Задачи к лекции 1. Перестановки

Упражнение 1.1. Вычислите: а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;
в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$;
е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^3$; ж) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 9 & 7 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 6 & 1 & 2 & 7 & 9 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Упражнение 1.2. Разложите в произведение независимых циклов следующие перестановки:
а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 & 9 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Упражнение 1.3. Вычислите порядок следующих перестановок: а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;
б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 9 & 7 & 2 & 1 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Упражнение 1.4. Вычислите: а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{1000}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1000}$;
в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{500}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-127}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{1001}$.

Упражнение 1.5. Какие из следующих перестановок являются чётными: а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;
б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 7 & 2 & 1 & 9 & 5 & 8 \end{pmatrix}$?

Задача 1.1. (1 балл) Вычислите порядок следующих перестановок:
а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 1.2. (1 балл) Какой максимальный порядок может иметь перестановка из S_{13}?

Задача 1.3. (1 балл) Пусть для некоторой $\tau \in S_n$ и для всех $\sigma \in S_n$ выполнено $\sigma\tau = \tau\sigma$. Верно ли, что $\tau = e$?

Задача 1.4. (1 балл) Верно ли, что если σ и τ — два различных цикла, причём $\sigma\tau = \tau\sigma$, то эти циклы независимы?

Задача 1.5. (1 балл) Сколько в S_n циклов длины k?

Задача 1.6. (1 балл) Докажите, что порядок любой перестановки в S_n делит $n!$. Может ли он быть в точности равен $n!$?

Задача 1.7. (2 балла) Пусть $\sigma = (1, 2, \dots, n)$ — цикл длины n. На какое количество независимых циклов раскладывается перестановка σ^k? Каковы длины этих циклов?

Задача 1.8. Докажите, что любую перестановку можно разложить в произведение
а) **(1 балл)** транспозиций вида $(k, k+1)$; б) **(1 балл)** транспозиций вида $(1, k)$;
в) **(1 балл)** перестановок вида $(1, 2, \dots, k)$.

Задача 1.9. (1 балл) Найдите количество чётных перестановок в S_n.

Задача 1.10. (1 балл) Текст зашифрован программой, заменяющей взаимно однозначно каждую букву на некую другую. Докажите, что этот текст можно расшифровать, применив определённое число раз шифрующую программу.

Задача 1.11. Петя и Вася наблюдали за стоявшими во дворе n мальчиками, каждый из которых держал в руках мяч. Внезапно мальчики одновременно кинули свои мячи друг другу. Петя утверждает, что может мысленно расположить мальчиков по кругу так, что каждый кинул мяч стоящему через одного по часовой стрелке. Вася утверждает, что может мысленно расположить мальчиков по кругу так, что каждый кинул мяч стоящему через двух по часовой стрелке. Может ли такое быть, если а) **(1 балл)** $n = 17$, б) **(1 балл)** $n = 18$?

Задача 1.12. На n катушках намотано n магнитных лент красным концом (ракордом) наружу, а белым — внутрь. Есть дополнительная катушка и магнитофон, позволяющий перемотать ленту с одной катушки на другую (при этом внутри оказывается другой конец).
а) **(1 балл)** Можно ли добиться того, чтобы все ленты оказались белым концом наружу и пустой осталась та же дополнительная катушка?
б) **(2 балла)** Можно ли добиться, чтобы при этом каждая лента осталась на своей катушке?

Задача 1.13. (3 балла) Несколько жителей города N хотят обменяться квартирами. У каждого есть по квартире, но каждый хочет переехать в другую (разные люди хотят переехать в разные квартиры). По законам города разрешены только парные обмены: если два человека обмениваются квартирами, то в тот же день они не участвуют в других обменах. Докажите, что можно устроить парные обмены так, что уже через два дня каждый будет жить в той квартире, куда хотел переехать.

Задача 1.14. (3 балла) Докажите, что в игре «пятнашки» нельзя поменять местами фишки с номерами 14 и 15, не меняя при этом положение остальных фишек.

Задача 1.15. (4 балла) Для прохождения теста тысячу мудрецов выстраивают в колонну. Из колпаков с номерами от 1 до 1001 один прячут, а остальные в случайном порядке надевают на мудрецов. Каждый видит только номера на колпаках всех впереди стоящих. Далее мудрецы по порядку от заднего к переднему называют вслух целые числа. Каждое число должно быть от 1 до 1001, причем нельзя называть то, что уже было сказано. Результат теста — число мудрецов, назвавших номер своего колпака. Как должны действовать мудрецы, чтобы гарантировать результат не менее 999?

Задача 1.16. (4 балла) Каждому из n мудрецов написали на лбу число и выдали две варежки: чёрную и белую. По сигналу все мудрецы одновременно надевают варежки. После этого их строят в шеренгу в порядке возрастания написанных на их лбах чисел и просят соседей взяться за руки. Как мудрецам надевать варежки, чтобы в результате каждая белая варежка взялась за белую, а каждая чёрная — за чёрную? (Мудрец видит все числа, кроме своего.)

Примечание. Для зачёта необходимо набрать 14 баллов.

Задачи к лекции 1 (ответы)

Упражнение 1.1. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;
г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 9 & 7 & 3 & 5 & 6 & 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Упражнение 1.2. а) $(1,3)$; б) $(1,4,3)(2,5)$; в) $(4,7,9,8)(1,3,6)(2,5)$.

Упражнение 1.3. а) 3; б) 6; в) 3; г) 14.

Упражнение 1.4. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$;
в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 5 & 7 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Упражнение 1.5. а) чётная; б) чётная; в) нечётная; г) нечётная.

Задача 1.1. а) n; б) 2.

Задача 1.2. $60 = \text{НОК}(5,4,3,1)$.

Задача 1.3. Верно при $n > 2$.

