Ликбез – 4. Предел последовательности.

Задача 1. (I) Найдите ошибку в рассуждении: «Пусть $x_n = \dfrac{n-1}{n}$. Тогда очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = 1$. Но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(n-1) = 0\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(n-1) = 0$. Отсюда $0 = 1$.»

Задача 2. (I) Последовательности (a_n) и (b_n) таковы, что последовательность (a_nb_n) бесконечно малая. Обязательно ли тогда хотя бы одна из последовательностей (a_n), (b_n) бесконечно малая?

Задача 3. (I) Известно, что у последовательности (a_n+b_n) есть предел. Обязательно ли тогда (a_n) и (b_n) имеют пределы?

Задача 4. (I) Последовательности (a_n) и (a_nb_n) имеют пределы. Обязательно ли тогда (b_n) имеет предел?

Задача 5. (I) Все элементы некоторой последовательности являются целыми числами. Докажите, что она имеет предел тогда и только тогда, когда все её члены, начиная с некоторого, совпадают.

Задача 6. (I) Найдите предел последовательности (x_n) (если он существует) в случае, если:
а) $x_n = \dfrac{2n-5}{7n+4}$; б) $x_n = \dfrac{5n^2-7n+2}{6n^2+8n-5}$; в) $x_n = \dfrac{n^9+3n^4-4n+1}{n^7+7n^2+2}$; г) $x_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+3n}}$.

Задача 7. (I) Найдите предел а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\{\pi n\}}{n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[\pi n]}{n}$.
Здесь $[x]$ означает целую часть числа x, а $\{x\}$ — дробную часть числа x.

Задача 8. (II) Найдите предел последовательности (x_n) (если он существует) в случае, если:
а) $x_n = 1+q+\ldots+q^n$ $(q\in\mathbb{R})$; б) $x_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$; в) $x_n = \sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-n}$.

Задача 9. (II) При каких натуральных k выполнено равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2011}}{(n+1)^k-n^k} = \dfrac{1}{2012}$?

Задача 10. (II) Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}$, если $a, b > 0$.

Задача 11. (II) Первые два члена последовательности равны 0 и 1, а каждый следующий есть среднее арифметическое двух предыдущих. Найдите предел этой последовательности.

Задача 12. (II) Найдите предел последовательности (x_n) (если он существует) в случае, если:
а) $x_n = \sqrt[n]{a}$; б) $x_n = \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$; в) $x_n = \dfrac{n^{64}}{28^n}$; г) $x_n = \dfrac{a^n}{n!}$, $a > 0$; д) $x_n = \dfrac{C_n^{37}}{n^{37}}$.

Задача 13. (II) Про последовательность (x_n) известно, что она имеет предел.
а) Докажите, что $(x_{n+1}-x_n)$ — бесконечно малая последовательность. Верно ли обратное?
б) Сходится ли последовательность $\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)$? Какие значения может принимать предел?

Задача 14. (II) Последовательность (x_n) с положительными членами такова, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)$, меньший единицы. Докажите, что (x_n) бесконечно малая.

Задача 15. (II) Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$.

Задача 16. (II) Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-\cdots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$.

Задача 17. (III) Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot2+2\cdot3+\cdots+n\cdot(n+1)}{n^3}$.

Задача 18. (III) С незапамятных времён жители островов Чунга и Чанга раз в год обмениваются драгоценностями. Жители Чунги привозят половину своих драгоценностей на Чангу, а жители Чанги одновременно привозят треть своих драгоценностей на Чунгу. Какая часть драгоценностей находится на каждом из островов? (Новые драгоценности за это время на островах не появлялись, а старые не терялись).

Ликбез – 4. Предел последовательности (ответы)

Задача 1. (I) Ошибка содержится в равенстве $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(n-1)$. Поскольку последовательность $y_n=n-1$ расходится, соответствующий переход неправомерен.

Задача 2. (I) Нет.

Задача 3. (I) Нет.

Задача 4. (I) Нет.

Задача 5. (I) По определению.

Задача 6. (I) а) $\dfrac{2}{7}$; б) $\dfrac{5}{6}$; в) предела нет; г) 1.

Задача 7. (I) а) 0; б) 1.

Задача 8. (II) а) $\dfrac{1}{1-q}$, если $|q|<1$, иначе предела нет; б) 0; в) $\dfrac{1}{2}$.

Задача 9. (II) $k=2012$.

Задача 10. (II) $\max(a,b)$.

Задача 11. (II) $\dfrac{2}{3}$. Разность двух геометрических прогрессий (хотя по-хорошему надо говорить о сумме абсолютно сходящегося ряда).

Задача 12. (II) а) 0, если $q=0$, 1, если $q>0$, иначе предела нет;
б) 1/3; в) предела нет; г) 0; д) $\dfrac{1}{37!}$.

Задача 13. (II) а) Обратное неверно.
б) Сходимость есть не всегда, но если предел существует, то он лежит в промежутке $[-1;1]$.

Задача 14. (II) Более или менее по определению.

Задача 15. (II) $-\dfrac{1}{2}$.

Задача 16. (II) -2.

Задача 17. (III) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot2+2\cdot3+\dots+n\cdot(n+1)}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3n^3}=\dfrac{1}{3}$.

Задача 18. (III) 2/5 и 3/5. Действительно, пусть доля сокровищ, оказавшихся в n-ый год на Чунге и Чанге, равна a_n и b_n соответственно. Тогда $a_n+b_n=1$, и кроме того

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} &=& a_n/2+b_n/3\\ b_{n+1} &=& a_n/2+2b_n/3. \end{array}\right. \tag{1}$$

Введём в рассмотрение последовательности (α_n) и (β_n) такие, что $a_n=2/5+\alpha_n$ и $b_n=3/5+\beta_n$. Докажем, что обе эти последовательности бесконечно малы. Действительно, во-первых для всех натуральных n имеем $\alpha_n+\beta_n=0$. Во-вторых, из формулы (1) следует, что

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha_{n+1} &=& \alpha_n/2+\beta_n/3\\ \beta_{n+1} &=& \alpha_n/2+2\beta_n/3. \end{array}\right. \tag{2}$$

Отсюда легко получаем $\alpha_{n+1}=\alpha_n/6$ и $\beta_{n+1}=\beta_n/6$. Теперь требуемое стало очевидным.

Комментарий. Зачёта по этому листку не проводилось, школьники его не сдавали. Поэтому нет возможности понять, насколько он получился удачным. Однако есть надежда, что он вполне сбалансирован, и вообще по качеству подобен первому. В будущем в него можно добавить задачи на пределы из предыдущего листка, а также несколько задач уровня (III). Тогда по количеству задач он будет совсем похож на первый. А значит, для зачёта к нему можно будет применять примерно те же критерии.