

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

Факультет математики

Выпускная квалификационная работа

**НЕЛОКАЛЬНЫЕ  
КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ  
В МОДЕЛИ ОСТОВНЫХ ДЕРЕВЬЕВ  
ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ**

Выполнил:

магистрант 2-го года обучения

*Нурлигареев Хайдар Джамилевич*

Научный руководитель:

кандидат физ.-мат. наук, доцент

*Поволоцкий Александр Маркович*

Москва

2018

# Оглавление

<b>Аннотация</b>	<b>3</b>
<b>Abstract</b>	<b>3</b>
<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1. Модель остовных деревьев</b>	<b>5</b>
1.1. Матричная теорема о деревьях . . . . .	5
1.2. Бомбейский трюк . . . . .	8
1.3. Случайные блуждания со стёртыми петлями . . . . .	11
1.4. Метод Мостов . . . . .	15
<b>2. Дискретная функция Грина</b>	<b>18</b>
2.1. Общий случай . . . . .	18
2.2. Трансляционно инвариантные случайные блуждания . . . . .	20
2.3. Функция Грина двумерного случайного блуждания . . . . .	22
2.4. Функция Грина для случайного блуждания на полуплоскости с открытой границей . . . . .	24
<b>3. Задача об Арбузе</b>	<b>26</b>
3.1. Формулировка задачи . . . . .	26
3.2. Применение Метода Мостов . . . . .	26
3.3. Вычисление асимптотики . . . . .	28
<b>Список литературы</b>	<b>31</b>

## Аннотация

На квадратной плоской решётке с открытой границей мы рассматриваем корреляционные функции  $k$  случайных блужданий со стёртыми петлями, выбрав начальные и конечные точки возле границы так, чтобы полученная конструкция имела форму арбуза. Оказывается, что для достаточно больших расстояний  $r$  между наборами начальных и конечных точек отношение между числом остовных лесов, включающих в себя арбузы, и количеством остовных деревьев ведёт себя как  $C \cdot r^{-\nu}$ , где  $\nu = k(k+1)$ . Используя комбинаторные методы, мы не только доказываем этот результат, но и вычисляем явным образом константу  $C$ .

## Abstract

Given a large square lattice with open boundary, we consider a correlation function of  $k$  loop-erased random walks with starting and ending points chosen in such a way that the construction has a form of a  $k$ -leg watermelon. It turns out that for a large distance  $r$  between the groups of starting and ending points the ratio of the number of watermelon configurations to the total number of spanning trees behaves as  $C \cdot r^{-\nu}$  with  $\nu = k(k+1)$ . Using combinatorial methods, we prove this results and evaluate the constant  $C$ .

## Введение

Вычисление числа остовных деревьев данного связного графа является классической комбинаторной задачей теории графов. Будучи связанной с электрическими цепями, она была решена Кирхгофом в 1847 году ([12]), а позже нашла своё применение в множестве различных моделей, в том числе таких, как абелева модель песчаной кучи, модель случайных блужданий со стёртыми петлями, модель плотной димерной упаковки и других. Как оказалось, корреляционные функции в этих моделях представляют собой примеры, описываемые в непрерывном пределе конформными теориями поля. Таким образом, классические комбинаторные методы вычислений оказались весьма полезными для нужд математической физики, став рабочим инструментом проверки гипотез, возникающих в конформных теориях.

Один из примеров такого использования изучается в статье [8]. Именно, рассмотрим модель остовных деревьев на стандартной двумерной решётке. Пусть  $A$  и  $B$  — две точки решётки, разнесённые на большое расстояние  $r \gg 1$ . Будем называть  $k$ -сторонним арбузом конфигурацию из  $k$  непересекающихся путей, начинающихся в небольшой окрестности точки  $A$  и заканчивающихся в такой же окрестности точки  $B$ , а интересовать нас будут остовные деревья, содержащие внутри себя такие арбузы. Согласно предсказанию соответствующей конформной теории поля, отвечающая этим деревьям корреляционная функция  $W_k(r)$  при больших  $r$  ведёт себя как

$$W_k(r) \sim r^{-\frac{k^2-1}{2}}.$$

Явное вычисление этой зависимости комбинаторными способами представляет собой открытую проблему. Однако для нечётных  $k$  оказывается возможным решить похожую задачу, рассмотрев арбузы, вложенные не в остовные деревья, а в одну из компонент двухкомпонентных остовных лесов. Асимптотическое поведение, обнаруживаемое в этом случае, имеет вид

$$W_k(r) \sim r^{-\frac{k^2-1}{2}} \ln r.$$

В настоящей работе рассмотренная выше комбинаторная задача решается для двумерной решётки с открытой границей. Топология арбуза, размещённого возле границы,

даёт возможность найти асимптотическое поведение корреляционной функции  $W_k(r)$  для любого натурального  $k$ . Более того, использование симметрических функций позволяет вычислить явный вид старшего коэффициента, и в итоге удаётся доказать, что

$$W_k(r) \sim \frac{(k! \cdot (k-1)! \cdot \dots \cdot 2! \cdot 1!)^2}{\pi^k \cdot k!} \cdot r^{-k(k+1)}. \quad (1)$$

Вывод формулы (1) является новым и составляет наш главный результат.

Работа состоит из трёх больших разделов, а также из оглавления, введения, и списка литературы. Первая часть работы — раздел 1 — посвящена модели остовных деревьев и делится на четыре параграфа. В параграфе 1.1 мы доказываем Матричную Теорему о Деревьях (она же — теорема Кирхгофа, см. [12]), а также уделяем внимание различным её вариациям; всё это — в духе статьи [2]. Параграф 1.2 повествует о методах использования Бомбейского трюка, которые мы можем найти, например, в [14] и [15]. Параграф 1.3 посвящён построению и обоснованию алгоритма Вилсона, выдающего случайное остовное дерево равновероятным образом; здесь ключевую роль играет модель случайного блуждания со стёртыми петлями, а изложение ведётся сообразно препринту [4]. Завершается эта часть параграфом 1.4 с описанием Метода Мостов, широко использующегося для вычислений, что можно наблюдать, например, в статье [14] и, конечно же, в [8].

Раздел 2 — технический, его цель заключается в вычислении функций Грина для двумерной решётки, в том числе для решётки с границей, и установления их асимптотического поведения. В параграфах 2.1 и 2.2 мы описываем общие методы вычисления функции Грина для случайных блужданий на произвольных графах и трансляционно инвариантных решётках, в параграфе 2.3 переходим к стандартной двумерной решётке, и, наконец, в параграфе 2.4 устанавливаем результат для двумерной решётки с открытой границей. Изложение этой части ведётся в соответствии с книгами [10] и [16], ключевое вычисление асимптотик функции Грина опирается на работы [5] и [9].

Наконец, в разделе 3 мы используем изученный в предыдущих частях материал для решения «задачи об арбузе» на двумерной решётке с открытой границей. Параграф 3.1 является вводным, в нём раскрывается постановка задачи, во многом подобная рассмотренному в статье [8] аналогу. Логика развития параграфа 3.2 также следует этой статье: в нём исходная задача сводится к вычислению определителя некоторой матрицы. Завершается основная часть работы параграфом 3.3, в котором мы находим асимптотическое поведение этого определителя и доказываем заявленный выше результат.

В заключение хотелось бы выразить глубокую признательность Вячеславу Борисовичу Приезжеву и Филиппу Рюэлю за постановку задачи, а также Александру Марковичу Поволоцкому за плодотворное её обсуждение. Кроме того, я очень благодарен семейству Ейбоженко, а также Михаилу Горскому и Ольге Чугреевой за создание рабочей атмосферы и гостеприимство.

# 1. Модель остовных деревьев

Настоящий раздел посвящён описанию модели остовных деревьев, а также полезных инструментов, при помощи которых с ней удобно работать. Мы постараемся преподнести материал в максимальной общности, уделив внимание произвольным графам, несмотря на то, что для наших целей было бы достаточно ограничиться рассмотрением графов весьма конкретного вида. Прежде всего, будет изложен классический результат, позволяющий найти статсумму модели, — теорема Кирхгофа, — а также различные его вариации. Затем мы опишем Бомбейский трюк, с помощью которого можно вычислить вероятность того, что данная вершина остовного дерева является листом. Далее, будет разобран алгоритм Вилсона, равновероятно выдающий случайное остовное дерево за полиномиальное время. А завершит этот раздел Метод Мостов.

## 1.1. Матричная теорема о деревьях

Пусть  $G = (V, E)$  — связный ориентированный граф без петель и двойных рёбер, каждому ребру которого приписан некоторый вес. Для удобства будем считать, что всего в нашем графе  $N$  вершин, а граф помеченный, то есть его вершины пронумерованы натуральными числами:  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ . Для каждой пары  $i \neq j$  обозначим через  $x_{ij}$  вес ребра, ведущего из  $v_i$  в  $v_j$ ; если такое ребро отсутствует, то полагаем  $x_{ij} = 0$ . Тогда графу  $G$  можно сопоставить матрицу  $\Delta = (\Delta_{ij})$  размера  $N \times N$ , коэффициенты которой определяются согласно следующему правилу:

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} -x_{ij}, & \text{если } i \neq j, \\ \sum_{k \neq i} x_{ik}, & \text{если } i = j. \end{cases} \quad (2)$$

Подчеркнём, что рёбра  $\overrightarrow{v_i v_j}$  и  $\overleftarrow{v_j v_i}$ , соединяющие одни и те же вершины, но идущие в противоположных направлениях, двойными не считаются. В частности, отсюда вытекает, что матрица  $\Delta$ , вообще говоря, не является симметричной.

**Пример 1.1.** Пусть граф  $G$  такой, как показано на рис. 1.1. Тогда матрица  $\Delta$ , соответствующая этому графу, будет иметь следующий вид:

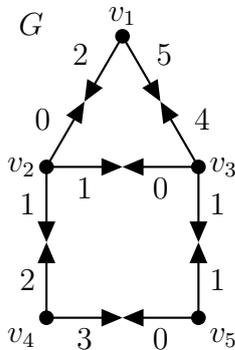


Рис. 1.1.

$$\Delta = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

**Определение 1.2.** Пусть  $G = (V, E)$  — ориентированный связный граф без петель и двойных рёбер, каждому ребру которого приписан некоторый вес. *Ориентированным остовным деревом* называется такой его подграф  $T = (V, E_T)$ , что из каждой вершины, кроме одной (называемой *корнем*) выходит ровно одно ребро. *Вес* ориентированного остовного дерева  $T$  — это произведение весов всех рёбер, входящих в  $T$ . Сумма весов всех ориентированных остовных деревьев графа  $G$  называется *статсуммой* и обозначается буквой  $Z$ .

Обозначим за  $Z_{v_i}$  сумму весов всех ориентированных остовных деревьев графа  $G$  с корнем в вершине  $v_i$ . Ясно, что вычисление статсуммы сводится к суммированию по вершинам графа:

$$Z = Z_{v_1} + \dots + Z_{v_N}.$$

Нижеследующая теорема Кирхгофа предоставляет способ вычисления каждого отдельного слагаемого.

**Теорема 1.3.** В условиях, описанных выше, величина  $Z_{v_i}$  равна алгебраическому дополнению матрицы  $\Delta$  к элементу  $\Delta_{ii}$ .

**Доказательство.** Без ограничения общности будем считать, что  $i = N$ . Пусть  $\Delta^{(N,N)}$  — матрица, получающаяся из матрицы  $\Delta$  вычёркиванием её  $N$ -ой строки и  $N$ -го столбца. Тогда алгебраическое дополнение матрицы  $\Delta$  к элементу  $\Delta_{NN}$  есть

$$\det \Delta^{(N,N)} = \sum_{\sigma \in S_{N-1}} (-1)^\sigma \prod_{j=1}^{N-1} \Delta_{j\sigma(j)}. \quad (4)$$

После того, как мы выразим  $\Delta_{jk}$  через  $x_{jk}$ , раскроем скобки и приведём подобные слагаемые, правая часть равенства превратится в сумму мономов вида  $\pm x_{1k_1} \dots x_{(N-1)k_{N-1}}$ . Каждому такому моному естественным образом сопоставляется подграф  $H$  графа  $G$ , содержащий рёбра, которые отвечают сомножителям этого монома:  $\overrightarrow{v_1 v_{k_1}}, \dots, \overrightarrow{v_{N-1} v_{k_{N-1}}}$ . Поэтому для доказательства теоремы достаточно убедиться, что множество получившихся в итоге мономов находится в биективном соответствии с множеством ориентированных остовных деревьев с корнем  $v_N$ , причём каждый моном взят с коэффициентом «единица».

Посмотрим сначала, как это работает для графа  $G$  из примера 1.1. В этом случае  $N = 5$ , то есть  $(N - 1) = 4$  и, скажем, перестановке  $\sigma = (13) \in S_4$  соответствует слагаемое

$$(-1)^\sigma \Delta_{13} \Delta_{22} \Delta_{31} \Delta_{44} = (-1)(-x_{13})(x_{23} + x_{24})(-x_{31})(x_{42} + x_{45}).$$

Раскрывая скобки, мы получим четыре монома, одним из которых будет  $(-x_{13}x_{24}x_{31}x_{42})$ ; соответствующий ему подграф  $H$  изображён на рис. 1.2. Мономы, отвечающие подграфу  $H$ , возникнут также из слагаемых по перестановкам  $\text{id}$ ,  $(24)$  и  $(13)(24)$ , причём перестановке  $(24)$  будет соответствовать моном со знаком «минус», а двум другим — со знаком «плюс». В итоге эти четыре монома благополучно сократятся.

В общем случае представим  $\det \Delta^{(N,N)}$  в виде

$$\det \Delta^{(N,N)} = \prod_{j=1}^{N-1} \Delta_{jj} + \sum_{\sigma \neq \text{id}} (-1)^\sigma \prod_{j=1}^{N-1} \Delta_{j\sigma(j)}.$$

Первое слагаемое отвечает всевозможным подграфам, у которых из каждой вершины, кроме  $v_N$ , выходит ровно одно ребро (а из  $v_N$  не выходит ничего). Часть из этих подграфов — деревья, а каждый из оставшихся имеет хотя бы один цикл. Остаётся убедиться, что если подграф  $H$  обладает циклом, то соответствующее ему слагаемое сократится.

