

Задачи к занятию 1

Задача 1. Пусть $N(O, R)$ — количество точек плоскости с целочисленными координатами, лежащих внутри круга радиуса R с центром в точке O . Докажите, что справедливо следующее равенство:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N(O, R)}{R^2} = \pi.$$

Задача 2. а) Докажите, что для каждого натурального n существует круг с центром в точке с координатами $(\sqrt{2}, \frac{1}{3})$, который содержит внутри себя ровно n узлов решётки \mathbb{Z}^2 .

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для решётки \mathbb{Z}^3 .

Задача 3. Докажите, что для любого чётного n существует окружность с центром в точке $(\frac{1}{3}, 0)$, которая проходит ровно через n узлов решётки \mathbb{Z}^2 .

Задача 4. Пусть $(x - x_0)^2 + y^2 = R^2$ — окружность, проходящая ровно через n узлов решётки \mathbb{Z}^2 . Докажите, что на сфере $(x - x_0)^2 + y^2 + (z - \sqrt{2})^2 = R^2 + 2$ лежат ровно n узлов решётки \mathbb{Z}^3 .

Задача 5. Докажите следующие утверждения.

а) Существуют окружности на плоскости, которые проходят ровно через одну точку с рациональными координатами.

б) Существуют окружности на плоскости, которые проходят ровно через две точки с рациональными координатами.

в) Если окружность с центром в точке $(0, 0)$ содержит хотя бы одну точку с рациональными координатами, то на ней лежит бесконечно много точек плоскости с рациональными координатами.

г) Если хотя бы одна из координат центра окружности иррациональна, то на самой окружности лежит не более двух точек плоскости с рациональными координатами.

Задача 6. Докажите, что для каждого натурального n существует окружность, проходящая ровно через n узлов а) паркета типа (6)3, б) паркета типа (3)6.

Задача 7. Докажите, что на решётке \mathbb{Z}^2 можно расположить выпуклый равносторонний многоугольник с любым чётным числом сторон.

Задача 8. Докажите следующие утверждения.

а) При всех натуральных n , за исключением случаев $n = 1, 2, 3, 4, 6, 12$, число $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{n}$ не может быть представлено в виде $q\sqrt{3}$, где $q \in \mathbb{Q}$.

б) При всех натуральных n , за исключением случаев $n = 1, 2, 4, 8, 16$, число $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{n}$ не может быть представлено в виде $p + q\sqrt{2}$, где $p, q \in \mathbb{Q}$.

в) При всех натуральных n , за исключением случаев $n = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$, число $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{n}$ не может быть представлено в виде $p + q\sqrt{3}$, где $p, q \in \mathbb{Q}$.

Задача 9. Для каждого типа паркета найдите все $n \in \mathbb{N}$, при которых а) равносторонний б) равноугольный n -угольник можно расположить на данном паркете.

Задача 10. Докажите, что плоский правильный n -угольник можно расположить на решётке \mathbb{Z}^3 тогда и только тогда, когда $n = 3$, $n = 4$ или $n = 6$.

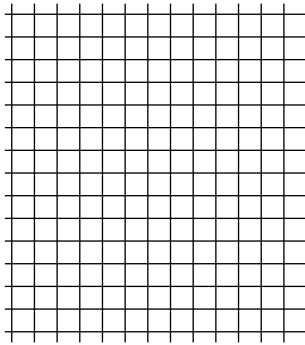
Открытые проблемы

Задача 11. Опишите множество всех окружностей, проходящих ровно через n точек решётки \mathbb{Z}^2 .

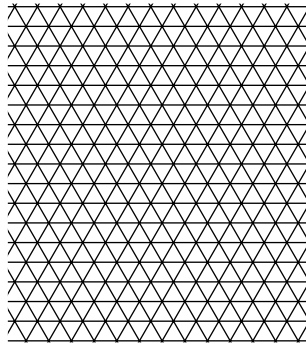
Задача 12. Какие полуправильные многоугольники можно расположить на плоскости так, чтобы все их вершины имели координаты из $\mathbb{Q}(\alpha)$ (здесь $\mathbb{Q}(\alpha)$ — простое алгебраическое расширение поля рациональных чисел, полученное присоединением алгебраического числа α)?

