Нелокальные корреляционные функции в модели остовных деревьев вблизи границы.

Хайдар Нурлигареев

Математический факультет ВШЭ

19 июня 2018

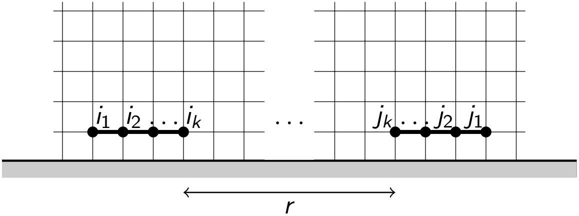
Контекст и мотивировка

- Теорема Кирхгофа связывает между собой Остовные Деревья, Димеры, Случайные Блуждания со Стёртыми Петлями и другие комбинаторные модели.

- Корреляционные функции в этих моделях описываются в непрерывном пределе конформными теориями поля.

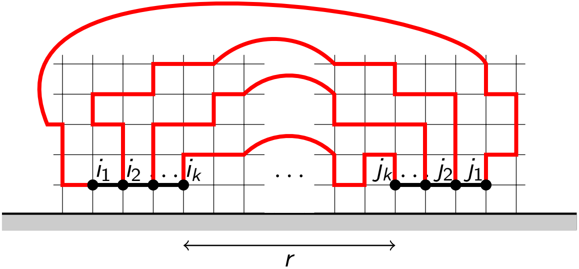
- Цель: проверка гипотез, возникающих в конформных теориях, классическими комбинаторными методами.

Постановка задачи



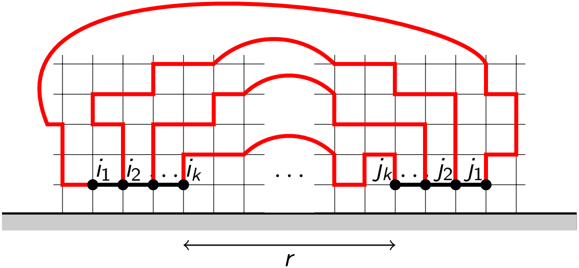
На полуплоскости с открытой границей даны два набора из k точек, разнесённые на расстояние r. Соединим эти точки k непересекающимися путями (получился "арбуз").

Постановка задачи



На полуплоскости с открытой границей даны два набора из k точек, разнесённые на расстояние r. Соединим эти точки k непересекающимися путями (получился "арбуз").

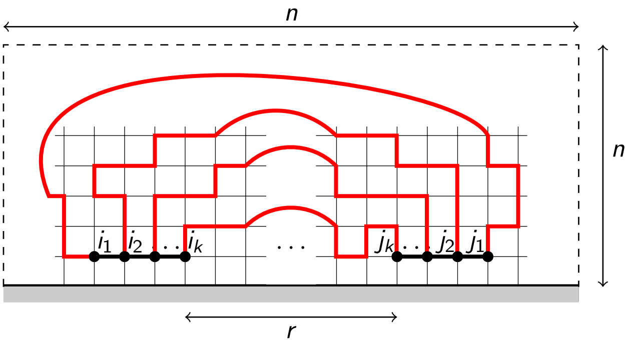
Постановка задачи



Каково число таких арбузов при $r \to \infty$?

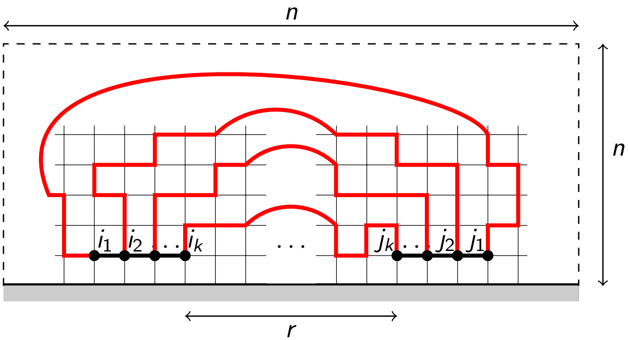
Естественно, это число бесконечно, но отношение $W_n(k, r)$ числа арбузов и количества остовных деревьев ограничено.

Постановка задачи



Каково число таких арбузов при $r \to \infty$?
Естественно, это число бесконечно, но отношение $W_n(k, r)$ числа арбузов и количества остовных деревьев ограничено.

Постановка задачи



Определим корреляционную функцию $W(k,r) = \lim\limits_{n\to\infty} W_n(k,r)$.

<u>Вопрос</u>: каково асимптотическое поведение корреляционной функции $W(k,r)$ при $r \to \infty$?