В самом деле, пусть циклическая структура подграфа  $H$  задаётся перестановкой  $\tau \in S_{N-1}$ , причём  $\tau = \tau_1 \dots \tau_m$  — представление этой перестановки в виде произведения независимых циклов. Тогда мономы, соответствующие подграфу  $H$ , возникают в тех слагаемых из суммы (4), которые отвечают произведениям элементов какого-либо подмножества из множества циклов  $\{\tau_1, \dots, \tau_m\}$ . При этом знак, стоящий перед мономом, равен  $(-1)^k$ , где  $k$  — количество циклов в выбранном подмножестве, поскольку каждый цикл  $\tau_t = (i_1, \dots, i_t)$  даёт вклад

$$(-1)^{\tau_t} (-x_{i_1 i_2}) \dots (-x_{i_{t-1} i_t}) (-x_{i_t i_1}) = (-1)^{(t-1)+t} x_{i_1 i_2} \dots x_{i_{t-1} i_t} x_{i_t i_1} = -x_{i_1 i_2} \dots x_{i_{t-1} i_t} x_{i_t i_1}.$$

Так как общее число различных подмножеств из  $k$  элементов равно  $C_m^k$ , то чтобы проверить, что все мономы, соответствующие подграфу  $H$ , сократятся, нам достаточно воспользоваться биномом Ньютона:

$$C_m^0 - C_m^1 + C_m^2 - \dots + (-1)^m C_m^m = (1 - 1)^m = 0.$$

Требуемое доказано. ■

**Замечание 1.4.** Совершенно таким же способом можно доказать более общее утверждение: именно, если в условиях теоремы 1.3 рассмотреть алгебраическое дополнение

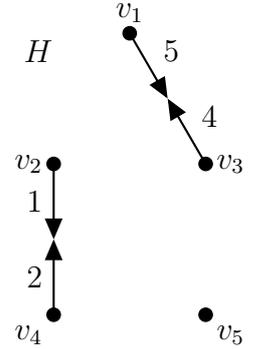


Рис. 1.2.

матрицы  $\Delta$  к элементу  $\Delta_{ij}$  при  $i \neq j$ , то мы также получим величину  $Z_{v_i}$ . Иными словами, совершенно не важно, какой столбец мы вычёркиваем из матрицы  $\Delta$ , а вот строка роль играет. Убедиться в этом можно уже на примере графа, состоящего из двух вершин, два ребра которого имеют разные веса  $p$  и  $q$  (рис. 1.3). Для него

$$\Delta = \begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{c} v_1 \bullet \xrightarrow{p} \bullet \xleftarrow{q} \bullet v_2 \\ \text{Рис. 1.3.} \end{array}$$

откуда  $\det \Delta^{(1,1)} = -\det \Delta^{(1,2)} = q$ , а  $\det \Delta^{(2,2)} = -\det \Delta^{(2,1)} = p$ . Здесь  $\det \Delta^{(i,j)}$  обозначает матрицу, полученную из матрицы  $\Delta$  вычёркиванием  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца.

**Пример 1.5.** Пусть в графе, изображённом на рис. 1.1, в качестве корня выбрана вершина  $v^* = v_3$ . Тогда из шести ориентированных остовных деревьев с корнем  $v^*$  по два имеют веса 15 и 6, а ещё два имеют веса 10 и 4 соответственно (рис. 1.4). Таким образом, общая сумма весов этих деревьев составляет  $2 \cdot 15 + 2 \cdot 6 + 10 + 4 = 56$ .

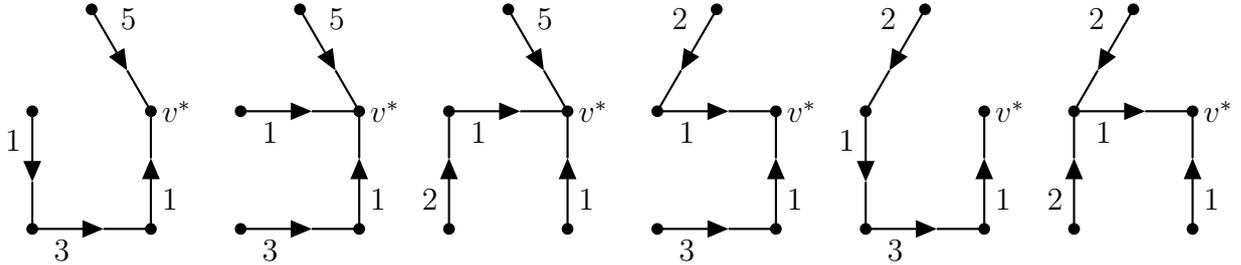


Рис. 1.4.

Посмотрим, какой результат выдаст теорема 1.3 с учётом замечания 1.4. Для этого вычислим алгебраические дополнения матрицы  $\Delta$  к элементам  $\Delta_{33}$  и  $\Delta_{31}$ :

$$\det \Delta^{(3,3)} = \det \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 7 \cdot (10 - 2) \cdot 1 = 56,$$

$$\det \Delta^{(3,1)} = \det \begin{pmatrix} -2 & -5 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -2 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-2) \cdot (-30 + 2) \cdot 1 = 56.$$

При вычислении  $\det \Delta^{(3,1)}$  мы прибавили первую строку ко второй, вычли первую строку из третьей, а также прибавили к третьей строке утроенную четвёртую строку. Как видим, что в первом, что во втором случае получился один и тот же результат: 56.

Утверждение теоремы Кирхгофа легко приспособить для неориентированных графов: нужно просто считать, что каждое ребро направлено в обе стороны. Можно применить его и для невзвешенных графов: в этом случае естественно положить вес каждого ребра равным единице, а величина  $Z_{v_i}$  превращается в общее число остовных деревьев графа  $G$ . Ввиду важности оформим этот результат в виде теоремы.

**Теорема 1.6.** Пусть  $G = (V, E)$  — неориентированный помеченный связный граф без петель и двойных рёбер. Тогда число его остовных деревьев равно любому алгебраическому дополнению матрицы  $\Delta = (\Delta_{ij})$ , определённой соотношением

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} \deg v_i, & \text{если } i = j; \\ -1, & \text{если } i \neq j, \text{ вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ соединены ребром}; \\ 0, & \text{если } i \neq j, \text{ вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ не соединены ребром.} \end{cases} \quad (5)$$

**Доказательство.** С учётом замечания 1.4 требуемое утверждение немедленно вытекает из теоремы 1.3. Отметим также, что существует альтернативное краткое, хотя и не элементарное доказательство (см. [3]). ■

**Замечание 1.7.** Теорема 1.6 обычно называется *Матричной Теоремой о Деревьях*. Иногда бывает полезно использовать её для неориентированных связных графов с двойными рёбрами. В этом случае она формулируется и доказывается точно так же, нужно только немного видоизменить определение матрицы  $\Delta$ :

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} \deg v_i, & \text{если } i = j; \\ -x_{ij}, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь  $x_{ij}$  — количество рёбер, соединяющих вершины  $v_i$  и  $v_j$ .

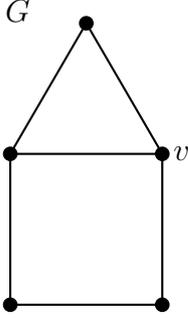


Рис. 1.5.

**Пример 1.8.** Пусть граф  $G$  состоит из пяти вершин, соединённых между собой рёбрами так, как это показано на рис. 1.5. Тогда ему соответствует матрица следующего вида:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Согласно Матричной Теореме о Деревьях, количество остовных деревьев графа  $G$  будет равно любому алгебраическому дополнению этой матрицы. Например, алгебраическому дополнению к элементу  $\Delta_{32}$ :

$$-\det \Delta^{(3,2)} = -\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = -((-2-1) \cdot (4-1) + 2(-1)(-1)(-1)) = 11.$$

С другой стороны, число остовных деревьев этого графа легко вычислить непосредственно. В самом деле, граф  $G$  состоит из двух пересекающихся циклов длины три и четыре соответственно. Чтобы получить остовное дерево, необходимо удалить по одному ребру из каждого цикла, однако удаляемые рёбра должны быть различными. Поэтому количество остовных деревьев есть  $3 \cdot 4 - 1 = 11$ .

## 1.2. Бомбейский трюк

Пусть  $G = (V, E)$  — неориентированный связный граф без петель и двойных рёбер,  $v \in V$  — произвольная его вершина. Зададимся вопросом: какова вероятность того, что для данного остовного дерева  $T$  вершина  $v$  является листом, то есть  $\deg v = 1$ ? Метод, позволяющий ответить на этот вопрос, называется *Бомбейским трюком*. Опишем, в чём этот метод заключается.

Рассмотрим граф  $G'$ , получающийся из графа  $G$  удалением вершины  $v$  со всеми входящими из неё рёбрами. Каждому остовному дереву графа  $G$ , для которого вершина  $v$  является листом, естественным образом сопоставляется остовное дерево графа  $G'$ , причём у полученного таким образом дерева ровно  $\deg v$  прообразов при указанном сопоставлении. Учитывая, что согласно теореме 1.6 количество остовных деревьев графа  $G'$  равно любому алгебраическому дополнению матрицы  $\Delta'$ , определяемой по графу  $G'$  соотношением (5), мы приходим к следующей формуле

$$\mathbb{P}(v \text{ является листом}) = \deg(v) \cdot (-1)^{k+l+k'+l'} \cdot \frac{\det \Delta'^{(k',l')}}{\det \Delta^{(k,l)}}. \quad (8)$$

Здесь, как и ранее, выражение  $\Delta^{(k,l)}$  обозначает матрицу, из которой вычеркнуты  $k$ -ая строка и  $l$ -ый столбец, а потому, величина  $(-1)^{k+l} \det \Delta^{(k,l)}$  является одним из алгебраических дополнений матрицы  $\Delta$ . Аналогично  $(-1)^{k'+l'} \det \Delta'^{(k',l')}$  представляет собой некоторое алгебраическое дополнение матрицы  $\Delta'$ .

**Замечание 1.9.** Формула (8) естественным образом обобщается на взвешенные графы. Именно, если  $x_{vw}$  — вес ребра, соединяющего вершины  $v$  и  $w$ , то мы получаем

$$\mathbb{P}(v \text{ является листом}) = \left( \sum_{w \in V} x_{vw} \right) \cdot (-1)^{k+l+k'+l'} \cdot \frac{\det \Delta'^{(k',l')}}{\det \Delta^{(k,l)}}. \quad (9)$$

Можно сделать обобщение и на ориентированные графы. Например, если мы хотим найти вероятность того, что вершина  $v$  будет листом остовного дерева при условии, что она же является его корнем, нужно воспользоваться следующей формулой:

$$\mathbb{P}(v \text{ является листом} \mid v \text{ является корнем}) = \frac{\sum_{w \in V} x_{vw} \det \Delta'^{(w,w)}}{\det \Delta^{(v,v)}}. \quad (10)$$

**Пример 1.10.** Посмотрим на граф  $G$  из примера 1.8. В этом случае матрица  $\Delta$  задаётся формулой (7), а матрица  $\Delta'$  имеет вид

$$\Delta' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

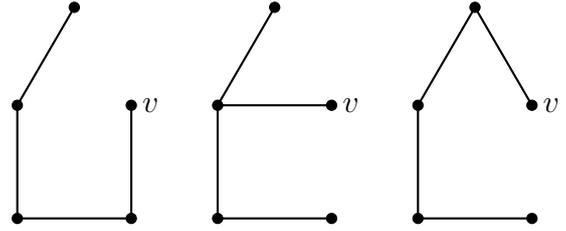


Рис. 1.6.

Ясно, что любое алгебраическое дополнение этой матрицы равно единице (что неудивительно, поскольку граф  $G'$  является деревом). Следовательно, ввиду полученного в примере 1.8 результата, а также с учётом равенства  $\deg v = 3$ , формула (8) даёт нам

$$\mathbb{P}(v \text{ является листом}) = 3 \cdot \frac{1}{11} = \frac{3}{11}.$$

Если же граф  $G$  ориентированный и взвешенный, как в примере 1.1, то матрица  $\Delta$  задаётся формулой (3), а считая, что  $v = v_3$ , мы понимаем, что матрица  $\Delta'$  имеет вид

$$\Delta' = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вид полученной матрицы ярко отражает специфику ориентированных графов: её алгебраические дополнения зависят от вычёркиваемой строки. В данном случае мы получим не ноль, только если вычёркнем последнюю строку — так вышло потому, что из вершины  $v_5$  выходит ровно одно ребро, и ведёт оно в точности в  $v$ , то есть остовное дерево графа  $G'$  должно быть укоренено в вершину  $v_5$ . Итого  $\det \Delta'^{(1,1)} = 0$ ,  $\det \Delta'^{(2,2)} = 0$ ,  $\det \Delta'^{(4,4)} = 0$ ,  $\det \Delta'^{(5,5)} = 6$ , что соответствует единственному удовлетворяющему условию остовному дереву веса 6, и применение формулы (10) даёт нам

$$\mathbb{P}(v \text{ является листом} \mid v \text{ является корнем}) = \frac{5 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 6}{56} = \frac{3}{28},$$

что полностью согласуется с выводами примера 1.5.

В формулах (8), (9) и (10) матрицы  $\Delta$  и  $\Delta'$  имеют разные размеры, что, как мы вскоре увидим, не очень удобно. К счастью, это недоразумение легко исправить. Для этого достаточно рассматривать в качестве  $G'$  не граф с удалённой вершиной  $v$ , а граф, в котором вершина  $v$  соединена ровно с одним из своих соседей. То есть чтобы получить граф  $G'$ , нужно удалить из графа  $G$  не  $\deg v$ , а  $(\deg v - 1)$  рёбер, причём совершенно неважно, какое именно ребро оставить. Очевидно, что количество остовных деревьев у таких графов одно и то же, зато во втором случае размеры матриц  $\Delta'$  и  $\Delta$  совпадают. Поэтому в дальнейшем мы везде будем считать, что вершина  $v$  в графе  $G'$  есть, но она является листом.

Воспользуемся теперь этим новообретённым свойством матриц  $\Delta$  и  $\Delta'$ . Для определённости будем считать, что при использовании формулы (8), мы вычисляем алгебраические дополнения, соответствующие некоторой вершине  $w$ , как в числителе, так и в знаменателе. Пусть  $B = (\Delta'^{(w,w)} - \Delta^{(w,w)}) - \text{дефект}$ , то есть отличие матрицы  $\Delta'^{(w,w)}$  от исходной матрицы  $\Delta^{(w,w)}$ . Тогда формула (8) переписывается следующим образом:

$$\mathbb{P}(v \text{ является листом}) = \deg v \cdot \frac{\det \Delta'^{(w,w)}}{\det \Delta^{(w,w)}} = \deg v \cdot \det (E + (\Delta^{(w,w)})^{-1}B). \quad (11)$$

Преимущество последней формулы заключается в том, что для её применения нам не нужно вычислять алгебраические дополнения матриц  $\Delta$  и  $\Delta'$ , которые, вообще говоря, могут быть довольно громоздкими. Вместо этого мы используем матрицу  $(\Delta^{(w,w)})^{-1}B$ , причём для искомой цели достаточно найти лишь её элементы внутри относительно небольшого блока размера  $\deg v \times \deg v$ .