Задача 13. Для каких натуральных n на решётке \mathbb{Z}^3 можно расположить замкнутую ломаную из n звеньев одинаковой длины?

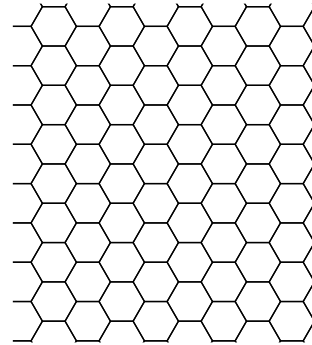
Задача 14. Для каких натуральных n на решётке \mathbb{Z}^3 можно расположить замкнутую равноугольную ломаную из n звеньев?



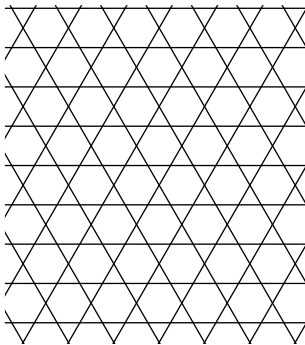
(4)4



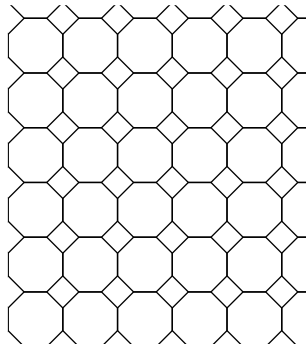
(6)3



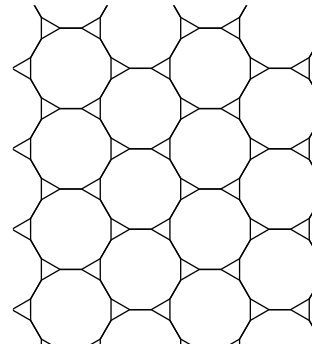
(3)6



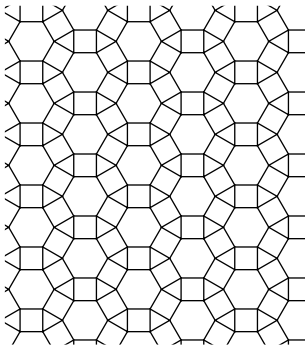
3, 6, 3, 6



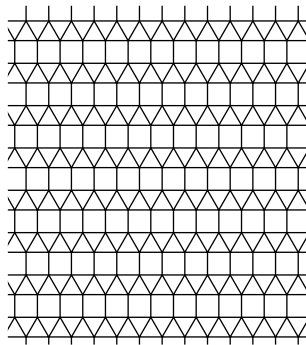
4, 8, 8



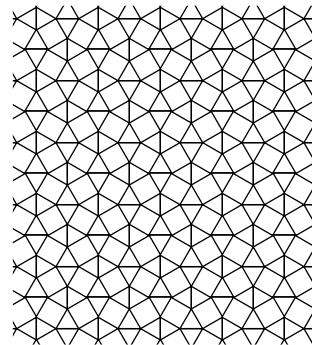
3, 12, 12



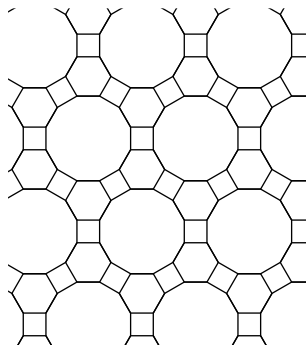
3, 4, 6, 4



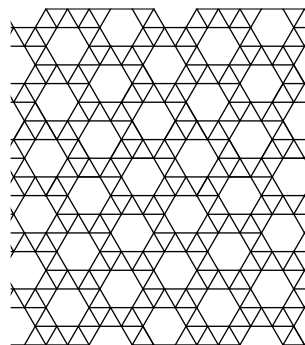
(3)3, (2)4



(2)3, 4, 3, 4



4, 6, 12



(4)3, 6