Авторский результат

$$W(k,r) \sim \frac{(k! \cdot (k-1)! \cdot \ldots \cdot 2! \cdot 1!)^2}{\pi^k \cdot k!} \cdot r^{-k(k+1)}.$$

Матричная Теорема о Деревьях (теорема Кирхгофа)

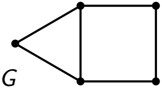
- Матричная Теорема о Деревьях: Пусть G — связный граф без петель, матрица Δ задана формулой

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} \deg v_i, & \text{если} \quad i = j; \\ -x_{ij}, & \text{если} \quad i \neq j. \end{cases}$$

  Пусть $\Delta^{(p,q)}$ получается из Δ вычёркиванием p-й строки и q-го столбца. Тогда

$$\#\{\text{остовные деревья графа } G\} = (-1)^{p+q} \det \Delta^{(p,q)}.$$

- Пример.



G

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

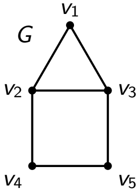
$p = 3$

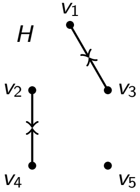
$q = 2$

$\det \Delta^{(p,q)} = -11$

Идея доказательства Матричной Теоремы о Деревьях

- $\det \Delta^{(N,N)} = \sum\limits_{\sigma \in S_{N-1}} (-1)^{\sigma} \prod\limits_{j=1}^{N-1} \Delta_{j\sigma(j)}$.
- $\Delta_{ij} = \begin{cases} -x_{ij}, & \text{если } i \neq j. \\ \sum\limits_{l \neq i} x_{il}, & \text{если } i = j; \end{cases}$.
- Если $h\colon \{1, \ldots, N-1\} \to \{1, \ldots, N-1\}$ не имеет неподвижных точек, то слагаемому $x_{1h(1)} \cdots x_{n-1,h(N-1)}$ соответствует некоторых подграф H.
- Если H задан перестановкой $\tau \in S_{N-1}$, $\tau = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_m \neq \mathrm{id}$, то соответствующее слагаемое сократится по биному Ньютона: $C_m^0 - C_m^1 + C_m^2 - \ldots + (-1)^m C_m^m = 0$.

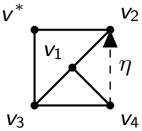




Метод Мостов

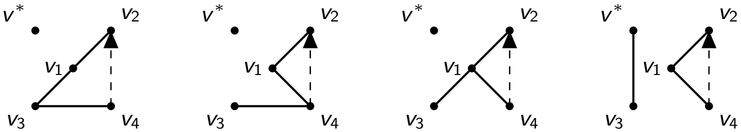
- $G = (V, E)$ — связный граф без петель;
- $G^* = (V^*, E^*)$ — расширенный граф: $V^* = V \cup \{v^*\}$;
- $i_1, j_1 \in V$ — две вершины графа G;
- $\Delta'_{ij} = \begin{cases} \deg v_i, & \text{если } i = j; \\ -x_{ij} - \eta, & \text{если } (i,j) = (i_1, j_1); \\ -x_{ij}, & \text{иначе}; \end{cases}$
- Метод Мостов: количество двухкомпонентных остовных лесов графа G^*, в которых вершины i_1 и j_1 содержатся в одной компоненте леса, а сток v^* — в другой, равно
$$-\lim_{\eta \to \infty} \frac{\det \Delta'}{\eta}.$$
- Доказательство Метода Мостов аналогично доказательству Матричной Теореме о Деревьях.

Применение Метода Мостов (пример)

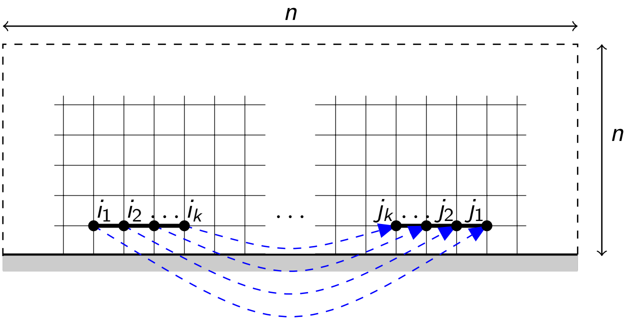


$$\Delta' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -\eta & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det \Delta' = 11 - 4\eta$$



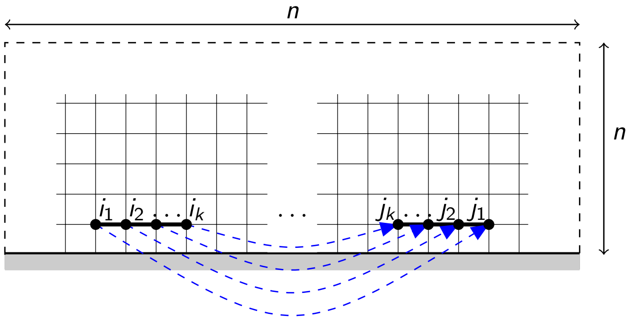
Применение Метода Мостов



Проведём k мостов. Тогда для соответствующих Δ_n и Δ_n':

$$W(n,k,r) = \lim_{\eta\to\infty} \frac{(-1)^k}{\eta^k} \cdot \frac{\det \Delta_n'}{\det \Delta_n} = \lim_{\eta\to\infty} \frac{(-1)^k}{\eta^k} \cdot \det\left(E + \Delta_n^{-1} B_n\right).$$

