

Speaker

Khaydar Nurligareev

Event

PhD defense

Location and date

LIPN, University Sorbonne Paris Nord, Villetaneuse, October 20, 2022

Title (English)

Irreducibility of combinatorial objects: asymptotic probability and interpretation

Titre (français)

Irréductibilité des objets combinatoires : probabilité asymptotique et interprétation

Abstract (English)

Various combinatorial structures admit, in a broad sense, a notion of irreducibility: graphs can be connected, permutations can be indecomposable, polynomials can be irreducible, etc. In this thesis, we are interested in the probability that any such object picked randomly is irreducible, as its size tends to infinity. We obtain complete asymptotic expansions for these probabilities; irreducibility is understood via the combinatorial constructions SET, SEQ, and CYC within the symbolic method. We apply our approach to connected graphs, irreducible tournaments, indecomposable permutations, and perfect matchings. Also, we establish asymptotics for several models of connected surfaces, including square-tiled surfaces, combinatorial maps, and higher dimensional objects such as constellations, and colored tensor models. We show that the coefficients appearing in those asymptotics are integers and can be interpreted as the counting sequences of other “derivative” combinatorial classes. For instance, connected graphs lead to irreducible tournaments, square-tiled surfaces lead to indecomposable permutations, combinatorial maps lead to indecomposable perfect matchings. Moreover, we obtain asymptotic probabilities that a random combinatorial object has a given number of irreducible components. Switching from the symbolic method to the theory of species, we treat the Erdős–Rényi $G(n, p)$ model as well. We also establish the probability that a random directed graph is strongly connected using a more complex decomposition that involves directed acyclic graphs.

Résumé (français)

De nombreuses structures combinatoires admettent, au sens large, une notion d'irréductibilité : les graphes peuvent être connexes, les permutations indécomposables, les polynômes irréductibles, etc. Dans cette thèse, nous nous intéressons à la probabilité qu'un tel objet pris au hasard soit irréductible, lorsque sa taille tend vers l'infini. On obtient des développements asymptotiques complets pour ces probabilités ; l'irréductibilité est comprise à travers les constructions combinatoires SET, SEQ et CYC dans le contexte de la méthode symbolique. Nous appliquons notre approche aux graphes connexes, aux tournois irréductibles, aux permutations indécomposables et aux couplages parfaits. En outre, nous établissons des asymptotiques pour plusieurs modèles de surfaces connexes comprenant les surfaces à petits carreaux, les cartes combinatoires et certains objets de dimension supérieure tels que les constellations et les modèles de tenseurs colorés. Nous montrons que les coefficients apparaissant dans ces asymptotiques sont entiers et qu'ils peuvent être interprétés comme des suites de comptage d'autres classes combinatoires « dérivées ». Par exemple, les graphes connexes conduisent aux tournois irréductibles, les surfaces à petits carreaux aux permutations indécomposables, les cartes combinatoires aux couplages parfaits indécomposables. De plus, nous obtenons certaines probabilités asymptotiques qu'un objet combinatoire aléatoire ait un nombre donné de composantes irréductibles. Passant de la méthode symbolique à la théorie des espèces, nous traitons également le modèle $G(n, p)$ de Erdős–Rényi. Nous établissons également la probabilité qu'un graphe orienté aléatoire soit fortement connexe en utilisant une décomposition plus complexe qui implique des graphes acycliques orientés.

Key words (English)

Asymptotic expansion, probability, combinatorial class, species of structures, generating function, Bender's theorem, indecomposable permutation, perfect matching, connected graph, irreducible tournament, strongly connected directed graph, directed acyclic graph, Erdős-Rényi model, square-tiled surface, combinatorial map, constellation, multigraph, multitournament, multipermutation.

Mots-clés (français)

Expansion asymptotique, probabilité, classe combinatoire, espèces de structures, fonction génératrice, théorème de Bender, permutation indécomposable, couplage parfait, graphe connexe, tournoi irréductible, graphe orienté fortement connexe, graphe orienté acyclique, modèle Erdős-Rényi, surface à petits carreaux, carte combinatoire, constellation, multigraphe, multitournoi, multipermutation.