**Пример 1.11.** Пусть граф  $G$  представляет собой цикл из  $N$  вершин  $v_1, \dots, v_N$ , которые соединены последовательно. Без ограничения общности будем считать, что  $v = v_1$ , а при вычислении алгебраических дополнений мы вычёркиваем последнюю строку и последний столбец. Тогда имеем

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Delta^{(N,N)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta'^{(N,N)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что  $\det \Delta^{(N,N)} = N$ . В самом деле, введя обозначение  $d_N = \det \Delta^{(N,N)}$  (и подчёркивая тем самым зависимость  $\det \Delta^{(N,N)}$  от размера матрицы  $\Delta$ ), мы легко получим рекуррентное соотношение на  $d_N$ , если разложим определитель по первой строке:  $d_N = 2d_{N-1} - d_{N-2}$ . С учётом начальных условий  $d_2 = 2$  и  $d_3 = 3$ , проверяемых непосредственно, равенство  $d_N = N$  получается теперь простым применением индукции. Отсюда же мы сразу получаем  $\det \Delta'^{(N,N)} = d_{N-1} - d_{N-2} = (N-1) - (N-2) = 1$ . Поэтому согласно формуле (8) мы обретаем предсказуемое равенство

$$\mathbb{P}(v \text{ является листом}) = \deg v \cdot \frac{\det \Delta'^{(N,N)}}{\det \Delta^{(N,N)}} = \frac{2}{N}.$$

Тот же результат можно получить, вычислив матрицы  $(\Delta^{(N,N)})^{-1}$  и  $B$ :

$$(\Delta^{(N,N)})^{-1} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} N-1 & N-2 & \dots & 2 & 1 \\ N-2 & 2N-4 & & 4 & 2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 2 & 4 & & 2N-4 & N-2 \\ 1 & 2 & \dots & N-2 & N-1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{P}(v \text{ является листом}) = \deg v \cdot \det(E + (\Delta^{(N,N)})^{-1}B) = 2 \cdot \left(1 + \frac{N-1}{N} \cdot (-1)\right) = \frac{2}{N}.$$

**Замечание 1.12.** Для вычисления количества остовных деревьев данного графа  $G$  также используется следующая модификация теоремы 1.6. Добавим к графу дополнительную вершину  $v^*$  — «фиктивный корень» — и соединим её с какой-нибудь одной вершиной  $v_k$  графа  $G$  так, чтобы  $v^*$  стала в новом графе листом. Ясно, что от такой операции общее число остовных деревьев не изменится, а применение теоремы 1.6 даст нам в качестве искомой величины выражение  $\det(\Delta + E_{kk})$ , где  $E_{kk}$  — матрица, у которой все значения нулевые, кроме  $k$ -го диагонального элемента, равного единице.

Аналогичные модификации можно внести в формулы (8) и (11):

$$\mathbb{P}(v \text{ является листом}) = \deg(v) \cdot \frac{\det(\Delta' + E_{kk})}{\det(\Delta + E_{kk})}. \quad (12)$$

$$\mathbb{P}(v \text{ является листом}) = \deg v \cdot \det(E + (\Delta + E_{kk})^{-1}B). \quad (13)$$

### 1.3. Случайные блуждания со стёртыми петлями

Пусть  $G = (V, E)$  — неориентированный связный граф без петель, но, возможно, обладающий двойными рёбрами;  $\mathcal{T}(G)$  — множество всех его остовных деревьев. Зададимся практическим вопросом: как из множества  $\mathcal{T}(G)$  организовать случайный выбор таким образом, чтобы вероятность получить произвольное дерево была равна в точности  $p_G = |\mathcal{T}(G)|^{-1}$ , то есть чтобы выбор был равновероятным?

Наивное решение этой проблемы очевидно: создадим список всех деревьев, после чего произвольное дерево  $T$  будем брать из этого списка с вероятностью  $p_G$ . Однако такой способ весьма непрактичен: он требует огромных затрат как памяти, так и времени. Например, если граф  $G$  представляет собой кусок решётки  $\mathbb{Z}^2$  размера  $31 \times 31$ , то  $|\mathcal{T}(G)| \approx 10^{500}$ . Таким образом, для решения хоть сколько-нибудь осмысленных задач подобное решение совершенно не годится.

Более удачный алгоритм можно придумать, основываясь на теореме 1.6. Заметим, что по отношению к данному ребру  $e \in E$  множество  $\mathcal{T}(G)$  разбивается на два подмножества:  $\mathcal{T}_-(G, e) = \{T \in \mathcal{T}(G) \mid e \notin T\}$  и  $\mathcal{T}_+(G, e) = \{T \in \mathcal{T}(G) \mid e \in T\}$ . Поскольку деревья из  $\mathcal{T}_-(G, e)$  не включают в себя ребро  $e$ , множество  $\mathcal{T}_-(G, e)$  представляет собой ни что иное, как множество остовных деревьев графа  $G$  с удалённым ребром  $e$ ; его мы будем обозначать  $G^{-e}$ . Деревья же из множества  $\mathcal{T}_+(G, e)$ , напротив, содержат  $e$ , а потому мы можем отождествить их с остовными деревьями графа  $G$  со стянутым ребром  $e$  (или, что то же самое, с графом  $G^{-e}$ , у которого отождествлены вершины, соединявшиеся между собой ребром  $e$ ); последний граф будем обозначать  $G^{/e}$ .

Равенства  $\mathcal{T}_-(G, e) \cong \mathcal{T}(G^{-e})$  и  $\mathcal{T}_+(G, e) \cong \mathcal{T}(G^{/e})$  вкупе с Матричной Теоремой о Деревьях позволяют нам предьявить следующий алгоритм.

1. Занумеруем рёбра графа  $G$  каким-либо способом:  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_{|E|}\}$ .

2. Включим ребро  $e_1$  в дерево  $T$  с вероятностью  $p = 1 - \det(\Delta^{-1}\Delta')$ , после чего от рассмотрения графа  $G$  перейдём к рассмотрению графа  $G' = G^{/e_1}$ . С другой стороны, с вероятностью  $q = \det(\Delta^{-1}\Delta')$  ребро  $e_1$  в дерево включать не будем — в этом случае от графа  $G$  перейдём к  $G' = G^{-e_1}$ . Здесь матрицы  $\Delta$  и  $\Delta'$  отвечают графам  $G$  и  $G'$  соответственно согласно формуле (6).

3. Прделаем то же самое для графа  $G'$  и рёбер  $E' = \{e_2, \dots, e_{|E|}\}$ .

Ясно, что представленный выше алгоритм работает корректно и на выходе выдаёт остовное дерево графа  $G$ . Можно доказать (см., например, [13]), что полученное таким образом распределение на множестве  $\mathcal{T}(G)$  будет однородным. При этом сложность алгоритма полиномиальна по времени, поскольку именно столько требуется для вычисления определителя матрицы.

Однако наиболее удобным оказывается подход, связанный со случайными блужданиями на графе  $G$ , к описанию которого мы переходим.

**Определение 1.13.** Пусть  $G = (V, E)$  — неориентированный связный граф без петель, причём  $V = \{v_1, \dots, v_N\}$ , а  $x_{ij}$  — количество рёбер, соединяющих вершины  $v_i$  и  $v_j$ . *Простым случайным блужданием* на графе  $G$  мы будем называть такую последовательность случайных величин  $\xi_n$ , для которой

$$\mathbb{P}(\xi_{n+1} = v_j \mid \xi_n = v_i) = \frac{x_{ij}}{\deg v_i}. \quad (14)$$

**Определение 1.14.** Пусть  $\gamma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  — путь на графе  $G$ . *Путь со стёртыми петлями* называется путь  $LE(\gamma) = (y_0, \dots, y_m) = (x_{n_0}, \dots, x_{n_m})$ , определяемый рекурсивно согласно следующему правилу:

$$n_0 = 0, \quad n_{i+1} = \max\{j: \gamma(j) = \gamma(n_i)\} + 1. \quad (15)$$

Неформально говоря, если дан путь  $\gamma$ , то путь со стёртыми петлями  $LE(\gamma)$  получается из него удалением всех петель, встречающихся по порядку. Представляя себе что мы движемся вдоль пути, оставляя за собой след (траекторию пути), мы должны стереть петлю, как только окажемся в той точке, в которой уже были. После этого мы совершенно забываем, что когда-то гуляли по этой петле — мы как бы стёрли след не только на графе, но и в своей памяти — и можем снова посещать её точки как ни в чём не бывало. Отсюда вытекает, что нам важно, в каком направлении мы совершаем обход пути. Иными словами, для произвольного пути  $\gamma$  траектории путей  $LE(\gamma)$  и  $LE(\gamma^{-1})$ , вообще говоря, различаются. Простейший пример, иллюстрирующий подобную ситуацию, изображён на рис. 1.7.

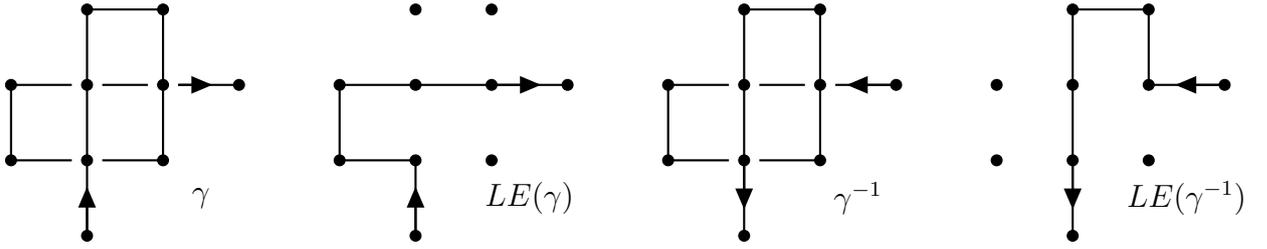


Рис. 1.7.

**Определение 1.15.** Пусть на графе  $G$  зафиксировано некоторое подмножество вершин  $A \subset V$ . Пусть, далее,  $\xi_n$  — простое случайное блуждание на графе  $G$ , стартующее из точки  $x \in V$  (то есть  $\xi_0 = x$ ),  $\tau_A = \min\{n \geq 0: \xi_n \in A\}$  — время достижения множества  $A$ ,  $\gamma = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{\tau_A})$  — соответствующий этому случайному блужданию путь. Тогда путь  $LEW(x, A) = LE(\gamma)$  называется *блужданием со стёртыми петлями* из вершины  $x$  в множество  $A$ .

Используя случайные блуждания со стёртыми петлями, можно предложить следующий алгоритм для выбора случайного остовного дерева для графа  $G$  (так называемый *алгоритм Вилсона*):

1. Занумеруем вершины графа  $G$  произвольным способом:  $V = \{v_1, \dots, v_N\}$ .
2. Положим  $\mathcal{U}_1 = \{v_1\}$  — множество, состоящее из одной вершины.
3. Для каждого  $k = 2, \dots, N$  рассмотрим случайное блуждание со стёртыми петлями  $LEW(v_k, \mathcal{U}_{k-1})$ , после чего определим  $\mathcal{U}_k$  как объединение  $\mathcal{U}_{k-1}$  и множества вершин, содержащихся в пути  $LEW(v_k, \mathcal{U}_{k-1})$ .
4. Искомое дерево  $T$  суть объединение путей  $LEW(v_2, \mathcal{U}_1), \dots, LEW(v_N, \mathcal{U}_{N-1})$ .

Очевидно, алгоритм Вилсона даёт на выходе некоторое дерево, причём если считать все пути  $LEW(v_k, \mathcal{U}_{k-1})$  направленными, то можно сказать, что оно будет ориентированным деревом с корнем в вершине  $v^* = v_1$ . Однако пока совершенно неясно, почему вероятность получить произвольное дерево равна  $p_G$ . Обоснованию этого факта посвящено дальнейшее изложение.

**Определение 1.16.** Пусть  $v^* \in V$  — выделенная вершина графа  $G$  (сток). Будем говорить, что на графе  $G$  заданы стеки  $\xi_{v_i, n}$ , если для всех  $v_i \in V \setminus \{v^*\}$  и  $n \in \mathbb{N}$  независимые случайные величины  $\xi_{v_i, n}$  удовлетворяют соотношениям

$$\mathbb{P}(\xi_{v_i, n} = v_j) = \frac{x_{ij}}{\deg v_i}, \quad (16)$$

где  $x_{ij}$  — количество рёбер, соединяющих вершины  $v_i$  и  $v_j$ . Для каждой вершины  $v_i$  мы будем называть  $v_i$ -стеком набор случайных величин  $\xi_{v_i, n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Набор стеков естественным образом определяет случайное блуждание на графе  $G$ , финиширующее в стоке. В самом деле, пусть  $\eta_0 = u$  — некоторая вершина графа  $G$ . Тогда на первом шаге положим  $\eta_1 = \xi_{u, 1}$  — мы как бы извлекаем из стека, соответствующего вершине  $u$ , первый элемент; теперь наверху  $u$ -стека находится случайная величина  $\xi_{u, 2}$ . На втором шаге, считая, что  $\eta_1 = w$ , мы извлекаем из  $w$ -стека лежащую сверху случайную величину  $\xi_{w, 1}$  и полагаем  $\eta_2 = \xi_{w, 1}$ . Так мы будем действовать и дальше, на каждом шаге извлекая верхний элемент соответствующего стека, до тех пор, пока в какой-то момент не достигнем стока  $v^*$ .

**Определение 1.17.** Будем называть *помеченным циклом* в стеках  $\xi_{v_i, n}$  такую последовательность пар

$$C = ((w_0, i_0), (w_1, i_1), \dots, (w_m, i_m) = (w_0, i_0)), \quad (17)$$

для которой  $\xi_{w_k, i_k} = w_{k+1}$  для всех  $k$ .

Пусть на графе  $G$  заданы стеки  $\xi_{v_i, n}$ . Предположим сначала, что на верхнем уровне стеков нет помеченных циклов, то есть в стеках нет помеченных циклов вида

$$C = ((w_0, 1), (w_1, 1), \dots, (w_{m-1}, 1), (w_m, 1) = (w_0, 1)).$$

Тогда очевидно, что для любой перенумерации вершин графа  $G$  алгоритм Вилсона выдаст одно и то же дерево, причём вероятность появления данного дерева  $T$  равна

$$\mathbb{P}(T) = \prod_{v \neq v^*} \frac{1}{\deg v} = \deg v^* \cdot \prod_{v \in V} \frac{1}{\deg v}, \quad (18)$$

поскольку для данного дерева  $T$  путь из произвольной вершины  $v$  в сток  $v^*$  определён однозначно.

Теперь допустим, что циклы на верхнем уровне имеются. Тогда получающееся при помощи алгоритма Вилсона дерево соответствует некоторому набору случайных величин, которые оказываются на верхнем уровне стеков после удаления определённого количества помеченных циклов: каждый цикл естественным образом удаляется в тот момент, когда мы стираем петлю случайного блуждания. Чтобы убедиться, что все возможные деревья равновероятны, докажем несколько вспомогательных лемм.

