Ликбез – 3. Логарифмы и пределы.

Определение 1. Функция $f(x) = x^a$ называется *степенной функцией* с показателем a.

Задача 1. (I) Найдите область определения степенной функции при различных a.

Задача 2. (II) Определите, когда степенная функция обратима, и найдите обратную к ней функцию.

Задача 3. (I) Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. Верно ли, что при любом $x \in \mathbb{R}$ выполнено равенство
а) $x = \log_a a^x$; б) $x = a^{\log_a x}$?

Задача 4. Пусть числа a, b, x, y положительны, причём $a \neq 1$, $b \neq 1$, $c \neq 0$. Докажите, что:
а) **(I)** $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$; б) **(I)** $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$; в) **(I)** $\log_a x^d = d \log_a x$;
г) **(I)** $\log_{a^c} x = \dfrac{1}{c} \log_a x$; д) **(II)** $\log_a b \cdot \log_b a = 1$; е) **(II)** $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$; ж) **(II)** $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$.

Задача 5. (II) Решите уравнение $\log_2 x = 2 \log_3 x$.

Задача 6. (II) Что больше: $\log_2 3$ или $\log_4 7$?

Определение 2. Последовательность (x_n) называется *ограниченной*, если найдётся такое число C, что при всех натуральных n будет выполнено неравенство $|x_n| < C$.
Формально: $\exists C \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} :\ |x_n| < C$.

Задача 7. (I) Придумайте ограниченную последовательность, у которой
а) есть и наибольший, и наименьший член;
б) есть наибольший член, но нет наименьшего члена;
в) нет ни наименьшего, ни наибольшего члена.

Задача 8. Какие из следующих последовательностей являются ограниченными:
а) **(I)** $x_n = n^5 - n^2 + 3$; б) **(II)** $x_n = \dfrac{(-1)^n n}{n^2+1}$; в) **(II)** $x_n = 1 + q + \ldots + q^n$ $(q \in \mathbb{R})$; г) **(III)** $x_n = \sqrt[n]{n}$?

Определение 3. Последовательность (x_n) называется *бесконечно малой*, если для любого положительного числа ε для почти всех n выполняется неравенство $|x_n| < \varepsilon$.
Формально: $\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}\ \forall n > k :\ |x_n| < \varepsilon$.

Определение 4. Число a называется *пределом последовательности* (x_n), если существует такая бесконечно малая последовательность (α_n), что при всех натуральных n выполнено равенство $x_n = a + \alpha_n$. Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Говорят также, что (x_n) *стремится (сходится) к a при n, стремящемся к бесконечности*, и пишут $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Можно заметить, что a — предел последовательности (x_n), если для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое натуральное число k, что при всех натуральных $n > k$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.
Формально: $\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}\ \forall n > k :\ |x_n - a| < \varepsilon$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*. Про последовательность, у которой предела нет, говорят, что она *расходится*.

Задача 9. (I) Докажите, что если последовательность имеет предел, то она ограничена. Верно ли обратное?

Задача 10. (II) Найдите предел последовательности (x_n) (если он существует) в случае, если:
а) $x_n = \dfrac{n}{n+5}$; б) $x_n = \begin{cases} -1, & \text{если } n \text{ делится на } 2 \\ n, & \text{если } n \text{ не делится на } 2; \end{cases}$ в) $x_n = 0,\underbrace{2\ldots2}_{n}$;
г) $x_n = (-1)^n$; д) $x_n = q^n$ $(q \in \mathbb{R})$; е) $x_n = -\sqrt{n}$; ж) $x_n = \sqrt{n^2+1}$.

Задача 11. (II) Пусть (x_n) — бесконечно малая, а (y_n) — ограниченная последовательность. Докажите, что $(x_n + y_n)$ — ограниченная, а $(x_n y_n)$ — бесконечно малая последовательность.

Задача 12. (III) Любую ли последовательность можно представить как отношение
а) двух ограниченных последовательностей; б) двух бесконечно малых последовательностей?