Ликбез – 2. Теория множеств.

Задача 1. (I) Пусть $A = \{15, 78, 137, 201\}$, $B = \{78, 201, 2009\}$, $C = \{0, 15, 205, 2011\}$, $D = \{0, 78, 2011, 2012\}$. Найдите следующие множества:
а) $(A \cap B) \cup D$; б) $C \cap (D \cap B)$; в) $(A \cup B) \cap (C \cup D)$; г) $(A \cup (B \cap C)) \cap D$;
д) $(A \cup B) \backslash (C \cap D)$; е) $(A \cup D) \backslash (B \cup C)$; ж) $A \backslash (B \backslash (C \backslash D))$.

Задача 2. (I) Верно ли, что для любых множеств A, B, C:
а) $(A \backslash B) \cup B = A$; б) $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$; в) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
г) $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$; д) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$; е) $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = A \cup B$?

Задача 3. (I) Приведите пример такого множества из четырёх элементов, что для каждых двух его элементов один из них является элементом другого.

Задача 4. (I) Каждый десятый математик — программист, а каждый шестой программист — математик. Кого больше — математиков или программистов — и во сколько раз?

Задача 5. (I) Найдутся ли такие множества A, B и C, что $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ и $(A \cap B) \backslash C = \emptyset$?

Задача 6. (I) Сколько различных подмножеств у множества, состоящего из n элементов?

Задача 7. (I) Пусть множество A состоит из n элементов, а его подмножество B — из k элементов. Сколькими способами можно выбрать такое множество C, что $B \subset C \subset A$?

Задача 8. (I) Пусть множество X состоит из m элементов, а множество Y — из n элементов.
а) Сколько существует различных отображений из множества X в множество Y?
б) Как много среди этих отображений взаимно однозначных?

Задача 9. (I) Верно ли, что если отображение $f : X \to Y$ удовлетворяет условиям $f(X) = Y$ и $f^{-1}(Y) = X$, то f — взаимно однозначное?

Задача 10. (II) Пусть $f : X \to Y$, $A_1, A_2 \subset X$. Обязательно ли верно ли, что: а) $f(X) = Y$;
б) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$; в) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$; г) $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$;
д) если $A_1 \subset A_2$, то $f(A_1) \subset f(A_2)$; е) если $f(A_1) \subset f(A_2)$, то $A_1 \subset A_2$; ж) $f^{-1}(f(A_1)) = A_1$?

Задача 11. (II) Пусть $f : X \to Y$, $B_1, B_2 \subset Y$. Обязательно ли верно, что: а) $f^{-1}(Y) = X$;
б) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$; в) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;
г) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$; д) если $B_1 \subset B_2$, то $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$;
е) если $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$, то $B_1 \subset B_2$; ж) $f(f^{-1}(B_1)) = B_1$?

Задача 12. (II) Пусть M — непустое множество. Докажите, что количество подмножеств множества M, состоящих из чётного числа элементов, такое же, как и количество подмножеств, состоящих из нечётного числа элементов.

Задача 13. (II) Докажите, что способов расстановки скобок (указывающих порядок действий) в произведении из n элементов столько же, сколько способов разбить выпуклый $(n+1)$-угольник на треугольники непересекающимися диагоналями.

Замечание. Это число способов называется *числом Каталана* и обозначается C_{n-1}. Например, $C_2 = 2$, потому что для произведения из трёх множителей есть два варианта расставить скобки: $(ab)c$ и $a(bc)$. С другой стороны, есть два способа разрезать четырёхугольник на два треугольника, проведя диагональ.

Задача 14. (II) Сколько различных выражений для множеств можно составить из переменных A и B при помощи (многократно используемых) операций объединения, пересечения и разности? Два выражения считаются одинаковыми, если они равны при любых значениях переменных.

Задача 15. (II) Множество состоит из $2n$ элементов. В нём выделено k подмножеств, причём ни одно не является подмножеством другого. Каково максимальное значение k?