**Лемма 1.18.** *С вероятностью 1 будет удалено лишь конечное число помеченных циклов.*

**Доказательство.** Пусть  $\Omega(G)$  — вероятностное пространство стеков на графе  $G$ , а  $\Omega_0(G)$  — такое его подпространство, в котором для любых соседних вершин  $u, v \in V$  существует бесконечное количество натуральных чисел  $k \in \mathbb{N}$ , для которых  $\xi_{u, k} = v$ . Очевидно,  $\mathbb{P}(\Omega_0(G)) = 1$ . Поэтому нам достаточно доказать, что для любого графа  $G$  и для любого  $\omega \in \Omega_0(G)$  может быть удалено лишь конечное число циклов. Предположим, последнее утверждение не выполняется, и среди всех возможных графов наименьший по числу вершин контрпример реализуется на графе  $G$  с корнем  $v^*$ . Выберем элемент  $\omega \in \Omega_0(G)$ , которому соответствует бесконечная последовательность удалённых циклов  $C_1, C_2, \dots$ , и рассмотрим какую-нибудь вершину  $u$ , смежную с корнем. Условие  $\omega \in \Omega_0(G)$  означает, что существуют такие  $k \in \mathbb{N}$ , для которых  $\xi_{u, k} = v^*$ . Поэтому вершина  $u$  может входить лишь в конечное число удаляемых помеченных циклов: её можно

удалять до тех пор, пока какой-либо из элементов  $\xi_{u,k}$  не окажется на верхнем уровне  $u$ -стека. Однако если  $C_m$  — последний стек, содержащий  $u$ , то мы можем перейти к новому графу  $G'$  с отождествлёнными вершинами  $u$  и  $v^*$ , для которого последовательность удаляемых циклов  $C_{m+1}, C_{m+2}, \dots$  также будет бесконечной. Это противоречит минимальности графа  $G$ , а значит, доказывает утверждение леммы. ■

Порядок удаления помеченных циклов  $\mathcal{P} = (C_1, \dots, C_m)$  мы будем называть *процедурой удаления*. При этом предполагается, что в результате удаления  $C_1, \dots, C_m$  циклов на верхнем уровне стеков не останется, и мы получим дерево.

**Лемма 1.19.** Пусть  $G$  — связный граф без петель,  $\omega \in \Omega_0(G)$ . Пусть, далее,  $C_1$  и  $C'_1$  — два помеченных цикла, изначально находящиеся на верхнем уровне стеков, а  $\mathcal{P} = (C_1, \dots, C_m)$  — процедура удаления, начинающаяся с одного из них. Тогда:

а)  $C'_1 = C_k$  для некоторого  $k \in \{2, \dots, m\}$ ;

б)  $\mathcal{P}' = (C'_1, C_1, \dots, C_{k-1}, C_{k+1}, \dots, C_m)$  также является процедурой удаления, причём  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{P}'$  приводят к одному и тому же остовному дереву графа  $G$ .

**Доказательство.** а) Цикл  $C'_1$  будет оставаться на верхнем уровне стеков до тех пор, пока не окажется задействована одна из входящих в него случайных величин. Однако любые два помеченных цикла, находящиеся на верхнем уровне стеков, либо не пересекаются, либо совпадают. Поэтому  $C'_1$  останется нетронутым до тех пор, пока не совпадёт с некоторым помеченным циклом  $C_k$ .

б) Как следует из доказательства пункта а), вершины графа, входящие в цикл  $C'_1$ , не пересекаются с вершинами, задействованными в циклах  $C_1, \dots, C_{k-1}$ . Поэтому как для процедуры  $\mathcal{P}$ , так и для процедуры  $\mathcal{P}'$  после удаления первых  $k$  циклов на верхнем уровне стеков окажутся одни и те же случайные величины. Значит, и дерево в итоге получится одно и то же. ■

**Лемма 1.20.** Если  $\omega \in \Omega_0(G)$ , то получающееся дерево не зависит от выбранной процедуры удаления циклов.

**Доказательство.** Допустим, утверждение леммы не выполняется. Тогда можно выбрать  $\omega \in \Omega_0(G)$  и соответствующие этим стекам процедуры удаления  $\mathcal{P} = (C_1, \dots, C_m)$  и  $\mathcal{P}' = (C'_1, \dots, C'_l)$ , которые выдают различный результат, таким образом, чтобы суммарное число помеченных циклов в выбранных процедурах было минимальным. Согласно лемме 1.19 для некоторого  $k \in \{2, \dots, m\}$  выполнено равенство  $C'_1 = C_k$ , причём  $\mathcal{P}'' = (C'_1, C_1, \dots, C_{k-1}, C_{k+1}, \dots, C_m)$  является процедурой удаления, в результате которой получается то же самое дерево, что и в результате  $\mathcal{P}$ . Однако это означает, что если мы удалим из  $\omega$  цикл  $C'_1$ , то мы получим новые стеки, для которых процедуры удаления  $(C'_2, \dots, C'_l)$  и  $(C_1, \dots, C_{k-1}, C_{k+1}, \dots, C_m)$  выдадут различные результаты. Это противоречит условию минимальности суммы помеченных циклов в выбранных изначально процедурах удаления, а значит, доказывает утверждение леммы. ■

Из леммы 1.20 немедленно следует, что для данного набора стеков  $\omega \in \Omega_0(G)$  каждый конкретный помеченный цикл  $C$  либо будет удалён, либо нет — вне зависимости от выбора процедуры удаления. В частности, имеется фиксированное множество циклов  $\mathcal{C}(\omega) = \{C_1, \dots, C_s\}$ , которые будут удалены. Вероятность того, что именно это множество циклов будет удалено, а результатом применения алгоритма Вилсона будет данное дерево  $T$ , есть

$$\mathbb{P}(T) \cdot \mathbb{P}(\mathcal{C}(\omega)) = \mathbb{P}(T) \cdot \prod_{j=1}^s \mathbb{P}(C_j),$$

где  $\mathbb{P}(T)$  определяется формулой (18) и зависит только от вершины  $v^*$ , а вероятность встретить помеченный цикл  $C_j = ((w_{j_0}, i_{j_0}), (w_{j_1}, i_{j_1}), \dots, (w_{j_{m-1}}, i_{j_{m-1}}), (w_{j_m}, i_{j_m}))$  равна

$$\mathbb{P}(C_j) = \prod_{k=0}^{j_m-1} \frac{1}{\deg w_{j_k}}.$$

Поскольку мы получили величину, не зависящую от дерева  $T$ , это означает, что все остовные деревья равновероятны, что мы и хотели доказать.

**Замечание 1.21.** Алгоритм Вилсона в том виде, в котором он был описан изначально, зависит от нумерации вершин графа  $G$ . Однако коль скоро мы зафиксировали случайные величины в стеках, порядок удаления помеченных циклов роли не играет. Поэтому и нумеровать вершины мы можем так, как нам заблагорассудится; в частности, это можно делать случайным образом, в зависимости от промежуточного результата. Кроме того, не важно, какую именно вершину выбрать в качестве корня, поскольку количество ориентированных остовных деревьев совпадает с числом неориентированных остовных деревьев.

## 1.4. Метод Мостов

Пусть  $G = (V, E)$  — неориентированный связный граф без петель, но, возможно, обладающий двойными рёбрами, причём  $V = \{v_1, \dots, v_N\}$ , а  $x_{ij}$  обозначает количество рёбер, соединяющих вершины  $v_i$  и  $v_j$  соответственно. Рассмотрим расширенный граф  $G^*$ , обладающий по сравнению с  $G$  дополнительной вершиной  $v^*$ , которая соединена с некоторыми вершинами исходного графа. Как и выше, мы будем называть вершину  $v^*$  *корнем* или *стоком*. Пусть, далее,  $i_1$  и  $j_1$  — некоторые две вершины. Зададимся таким вопросом: каково количество двухкомпонентных остовных лесов графа  $G^*$ , для которых вершины  $i_1$  и  $j_1$  лежали бы в одной компоненте, а сток  $v^*$  — в другой?

Для решения поставленной задачи мы будем использовать так называемый *Метод Мостов*, который в своей основе использует теорему 1.3. Заключается он в следующем. Определим матрицу  $\Delta'$  размера  $N \times N$  согласно правилу

$$\Delta'_{ij} = \begin{cases} \deg v_i, & \text{если } i = j; \\ -x_{ij} - \eta, & \text{если } i = i_1, j = j_1; \\ -x_{ij}, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (19)$$

Подчеркнём, что здесь матричные элементы находятся в соответствии с парами вершин графа  $G$ , однако степени вершин мы рассматриваем относительно графа  $G^*$ . Таким образом, матрица  $\Delta'$  отличается от алгебраического дополнения до  $v^*$  стандартной матрицы  $\Delta$ , определяемой формулой (6), единственным элементом. С точки зрения графа  $G$  это отличие означает, что мы как бы провели дополнительное ребро от вершины  $i_1$  к вершине  $j_1$  — это как раз и есть тот самый «мост», давший название методу. В частности, при  $\eta = 0$  согласно замечанию 1.7 Матричная Теорема о Деревьях гарантирует нам, что количество остовных деревьев графа  $G^*$  равно  $\det \Delta'$ .

Оказывается, выполнена следующая теорема.

**Теорема 1.22.** *В описанных выше условиях количество двухкомпонентных остовных лесов графа  $G^*$ , в которых вершины  $i_1$  и  $j_1$  содержатся в одной компоненте леса, а сток  $v^*$  — в другой, равно*

$$-\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\det \Delta'}{\eta}. \quad (20)$$

**Доказательство.** Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, полезно вспомнить доказательство теоремы 1.3 и учесть замечание 1.7. Определитель, стоящий в числителе формулы (20), относительно  $\eta$  является многочленом первой степени, причём свободный член, очевидно, равен количеству остовных деревьев графа  $G^*$ . Что касается коэффициента при  $\eta$ , то при разложении определителя в сумму по перестановкам в него вносят вклад лишь те перестановки  $\sigma \in S_N$ , для которых  $\sigma(i_1) = j_1$ . С точки зрения графа  $G$  это означает, что соответствующим слагаемым должен сопоставляться подграф, включающий в себя цикл, одно из рёбер которого — добавленный нами «мост»  $i_1 j_1$ . С другой стороны, как и в доказательстве теоремы 1.3, легко видеть,

что слагаемые, сопоставляемые подграфам с двумя и более циклами, сократятся, то есть сохраняются в точности те слагаемые, которые отвечают ветвям, укоренённым либо в цикл, либо в сток. Остаётся вспомнить, что цикл выдаёт знак «минус» в определителе, что завершает доказательство теоремы. ■

**Пример 1.23.** Пусть граф  $G^*$  — такой, как на рис. 1.8. Тогда матрица  $\Delta'$  имеет вид

$$\Delta' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -\eta & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

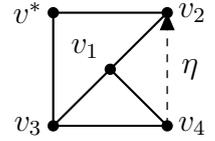


Рис. 1.8.

Нетрудно вычислить определитель этой матрицы — он равен  $\det \Delta' = 11 - 4\eta$ . Это означает, что граф  $G^*$  обладает одиннадцатью остовными деревьями, а также четырьмя двухкомпонентными остовными лесами, одна из компонент которых содержит сток  $v^*$ , а другая — вершины  $v_2$  и  $v_4$ . Эти леса изображены на рис. 1.9.

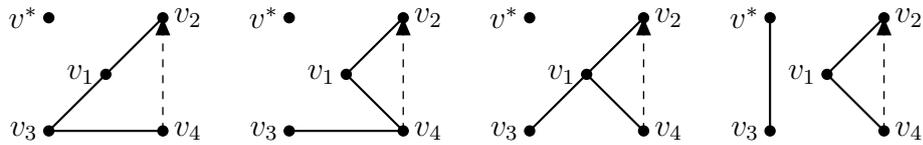


Рис. 1.9.

**Пример 1.24.** Рассуждение из доказательства теоремы 1.22 можно провести и в том случае, когда мы не ограничиваемся одним «мостом». Пусть, например, граф  $G^*$  — такой, как показано на рис. 1.10, и мы вставили два «моста»: от вершины  $v_3$  к вершине  $v_4$  и от вершины  $v_4$  к вершине  $v_2$ . Тогда матрица  $\Delta'$  имеет вид

$$\Delta' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -\eta \\ -1 & -\eta & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

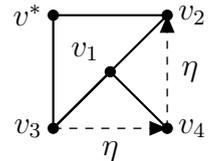


Рис. 1.10.

а её определитель  $\det \Delta' = 4 - 4\eta - \eta^2$ . В этом случае свободный член, как и раньше, отвечает остовным деревьям графа  $G^*$  (рис. 1.11); коэффициент при  $\eta$  соответствует двухкомпонентным остовным лесам, одна из компонент которых содержит сток  $v^*$ , а другая — вершины  $v_2$  и  $v_4$  (рис. 1.12); и, наконец, коэффициент при  $\eta^2$  позволяет узнать количество трёхкомпонентных лесов, одна из компонент которых содержит сток  $v^*$ , другая — вершину  $v_4$ , а третья — вершины  $v_2$  и  $v_3$  (рис. 1.13).

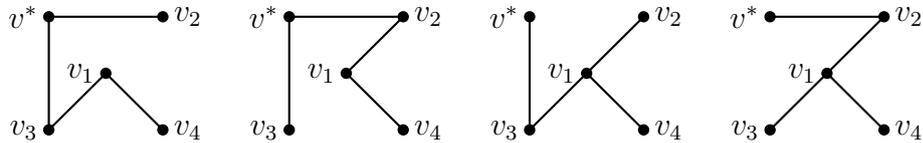


Рис. 1.11.

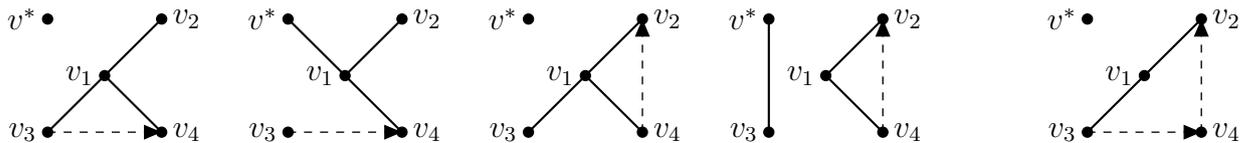


Рис. 1.12.

Рис. 1.13.

Нельзя не отметить, что при использовании двух и более «мостов» следует проявлять известную степень аккуратности, потому что в зависимости от строения перестановки одно то же число «мостов» может давать в разложение определителя  $\det \Delta'$  слагаемые разных знаков.

**Пример 1.25.** Пусть граф  $G^*$  выглядит так, как показано на рис. 1.14. Добавим два «моста»: от вершины  $v_1$  к вершине  $v_3$  и от вершины  $v_4$  к вершине  $v_2$ . Тогда матрица  $\Delta'$  примет вид

$$\Delta' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 - \eta & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 - \eta & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

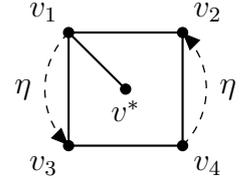


Рис. 1.14.

