Ликбез – 1. Комбинаторика.

Задача 1. (I) Верно ли следующее рассуждение?

«Для любого натурального n произвольные n точек плоскости лежат на одной прямой. При $n = 1$ утверждение, очевидно, верно. Предположив, что утверждение верно для $n = k$, докажем его для $n = k + 1$. Возьмём произвольные $k + 1$ точек. Точки $1, \ldots, k$ лежат на одной прямой, точки $2, \ldots, k+1$ лежат на одной прямой (по предположению индукции), следовательно, все они лежат на единственной прямой, проходящей через точки $2, \ldots, k$.»

Задача 2. (I) Докажите, что при любом натуральном n выполняется неравенство

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Задача 3. (I) Дана последовательность чисел Фибоначчи: $F_1 = F_2 = 1$ и $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ при всех $k > 1$. Докажите, что $F_{m+n} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$ для любых натуральных $m, n \geqslant 2$.

Задача 4. (II) (*Неравенство Бернулли*) Докажите, что если $a > -1$, то $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

Задача 5. (II) На окружности расставлены 2^n чисел, каждое из которых равно 1 или -1. Каждую секунду все числа одновременно умножаются на своего правого соседа. Докажите, что настанет момент, когда все числа будут равны 1.

Задача 6. (II) В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет в то же место колоды. Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх вне зависимости от того, как Петя выбирает пачки. (Примечание: если "пачка" состоит лишь из одной карты, то требуется только, чтобы она лежала рубашкой вниз.)

Задача 7. (III) Девять воров хотят поделить добычу. Любой из них убеждён, что он поделил бы добычу на равные части, однако остальные ему не верят. Каким образом надо действовать ворам, чтобы после раздела каждый был уверен, что ему досталось не менее 1/9 части добычи?

Задача 8. (III) На выборах в городскую Думу каждый избиратель, если он приходит на выборы, отдает голос за себя (если он является кандидатом) и за тех кандидатов, которые являются его друзьями. Прогноз социологической службы мэрии считается хорошим, если в нём правильно предсказано количество голосов, поданных хотя бы за одного из кандидатов, и нехорошим в противном случае. Докажите, что при любом прогнозе избиратели могут так явиться на выборы, что этот прогноз окажется нехорошим.

Задача 9. (III) Некоторые натуральные числа отмечены. Известно, что на каждом отрезке числовой прямой длины 2012 есть отмеченное число. Докажите, что найдётся пара отмеченных чисел, одно из которых делится на другое.

Задача 10. (I) Имеется $2m$ одинаковых белых шаров и $3n$ одинаковых чёрных шаров. Сколькими способами из всего этого набора можно взять $(m + n)$ шаров?

Задача 11. (I) В каком количестве шестизначных чисел хотя бы 2 цифры совпадают?

Задача 12. (I) Подряд выписаны все числа от 1 до 100. Сколько раз в этой записи встречается цифра 1?

Задача 13. (I) Сколько среди чисел от 10 до 1000 таких, у которых каждая последующая цифра больше предыдущей?

Задача 14. (I) Сколько различных браслетов можно сделать из 5 изумрудов, 6 рубинов и 7 алмазов, если в браслет должны войти все 18 камней?

Задача 15. (I) Сколько различных наборов по 8 пирожных в каждом можно составить, используя 4 сорта пирожных?

Задача 16. (I) Сколькими способами можно разложить m белых и n чёрных шаров так, чтобы никакие два чёрных шара не лежали рядом?

Задача 17. (I) Пусть множество C содержит n элементов. Сколькими способами можно выбрать такие два его подмножества A и B, что а) $A \cap B = \emptyset$; б) $A \subset B$?

Задача 18. (I) Сколько слагаемых получится, если в выражении $(1+x+y)^{20}$ раскрыть скобки, но не привести подобные члены?

Задача 19. (I) В ряд записали 105 единиц, поставив перед каждой знак "+". Сначала изменили знак на противоположный перед каждой третьей единицей, затем — перед каждой пятой, и наконец — перед каждой седьмой. Найдите значение полученного выражения.

Задача 20. (II) Каждая грань кубика раскрашивается либо в чёрный, либо в белый цвет. Сколько существует различных способов окраски? Два кубика считаются раскрашенными различно, если их нельзя перепутать, как бы они не поворачивались.

Задача 21. (II) а) Сколькими способами можно посадить за круглый стол пять мужчин и пять женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?
б) А если рассаживать их не за стол, а на карусель?

Задача 22. (II) На вечеринке присутствует 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них 4 пары для танца?

Задача 23. (II) Фабрика игрушек выпускает разноцветные кубики. У всякого кубика каждая грань целиком окрашена одной из шести красок, имеющихся на фабрике, причём различные грани одного кубика окрашены разными красками. Сколько видов кубиков выпускает фабрика?

Задача 24. (III) Фабрика из задачи 23 начала выпуск параллелепипедов $1 \times 1 \times 2$, склеивая выпускаемые ею кубики по два. Сколько получится различных видов новой игрушки?

Задача 25. (II) Меню в школьном буфете постоянно и состоит из n разных блюд. Петя хочет каждый день выбирать себе завтрак по-новому (за раз он может съесть от 0 до n разных блюд).
а) Сколько дней ему удастся это делать? б) Сколько блюд он съест за это время?

Задача 26. (III) Вася решил последовать примеру Пети из задачи 25, но съедать каждый день нечётное число блюд.
а) Сколько дней ему удастся это делать? б) Сколько блюд Вася съест за это время?

Задача 27. (III) Сколько существует десятизначных чисел, все цифры которых различны, и которые делятся на 11111?

Задача 28. (III) Сколько телефонных номеров содержат комбинацию 12? Телефонные номера состоят из семи цифр и не могут начинаться с нуля.

Задача 29. а) **(I)** Какое наибольшее количество неразличимых слонов можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

б) **(III)** Найдите число способов такой расстановки.

Задача 30. (II) (*Бином Ньютона*) Докажите, что $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^n b^n$.

Задача 31. (II) Сколькими нулями оканчивается число а) $11^{100} - 1$; б) $9^{11} + 1$?

Задача 32. (III) Найдите сумму $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^n$.

Задача 33. (III) Пусть $p \geqslant m$ и $q \geqslant m$. Найдите сумму $C_p^0 \cdot C_q^m + C_p^1 \cdot C_q^{m-1} + \cdots + C_p^{m-1} \cdot C_q^1 + C_p^m \cdot C_q^0$.

Задача 34. Комбинаторными методами (не используя явные формулы) докажите, что
а) $C_n^k = C_n^{n-k}$; б) $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$; в) $C_n^k C_{n-k}^{m-k} = C_m^k C_n^m$; г) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$;
д) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$; е) $C_n^n + C_{n+1}^n + \ldots + C_{n+m-2}^n + C_{n+m-1}^n = C_{n+m}^{n+1}$;
ж) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$; з) $n^m - C_n^1 \cdot (n-1)^m + C_n^2 \cdot (n-2)^m - \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \cdot (n-(n-1))^m = 0$.

Задача 35. (III) Для каждого натурального n определите, сколько существует троек натуральных чисел, сумма которых равна $6n$.