Ликбез – 3. Логарифмы.

1. Определения и свойства степеней

Понятие логарифма, с которым мы сегодня познакомимся (и понимание которого будет основной целью нашей лекции), является противоположным к понятию возведения в степень. Поэтому начнём мы с того, что вспомним, как возводить числа в различные степени, и какими свойствами эта процедура обладает.

Определение 1. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Положим по определению $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$.

Определение 1 для нас — базовое, его осмысленность не подвергается сомнению, поскольку возводить числа в натуральную степень нас научили в детстве, и подчас мы даже представить себе не можем, как может быть иначе. Все последующие определения будут непосредственным образом вытекать из него и обнаруживающихся естественных свойств степени. Свойства эти легко проверяются для натуральных показателей, поэтому мы оставим их доказательство читателю в качестве несложного упражнения. Для других же показателей степени (целых, рациональных и действительных) определения специально будут вводиться таким образом, чтобы эти свойства автоматически выполнялись. Тем не менее, в каждом конкретном случае убедиться в их справедливости читателю, ранее с ними знакомому лишь поверхностно, будет не лишним.

Свойство 1. $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.

Предположим, мы хотим научиться возводить числа в отрицательные степени. Например, нам надо вычислить a^{-10}. Поскольку должно выполняться свойство 1, справедливым окажется, скажем, равенство $a^{-10} \cdot a^{20} = a^{-10+20} = a^{10}$. Следовательно, $a^{-10} = 1/a^{10}$. Отсюда видно, что для целых степеней определение должно быть таким.

Определение 2. Пусть $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \leqslant 0$. Положим $a^0 = 1$; $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$, если $n < 0$.

Обратите внимание, что ноль мы не можем возводить в неположительную степень. В частности, не определено значение выражения 0^0. Это вытекает из правила, характеризующегося знакомой с детства фразой «На ноль делить нельзя!»

Свойство 2. $(a^m)^n = a^{mn}$.

Свойство 2 следует напрямую из определения возведения в степень с натуральным показателем. А из него вытекает, как мы должны обращаться с рациональными степенями. Действительно, пусть, например, мы хотим вычислить $a^{3/10}$. Поскольку $(a^{3/10})^{10} = a^{(3/10)\cdot 10} = a^3$, то получается, что формула должна быть следующей: $a^{3/10} = \sqrt[10]{a^3}$.

Определение 3. Пусть $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Положим $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$.

Возводить в степень с рациональным показателем по определению можно только положительные числа. Это может показаться нелогичным, так как если число m — нечётное, то извлечь корень m-ой степени можно и из отрицательного числа. С другой стороны, когда хочется работать со всеми рациональными показателями единообразно, такое ограничение выглядит весьма разумным. И правда, было бы странным, если бы мы одни и те же числа в степень $1/3$ возвести могли бы, а в степень $2/6$ — нет. И ещё более странным было бы при возведении в эти две (по сути одинаковые) степени получить разный результат. А именно так и получится, если тупо применить определение 3: имеем $(-1)^{1/3} = \sqrt[3]{-1} = -1$, в то время как $(-1)^{2/6} = \sqrt[6]{(-1)^2} = 1$. Таким образом, мы считаем по определению, что значение выражения $(-1)^{1/3}$ не определено, в то время как $\sqrt[3]{-1} = -1$.

Прежде, чем сказать что-либо про возведение в степень с произвольным действительным показателем, отметим ещё три важных свойства степеней.

Свойство 3. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$.

Свойство 4. *Пусть $m > n$, $a > 0$. Тогда $a^m > a^n$ при $a > 1$ и $a^m < a^n$ при $a < 1$.*

Свойство 5. *Пусть $a > b > 0$. Тогда $a^n > b^n$ при $n > 0$ и $a^n < b^n$ при $n < 0$.*

Строгого определения возведения в степень с действительным показателем в рамках данного курса мы не дадим. Для этого нам бы пришлось копаться в основах самого понятия действительного числа, что, безусловно, представляет большой интерес, но увело бы нас слишком далеко. Для наших же целей достаточно понимать в целом, как устроена жизнь, не вдаваясь в умопомрачительные подробности, над которыми ломали головы лучшие математики XIX-го века. Это нам позволяет сделать свойство 4.