а её определитель будет равен  $\det \Delta' = 4 - 10\eta$ . Нулевой коэффициент при  $\eta^2$  вовсе не означает, что рассматриваемый граф не имеет трёхкомпонентных лесов. Здесь всё дело в том, что эти леса входят в сумму с разным знаком. Именно, леса, в которых одна из компонент содержит сток  $v^*$ , другая — вершины  $v_1$  и  $v_3$ , а третья — вершины  $v_2$  и  $v_4$ , соответствуют включающим в себя «мосты» подграфам с двумя циклами, а потому входят в сумму со знаком «плюс». Те же леса, в которых вершины  $v_1$  и  $v_2$  — в одной компоненте, а вершины  $v_3$  и  $v_4$  — в другой, отвечают подграфам с одним циклом, и входят в сумму со знаком «минус» (рис. 1.15).

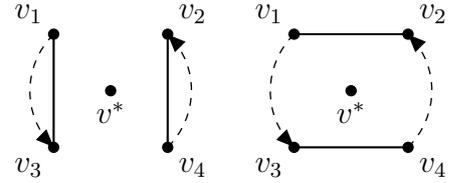


Рис. 1.15.

Для полноты картины сформулируем теорему, которую можно в равной степени считать как обобщением Метода Мостов, так и обобщением теоремы Кирхгофа и замечания 1.4. Пусть  $G = (V, E)$  — связный ориентированный граф без петель и двойных рёбер, множество вершин которого есть  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ , а для всех  $i \neq j$  ребру, ведущему из  $v_i$  в  $v_j$ , приписан вес  $x_{ij}$ . Пусть, как и в условии теоремы Кирхгофа, матрица  $\Delta = (\Delta_{ij})$  задаётся формулой (2):

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} -x_{ij}, & \text{если } i \neq j, \\ \sum_{k \neq i} x_{ik}, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Пусть, далее,  $W$  и  $U$  — два подмножества в  $V$ , состоящие из одного и того же количества элементов:  $W = U = k$ . Введём следующие обозначения:  $\Delta^{(W,U)}$  — матрица, получающаяся из матрицы  $\Delta$  вычёркиванием строк, соответствующих вершинам из  $W$ , и столбцов, отвечающих вершинам из  $U$ ;

$$n(W, V) = |\{(i, j) \mid i < j, v_i \in V \setminus W, v_j \in W\}|, \quad \varepsilon(W, V) = (-1)^{n(W, V)};$$

и аналогично для  $n(U, V)$  и  $\varepsilon(U, V)$ .

**Теорема 1.26.** В указанных выше обозначениях выполнено соотношение

$$\det \Delta^{(W, V)} = \varepsilon(W, V) \cdot \varepsilon(U, V) \cdot \sum_F \varepsilon(\sigma) x_F,$$

где сумма берётся по всем остовным лесам  $F$ , состоящим из  $k$  ориентированных деревьев, каждое из которых содержит ровно одну вершину из  $U$ , и ровно одну вершину из  $W$  (последняя является его корнем). Величина  $\varepsilon(\sigma)$  суть знак перестановки, которой является определяемое лесом  $F$  взаимно однозначное отображение  $\sigma: W \rightarrow U$  относительно заданного на  $V$  порядка, а  $x_F$  означает вес леса  $F$ , то есть произведение весов всех входящих в этот лес рёбер.

Доказательство теоремы 1.26 проводится в духе рассуждений из доказательств теоремы 1.3 и теоремы 1.22. Здесь мы его приводить не будем, а за деталями отсылаем интересующегося читателя, например, к [6] или [7].

## 2. Дискретная функция Грина

Этот раздел посвящён технике вычисления функции Грина для различных случайных блужданий. Как и выше, мы постараемся вести изложение в максимальной общности, постепенно сужая рассматриваемую область, чтобы в итоге прийти к интересующим нас объектам. Более точно, сначала мы обсудим общие принципы вычисления функций Грина, затем перейдём к случаю трансляционно инвариантных случайных блужданий на гиперкубических решётках, и наконец, сфокусируем внимание на размерности  $d = 2$ . Как итог этой деятельности, в заключение мы приведём функцию Грина для плоской решётки с границей и продемонстрируем её асимптотическое поведение.

### 2.1. Общий случай

Пусть дано некоторое случайное блуждание с множеством состояний  $S$  и матрицей перехода  $P = (P_{ss'})$ . Рассмотрим разностное уравнение вида

$$\sum_{s' \in S} P_{ss'}(u(s) - u(s')) = f(s), \quad (21)$$

где  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  — функция, определённая на множестве состояний. Наша ближайшая цель — научиться решать это уравнение в произвольном случае.

**Определение 2.1.** Пусть  $P_t(s | s_0)$  — вероятность попасть из состояния  $s_0$  в состояние  $s$  за  $t$  шагов. Рассмотрим ряд

$$P(s | s_0; \xi) = \sum_{t=0}^{\infty} P_t(s | s_0) \cdot \xi^t. \quad (22)$$

Тогда функцией Грина, связанной со случайным блужданием, называется величина

$$P(s | s_0; 1^-) = \lim_{\xi \rightarrow 1^-} P(s | s_0; \xi). \quad (23)$$

**Утверждение 2.2.** Решение уравнения (21) имеет вид

$$u(s) = \sum_{s_0 \in S} f(s_0) P(s | s_0; 1^-), \quad (24)$$

в том случае, если указанный ряд сходится.

**Доказательство.** Заметим, что по определению для каждого  $t \in \mathbb{N}$  выполнено следующее равенство:

$$P_{t+1}(s | s_0) = \sum_{s' \in S} P_{ss'} P_t(s' | s_0),$$

Домножая его на  $\xi^{t+1}$  и суммируя по всем  $t$ , мы получим

$$P(s | s_0; \xi) = \delta_{ss_0} + \xi \sum_{s' \in S} P_{ss'} P(s' | s_0; \xi),$$

а переходя к пределу  $\xi \rightarrow 1 - 0$ , имеем

$$\delta_{ss_0} = P(s | s_0; 1^-) - \sum_{s' \in S} P_{ss'} P(s' | s_0; 1^-),$$

С учётом этого равенства, при подстановке выражения  $u(s)$ , заданного формулой (24), в левую часть разностного уравнения (21) мы получим

$$\begin{aligned} \sum_{s' \in S} P_{ss'}(u(s) - u(s')) &= \sum_{s' \in S} P_{ss'} \sum_{s_0 \in S} f(s_0) (P(s | s_0; 1^-) - P(s' | s_0; 1^-)) = \\ &= \sum_{s_0 \in S} f(s_0) \left( P(s | s_0; 1^-) - \sum_{s' \in S} P_{ss'} P(s' | s_0; 1^-) \right) = \sum_{s_0 \in S} f(s_0) \delta_{ss_0} = f(s_0). \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. ■

**Замечание 2.3.** Если ряд (24) расходится, можно попробовать найти решение уравнения (21), подставив вместо  $P(s|s_0; 1^-)$  в формулу (24) выражение  $-a(s|s_0)$ , где

$$a(s|s_0) = P(s_0|s_0; 1^-) - P(s|s_0; 1^-) = \lim_{\xi \rightarrow 1^-} (P(s_0|s_0; \xi) - P(s|s_0; \xi)). \quad (25)$$

Оно вполне может оказаться конечной величиной, хотя гарантировать этого нельзя.

**Пример 2.4.** Рассмотрим случайное блуждание на множестве  $S = \{p, q, r\}$  из трёх вершин, заданное матрицей перехода

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Разностное уравнение (21) в этом случае принимает вид

$$\begin{cases} u(p) - \frac{u(q)}{2} - \frac{u(r)}{2} = f(p) \\ -\frac{u(p)}{2} + u(q) - \frac{u(r)}{2} = f(q) \\ -\frac{u(p)}{2} - \frac{u(q)}{2} + u(r) = f(r) \end{cases},$$

и несложно убедиться стандартным метом Гаусса, что, во-первых, оно имеет решение тогда и только тогда, когда  $f(p) + f(q) + f(r) = 0$ , а во-вторых, это решение суть

$$\begin{cases} u(p) = \kappa \\ u(q) = \frac{2}{3}(f(q) - f(p)) + \kappa \\ u(r) = \frac{2}{3}(f(r) - f(p)) + \kappa \end{cases}, \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

В частности, мы имеем решение  $(2/3 f(p), 2/3 f(q), 2/3 f(r))$  при  $\kappa = 2/3 f(p)$ .

Посмотрим теперь, как работает утверждение 2.2 в нашем случае. Для упрощения записи введём следующие обозначения:  $p_t = P_t(p|p)$ ,  $q_t = P_t(q|p)$ ,  $r_t = P_t(r|p)$ . Учитывая начальные условия  $p_0 = 1$  и  $q_0 = r_0 = 0$ , несложно вывести явные формулы для последовательностей  $p_t$ ,  $q_t$  и  $r_t$ . В самом деле,

$$\begin{cases} p_{t+1} = \frac{1}{2}(q_t + r_t) \\ q_{t+1} = \frac{1}{2}(r_t + p_t) \\ r_{t+1} = \frac{1}{2}(p_t + q_t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{t+1} - q_{t+1} = -\frac{1}{2}(p_t - q_t) \\ q_{t+1} - r_{t+1} = -\frac{1}{2}(q_t - r_t) \\ r_{t+1} - p_{t+1} = -\frac{1}{2}(r_t - p_t) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_t - q_t = \left(-\frac{1}{2}\right)^t \\ q_t - r_t = 0 \\ r_t - p_t = -\left(-\frac{1}{2}\right)^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_t = \frac{1}{3} \left(1 + 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^t\right) \\ q_t = \frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^t\right) \\ r_t = \frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^t\right) \end{cases}.$$

Отсюда видно, что ряды  $P(p|p; 1^-)$ ,  $P(q|p; 1^-)$  и  $P(r|p; 1^-)$  расходятся. Зато сходятся ряды, указанные в замечании 2.3:

$$a(p|p) = 0, \quad a(q|p) = a(r|p) = \lim_{\xi \rightarrow 1^-} \sum_{t=0}^{\infty} (p_t - q_t) \xi^t = \sum_{t=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^t = \frac{2}{3}.$$

Аналогично имеем

$$a(q|q) = a(r|r) = 0, \quad a(p|q) = a(r|q) = a(p|r) = a(q|r) = \frac{2}{3},$$

а потому

$$u(p) = -a(p|p)f(p) - a(p|q)f(q) - a(p|r)f(r) = -2/3(f(q) + f(r)) = 2/3 f(p),$$

и, ожидаемо, мы получаем в качестве решения тройку  $(2/3 f(p), 2/3 f(q), 2/3 f(r))$ .

## 2.2. Трансляционно инвариантные случайные блуждания

Начиная с этого момента, мы ограничимся рассмотрением случайных блужданий на гиперкубической решётке  $S = \mathbb{Z}^d$  размерности  $d \in \mathbb{N}$ . Более того, нас будут интересовать не любые, а только трансляционно инвариантные случайные блуждания — такие, которые одинаково устроены в любой точке. Дадим точное определение этого понятия.

**Определение 2.5.** Будем говорить, что случайное блуждание *трансляционно инвариантно*, если элементы матрицы перехода  $P = (P_{ss'})$  зависят только от вектора разности индексов  $l = s - s'$ : именно,  $P_{ss'} = P_{s-s'} = P_l$ .

Резонно ожидать, что накладывая новые ограничения на исследуемый объект, можно уточнить уже имеющиеся в нашем распоряжении формулы. Посмотрим, как это будет работать для трансляционно инвариантных случайных блужданий. Легко видеть, что вероятность попасть из состояния  $s_0$  в состояние  $s$  за  $t$  шагов в этом случае зависит только от разности  $l = s - s_0$ , поэтому мы будем обозначать её  $P_t(l)$ . Согласно определению, эта вероятность удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$P_{t+1}(l) = \sum_{l' \in \mathbb{Z}^d} P_{l-l'} P_t(l').$$

Чтобы выразить её явным образом, воспользуемся дискретным преобразованием Фурье:

$$\widehat{P}_t(k) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} e^{il \cdot k} P_t(l).$$

Введя *структурную функцию*

$$\lambda(k) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} e^{il \cdot k} P_l, \quad (26)$$

легко убедиться в том, что

$$\begin{aligned} \widehat{P}_{t+1}(k) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} e^{il \cdot k} P_{t+1}(l) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} e^{il \cdot k} \sum_{l' \in \mathbb{Z}^d} P_{l-l'} P_t(l') = \\ &= \sum_{l' \in \mathbb{Z}^d} e^{il' \cdot k} P_t(l') \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} e^{i(l-l') \cdot k} P_{l-l'} = \lambda(k) \widehat{P}_t(k), \end{aligned}$$

и, таким образом,

$$\widehat{P}_t(k) = (\lambda(k))^t \widehat{P}_0(k) = (\lambda(k))^t.$$

Применяя теперь обратное преобразование Фурье, имеем

$$P_t(l) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi; \pi]^d} e^{-il \cdot k} \widehat{P}_t(k) d^d k = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi; \pi]^d} e^{-il \cdot k} (\lambda(k))^t d^d k.$$

Следовательно, с учётом того, что  $|\lambda(k)| \leq 1$ , интересующий нас ряд (22) примет вид

$$P(l; \xi) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi; \pi]^d} e^{-il \cdot k} (\lambda(k))^t \xi^t d^d k = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi; \pi]^d} \frac{e^{-il \cdot k}}{1 - \lambda(k) \xi} d^d k. \quad (27)$$

Полученная формула является основным инструментом для вычисления функции Грина на гиперкубических решётках.

**Пример 2.6.** Рассмотрим симметричное трансляционно инвариантное случайное блуждание на прямой, то есть случайное блуждание с множеством состояний  $\mathbb{Z}$ , матрица перехода которого описывается формулой

$$P_l = \begin{cases} 1/2, & \text{если } |l| = 1; \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Для такого случайного блуждания система уравнений (21) принимает вид

$$u(l) = \frac{1}{2}(u(l-1) + u(l+1)) + f(l), \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Если решать это уравнение в том случае, когда  $f(l) = \delta_{l0}$ , причём интересоваться лишь симметричным решением, для которого  $u(0) = 0$ , то такое решение легко найти. Применяв индукцию, несложно убедиться, что

$$u(l) = -|l|, \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (28)$$

Поглядим теперь, как получится тот же самый ответ с использованием развитой нами теории, а именно, утверждения 2.2 и формулы (27). Прежде всего, заметим, что структурная функция (26) имеет вид

$$\lambda(k) = \frac{e^{ik} + e^{-ik}}{2} = \cos k.$$

Поэтому формула (27) превращается в

$$P(l; \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ilk}}{1 - \cos k \cdot \xi} dk = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos lk}{1 - \cos k \cdot \xi} dk.$$

Как известно, симметричное случайное блуждание на прямой возвратно, поэтому надеяться на сходимость полученного интеграла при  $\xi \rightarrow 1 - 0$  не приходится. Следовательно, необходимо воспользоваться формулой (25):

$$a(l) = \lim_{\xi \rightarrow 1-0} (P(0; \xi) - P(l; \xi)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos lk}{1 - \cos k} dk = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2(lk/2)}{\sin^2(k/2)} dk.$$

Теперь чтобы убедиться, что получается в точности выражение из формулы (28), достаточно воспользоваться двумя приведёнными ниже тригонометрическими леммами.