Применение Метода Мостов



Или $$W(n,k,r) = \det \begin{pmatrix} (\Delta_n^{-1})_{i_1 j_1} & \dots & (\Delta_n^{-1})_{i_1 j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\Delta_n^{-1})_{i_k j_1} & \dots & (\Delta_n^{-1})_{i_k j_k} \end{pmatrix}.$$

Функция Грина

- При $n \to \infty$:

$$\Delta_n \to \Delta \quad — \quad \text{дискретный Лапласиан},$$
$$\Delta_n^{-1} \to \Delta^{-1} \quad — \quad \text{функция Грина},$$

- Асимптотическое поведение функции Грина известно:

$$(\Delta^{-1})_{(r;1,1)} = G^{op}_{(r;1,1)} = \frac{1}{\pi r^2} - \frac{1}{2\pi r^4} + \ldots$$

- Задача сводится к вычислению асимптотики определителя:

$$\det_{1\leqslant i,j\leqslant k}\left(G^{op}_{(r+u_i-v_j;1,1)}\right) \sim \det_{1\leqslant i,j\leqslant k}\left((r+u_i-v_j)^{-2}\right).$$

Метод вычисления определителя

Пусть $g_r(t) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m(r)t^m$.

$$\det_{1\leqslant i,j\leqslant k}\left(g_r(v_i-u_j)\right) = \sum_{p_1,\dots,p_k=0}^{\infty} \det_{1\leqslant i,j\leqslant k}\left(b_{p_i}(r)(v_i-u_j)^{p_i}\right) =$$

$$= \sum_{p_1,\dots,p_k=0}^{\infty} \sum_{q_1=0}^{p_1} \dots \sum_{q_k=0}^{p_k} \det_{1\leqslant i,j\leqslant k}\left(b_{p_i}(r) C_{p_i}^{q_i} v_i^{q_i}(-u_j)^{p_i-q_i}\right) =$$

Сделаем замену $l_i = p_i - q_i$:

$$= \sum_{q_1,\dots,q_k=0}^{\infty} \sum_{l_1,\dots,l_k=0}^{\infty} \det_{1\leqslant i,j\leqslant k}\left(b_{q_i+l_i}(r) C_{q_i+l_i}^{q_i} v_i^{q_i}(-u_j)^{l_i}\right) =$$

Метод вычисления определителя

$$= \sum_{q_1,\ldots,q_k=0}^{\infty} \sum_{l_1,\ldots,l_k=0}^{\infty} \det_{1\leqslant i,j\leqslant k} \left(b_{q_i+l_i}(r) C_{q_i+l_i}^{q_i} v_i^{q_i} (-u_j)^{l_i} \right) =$$

$$= \sum_{q_1,\ldots,q_k=0}^{\infty} \sum_{l_1,\ldots,l_k=0}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{k} b_{q_i+l_i}(r) C_{q_i+l_i}^{q_i} v_i^{q_i} \right) \det_{1\leqslant i,j\leqslant k} \left((-u_j)^{l_i} \right) =$$

$$= \sum_{q_1,\ldots,q_k=0}^{\infty} \sum_{0\leqslant l_1<\ldots<l_k}^{\infty} \sum_{\sigma\in S_k} \left(\prod_{i=1}^{k} b_{q_i+\sigma(l_i)}(r) C_{q_i+\sigma(l_i)}^{q_i} v_i^{q_i} \right) \times$$

$$\times (-1)^{\sigma} \det_{1\leqslant i,j\leqslant k} \left((-u_j)^{l_i} \right) =$$

Метод вычисления определителя

$$= \sum_{q_1,\ldots,q_k=0}^{\infty} \sum_{0\leqslant l_1<\ldots<l_k}^{\infty} \sum_{\sigma\in S_k} \left(\prod_{i=1}^{k} b_{q_i+\sigma(l_i)}(r)\, C_{q_i+\sigma(l_i)}^{q_i} v_i^{q_i} \right) \times$$

$$\times (-1)^{\sigma} \det_{1\leqslant i,j\leqslant k} \left((-u_j)^{l_i} \right) =$$

$$= \sum_{\substack{0\leqslant q_1\leqslant\ldots\leqslant q_k \\ 0\leqslant l_1<\ldots<l_k}}^{\infty} \sum_{\substack{\sigma'\in S_k \\ \sigma'(q)\neq q}} \sum_{\sigma\in S_k} \left(\prod_{i=1}^{k} b_{\sigma'(q_i)+\sigma(l_i)}(r)\, C_{\sigma'(q_i)+\sigma(l_i)}^{\sigma'(q_i)} v_i^{\sigma'(q_i)} \right) \times$$

$$\times (-1)^{\sigma} \det_{1\leqslant i,j\leqslant k} \left((-u_j)^{l_i} \right) =$$