Каждое действительное число мы будем представлять в виде десятичной дроби, возможно, бесконечной. Любое рациональное число, будучи представлено в таком виде, оказывается периодической десятичной дробью. Предположим, мы хотим возвести число $a > 1$ в степень $r \in \mathbb{R}$. Тогда согласно свойству 4 для любых чисел q_1 и q_2 таких, что $q_1 < r < q_2$, должны выполняться неравенства $a^{q_1} < a^r < a^{q_2}$. В частности, они должны иметь место для рациональных q_1 и q_2, а для них мы уже знаем, как устроена степень. Подбирая числа q_1 и q_2 достаточно близко к r, мы можем вычислить значение a^r сколь угодно точно. Аналогичным образом мы будем действовать и в том случае, когда $0 < a < 1$ (только знак неравенств будет другим). Ну, и, конечно, $1^r = 1$ вне зависимости от того, какое r мы берём.

2. Свойства функций

Напомним определения основных понятий, которые будут использоваться в дальнейшем.

Определение 4. Пусть $M \subset \mathbb{R}$. Отображение $f\colon M \to \mathbb{R}$ называется *функцией на множестве M*. Множество M называется *областью определения* функции f и обозначается $D(f)$. Множество $f(M)$ называется *множеством значений* функции f и обозначается $E(f)$.

Вообще говоря, здесь мы определили действительнозначные функции, то есть функции, множество значений которых является подмножеством множества действительных чисел. Можно рассматривать также функции со значениями в других числовых множествах, например, комплекснозначные. То же относится и к области определения функции.

Определение 5. *Графиком* функции f называется множество $\Gamma(f) \subset D(f) \times \mathbb{R}$, состоящее из всех пар вида $(x, f(x))$, где $x \in D(f)$.

Перечислим основные типы действительнозначных функций.

- Функция f называется *ограниченной*, если $\exists C \in \mathbb{R}\ \forall x \in D(f) : |f(x)| < C$.
  График ограниченной функции целиком содержится в полосе $\{(x, y) \mid -C < y < C\}$.

- Функция f называется *монотонно возрастающей*, если для дюбых двух $x_1, x_2 \in D(f)$ из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$. Аналогично определяются *монотонно убывающая* ($f(x_1) > f(x_2)$), *монотонно неубывающая* ($f(x_1) \leqslant f(x_2)$) и *монотонно невозрастающая* ($f(x_1) \geqslant f(x_2)$) функции. Функция называется *монотонной*, если она монотонно неубывающая или монотонно невозрастающая, и *строго монотонной*, если она монотонно возрастающая или монотонно убывающая.

- Функция f называется *чётной* (*нечётной*), если область определения функции f симметрична относительно начала координат (то есть $\forall x \in D(f) : -x \in D(f)$), а также для всех $x \in D(f)$ выполняется $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$.
  График любой чётной функции симметричен относительно оси ординат, а график любой нечётной функции симметричен относительно начала координат.

- Функция f называется *периодической*, если существует такое $T > 0$, что для всех $x \in D(f)$ при каждом $n \in \mathbb{Z}$ выполнено $(x + nT) \in D(f)$, причём $f(x + nT) = f(x)$. Число T называется *периодом* функции f.
  График периодической функции самосовмещается при параллельном переносе $x \mapsto (x + T)$.

- Функции f и g называются *взаимно обратными*, если $D(f) = E(g)$, $D(g) = E(f)$, а также $g(f(x_f)) = x_f$ и $f(g(x_g)) = x_g$ для всех $x_f \in D(f)$, $x_g \in D(g)$. Функция, имеющая обратную, называется *обратимой*.

- Функция f называется *непрерывной*, если выполнено следующее незамысловатое условие: $\forall x_0 \in D(f) \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in D(f), |x - x_0| < \delta : \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$
  Непрерывные функции пока можно представлять себе как такие функции, график которых можно нарисовать, не отрывая ручки от бумаги.

Обратим особое внимание на обратимые функции и обратные к ним. Докажем парочку полезных свойств, которые пригодятся нам в ближайшем будущем.

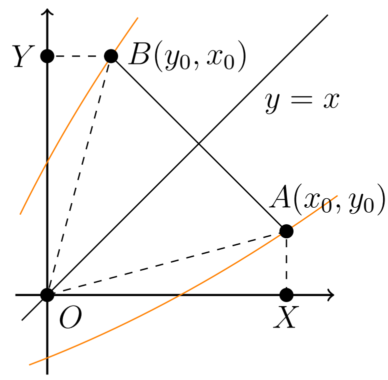

Рис. 1.

