

О правильных многолистных паркетах на плоскости

Х. Д. Нурлигареев

ГБОУ ЦО N57, г. Москва

XI Колмогоровские чтения
14-17 мая 2013

Содержание

- 1** Постановка задачи
 - Определения и ключевые понятия
 - Основной вопрос
- 2** Результаты авторских исследований
 - Главные результаты
 - Основные идеи доказательства

Паркет

- *Паркет* — любое покрытие плоскости правильными многоугольниками без пробелов и наложений, при котором любые два многоугольника имеют либо общую сторону, либо общую вершину, либо не пересекаются вовсе.
- *Плитки паркета* — правильные многоугольники, составляющие паркет.
- *Узлы паркета* — вершины плиток паркета.
- *Тип узла* — порядок, в котором плитки паркета встречаются при обходе данного узла (задан с точностью до выбора начальной плитки и направления обхода).

Правильные паркеты

- Паркет — *правильный*, если его можно наложить самого на себя так, чтобы любой заданный узел совместился с другим произвольным наперёд заданным узлом.
- Все узлы правильного паркета имеют одинаковый тип. Он называется *типом правильного паркета*.

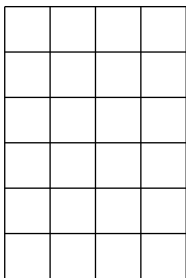
Правильные паркеты

- Паркет — *правильный*, если его можно наложить самого на себя так, чтобы любой заданный узел совместился с другим произвольным наперёд заданным узлом.
- Все узлы правильного паркета имеют одинаковый тип. Он называется *типом правильного паркета*.

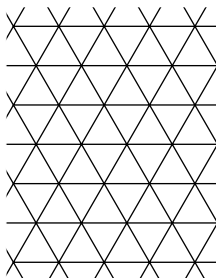
Существует ровно 11 различных типов правильных паркетов.

Типы правильных паркетов

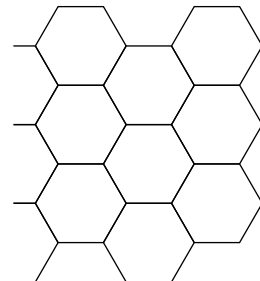
- Паркеты, составленные из плиток одного вида.



(4)4



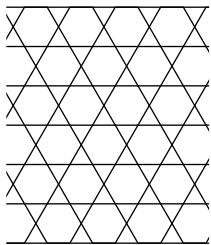
(6)3



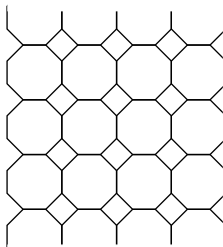
(3)6

Типы правильных паркетов

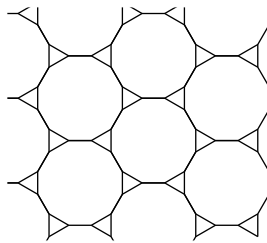
- Паркеты, составленные из плиток двух видов.



3, 6, 3, 6



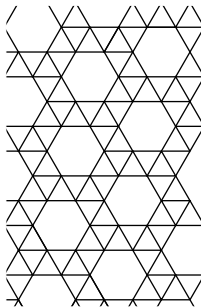
4, 8, 8



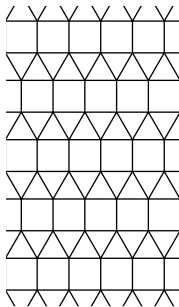
3, 12, 12

Типы правильных паркетов

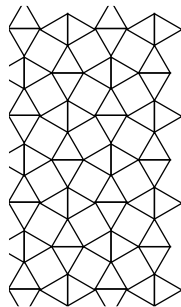
- Паркеты, составленные из плиток двух видов.



(4)3, 6



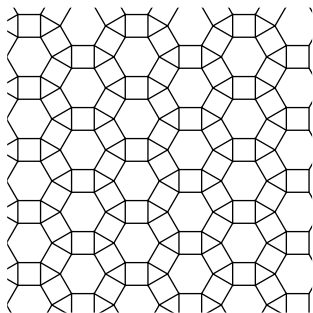
(3)3, (2)4



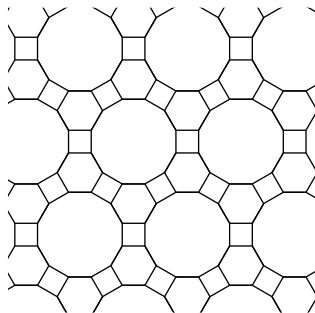
(2)3, 4, 3, 4

Типы правильных паркетов

- Паркеты, составленные из плиток трёх видов.



3, 4, 6, 4



4, 6, 12

Идея классификации правильных паркетов

- Каждый правильный паркет определяется типом своих узлов. Поэтому для классификации достаточно найти все возможные типы узлов, а потом для каждого найденного типа определить, существует ли правильный паркет, соответствующий этому типу.
- Возможные типы узлов находятся в соответствии с решениями диофантовых уравнений, которые строятся из тех соображений, что сумма углов плиток, примыкающих к одному и тому же узлу паркета, составляет 2π .