Ликбез – 2. Теория множеств (ответы)

Задача 1. (I) а) $\{0, 78, 201, 2011, 2012\}$; б) $\emptyset$; в) $\{15, 78\}$; г) $\{78\}$; д) $\{15, 78, 137, 201, 2009\}$; е) $\{137, 2012\}$; ж) $\{15, 137\}$.

Задача 2. (I) а) Нет; б) да; в) да; г) да; д) да; е) нет.

Задача 3. (I) Например, $\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$.

Задача 4. (I) Если программистов-математиков x, то математиков $10x$, а программистов $6x$. То есть математиков больше в 5/3 раз.

Задача 5. (I) Нет. Проще всего это увидеть на кругах Эйлера.

Задача 6. (I) 2^n.

Задача 7. (I) 2^{n-k}.

Задача 8. (I) а) n^m; б) если $m = n$, то $n!$, иначе 0.

Задача 9. (I) Нет, это всего лишь сюрьективное отображение.

Задача 10. (II) а) Нет; б) да; в) нет; г) нет; д) да; е) нет; ж) нет.

Задача 11. (II) а) да; б) да; в) да; г) да; д) да; е) нет; ж) нет.

Задача 12. (II) Надо построить взаимно однозначное отображение (из подмножеств с нечётным числом элементов в подмножества с чётным числом элементов). Например, зафиксировать какой-либо элемент и ставить в соответствие друг другу те подмножества, которые отличаются в точности этим элементом.

Задача 13. (II) Строим взаимно однозначное отображение из множества скобочных структур в множество разбиений.

Задача 14. (II) 2^{2^n-1}. Достаточно доказать, что при помощи указанных операций можно отщепить $(2^n - 1)$ независимых кусочков. Это делается при помощи математической индукции. В частном случае $n = 2$ получается 8 выражений.

Задача 15. (II) C_{2n}^n. Если рассматривать вложенные цепочки вида $A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_{2n}$ из подмножеств данного множества M, где множество A_i состоит из i элементов, то становится ясно, что из каждой такой цепочки в данном наборе содержится не более одного элемента. Кроме того, легко доказать, что среди слоёв множества M (всех подмножеств, состоящих из одинакового числа элементов) самым большим будет средний слой (соответствующий числу элементов n). Дальше надо немного похимичить (как сделать это коротко и строго, я за 5 минут не придумал).

Комментарий. Зачёт за этот листок ставился за 4 верно решённые задачи уровня (II). Однако во всех спорных случаях (когда у меня возникали какие-либо сомнения в том, что человек всё понимает) я оставлял за собой право поспрашивать сходу задачи уровня (I).

В отличие от первого листочка, здесь не удалось добиться идеального баланса. Проблема заключалась в том, что из шести задач уровня (II) три довольно сложные. Кроме того, отсутствовал выбор (нет задач уровня (III)). Возможно, поэтому (а также потому, что это была наименее знакомая для школьников тема из представленных на ликбезе), со сдачей этого листочка возникли наибольшие сложности. Фактически, школьникам ничего не оставалось, как решить две простые задачи (12 и 14), а потом с боями прорываться через задачи 10 и 11. Это, на самом деле, было очень полезно; тем, кто сумел прорваться, я с чистой совестью поставил зачёт.

Подытоживая сдачу задач, стоит отметить, что из задач уровня (I) пользовались популярностью задачи с 4-ой по 7-ую, а задачи 8 и 9, напротив, не пользовались. Задачи 12 и 14 решили почти все (кто сдавал), а задачи 13 и 15, напротив, почти никто.

Таким образом, в будущем я бы повысил уровень задач 3 и 9 до второго, а уровень задачи 15 до третьего. Также я бы добавил в задачу 14 пункт б) про случай n множеств (и сделал бы именно его уровня (II), а пункт а) — уровня (I)). Возможно, полезно было бы добавить ещё сложных задач (может, и простых — тоже). И уж точно никак нельзя ставить зачёт за этот листок без обсуждения хотя бы нескольких пунктов из задач 10 и 11.