Утверждение 1. *Графики $\Gamma(f)$ и $\Gamma(g)$ взаимно обратных функций f и g симметричны относительно прямой $y = x$.*

Доказательство. Предположим, что $(x_0, y_0) \in \Gamma(f)$. Докажем, что в этом случае $(y_0, x_0) \in \Gamma(g)$. В самом деле, по определению графика ($\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in D(f)\}$) выполнено равенство $y_0 = f(x_0)$. Следовательно, из определения взаимно обратных функций ($D(g) = E(f)$) имеем $y_0 \in D(g)$, а значит, $(y_0, g(y_0)) \in \Gamma(g)$. Но $g(y_0) = g(f(x_0)) = x_0$.

Осталось проверить, что точки (x_0, y_0) и (y_0, x_0) симметричны относительно прямой $y = x$. Но это очевидно (действительно, см. рис. 1: $\triangle OAX = \triangle OBY$ по двум сторонам и углу между ними, а значит, треугольник OAB равнобедренный и $y = x$ — биссектриса угла AOB). $\square$

Утверждение 2. *Всякая строго монотонная функция обратима, причём обратная к возрастающей (убывающей) функции также является возрастающей (убывающей) функцией.*

Доказательство. На самом деле доказывать здесь особенно нечего. Главное — надо вспомнить, что понятие функции является частным случаем понятия отображения. А для произвольного отображения, как мы знаем из предыдущей лекции, справедливо следующее утверждение: отображение обратимо тогда и только тогда, когда оно взаимно однозначно. Таким образом, нам достаточно проверить, что если f — строго монотонная функция, то отображение $f\colon D(f) \to E(f)$ взаимно однозначно, то есть что любой элемент $y \in E(f)$ имеет ровно один прообраз. То, что хотя бы один прообраз есть, следует из определения множества значений $E(f)$. А его единственность вытекает из монотонности функции f.

Вторая часть утверждения не менее проста. Пусть для определённости функция f монотонно возрастает, g — обратная к f функция. Тогда если $y_1, y_2 \in D(g) = E(f)$, причём $y_1 < y_2$, то найдутся такие $x_1, x_2 \in D(f) = E(g)$, что $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ и $x_1 < x_2$. Однако, $x_1 = g(y_1)$ и $x_2 = g(y_2)$, откуда сразу следует, что $g(y_1) < g(y_2)$. Следовательно, функция g монотонно возрастает. $\square$

3. Показательная и логарифмическая функции

Перейдём, наконец, к основной цели нашей сегодняшней лекции — определению и свойствам логарифмов.

Определение 6. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданная формулой $f(x) = a^x$, где $a > 0$, называется *показательной функцией с основанием a*.

Как видно из свойства 4 для степеней, показательная функция всегда монотонна, но характер монотонности её может быть различным в зависимости от основания a. Так, если $a > 1$, то показательная функция монотонно возрастает. Если же $0 < a < 1$, то она является монотонно убывающей функцией. Особняком стоит случай $a = 1$: показательная функция с таким основанием неизменна, то есть представляет собой константу. В частности, в этом случае (в отличие от остальных) показательная функция необратима.

Графики показательных функций с различными основаниями ($a = 2$, $a = 1$ и $a = 1/2$) представлены на рис. 2. На этих иллюстрациях хорошо видно ещё одно свойство показательной функции: её график всегда проходит через точку $(0, 1)$. Оно и понятно, какое число в нулевую степень ни возводи, всё равно получится единица.