**Лемма 2.7.** Для любых  $n \in \mathbb{N}$  и  $\alpha \in \mathbb{R}$ , при котором  $\sin \alpha \neq 0$ , справедливо

$$\frac{\sin^2 n\alpha}{\sin \alpha} = \sum_{k=1}^n \sin(2k-1)\alpha.$$

**Доказательство.** Для того, чтобы убедиться в справедливости формулы, которая написана в утверждении леммы, умножим правую часть на  $2 \sin \alpha$ . Получим

$$\sum_{k=1}^n 2 \sin \alpha \cdot \sin(2k-1)\alpha = \sum_{k=1}^n (\cos(2k-2)\alpha - \cos(2k)\alpha) = \cos 0 - \cos(2n)\alpha = 2 \sin^2 n\alpha.$$

Требуемое доказано. ■

**Лемма 2.8.** Для любого  $n \in \mathbb{N}$  справедливо

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin n\alpha}{\sin \alpha} d\alpha = \begin{cases} \pi, & \text{если } n \text{ нечётно;} \\ 0, & \text{если } n \text{ чётно.} \end{cases}$$

**Доказательство.** Доказательство проведём по индукции. База, очевидно, выполняется, поскольку

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} d\alpha = \int_0^{\pi} d\alpha = \pi; \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} d\alpha = 2 \int_0^{\pi} \cos \alpha d\alpha = 0.$$

А индукционный переход опирается предположение и следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\sin n\alpha}{\sin \alpha} &= \frac{\sin(n-1)\alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} + \cos(n-1)\alpha = \\ &= \frac{\sin(n-2)\alpha \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} + \cos(n-2)\alpha \cos \alpha + \cos(n-1)\alpha = \\ &= \frac{\sin(n-2)\alpha}{\sin \alpha} - \sin(n-2)\alpha \sin \alpha + \cos(n-2)\alpha \cos \alpha + \cos(n-1)\alpha = \\ &= \frac{\sin(n-2)\alpha}{\sin \alpha} + 2 \cos(n-1)\alpha. \end{aligned}$$

Как мы видим, интеграл от  $2 \cos(n-1)\alpha$  равен нулю, и мы получаем требуемое. ■

### 2.3. Функция Грина двумерного случайного блуждания

Перейдём к рассмотрению случайного блуждания на плоскости. Нас интересует частный случай разобранный в предыдущем разделе трансляционно инвариантного случайного блуждания, для которого множество состояний есть  $S = \mathbb{Z}^2$ , а матрица перехода имеет вид

$$P_l = \begin{cases} 1/4, & \text{если } |l| = 1; \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \quad l \in \mathbb{Z}^2. \quad (29)$$

Разностное уравнение (21) в этом случае задаётся дискретным оператором Лапласа:

$$u(l) - \frac{1}{4} \sum_{|h|=1} u(l+h) = f(l), \quad l \in \mathbb{Z}^2. \quad (30)$$

Считая  $k = (\alpha, \beta)$ , мы можем записать структурную функцию (26) в виде

$$\lambda(k) = \frac{1}{4} \sum_{|h|=1} e^{ik \cdot h} = \frac{1}{4} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} + e^{i\beta} + e^{-i\beta}) = \frac{1}{2} (\cos \alpha + \cos \beta).$$

Следовательно, в обозначении  $l = (m, n)$ , формула (27) приобретает форму

$$P(l; \xi) = P((m, n); \xi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i(m\alpha+n\beta)} d\alpha d\beta}{1 - 1/2 (\cos \alpha + \cos \beta) \cdot \xi}.$$

Итого, мы приходим к такому результату.

**Утверждение 2.9.** *Функция Грина двумерного случайного блуждания имеет вид*

$$P(l; 1^-) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-im\alpha} \cdot e^{-in\beta}}{2 - (\cos \alpha + \cos \beta)} d\alpha d\beta.$$

Как и в одномерном случае, симметричное случайное блуждание на плоскости возвратно, поэтому указанный в утверждении 2.9 интеграл расходится. Значит, для решения уравнения (30) нам необходимо использовать формулу (25):

$$a(l) = a(m, n) = \lim_{\xi \rightarrow 1^-} (P(0; \xi) - P(l; \xi)) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 - e^{-im\alpha} \cdot e^{-in\beta})}{2 - (\cos \alpha + \cos \beta)} d\alpha d\beta. \quad (31)$$

Величина  $a(m, n)$ , очевидно, удовлетворяет условию  $a(0, 0) = 0$  и является симметричной относительно поворота на  $90^\circ$  вокруг начала координат. Поэтому несмотря на то, что в общем случае свернуть интеграл, стоящий в формуле (31), не удаётся, мы можем вычислить явно его значения вдоль диагонали  $l = (n, n)$ . После чего значения в остальных точках решётки  $\mathbb{Z}^2$  могут быть найдены при помощи рекуррентного соотношения (30).

В качестве весомого подспорья нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 2.10.** *Для любого  $\alpha \in \mathbb{R}$ , при котором  $\sin \alpha \neq 0$ , справедливо*

$$\int \frac{dt}{1 - \cos \alpha \cos t} = \frac{2}{|\sin \alpha|} \cdot \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} t/2}{|\operatorname{tg} \alpha/2|}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{1 - \cos \alpha \cos t} = \frac{2\pi}{|\sin \alpha|}.$$

**Доказательство.** Безусловно, первое равенство легко проверяется непосредственным дифференцированием правой части, а второе является прямым следствием первого. Однако нам хотелось бы не просто убедиться в справедливости написанных выше формул, но и показать, каким образом их можно было вывести. Ключевыми здесь оказываются переход к тангенсу половинного угла, а также равенства

$$\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right| \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{x^2 + b^2} = \frac{1}{|b|} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{|b|},$$

выполняющиеся при всех  $b \neq 0$ . В самом деле, имеем

$$\begin{aligned}
\int \frac{dt}{1 - \cos \alpha \cos t} &= \int \frac{dt}{(\cos^2 t/2 + \sin^2 t/2) - \cos \alpha (\cos^2 t/2 - \sin^2 t/2)} = \\
&= \int \frac{dt}{\sin^2 t/2 (1 + \cos \alpha) + \cos^2 t/2 (1 - \cos \alpha)} = \frac{2}{1 + \cos \alpha} \int \frac{d \operatorname{tg} t/2}{\operatorname{tg}^2 t/2 + \operatorname{tg}^2 \alpha/2} = \\
&= \frac{2}{1 + \cos \alpha} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} t/2}{|\operatorname{tg} \alpha/2|} = \frac{2}{|\sin \alpha|} \cdot \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} t/2}{|\operatorname{tg} \alpha/2|}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана. ■

**Утверждение 2.11.** Для любого  $n \in \mathbb{N}$  выполнено соотношение

$$a(n, n) = \frac{4}{\pi} \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right).$$

**Доказательство.** Для начала воспользуемся простыми тригонометрическими соображениями, а именно, нечётностью синуса и формулой для суммы косинусов:

$$\begin{aligned}
a(n, n) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 - e^{-in(\alpha+\beta)})}{2 - (\cos \alpha + \cos \beta)} d\alpha d\beta = \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos n(\alpha + \beta)}{2 - (\cos \alpha + \cos \beta)} d\alpha d\beta = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 - \cos n(\alpha + \beta))}{1 - \cos(\alpha + \beta)/2} \frac{d\alpha d\beta}{\cos(\alpha - \beta)/2}.
\end{aligned}$$

Теперь сделаем замену  $s = \cos(\alpha + \beta)/2$ ,  $t = \cos(\alpha - \beta)/2$ . Якобиан этой замены равен  $1/2$ , а область интегрирования суть  $|s| + |t| \leq \pi$ , но из соображений симметрии её можно удвоить:

$$a(n, n) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{|s|+|t|\leq\pi} \frac{2(1 - \cos 2ns) ds dt}{1 - \cos s \cos t} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 - \cos 2ns) ds dt}{1 - \cos s \cos t}.$$

Воспользовавшись леммой 2.10, имеем

$$a(n, n) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2\pi}{|\sin s|} \cdot (1 - \cos 2ns) ds = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{(1 - \cos 2ns)}{\sin s} ds = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 ns}{\sin s} ds.$$

И наконец, применяя лемму 2.7, окончательно получаем

$$a(n, n) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \sum_{k=1}^n \sin(2k-1)s \right) ds = \frac{4}{\pi} \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right).$$

Требуемое доказано. ■

Утверждение 2.11 позволяет нам вывести асимптотическое поведение функции Грина вдоль диагонали. В самом деле, легко видеть, что

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} = \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n} \right) - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right),$$

а потому

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left( a(n, n) - \frac{2}{\pi} \cdot \ln n \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\pi} \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{\ln n}{2} \right) = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\pi} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n} - \ln n \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = \\
&= \frac{4}{\pi} (\gamma + \ln 2) - \frac{2}{\pi} \cdot \gamma = \frac{2}{\pi} (\gamma + \ln 4),
\end{aligned}$$

где  $\gamma$  — константа Эйлера.

Отметим, что можно вывести асимптотику функции Грина в произвольном направлении, а не только вдоль диагонали. Более того, это можно сделать с любой точностью. Так, справедливо следующее утверждение (см. [9]).

**Утверждение 2.12.** Пусть  $m, n \in \mathbb{N}$ , причём  $m = r \cos \varphi$ ,  $n = r \sin \varphi$ , где  $r \gg 1$ . Тогда справедливо следующее разложение:

$$a(m, n) = \frac{2}{\pi} \left( \ln r + \gamma + \frac{3}{2} \ln 2 \right) - \frac{\cos 4\varphi}{6\pi r^2} - \frac{1}{r^4} \left( \frac{3 \cos 4\varphi}{20\pi} + \frac{5 \cos 8\varphi}{24\pi} \right) - \\ - \frac{1}{r^6} \left( \frac{51 \cos 8\varphi}{56\pi} + \frac{35 \cos 12\varphi}{36\pi} \right) - \frac{1}{r^8} \left( \frac{217 \cos 8\varphi}{160\pi} + \frac{45 \cos 12\varphi}{4\pi} + \frac{1925 \cos 16\varphi}{192\pi} \right) + \dots$$

**Замечание 2.13.** Пытливый читатель может обратить внимание, что асимптотическое разложение, приведённое в утверждении 2.12, отличается от указанного в статье [9] в четыре раза в большую сторону. Это отличие возникло из-за того, что найденная нами функция Грина соответствует уравнению (30), в то время как функция Грина из статьи [9] отвечает уравнению

$$4u(l) - \sum_{|h|=1} u(l+h) = f(l), \quad l \in \mathbb{Z}^2. \quad (32)$$

В какой-то момент нам также понадобится это модифицированное уравнение, и тогда придётся всю правую часть указанного в утверждении 2.12 равенства разделить на 4.

Это же замечание справедливо для функции Грина случайного блуждания на полуплоскости с открытой границей, рассматриваемой в следующем параграфе.

## 2.4. Функция Грина для случайного блуждания на полуплоскости с открытой границей

Модифицируем случайное блуждание на плоскости следующим образом. Пусть теперь множество состояний представляет собой полуплоскость  $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ , причём каждая вершина границы — подмножества  $\{(m, 1) \mid m \in \mathbb{Z}\} \subset S$  — соединена с дополнительной вершиной  $v^*$ , называемой *стоком*. Ясно, что при такой модификации случайное блуждание может сохранить трансляционную инвариантность лишь вдоль первой координаты, поэтому матрица перехода в этом случае будет иметь вид

$$P_{(m;n_1,n_2)}^{op} = \begin{cases} 1/4, & \text{если } m^2 + (n_2 - n_1)^2 = 1; \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \quad m \in \mathbb{Z}, n_1, n_2 \in \mathbb{N}. \quad (33)$$

Кроме того, надо дополнительно положить  $P_{(m;1),v^*} = 1/4$  для всех  $m \in \mathbb{Z}$ , а также  $P_{v^*,v^*} = 1$  и  $P_{v^*,v} = 0$  для всех остальных вершин  $v \in S$ . Таким образом, через границу мы можем «перетечь» в сток (и потому говорят, что это случайное блуждание с *открытой границей*), а единожды попав в сток, случайное блуждание перестаёт быть случайным и остаётся в стоке навечно.

Наша цель — вычислить функцию Грина для определённого выше случайного блуждания на полуплоскости. Это оказывается совсем несложно сделать при помощи стандартной функции Грина для случайного блуждания на плоскости и *принципа отражений*. Изложением последнего мы прямо сейчас и займёмся.

**Утверждение 2.14.** Пусть  $P_t^{op}(m; n_1, n_2)$  — вероятность оказаться в вершине  $(m, n_2)$  через время  $t$  для определённого выше случайного блуждания на полуплоскости с открытой границей при условии, что мы стартовали из точки  $(0, n_1)$ . Тогда

$$P_t^{op}(m; n_1, n_2) = P_t(m, n_2 - n_1) - P_t(m, n_2 + n_1), \quad (34)$$

где  $P_t(k, l)$  — вероятность стартова из начала координат через время  $t$  оказаться в вершине  $(k, l)$  для стандартного случайного блуждания на плоскости.

**Доказательство.** Пусть  $A(0, n_1)$  и  $B(m, n_2)$  — вершины из верхней полуплоскости  $S$ , а  $C(m, -n_2)$  — вершина в нижней полуплоскости, симметричная  $B$  относительно оси абсцисс. Множество путей из  $A$  в  $B$  длины  $t$  естественным образом разбиваются на два класса: пути, которые пересекаются с осью абсцисс, и не пересекающиеся с ней пути. Сопоставим каждому пути из первого класса путь из  $A$  в  $C$ , построенный по следующему правилу: мы движемся по траектории, заданной исходным путём до первого пересечения с осью абсцисс, а оставшуюся часть отражаем относительно этой оси (рис. 2.1). Легко заметить, что подобное соответствие биективно. Поэтому для завершения доказательства остаётся заметить, что вероятности в формуле (34) отличаются от указанного количества путей делением на  $4^t$ . ■

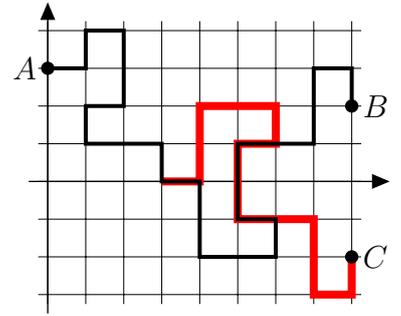


Рис. 2.1.