Пример одного из уравнений

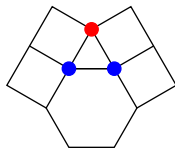
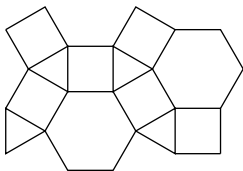
- Пусть в узле правильного паркета сходятся плитки, количества вершин которых есть k, l, m и n . Тогда

$$\frac{(k-2)\pi}{k} + \frac{(l-2)\pi}{l} + \frac{(m-2)\pi}{m} + \frac{(n-2)\pi}{n} = 2\pi.$$

- Другими словами, $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$.
- Одним из решений этого уравнения будет набор $(3, 4, 4, 6)$.
Этому набору соответствует два возможных типа узла.

Одно из решений этого уравнения

- Тип узла 3,4,6,4 соответствует правильному паркету.
- Тип узла 3,4,4,6 правильному паркету не соответствует: при попытке сложить плитки должным образом они начинают накладываться друг на друга.



Формулировка основного вопроса

- Разрешим плиткам паркета перекрываться. Так у нас появятся многолистные правильные паркеты. Касательно них возникают следующие вопросы:
 - 1. Какие из многолистных правильных паркетов будут состоять из конечного числа слоёв?
 - 2. Каково количество слоёв для каждого из многолистных правильных паркетов?

Классификация паркетов по числу слоёв.

Всего имеется 21 многолистный правильный паркет. Из них:

- 11 паркетов являются однолистными: $(6)3$; $(4)4$; $(3)6$;
 $3,12,12$; $4,8,8$; $3,6,3,6$; $(4)3,6$; $3,4,6,4$; $(3)3,(2)4$; $(2)3,4,3,4$;
 $4,6,12$.

Классификация паркетов по числу слоёв.

Всего имеется 21 многолистный правильный паркет. Из них:

- 11 паркетов являются однолистными: $(6)3$; $(4)4$; $(3)6$;
 $3,12,12$; $4,8,8$; $3,6,3,6$; $(4)3,6$; $3,4,6,4$; $(3)3,(2)4$; $(2)3,4,3,4$;
 $4,6,12$.
- 1 паркет является восьмилистным: $3,3,6,6$.

Классификация паркетов по числу слоёв.

Всего имеется 21 многолистный правильный паркет. Из них:

- 11 паркетов являются однолистными: $(6)3$; $(4)4$; $(3)6$; $3,12,12$; $4,8,8$; $3,6,3,6$; $(4)3,6$; $3,4,6,4$; $(3)3,(2)4$; $(2)3,4,3,4$; $4,6,12$.
- 1 паркет является восьмилистным: $3,3,6,6$.
- 9 паркетов являются бесконечнолистным: $3,7,42$; $3,8,24$; $3,9,18$; $3,10,15$; $4,5,20$; $5,5,10$; $3,3,4,12$; $3,4,3,12$; $3,4,4,6$.

Лемма 1

- Пусть V — такое дискретное множество точек плоскости, что для любых двух элементов $a, b \in V$ существует движение g плоскости, которое переводит a в b , оставляя при этом V неподвижным. Рассмотрим группу всех движений плоскости G , относительно которых V инвариантно.
- **Лемма 1.** Если $g \in G$ — вращение, то его порядок не может принимать значения, отличные от 2, 3, 4, 6.

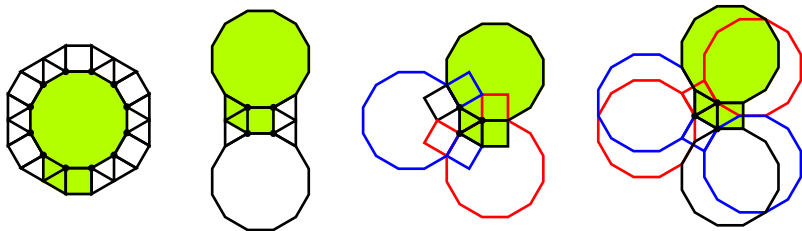
Лемма 2

- **Лемма 2.** Если правильный n -угольник является плиткой конечнолистного правильного паркета, причём в тип паркета число n входит только один раз, то $n \in \{3, 4, 6, 8, 12\}$.
- **Следствие.** Многолистные правильные паркетные плитки 3,7,42; 3,8,24; 3,9,18; 3,10,15; 4,5,20; 5,5,10 не являются конечнолистными.

