Ликбез – 2. Теория множеств.

Задача 1. (I) Пусть $A = \{15, 78, 137, 201\}$, $B = \{78, 201, 2009\}$, $C = \{0, 15, 205, 2011\}$, $D = \{0, 78, 2011, 2012\}$. Найдите следующие множества:
а) $(A \cap B) \cup D$; б) $C \cap (D \cap B)$; в) $(A \cup B) \cap (C \cup D)$; г) $(A \cup (B \cap C)) \cap D$;
д) $(A \cup B) \backslash (C \cap D)$; е) $(A \cup D) \backslash (B \cup C)$; ж) $A \backslash (B \backslash (C \backslash D))$.

Задача 2. (I) Верно ли, что для любых множеств A, B, C:
а) $(A \backslash B) \cup B = A$; б) $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$; в) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
г) $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$; д) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$; е) $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = A \cup B$?

Задача 3. (I) Приведите пример такого множества из четырёх элементов, что для каждых двух его элементов один из них является элементом другого.

Задача 4. (I) Каждый десятый математик — программист, а каждый шестой программист — математик. Кого больше — математиков или программистов — и во сколько раз?

Задача 5. (I) Найдутся ли такие множества A, B и C, что $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ и $(A \cap B) \backslash C = \emptyset$?

Задача 6. (I) Сколько различных подмножеств у множества, состоящего из n элементов?

Задача 7. (I) Пусть множество A состоит из n элементов, а его подмножество B — из k элементов. Сколькими способами можно выбрать такое множество C, что $B \subset C \subset A$?

Задача 8. (I) Пусть множество X состоит из m элементов, а множество Y — из n элементов.
а) Сколько существует различных отображений из множества X в множество Y?
б) Как много среди этих отображений взаимно однозначных?

Задача 9. (I) Верно ли, что если отображение $f : X \to Y$ удовлетворяет условиям $f(X) = Y$ и $f^{-1}(Y) = X$, то f — взаимно однозначное?

Задача 10. (II) Пусть $f : X \to Y$, $A_1, A_2 \subset X$. Обязательно ли верно ли, что: а) $f(X) = Y$;
б) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$; в) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$; г) $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$;
д) если $A_1 \subset A_2$, то $f(A_1) \subset f(A_2)$; е) если $f(A_1) \subset f(A_2)$, то $A_1 \subset A_2$; ж) $f^{-1}(f(A_1)) = A_1$?

Задача 11. (II) Пусть $f : X \to Y$, $B_1, B_2 \subset Y$. Обязательно ли верно, что: а) $f^{-1}(Y) = X$;
б) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$; в) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;
г) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$; д) если $B_1 \subset B_2$, то $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$;
е) если $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$, то $B_1 \subset B_2$; ж) $f(f^{-1}(B_1)) = B_1$?

Задача 12. (II) Пусть M — непустое множество. Докажите, что количество подмножеств множества M, состоящих из чётного числа элементов, такое же, как и количество подмножеств, состоящих из нечётного числа элементов.

Задача 13. (II) Докажите, что способов расстановки скобок (указывающих порядок действий) в произведении из n элементов столько же, сколько способов разбить выпуклый $(n+1)$-угольник на треугольники непересекающимися диагоналями.

Замечание. Это число способов называется *числом Каталана* и обозначается C_{n-1}. Например, $C_2 = 2$, потому что для произведения из трёх множителей есть два варианта расставить скобки: $(ab)c$ и $a(bc)$. С другой стороны, есть два способа разрезать четырёхугольник на два треугольника, проведя диагональ.

Задача 14. (II) Сколько различных выражений для множеств можно составить из переменных A и B при помощи (многократно используемых) операций объединения, пересечения и разности? Два выражения считаются одинаковыми, если они равны при любых значениях переменных.

Задача 15. (II) Множество состоит из $2n$ элементов. В нём выделено k подмножеств, причём ни одно не является подмножеством другого. Каково максимальное значение k?