**Утверждение 2.15.** *Функция Грина двумерного случайного блуждания на полуплоскости с открытой границей имеет вид*

$$P^{op}(m; n_1, n_2; 1^-) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\cos m\alpha \cdot \sin n_1\beta \cdot \sin n_2\beta}{2 - (\cos \alpha + \cos \beta)} d\alpha d\beta.$$

**Доказательство.** Чтобы убедиться в справедливости утверждения, достаточно воспользоваться утверждением 2.9 и принципом отражения:

$$\begin{aligned} P^{op}(m; n_1, n_2; 1^-) &= \lim_{\xi \rightarrow 1^-} (P((m, n_2 - n_1); \xi) - P((m, n_2 + n_1); \xi)) = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \frac{e^{-im\alpha} \cdot e^{-i(n_2 - n_1)\beta} - e^{-im\alpha} \cdot e^{-i(n_2 + n_1)\beta}}{2 - (\cos \alpha + \cos \beta)} d\alpha d\beta = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \frac{e^{-im\alpha} \cdot e^{-in_2\beta} \cdot (e^{in_1\beta} - e^{-in_1\beta})}{2 - (\cos \alpha + \cos \beta)} d\alpha d\beta = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \frac{e^{-im\alpha} \cdot e^{-in_2\beta} \cdot i \cdot \sin n_1\beta}{2 - (\cos \alpha + \cos \beta)} d\alpha d\beta = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\cos m\alpha \cdot \sin n_1\beta \cdot \sin n_2\beta}{2 - (\cos \alpha + \cos \beta)} d\alpha d\beta. \end{aligned}$$

Отметим, что последнее равенство выполняется из соображений симметрии, поскольку синус является нечётной функцией, а косинус — чётной. ■

Зная асимптотическое поведение стандартной функции Грина для двумерного случайного блуждания, при помощи принципа отражения мы можем немедленно вычислить асимптотическое поведение функции Грина для полуплоскости с открытой границей. Интересующий нас результат — асимптотика вдоль границы — оказывается таким.

**Утверждение 2.16.** *Справедливо следующее разложение:*

$$P^{op}(m; 1, 1; 1^-) = \frac{4}{\pi m^2} - \frac{2}{\pi m^4} + \dots$$

### 3. Задача об Арбузе

#### 3.1. Формулировка задачи

Пусть  $G = (V, E)$  — неориентированный связный граф без петель и двойных рёбер,  $G^* = (V^*, E^*)$  — связный граф, для которого  $V^* = V \cup \{v^*\}$  и  $E \subset E^*$ . Рассмотрим некоторое подмножество вершин  $I_k = \{i_1, \dots, i_k\} \subset V$ . Алгоритм Вилсона с начальным множеством вершин  $\mathcal{U}_1 = I_k \cup \{v^*\}$  порождает для графа  $G^*$  остовный лес, состоящий из  $(k+1)$  компоненты, каждая из которых укоренена либо в сток  $v^*$ , либо в одну из вершин множества  $I_k$ . Если же дополнительно выбрать непересекающееся с  $I_k$  подмножество вершин  $J_k = \{j_1, \dots, j_k\} \subset V$ , то среди порождаемых алгоритмом Вилсона лесов можно выделить те, в которых вершины из  $J_k$  принадлежат разным компонентам, и ни одна из которых не входит в компоненту, укоренённую в  $v^*$ .

Удачным образом подобрав наборы вершин  $I_k$  и  $J_k$ , мы можем применить Метод Мостов для того, чтобы вычислить отношение числа таких остовных лесов к общему количеству остовных деревьев графа  $G^*$ . Например, если в качестве  $G$  выступает стандартная двумерная решётка, то для нечётного  $k$  удобно выстроить из  $I_k$  и  $J_k$  конфигурации в виде «забора» (рис. 3.1). В этом случае интересные нас типичные конфигурации путей из  $J_k$  в  $I_k$  напоминают арбуз, а отношение общего числа таких «арбузов» к суммарному количеству остовных деревьев графа  $G^*$  при увеличении расстояния  $r$  между  $I_k$  и  $J_k$  ведёт себя как  $r^{-(k^2-1)/2} \ln r$  (см. работы [8] и [11]).

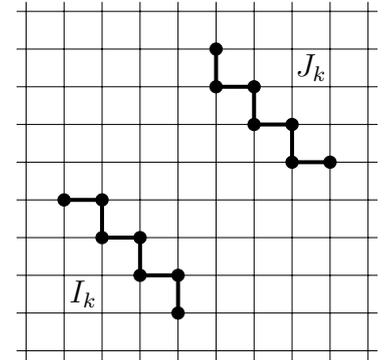


Рис. 3.1.

Мы будем решать аналогичную «задачу об арбузе» для плоской решётки с открытой границей. В качестве множеств  $I_k$  и  $J_k$  мы будем рассматривать подряд идущие наборы из  $k$  вершин, стоящие вдоль границы, то есть соединённые со стоком (рис. 3.2). А вопрос будет точно такой же, как выше: каково отношение  $W(I_k, J_k)$  числа «арбузов» (то есть остовных лесов, в которых каждая вершина из  $I_k$  соединена с какой-то вершиной из  $J_k$ ) к общему количеству остовных деревьев? Более точно, каково асимптотическое поведение этого отношения при  $r \rightarrow \infty$ , где за  $r$  обозначено расстояние между  $I_k$  и  $J_k$ ?

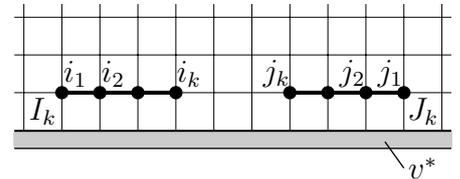


Рис. 3.2.

Как выясняется, при любом натуральном  $k$  справедливо

$$W(I_k, J_k) \sim \frac{(k! \cdot (k-1)! \cdot \dots \cdot 2! \cdot 1!)^2}{\pi^k \cdot k!} \cdot r^{-k(k+1)}, \quad (35)$$

и обоснование этого результата составляет главную цель настоящей работы.

#### 3.2. Применение Метода Мостов

Чтобы вычислить определённую в предыдущем параграфе величину  $W(I_k, J_k)$ , являющуюся отношением числа «арбузов» к общему количеству остовных деревьев, мы воспользуемся Методом Мостов. Если ограничиться рассмотрением не всей полуплоскости, а лишь конечного её куска — графа  $G_N$ , представляющего собой квадрат  $N \times N$ , то для достаточно больших  $N$  искомое отношение можно вычислить аналогично формуле (20). В самом деле, рассмотрим соответствующую графу  $G_N$  стандартную матрицу  $\Delta_N$  и матрицу  $\Delta'_N$ , отвечающую проведённым мостам — мы проводим мосты из вершины  $i_l$  в вершину  $j_l$  для каждого  $l = 1, \dots, k$ . Учитывая, что все вершины множества  $I_k \cup J_k$  находятся возле границы, коэффициент при  $\eta^k$  в определителе  $\det \Delta'_N$  будет

составляться только из тех слагаемых, которые соответствуют подграфам с  $k$  циклами, включающими в себя мосты. Все они имеют один и тот же знак  $(-1)^k$ , а потому искомое отношение можно вычислить при помощи выражения

$$W_N(I_k, J_k) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{(-1)^k}{\eta^k} \cdot \frac{\det \Delta'_N}{\det \Delta_N}. \quad (36)$$

Теперь устремим  $N$  к бесконечности. Используя методы, изложенные в [5], можно показать, что в этом случае предел указанного в формуле (36) отношения стремится к

$$W(I_k, J_k) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{(-1)^k}{\eta^k} \cdot \frac{\det \Delta'}{\det \Delta} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{(-1)^k}{\eta^k} \cdot \det(E + \Delta^{-1}B), \quad (37)$$

где матрица  $\Delta = (\Delta_{ij})$  задана стандартным соотношением

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} 4, & \text{если } i = j; \\ -1, & \text{если } |i - j| = 1; \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \quad i, j \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \quad (38)$$

матрица  $\Delta' = (\Delta'_{ij})$  отличается от неё  $k$  элементами, соответствующими мостам:

$$\Delta'_{ij} = \begin{cases} 4, & \text{если } i = j; \\ -1, & \text{если } |i - j| = 1; \\ -\eta, & \text{если } (i, j) = (i_l, j_l), l = 1, \dots, k; \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \quad i, j \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \quad (39)$$

матрица  $B = (\Delta' - \Delta)$  суть дефект, характеризующий это отличие, а  $\Delta^{-1} = G^{op}$  представляет собой функцию Грина для двумерной решётки с открытой границей. Более точно,  $G^{op}$  отличается от найденной нами в параграфе 2.4 функции Грина в четыре раза, поскольку удовлетворяет условию  $\Delta \cdot G^{op} = E$ , то есть мы имеем

$$G^{op}_{(m;n_1, n_2)} = \frac{P^{op}(m; n_1, n_2; 1^-)}{4}.$$

Воспользуемся всеми этими соображениями, чтобы выяснить, как  $W(I_k, J_k)$  выражается явным образом. Для этого преобразуем матрицу, стоящую в правой части формулы (37). Легко видеть, что она имеет блочную структуру

$$\Delta^{-1}B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1(k-1)} & B_{1k} \\ B_{22} & B_{22} & & B_{2(k-1)} & B_{2k} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ B_{(k-1)2} & B_{(k-1)2} & & B_{(k-1)(k-1)} & B_{(k-1)k} \\ B_{k1} & B_{k2} & \dots & B_{k(k-1)} & B_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & H & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & H & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & H \end{pmatrix},$$

где блоки представляют собой матрицы  $2 \times 2$  вида

$$B_{pq} = \begin{pmatrix} G^{op}_{i_p i_p} & G^{op}_{i_p j_q} \\ G^{op}_{i_p j_q} & G^{op}_{j_q j_q} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & -\eta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{pq}H = \begin{pmatrix} 0 & -\eta \cdot G^{op}_{i_p i_p} \\ 0 & -\eta \cdot G^{op}_{i_p j_q} \end{pmatrix}.$$

Поэтому, согласно теореме Лапласа (о вычислении определителей), мы имеем

$$W(I_k, J_k) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{(-1)^k}{\eta^k} \cdot \det(E + \Delta^{-1}B) = \det \begin{pmatrix} G^{op}_{i_1 j_1} & \dots & G^{op}_{i_1 j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G^{op}_{i_k j_1} & \dots & G^{op}_{i_k j_k} \end{pmatrix}.$$

Полагая  $r = |i_1 - j_k| = |i_k - j_1|$  (рис. 3.2), получаем окончательно такое утверждение.

**Утверждение 3.1.** *Справедливо равенство*

$$W(I_k, J_k) = \det \begin{pmatrix} G^{op}_{(r+(k-1);1,1)} & G^{op}_{(r+(k-2);1,1)} & \dots & G^{op}_{(r+1;1,1)} & G^{op}_{(r;1,1)} \\ G^{op}_{(r+(k-2);1,1)} & G^{op}_{(r+(k-3);1,1)} & & G^{op}_{(r;1,1)} & G^{op}_{(r-1;1,1)} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ G^{op}_{(r+1;1,1)} & G^{op}_{(r;1,1)} & & G^{op}_{(r-(k-3);1,1)} & G^{op}_{(r-(k-2);1,1)} \\ G^{op}_{(r;1,1)} & G^{op}_{(r-1;1,1)} & \dots & G^{op}_{(r-(k-2);1,1)} & G^{op}_{(r-(k-1);1,1)} \end{pmatrix}. \quad (40)$$

### 3.3. Вычисление асимптотики

Цель этого параграфа — установить асимптотическое поведение величины  $W(I_k, J_k)$  при  $r \rightarrow \infty$ . Для удобства мы будем использовать следующие обозначения. Во-первых,

$$f(r) = G_{(r;1,1)}^{op} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{r^m} = \frac{1}{\pi r^2} - \frac{1}{2\pi r^4} + \dots \quad (41)$$

Отметим, что  $c_{2l+1} = 0$  для всех натуральных  $l$ . Далее, учитывая, что

$$\frac{1}{(1 + t/r)^m} = \sum_{l=0}^{\infty} C_{l+m-1}^{m-1} \left(-\frac{t}{r}\right)^l,$$

мы можем выписать следующее разложение:

$$f(r+t) = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{c_m}{(r+t)^m} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{c_m}{r^m} \sum_{l=0}^{\infty} C_{l+m-1}^{m-1} \left(-\frac{t}{r}\right)^l = \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{c_m \cdot C_{l+m-1}^{m-1} \cdot (-t)^l}{r^{l+m}}.$$

Сделав замену  $s = m + l - 2$ , мы получим представление вида

$$f(r+t) = \frac{1}{r^2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s(t)}{r^s}, \quad \text{где } a_s(t) = \sum_{m=2}^{s+2} c_m \cdot C_{s+1}^{m-1} \cdot (-t)^{s-m+2}. \quad (42)$$

Подчеркнём, что  $\deg a_s(t) = s$ , а старший коэффициент равен  $(-1)^s \cdot (s+1)/\pi$ .