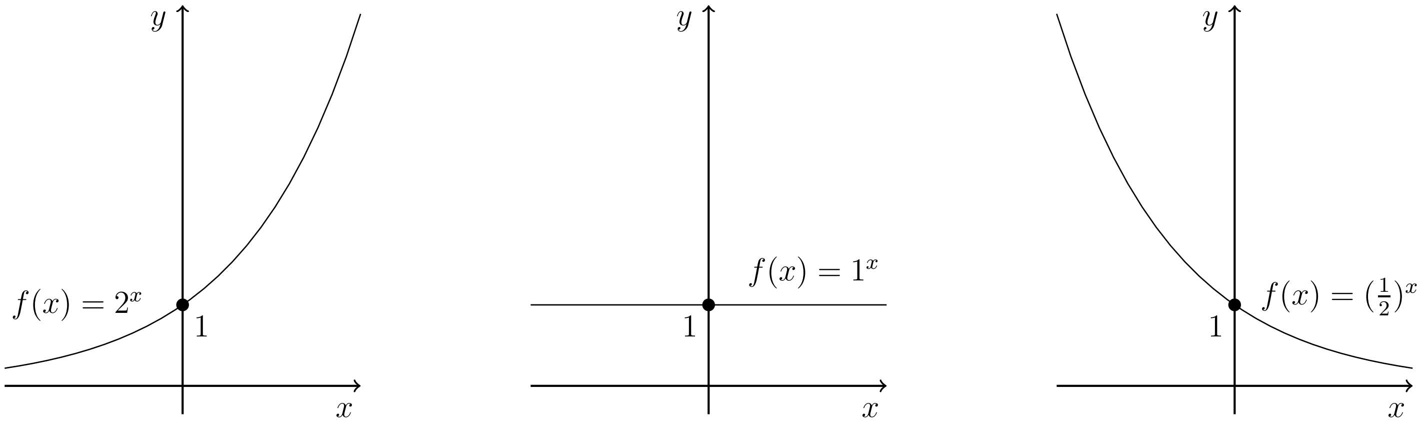

Рис. 2.

Определение 7. Функция, обратная к показательной функции с основанием a, где $a \neq 1$, называется *логарифмической функцией с основанием a*. Значение логарифмической функции в точке x называется *логарифмом числа x по основанию a* и обозначается $\log_a x$.

В силу определения 7 и свойств обратных функций, область определения логарифмической функции есть множество положительных чисел. Таким образом, значение выражения $\log_a x$ корректно определено только в том случае, когда $x > 0$ (а также $a > 0$ и $a \neq 1$). Понимать его нужно следующим образом: $\log_a x$ — это такое число, в которое нужно возвести a, чтобы получилось x.

Например, $\log_2 4 = 2$, $\log_{81} 3 = 1/4$, $\log_{25}(1/625) = -2$, $\log_{1/4} 2 = -1/2$.

Логарифмическая функция монотонна, причём, как следует из утверждения 2, характер её монотонности меняется в зависимости от основания a. Если $a > 1$, то логарифмическая функция монотонно возрастает. Если же $0 < a < 1$, то она является монотонно убывающей функцией. Соответствующие иллюстрации приведены на рис. 3.

Логарифмы обладают следующими основными свойствами.

Утверждение 3. *Пусть числа a, b, x, y положительны, причём $a \neq 1$, $b \neq 1$, $c \neq 0$. Тогда:*
1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$;
2) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;
3) $\log_a x^d = d \log_a x$;
4) $\log_{a^c} x = \dfrac{1}{c} \log_a x$;
5) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$;
6) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$;
7) $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$.

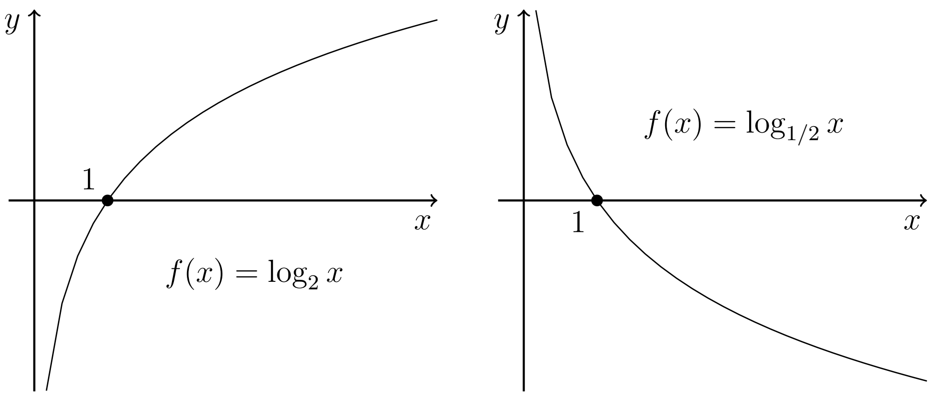

Рис. 3.

Доказательство. Покажем на примере свойства 1), как доказываются все эти свойства. Заметим, что если возвести число a в степень $\log_a(xy)$, то по определению получится xy. С другой стороны, $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy$. Получилось одно и то же. Следовательно, поскольку показательная функция с основанием $a \neq 1$ является строго монотонной функцией, то разным её значениям соответствуют разные значения аргумента. А это и означает, что $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

Аналогично проверяются и другие свойства логарифма. □