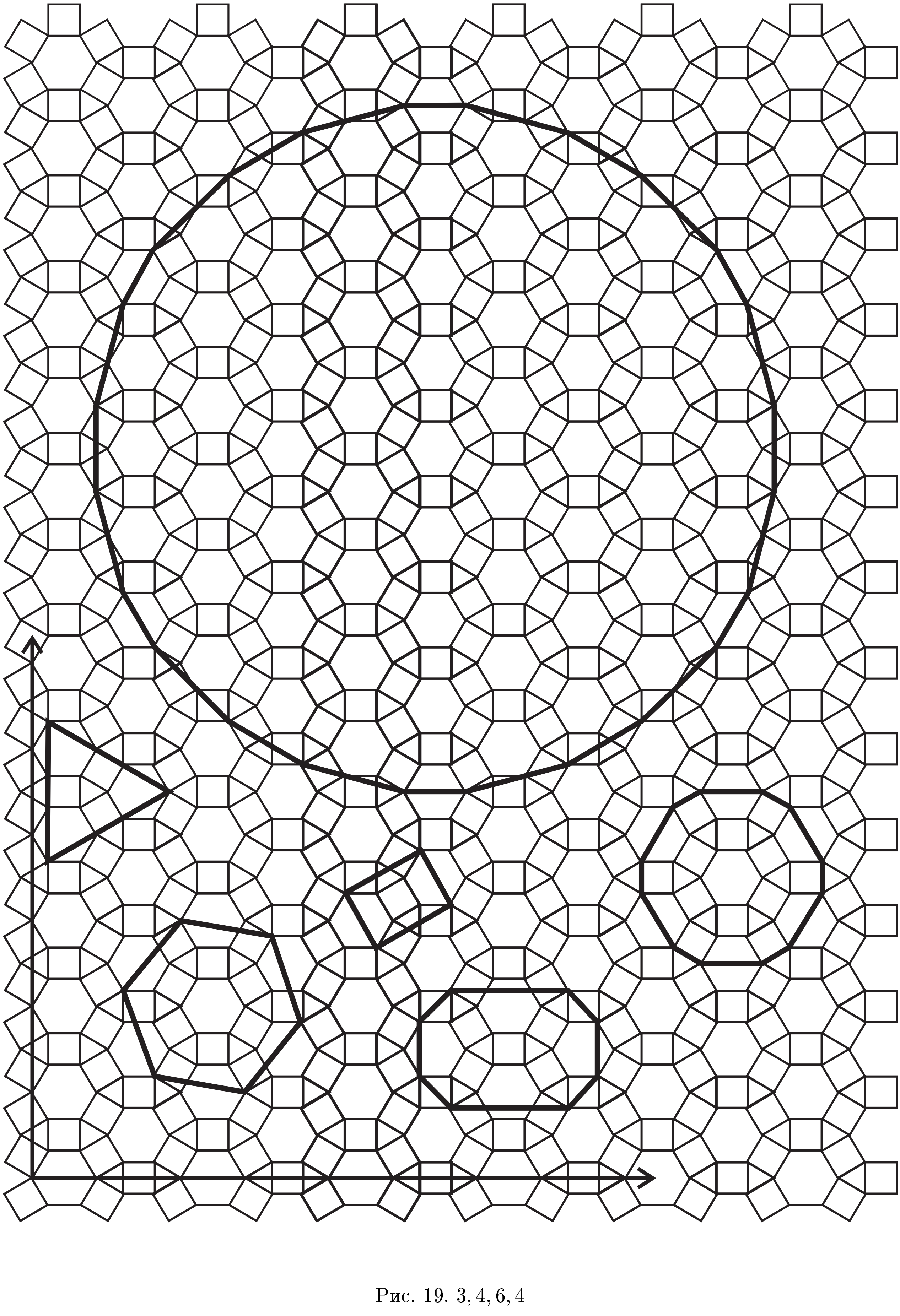


Рис. 19. $3, 4, 6, 4$

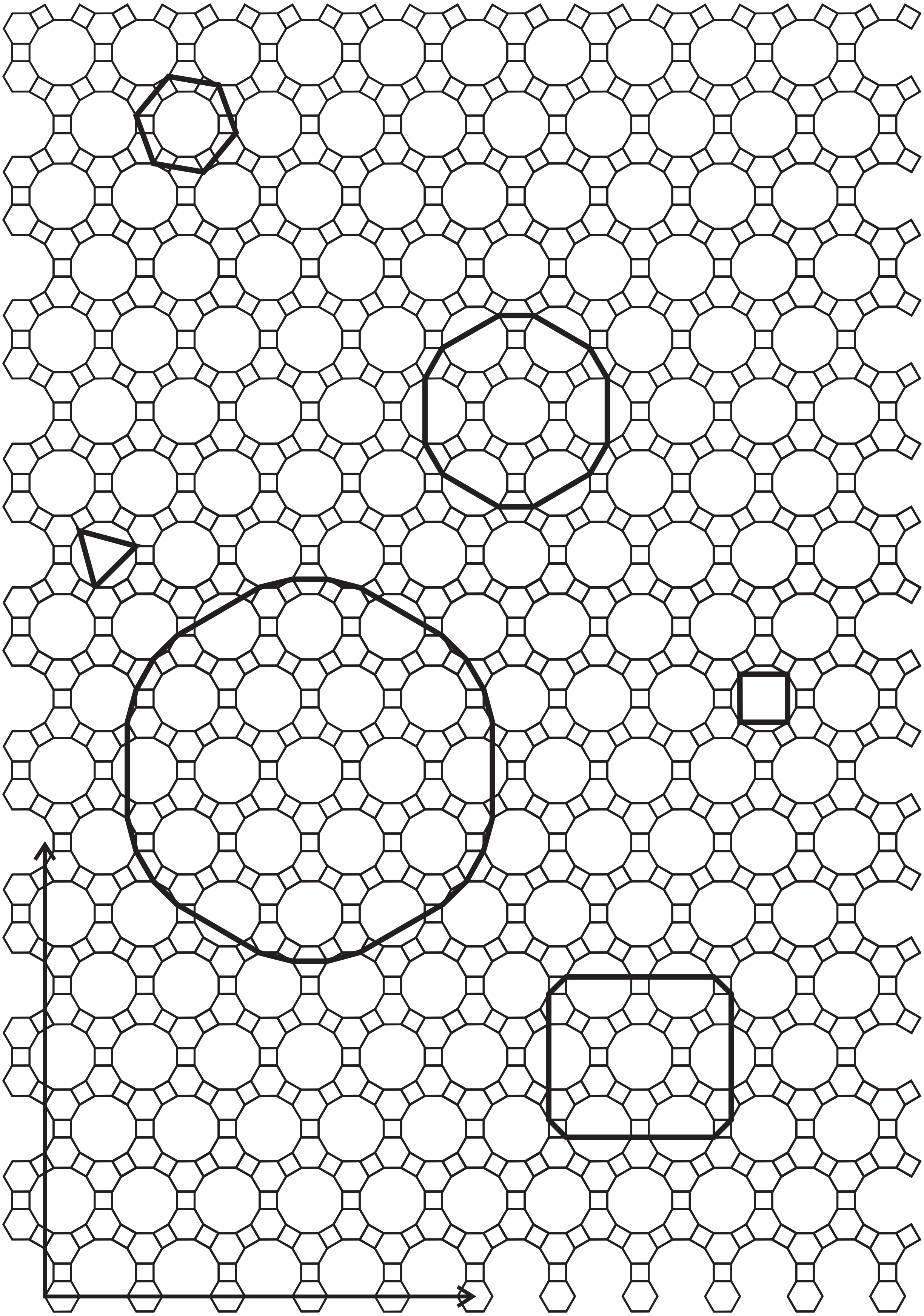


Рис. 20. 4, 6, 12

Две геометрические заметки

Ю. П. Васильев

В первой заметке предложена полезная формула для вычисления длины дуги окружности. Во второй описана красивая геометрическая интерпретация приближенной формулы для вычисления числа π.

1. Формула длины дуги

Справедлива следующая полезная формула длины дуги:

$$L = \frac{\pi \cdot l}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \frac{(\alpha + \beta)}{180^\circ}, \tag{1}$$

где L — длина дуги ACB, $l = AB$ — длина опорной хорды, α, β — углы между опорной хордой AB и хордами AC и BC к произвольной точке C на дуге ACB, см. рис. 1.

