Ликбез – 4. Предел последовательности.

Задача 1. **(I)** Найдите ошибку в рассуждении: «Пусть $x_n = \dfrac{n-1}{n}$. Тогда очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = 1$. Но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(n-1) = 0\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(n-1) = 0$. Отсюда $0=1$.»

Задача 2. **(I)** Последовательности (a_n) и (b_n) таковы, что последовательность (a_nb_n) бесконечно малая. Обязательно ли тогда хотя бы одна из последовательностей (a_n), (b_n) бесконечно малая?

Задача 3. **(I)** Известно, что у последовательности (a_n+b_n) есть предел. Обязательно ли тогда (a_n) и (b_n) имеют пределы?

Задача 4. **(I)** Последовательности (a_n) и (a_nb_n) имеют пределы. Обязательно ли тогда (b_n) имеет предел?

Задача 5. **(I)** Все элементы некоторой последовательности являются целыми числами. Докажите, что она имеет предел тогда и только тогда, когда все её члены, начиная с некоторого, совпадают.

Задача 6. **(I)** Найдите предел последовательности (x_n) (если он существует) в случае, если:
а) $x_n = \dfrac{2n-5}{7n+4}$; б) $x_n = \dfrac{5n^2-7n+2}{6n^2+8n-5}$; в) $x_n = \dfrac{n^9+3n^4-4n+1}{n^7+7n^2+2}$; г) $x_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+3n}}$.

Задача 7. **(I)** Найдите предел а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\{\pi n\}}{n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[\pi n]}{n}$.
Здесь $[x]$ означает целую часть числа x, а $\{x\}$ — дробную часть числа x.

Задача 8. **(II)** Найдите предел последовательности (x_n) (если он существует) в случае, если:
а) $x_n = 1+q+\ldots+q^n$ $(q\in\mathbb{R})$; б) $x_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$; в) $x_n = \sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-n}$.

Задача 9. **(II)** При каких натуральных k выполнено равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2011}}{(n+1)^k-n^k} = \dfrac{1}{2012}$?

Задача 10. **(II)** Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}$, если $a,b>0$.

Задача 11. **(II)** Первые два члена последовательности равны 0 и 1, а каждый следующий есть среднее арифметическое двух предыдущих. Найдите предел этой последовательности.

Задача 12. **(II)** Найдите предел последовательности (x_n) (если он существует) в случае, если:
а) $x_n = \sqrt[n]{a}$; б) $x_n = \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$; в) $x_n = \dfrac{n^{64}}{28^n}$; г) $x_n = \dfrac{a^n}{n!}$, $a>0$; д) $x_n = \dfrac{C_n^{37}}{n^{37}}$.

Задача 13. **(II)** Про последовательность (x_n) известно, что она имеет предел.
а) Докажите, что $(x_{n+1}-x_n)$ — бесконечно малая последовательность. Верно ли обратное?
б) Сходится ли последовательность $\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)$? Какие значения может принимать предел?

Задача 14. **(II)** Последовательность (x_n) с положительными членами такова, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)$, меньший единицы. Докажите, что (x_n) бесконечно малая.

Задача 15. **(II)** Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$.

Задача 16. **(II)** Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-\cdots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$.

Задача 17. **(III)** Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n\cdot(n+1)}{n^3}$.

Задача 18. **(III)** С незапамятных времён жители островов Чунга и Чанга раз в год обмениваются драгоценностями. Жители Чунги привозят половину своих драгоценностей на Чангу, а жители Чанги одновременно привозят треть своих драгоценностей на Чунгу. Какая часть драгоценностей находится на каждом из островов? (Новые драгоценности за это время на островах не появлялись, а старые не терялись).