Паркеты $3,3,4,12$; $3,4,3,12$; $3,4,4,6$

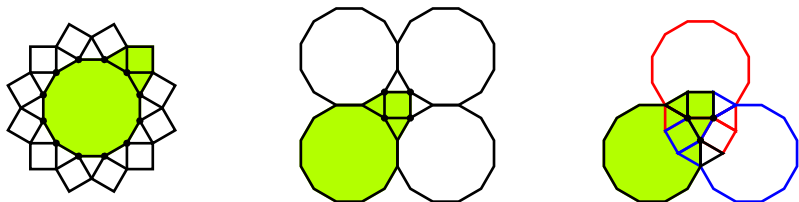
- Множество узлов любого конечнолистного правильного паркета дискретно. Поэтому чтобы убедиться, что паркетки $3,3,4,12$; $3,4,3,12$; $3,4,4,6$ бесконечнолистны, достаточно проверить, что множества их узлов не являются дискретными.
- Последнее следует из того, что в группах движений плоскости, оставляющих каждый из этих паркетов инвариантными, существуют параллельные переносы на несоизмеримые векторы.

Паркет 3,3,4,12



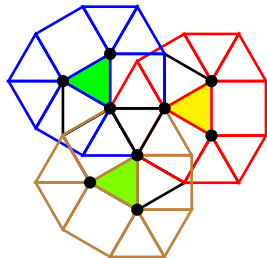
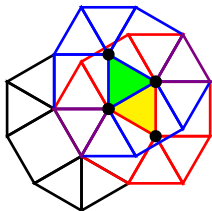
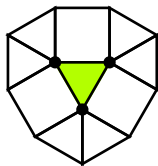
Окрестности плиток паркета 3,3,4,12.

Паркет 3,4,3,12



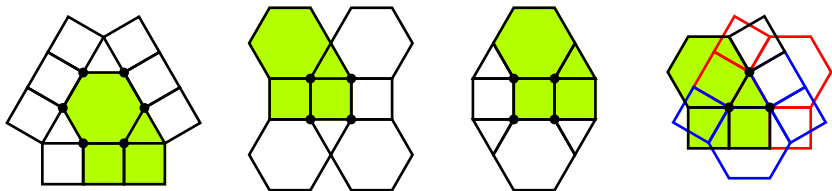
Окрестности плиток паркета 3,4,3,12.

Паркет 3,4,3,12



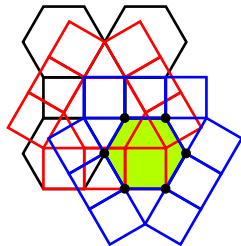
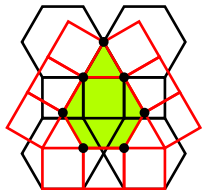
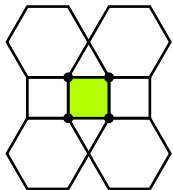
Наложение слоёв в паркете 3,4,3,12.

Паркет 3,4,4,6



Окрестности плиток паркета 3,4,4,6.

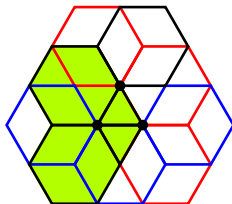
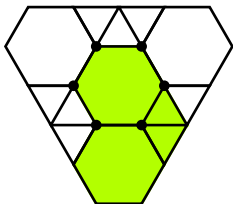
Паркет 3,4,4,6



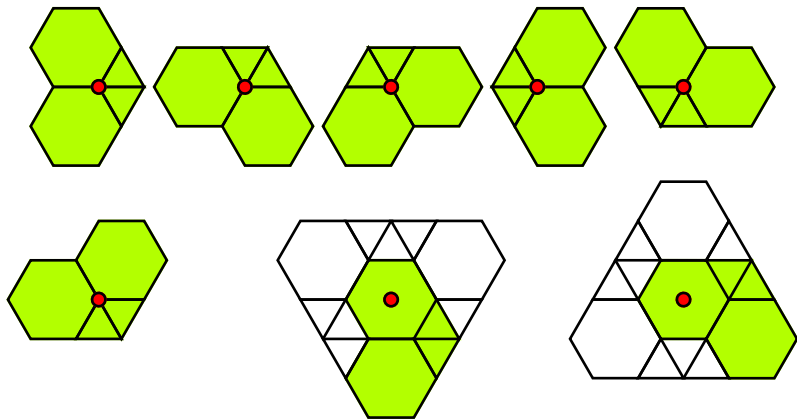
Наложение слоёв в паркете 3,4,4,6.

Паркет 3,3,6,6

- Множество узлов паркета 3,3,6,6 дискретно (оно совпадает со множеством узлов паркета (6)3).
- Окрестности плиток паркета 3,3,6,6:



Слои паркета 3,3,6,6



Резюме

- Автором впервые получен ответ на вопрос, какие из многолистных правильных паркетов будут состоять из конечного числа слоёв и каково количество этих слоёв в каждом из указанных случаев.
- Представляется интересным также обобщить полученный результат с плоскости на сферу.

Литература I



Кокстер Г.С.М.

Введение в геометрию.

Москва, Наука, 1966.



Колмогоров А.Н.

Паркеты из правильных многоугольников.

Квант, 1986, N8, стр. 3-7.



Михайлов О.

Одиннадцать правильных паркетов.

Квант, 1979, N2, стр. 9-14.

Литература II



Нурлигареев Х.Д.

О правильных конечнолистных паркетах на плоскости.

Математическое образование, 2012, N1, стр. 23–29.