Плитки Вана
и Задача Домино

Хайдар Нурлигареев

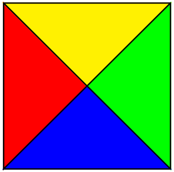
НИС

Современные проблемы математической логики

13 октября 2017

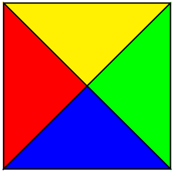
Понятие плиток Вана

Плитки Вана — это квадратики единичного размера, каждая сторона которых окрашена в свой цвет.

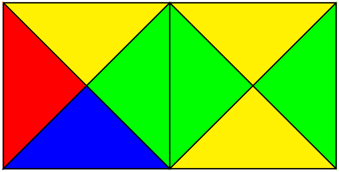


Понятие плиток Вана

Плитки Вана — это квадратики единичного размера, каждая сторона которых окрашена в свой цвет.



Локальные правила: плитки Вана можно прикладывать друг к другу, если при этом смежные стороны окрашены одинаково. Вращать или переворачивать плитки Вана не допускается.



Понятие протомножества и Задача Домино

Протомножество — это произвольный конечный набор плиток Вана $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$.

Понятие протомножества и Задача Домино

Протомножество — это произвольный конечный набор плиток Вана $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$.

Задача Домино. Пусть дано протомножество $\mathcal{T}$. Существует ли алгоритм, определяющий, допускает ли $\mathcal{T}$ замощение плоскости (то есть можно ли покрыть плоскость копиями плиток из $\mathcal{T}$ так, чтобы локальные правила соблюдались)?

Будем говорить, что Задача Домино разрешима, если алгоритм существует, и что она неразрешима в противном случае.

Апериодические протомножества

Если данное протомножество $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ допускает замощение плоскости, то возможно три варианта:

- любое такое замощение периодическое;
- существуют как периодические, так и непериодические замощения;
- любое такое замощение непериодическое.

В последнем случае протомножество $\mathcal{T}$ называется *апериодическим*; любое замощение с апериодическим протомножеством также называется *апериодическим*.

Теорема Вана

Теорема Вана. Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ плитками протомножества $\mathcal{T}$ можно покрыть квадрат размера $n \times n$. Тогда $\mathcal{T}$ допускает замощение плоскости.

Лемма Кёнига. Пусть вершины бесконечного связного графа G разбиты на подмножества $V_0 = \{v\}, V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$, причём каждое подмножество V_n конечно, а его элементы могут быть соединены рёбрами только с элементами из множеств V_{n-1} и V_{n+1}. Тогда в графе G существует бесконечный путь $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$, где $v_0 = v$.

Гипотеза Вана и теорема Бергера

Гипотеза Вана. Апериодических протомножеств не существует.

Следствие. Задача Домино разрешима.

Гипотеза Вана и теорема Бергера

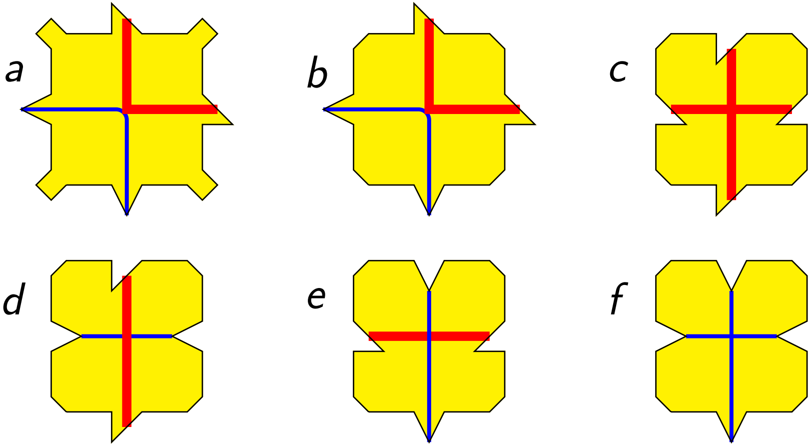
Гипотеза Вана. Апериодических протомножеств не существует.

Следствие. Задача Домино разрешима.

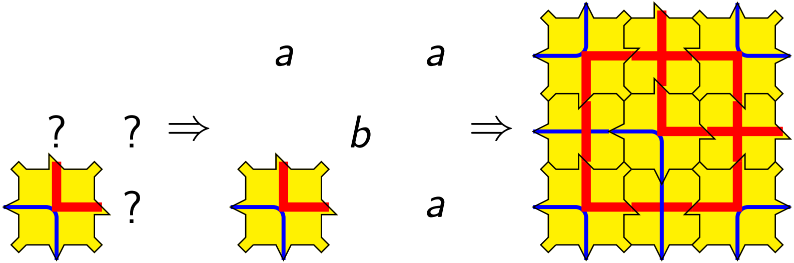
Теорема Бергера. Существуют апериодические протомножества.

Следствие. Задача Домино неразрешима.

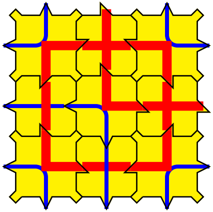
Плитки Робинсона – 1



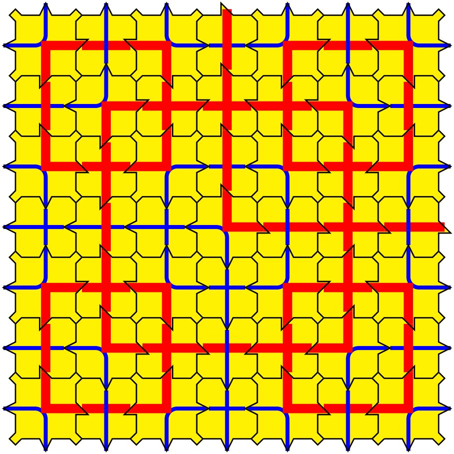
Плитки Робинсона – 2



Плитки Робинсона – 3



$\Rightarrow$



Литература I

Grünbaum Branco, Shephard G.C.
Tilings and Patterns.
New-York: W.H. Freeman and Company, 1986.