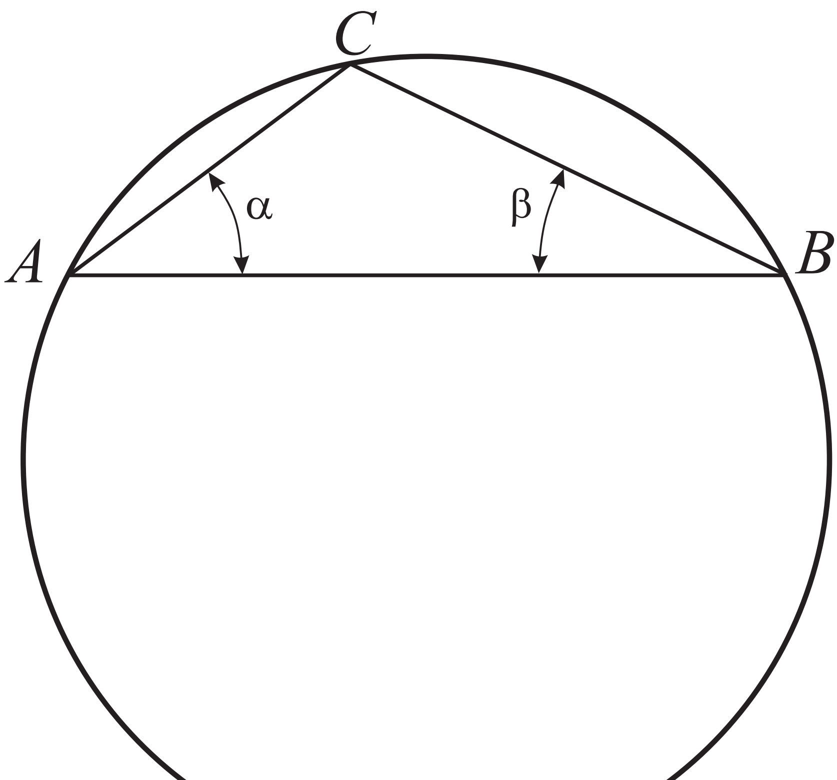


Рис. 1

Примечания редакции

1. Доказательство формулы (1) представляет собой простую геометрическую задачу, которую мы оставляем читателю. Достаточно знать формулы решения прямоугольных треугольников и теорему о вписанном угле, т.е. задача доступна учащимся 9 класса общеобразовательной средней школы.

2. Формула (1) записана в предположении, что углы α и β измеряются в градусах. При использовании радианной меры формула приобретает более простой вид

$$L = \frac{l \cdot (\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}. \tag{2}$$

3. Наконец, заметим, что $\alpha + \beta = \pi - \gamma$, где $\gamma = \angle ACB$. Тогда

$$L = \frac{l \cdot (\pi - \gamma)}{\sin(\pi - \gamma)} = \frac{l \cdot (\pi - \gamma)}{\sin \gamma}. \tag{3}$$

2. Геометрическая иллюстрация приближенной формулы вычисления числа π

Хорошо известна следующая формула для вычисления числа π:

$$n \cdot \sin \frac{180^\circ}{n} \ \to \ \pi, \ \text{ при } \ n \to \infty. \tag{4}$$

Эта формула имеет естественную геометрическую интерпретацию: периметры правильных n-угольников, вписанных в окружность радиуса 1, стремятся к длине окружности при неограниченном увеличении числа сторон n. Аналитически формулу можно вывести на основе первого замечательного предела $\sin x/x \to 1$ при $x \to 0$. Этот предел изучают студенты в курсе высшей математики, а также школьники в старших профильных физико-математических классах. При достаточно больших n выражение $n \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$ можно использовать для приближенного вычисления числа π.