Метод вычисления определителя

$$= \sum_{\substack{0\leqslant q_1\leqslant\ldots\leqslant q_k\\ 0\leqslant l_1<\ldots<l_k}}^{\infty} \sum_{\substack{\sigma'\in S_k\\ \sigma'(q)\neq q}} \sum_{\sigma\in S_k} \left(\prod_{i=1}^{k} b_{\sigma'(q_i)+\sigma(l_i)}(r)\, C_{\sigma'(q_i)+\sigma(l_i)}^{\sigma'(q_i)} v_i^{\sigma'(q_i)}\right) \times$$

$$\times (-1)^{\sigma} \det_{1\leqslant i,j\leqslant k} \left((-u_j)^{l_i}\right) =$$

Сделаем замену $\sigma' = \sigma\tau$:

$$= \sum_{\substack{0\leqslant q_1\leqslant\ldots\leqslant q_k\\ 0\leqslant l_1<\ldots<l_k}}^{\infty} \sum_{\substack{\tau\in S_k\\ \tau(q)\neq q}} \sum_{\sigma\in S_k} \left(\prod_{i=1}^{k} b_{\sigma(\tau(q_i)+l_i)}(r)\, C_{\sigma(\tau(q_i)+l_i)}^{\sigma\tau(q_i)} v_i^{\sigma\tau(q_i)}\right) \times$$

$$\times (-1)^{\sigma} \det_{1\leqslant i,j\leqslant k} \left((-u_j)^{l_i}\right).$$

Метод вычисления определителя

Поскольку

$$\sum_{\sigma\in S_k}\left(\prod_{i=1}^{k} v_i^{\sigma\tau(q_i)}\right)(-1)^{\sigma}(-1)^{\tau} = \det_{1\leqslant i,j\leqslant k}\left((v_i)^{q_j}\right),$$

$$\sum_{\tau\in S_k}\left(\prod_{i=1}^{k} b_{\tau(q_i)+l_i}(r)\,C_{\tau(q_i)+l_i}^{\tau(q_i)}\right)(-1)^{\tau} = \det_{1\leqslant i,j\leqslant k}\left(b_{q_j+l_i}(r)\,C_{q_j+l_i}^{q_i}\right),$$

то мы имеем:

Метод вычисления определителя

$$= \sum_{\substack{0\leqslant q_1\leqslant\ldots\leqslant q_k\\ 0\leqslant l_1<\ldots<l_k}}^{\infty} \sum_{\substack{\tau\in S_k\\ \tau(q)\neq q}} \sum_{\sigma\in S_k} \left(\prod_{i=1}^{k} b_{\sigma(\tau(q_i)+l_i)}(r)\, C_{\sigma(\tau(q_i)+l_i)}^{\sigma\tau(q_i)} v_i^{\sigma\tau(q_i)}\right) \times$$

$$\times (-1)^{\sigma} \det_{1\leqslant i,j\leqslant k} \left((-u_j)^{l_i}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{0\leqslant q_1<\ldots<q_k\\ 0\leqslant l_1<\ldots<l_k}}^{\infty} \det_{1\leqslant i,j\leqslant k} \left(b_{q_j+l_i}(r)\, C_{q_j+l_i}^{q_j}\right) \times$$

$$\times \det_{1\leqslant i,j\leqslant k} \left((v_i)^{q_j}\right) \cdot \det_{1\leqslant i,j\leqslant k} \left((-u_j)^{l_i}\right) =$$

Метод вычисления определителя

$$= \sum_{\substack{0\leqslant q_1<\ldots<q_k\\ 0\leqslant l_1<\ldots<l_k}}^{\infty} \det_{1\leqslant i,j\leqslant k}\left(b_{q_j+l_i}(r)C_{q_j+l_i}^{q_j}\right)\times$$

$$\times \det_{1\leqslant i,j\leqslant k}\left((v_i)^{q_j}\right)\cdot \det_{1\leqslant i,j\leqslant k}\left((-u_j)^{l_i}\right) =$$

$$= \sum_{\lambda,\mu} \det_{1\leqslant i,j\leqslant k}\left(b_{\lambda_j+(k-j)+\mu_i+(k-i)}(r)C_{\lambda_j+(k-j)+\mu_i+(k-i)}^{\lambda_j+(k-j)}\right)\times$$

$$\times s_\lambda(v)\cdot s_\mu(-u)\cdot \prod_{j=1}^{k-1}(j!)^2.$$