Задача 1.4. Нет, например $(1,2,3)$ и $(1,3,2)$.

Задача 1.5. $C_n^k \cdot (k-1)! = \dfrac{n!}{k \cdot (n-k)!}$.

Задача 1.6. Да, если $n < 3$.

Задача 1.7. Количество циклов: $\text{НОД}(n,k)$. Длина циклов: $\dfrac{n}{\text{НОД}(n,k)}$.

Задача 1.8. Следует из того, что: б) $(i,j) = (1,i)(1,j)(1,i)$;
а) $(i,j) = (j-1,j)(j-2,j-1)\ldots(i+1,i+2)(i,i+1)(i+1,i+2)\ldots(j-2,j-1)(j-1,j)$;
в) $(k,k+1) = (1,k,k-1,\ldots,2)(1,2,\ldots,k,k+1) = (1,2,\ldots,k-1,k)^{k-1}(1,2,\ldots,k,k+1)$.

Задача 1.9. $\dfrac{n!}{2}$, если $n > 1$; 1, если $n = 1$.

Задача 1.11. Надо разложить на независимые циклы. а) да; б) нет.

Задача 1.12. а) Да при $n > 1$. б) Да при чётном n. Иначе — нет, так как каждая перемотка представляет собой транспозицию, всего перемоток надо сделать нечётное число, а в конце должна получиться тождественная перестановка.

Задача 1.13. Достаточно научиться представлять циклы в виде произведения транспозиций, в которых каждый элемент встречается в совокупности не более двух раз. Это можно сделать так: $(1,2,\ldots,n) = (1,2)(3,n)(4,n-1)\ldots(2,n)(3,n-1)(4,n-2)\ldots$.

Задача 1.14. Каждая позиция игры в «пятнашки» представляет собой некоторую перестановку из S_{16}. При этом каждые две соседние позиции отличаются транспозицией. Любые начальная и конечная позиции (то есть позиции, при которых пустая клетка находится в правом нижнем углу) могут быть получены друг из друга лишь за чётное количество ходов. Иными словами, если начальная позиция соответствует тождественной перестановке, то конечная перестановка является чётной. Осталось заметить, что перестановка фишек с номерами 14 и 15 сопоставляется транспозиции $(14,15)$, которая чётной не является.

Задача 1.15. Пронумеруем мудрецов числами от 1 до 1000, а также введём 1001-го «пустого мудреца» (который будет «стоять» в ряду самым последним). Тогда раздача мудрецам колпаков соответствует некоторой перестановке из S_{1001}. Один из возможных алгоритмов такой. 1000-ый мудрец видит перед собой все колпаки, кроме двух. Пусть он назовёт номер того из этих двух колпаков, который, будучи надет на него, задаёт чётную перестановку. Считая теперь этот номер приписанным 1000-ому мудрецу, 999-ый также назовёт то число из двух возможных, которое соответствует чётной перестановке. И так далее: у каждого мудреца будет выбор из двух чисел, а называть он будет то число, которое задаёт чётную перестановку. Ясно, что тогда либо все угадают своё число (если данная перестановка была чётной), либо ошибётся только последний (если перестановка была нечётной).

Задача 1.16. Пронумеруем мудрецов числами от 1 до n и зададим «стандартную ориентацию варежек»: мудрецы с нечётными номерами на правую руку надевают чёрную варежку, а на левую — белую; мудрецы с чётными номерами — наоборот. Пусть теперь на лбу у каждого написали число. Все эти числа, будучи упорядоченными по возрастанию, задают некоторую перестановку мудрецов. Более того, каждый мудрец может рассмотреть перестановку остальных мудрецов (всех, кроме себя). Зададим алгоритм действия следующим образом: пусть мудрец надевает варежки «стандартным образом», если он видит чётную перестановку, и «нестандартным», если нечётную.

Покажем, что такой алгоритм приводит к победе. Если перестановка всех мудрецов тождественная, то алгоритм работает. Теперь посмотрим, что происходит, если двух соседних мудрецов поменять местами. Для них ничего не изменится, а для всех остальных мудрецов их личные перестановки умножатся на транспозиции. Значит, эти двое ориентацию варежек сохранят, а остальные — поменяют, откуда следует, что в этом случае алгоритм тоже работает. Осталось заметить, что любая перестановка представима как произведение транспозиций вида $(k, k+1)$.

Комментарий. Для того, чтобы получить зачёт за этот листок, было достаточно набрать 14 баллов из 32 возможных. Баллы за решённые упражнения не начислялись, упражнения давались исключительно для того, чтобы абсолютно не знакомые ранее с темой школьники могли попрактиковаться в обращении с перестановками. Всего в том или ином виде за листок принимались 23 школьника, из которых зачёт получили 13 человек. Среди несложных задач наибольшей популярностью пользовались задачи 10 (22 человека), 1 (21 человек), 2 (18 человек), 5 (18 человек), 6 (17 человек) и 11 (16 и 14 человек за пункты а) и б) соответственно). Напротив, задачи 4, 7 и 9 такой популярностью не пользовались (11, 8 и 7 человек соответственно). И тем более, задача 8 (8, 11 и 4 человека за пункты а), б) и в)).

Практика показала, что задачу 3 можно оценивать больше, чем в 1 балл (если требовать не только пример для $n = 2$, но и доказательство при $n > 2$). Задачу 10 разумнее перевести в разряд упражнений, поскольку она тривиальна. В целом, листочек кажется мне неплохим. Важно, что баланс оказался соблюдён: зачёт давался не слишком уж просто, но был вполне по плечу каждому. Можно было бы переставить задачи в порядке возрастания сложности. С другой стороны, в нынешнем состоянии они логично разделены на две части, в каждой из которых упорядочены в соответствии с развитием сюжета.