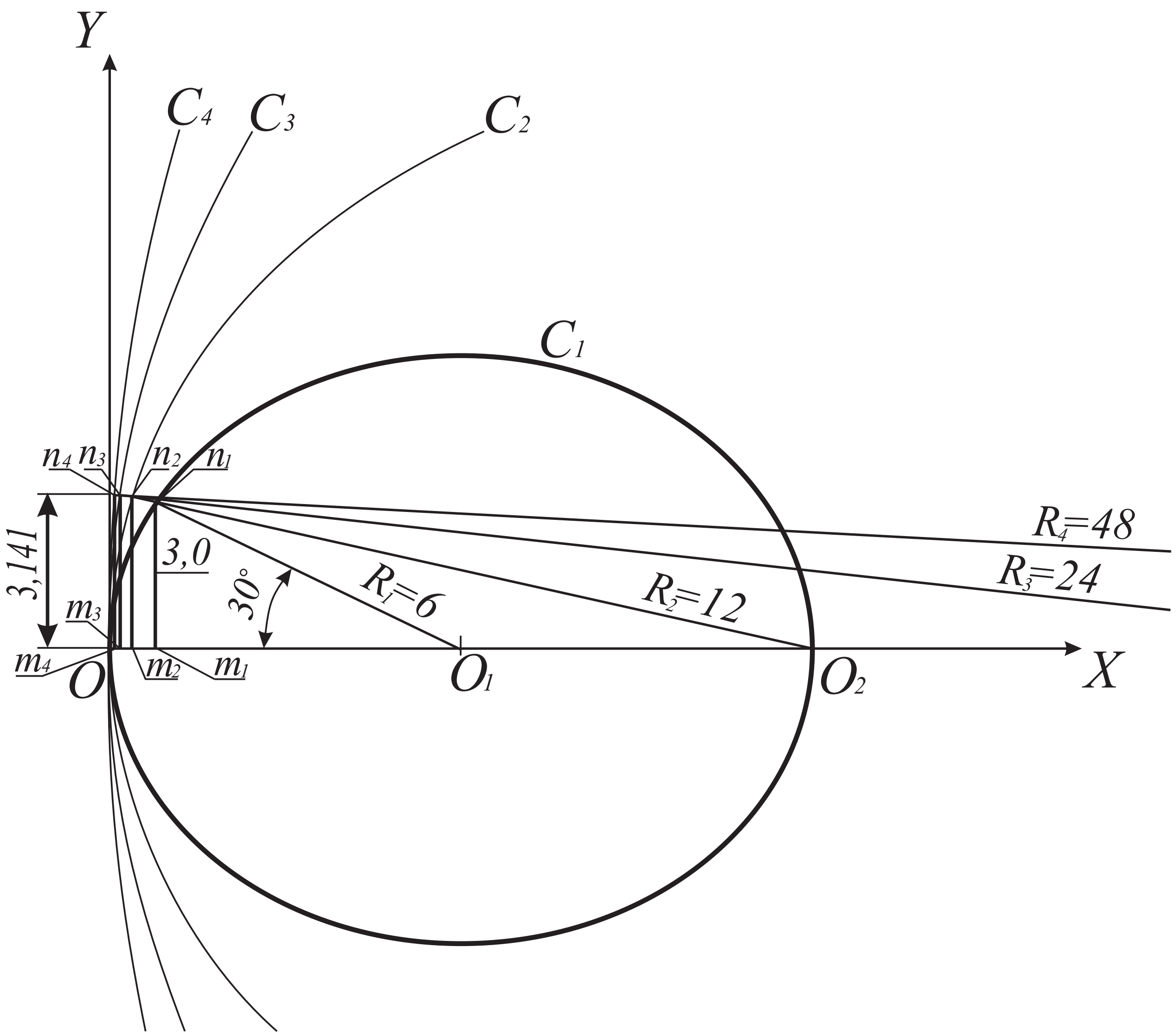


Рис. 2

Предлагаю следующую красивую геометрическую интерпретацию этой формулы, в которой заменим n на R, а R будем интерпретировать как неограниченно увеличиваемый, например, удваиваемый радиус окружности C, см. рис. 2.

Длины вертикальных отрезков $R \cdot \sin \frac{180^\circ}{R}$ на рис. 2 являются приближенными значениями числа π, на оси ординат "в пределе" образуется отрезок, длина которого в точности равна π. Таким образом, преимущество новой интерпретации — в наглядности: мы видим на чертеже приближенные значения, которые стремятся к предельному значению π.

Васильев Юрий Павлович,
инженер-механик, г. Тольятти.

E-mail: Vasipapa@yandex.ru

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2011 год (включая стоимость пересылки) – 60 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2011 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 50 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.