С другой стороны,  $f(r+t)$  можно переписать следующим образом:

$$f(r+t) = \frac{g_r(t)}{r^2} = \frac{1}{r^2} \sum_{l=0}^{\infty} b_l(r) t^l, \quad \text{где } b_l(r) = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{c_m \cdot C_{l+m-1}^{m-1} \cdot (-1)^l}{r^{l+m-2}}. \quad (43)$$

Последним представлением мы воспользуемся следующим образом. Заметим, что интересующая нас величина  $W(I_k, J_k)$  в новых обозначениях принимает такой вид:

$$W(I_k, J_k) = \frac{1}{r^{2k}} \cdot \det_{1 \leq i, j \leq k} (g_r(v_i - u_j)), \quad \text{где } v_i = (k+1) - i, u_j = j. \quad (44)$$

Подставим в определитель разложения  $g_r(t_{ij})$  в ряд относительно  $t_{ij} = v_i - u_j$ .

$$W(I_k, J_k) = \frac{1}{r^{2k}} \sum_{p_1, \dots, p_k=0}^{\infty} \det_{1 \leq i, j \leq k} (b_{p_i}(r) (v_i - u_j)^{p_i}).$$

Затем воспользуемся биномом Ньютона:

$$W(I_k, J_k) = \frac{1}{r^{2k}} \sum_{p_1, \dots, p_k=0}^{\infty} \sum_{q_1=0}^{p_1} \dots \sum_{q_k=0}^{p_k} \det_{1 \leq i, j \leq k} (b_{p_i}(r) C_{p_i}^{q_i} v_i^{q_i} (-u_j)^{p_i - q_i}).$$

После замены  $l_i = p_i - q_i$ , это равенство переписывается в виде

$$W(I_k, J_k) = \frac{1}{r^{2k}} \sum_{q_1, \dots, q_k=0}^{\infty} \sum_{l_1, \dots, l_k=0}^{\infty} \det_{1 \leq i, j \leq k} (b_{q_i+l_i}(r) C_{q_i+l_i}^{q_i} v_i^{q_i} (-u_j)^{l_i})$$

или, если вынести из строк общие сомножители,

$$W(I_k, J_k) = \frac{1}{r^{2k}} \sum_{q_1, \dots, q_k=0}^{\infty} \sum_{l_1, \dots, l_k=0}^{\infty} \left( \prod_{i=1}^k b_{q_i+l_i}(r) C_{q_i+l_i}^{q_i} v_i^{q_i} \right) \det_{1 \leq i, j \leq k} ((-u_j)^{l_i}).$$

В силу антисимметричности оставшегося определителя по  $l_i$  и  $u_j$ , мы можем продолжить равенство следующим образом:

$$\begin{aligned} W(I_k, J_k) &= \frac{1}{r^{2k}} \sum_{q_1, \dots, q_k=0}^{\infty} \sum_{0 \leq l_1 < \dots < l_k} \sum_{\sigma \in S_k} \left( \prod_{i=1}^k b_{q_i+\sigma(l_i)}(r) C_{q_i+\sigma(l_i)}^{q_i} v_i^{q_i} \right) (-1)^\sigma \det_{1 \leq i, j \leq k} ((-u_j)^{l_i}) = \\ &= \frac{1}{r^{2k}} \sum_{\substack{0 \leq q_1 \leq \dots \leq q_k \\ 0 \leq l_1 < \dots < l_k}} \sum_{\substack{\sigma' \in S_k \\ \sigma'(q) \neq q}} \sum_{\sigma \in S_k} \left( \prod_{i=1}^k b_{\sigma'(q_i)+\sigma(l_i)}(r) C_{\sigma'(q_i)+\sigma(l_i)}^{q_i} v_i^{q_i} \right) (-1)^\sigma \det_{1 \leq i, j \leq k} ((-u_j)^{l_i}). \end{aligned}$$

В этом месте мы сделаем замену  $\sigma' = \sigma\tau$  (или  $\tau = \sigma^{-1}\sigma'$ ), благодаря чему получим

$$= \frac{1}{r^{2k}} \sum_{\substack{0 \leq q_1 \leq \dots \leq q_k \\ 0 \leq l_1 < \dots < l_k}} \sum_{\substack{\tau \in S_k \\ \tau(q) \neq q}} \sum_{\sigma \in S_k} \left( \prod_{i=1}^k b_{\sigma(\tau(q_i)+l_i)}(r) C_{\sigma(\tau(q_i)+l_i)}^{\sigma\tau(q_i)} v_i^{\sigma\tau(q_i)} \right) (-1)^\sigma \det_{1 \leq i, j \leq k} ((-u_j)^{l_i}).$$

Теперь надо заметить, во-первых, что

$$\sum_{\sigma \in S_k} \left( \prod_{i=1}^k v_i^{\sigma\tau(q_i)} \right) (-1)^\sigma (-1)^\tau = \det_{1 \leq i, j \leq k} ((v_i)^{q_j}),$$

причём полученное выражение антисимметрично по  $q_j$  и  $v_i$ , то есть мы можем вести суммирование только по тем наборам  $q_1, \dots, q_k$ , для которых  $0 \leq q_1 < \dots < q_k$ . А во-вторых, оставшееся в скобках произведение не зависит от перестановки  $\sigma$ , а потому, вынеся его за скобку, будем иметь

$$\sum_{\tau \in S_k} \left( \prod_{i=1}^k b_{\tau(q_i)+l_i}(r) C_{\tau(q_i)+l_i}^{\tau(q_i)} \right) (-1)^\tau = \det_{1 \leq i, j \leq k} (b_{q_j+l_i}(r) C_{q_j+l_i}^{q_i}),$$

Таким образом, мы получаем в итоге

$$W(I_k, J_k) = \frac{1}{r^{2k}} \sum_{\substack{0 \leq q_1 < \dots < q_k \\ 0 \leq l_1 < \dots < l_k}} \det_{1 \leq i, j \leq k} (b_{q_j+l_i}(r) C_{q_j+l_i}^{q_i}) \cdot \det_{1 \leq i, j \leq k} ((v_i)^{q_j}) \cdot \det_{1 \leq i, j \leq k} ((-u_j)^{l_i}).$$

Выражение для величины  $W(I_k, J_k)$ , выведенное нами, удобно переписать через симметрические функции (они же — многочлены Шура, см. [1]). В самом деле, пусть  $x = (x_1, \dots, x_k)$  — переменные,  $\delta = (k-1, k-2, \dots, 1, 0)$  и  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  — разбиения (здесь мы считаем, что  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0$ ). Тогда для разбиения  $\alpha$ , являющегося их суммой, то есть удовлетворяющего условию

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \lambda + \delta = (\lambda_1 + (k-1), \dots, \lambda_{k-1} + 1, \lambda_k)$$

определён многочлен следующего вида:

$$a_\alpha(x) = \det_{1 \leq i, j \leq k} (x_i^{\alpha_j}) = a_\delta(x) \cdot s_\lambda(x), \quad (45)$$

где  $a_\delta(x) = \det_{1 \leq i, j \leq k} (x_i^{k-j})$  — определитель Вандермонда, а  $s_\lambda(x)$  — многочлен Шура, соответствующий разбиению  $\lambda$ .

Представим теперь разбиения  $q = (q_1, \dots, q_k)$  и  $l = (l_1, \dots, l_k)$  как суммы  $q = \lambda + \delta$  и  $l = \mu + \delta$ . В этих обозначениях мы можем переписать  $W(I_k, J_k)$  в виде

$$\frac{1}{r^{2k}} \sum_{\lambda, \mu} \det_{1 \leq i, j \leq k} (b_{\lambda_j+(k-j)+\mu_i+(k-i)}(r) C_{\lambda_j+(k-j)+\mu_i+(k-i)}^{\lambda_j+(k-j)}) \cdot a_\delta(v) \cdot s_\lambda(v) \cdot a_\delta(-u) \cdot s_\mu(-u),$$

где  $v = (v_1, \dots, v_k)$  и  $u = (u_1, \dots, u_k)$ . С учётом формулы (44), определители Вандермонда в полученном выражении можно вычислить явно:

$$a_\delta(v) \cdot a_\delta(-u) = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (v_i - v_j)(u_j - u_i) = \prod_{j=1}^{k-1} (j!)^2.$$

Поэтому окончательно мы получаем такое утверждение.

**Утверждение 3.2.** *Справедливо следующее равенство:*

$$W(I_k, J_k) = \frac{1}{r^{2k}} \prod_{j=1}^{k-1} (j!)^2 \sum_{\lambda, \mu} \det_{1 \leq i, j \leq k} (b_{\lambda_j+(k-j)+\mu_i+(k-i)}(r) C_{\lambda_j+(k-j)+\mu_i+(k-i)}^{\lambda_j+(k-j)}) \cdot s_\lambda(v) \cdot s_\mu(-u),$$

где многочлены  $b_l(r)$  определяются формулой (43),  $v_i = (k+1) - i$ ,  $u_j = j$ .

Как нетрудно видеть из утверждения 3.2, асимптотическое поведение интересующей нас величины  $W(I_k, J_k)$  характеризуется, главным образом, тем, как ведёт себя определитель  $\det_{1 \leq i, j \leq k} (b_{\lambda_j+(k-j)+\mu_i+(k-i)}(r) C_{\lambda_j+(k-j)+\mu_i+(k-i)}^{\lambda_j+(k-j)})$ . Главный член разложения по степеням  $r$  соответствует слагаемому  $\lambda = \mu = (0, \dots, 0)$ , для которого  $s_\lambda(v) = s_\mu(-u) = 1$ ,

а определитель принимает вид  $\det_{1 \leq i, j \leq k} (b_{(k-j)+(k-i)}(r) C_{(k-j)+(k-i)}^{(k-j)})$ , причём от многочлена  $b_{(k-j)+(k-i)}(r)$  тоже надо оставить только ведущий член, который, согласно формулам (41) и (43), равен

$$\frac{(-1)^{(k-i)+(k-j)}((k-i) + (k-j) + 1)}{\pi \cdot r^{(k-i)+(k-j)}}.$$

Следовательно, асимптотическое поведение ведущего члена определителя имеет вид

$$\frac{1}{\pi^k \cdot r^{k(k-1)}} \cdot \det_{1 \leq i, j \leq k} ((-1)^{i+j} \cdot ((k-i) + (k-j) + 1) \cdot C_{(k-j)+(k-i)}^{(k-j)}).$$

**Лемма 3.3.** *Справедливо следующее равенство:*

$$\det_{1 \leq i, j \leq k} ((-1)^{i+j} \cdot ((k-i) + (k-j) + 1) \cdot C_{(k-j)+(k-i)}^{(k-j)}) = k!.$$

**Доказательство.** Выпишем искомый определитель явным образом:

$$\det \begin{pmatrix} 1 \cdot C_0^0 & -2 \cdot C_1^1 & 3 \cdot C_2^2 & \dots & (-1)^{k-1} k C_{k-1}^{k-1} \\ -2 \cdot C_1^0 & 3 \cdot C_2^1 & -4 \cdot C_3^2 & \dots & (-1)^k (k+1) C_k^{k-1} \\ 3 \cdot C_2^0 & -4 \cdot C_3^1 & 5 \cdot C_4^2 & \dots & (-1)^{k+1} (k+2) C_{k+1}^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{k-1} k C_{k-1}^0 & (-1)^k (k+1) C_k^1 & (-1)^{k+1} (k+2) C_{k+1}^2 & \dots & (2k-1) C_{2k-2}^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Для каждого  $j$  вынесем из  $j$ -го столбца число  $j$ . В силу выполняющегося для  $i$ -го элемента столбца равенства  $(-1)^{i+j} (i+j-1) C_{i+j-2}^{j-1} = (-1)^{i+j} j C_{i+j-1}^j$ , получаем

$$k! \cdot \det \begin{pmatrix} C_1^1 & -C_2^2 & C_3^3 & \dots & (-1)^{k-1} C_k^k \\ -C_2^1 & C_3^2 & -C_4^3 & \dots & (-1)^k C_{k+1}^k \\ C_3^1 & -C_4^2 & C_5^3 & \dots & (-1)^{k+1} C_{k+2}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{k-1} C_k^1 & (-1)^k C_{k+1}^2 & (-1)^{k+1} C_{k+2}^3 & \dots & C_{2k-1}^k \end{pmatrix}.$$

Теперь прибавим к  $(j+1)$ -ому столбцу  $j$ -ый столбец, причём сделаем это последовательно для всех  $j = (k-1), (k-2), \dots, 2, 1$ . В силу равенства  $C_{i+j-1}^j = C_{i+j-2}^j + C_{i+j-2}^{j-1}$  имеем

$$k! \cdot \det \begin{pmatrix} C_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -C_2^1 & C_2^2 & -C_3^3 & \dots & (-1)^k C_k^k \\ C_3^1 & -C_3^2 & C_4^3 & \dots & (-1)^{k+1} C_{k+1}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{k-1} C_k^1 & (-1)^k C_k^2 & (-1)^{k+1} C_{k+1}^3 & \dots & C_{2k-2}^k \end{pmatrix}.$$

Вид полученной матрицы гарантирует нам, что если мы продолжим применять ту же самую операцию сложения для столбцов  $j = (k-1), (k-2), \dots, 3, 2$ , затем для столбцов  $j = (k-1), (k-2), \dots, 4, 3$  и так далее, то в итоге придём к нижнетреугольной матрице с единицами на диагонали:

$$k! \cdot \det \begin{pmatrix} C_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -C_2^1 & C_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ C_3^1 & -C_3^2 & C_3^3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{k-1} C_k^1 & (-1)^k C_k^2 & (-1)^{k+1} C_k^3 & \dots & C_k^k \end{pmatrix} = k!.$$

Лемма доказана. ■

Используя результаты утверждения 3.2 и леммы 3.3, окончательно приходим к заявленному в формуле (35) результату.

**Теорема 3.4.** *Справедливо следующее равенство:*

$$W(I_k, J_k) \sim \frac{(k! \cdot (k-1)! \cdot \dots \cdot 2! \cdot 1!)^2}{\pi^k \cdot k!} \cdot r^{-k(k+1)}.$$

## Литература

- [1] *Макдональд И.* Симметрические функции и многочлены Холла, — М.: Мир, 1972.
- [2] *Приезжев В.Б.* Задача о димерах и теорема Кирхгофа.  
Успехи физических наук. — 1985. — Т. 147. — Вып. 4. — С. 747-765.
- [3] *Харари Ф.* Теория графов, — М.: Мир, 1973.
- [4] *Barlow M.T.* Loop Erased Walks and Uniform Spanning Trees. — 2014.  
[http://www.math.ubc.ca/~barlow/preprints/106\\_ust\\_survey.pdf](http://www.math.ubc.ca/~barlow/preprints/106_ust_survey.pdf)
- [5] *Brankov J.G., Ivashkevich E.V., Priezzhev V.B.* Boundary effects in a twodimensional abelian sandpile.  
Journal de Physique I France, — 1993. — Vol. 3. — No. 8. — P. 1729-1740.
- [6] *Chaiken S.* The combinatorial proof of the all minors matrix tree theorem.  
SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods, — 1982. — Vol. 3. — No. 3. — P. 519-529.
- [7] *Chen W.K.* Applied Graph Theory, Graphs and Electrical Networks (Second Edition), — North-Holland, New York, 1976.
- [8] *Gorsky A., Nechaev S., Poghosyan V.S., Priezzhev V.B.* From elongated spanning trees to vicious random walks.  
Nuclear Physics B. — 2013. — Vol. 870. — Issue 1. — P. 55-77.
- [9] *Grigorev S.Y., Poghosyan V.S., Priezzhev V.B.* Three-leg correlations in the two-component spanning tree on the upper half-plane.  
Journal of Statistical Mechanics, — 2009. — P09008.
- [10] *Hughes B.D.* Random Walks and Random Environments. Volume I: Random Walks, — Clarendon press, Oxford, 1995.
- [11] *Ivashkevich E.V., Hu Chin-Kun* Exact multileg correlation functions for the dense phase of branching polymers in two dimensions.  
Physical Review E, — 2005. — Vol. 71. — No. 1. — Pt. 2 — 015104(R).
- [12] *Kirchhoff G.* Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird.  
Annalen der Physik und Chemie — 1847. — Vol. 72. — P. 497-508.
- [13] *Pemantle R.* Choosing a Spanning Tree for the Integer Lattice Uniformly.  
The Annals of Probability. — 1991. — Vol. 19. — No. 4. — P. 1559-1574.
- [14] *Priezzhev V.B.* Structure of Two-Dimensional Sandpile. I. Height Probabilities.  
Journal of Statistical Physics. — 1994. — Vol. 74. — Nos. 5/6. — P. 955-979.
- [15] *Redig F.* Mathematical Aspects of the Abelian Sandpile Model.  
Les Houches lecture notes. — 2005.  
<http://www.math.ru.nl/~fredig/sandpilelectures.pdf>
- [16] *Spitzer F.* Principles of Random Walk (Second Edition), — Springer, 1976.