Задачи к лекции 2. Производящие функции

Упражнение 2.1. Докажите, что не существует формального степенного ряда $A(s)$ такого, что $sA(s) = 1$.

Упражнение 2.2. Докажите, что если каждый из степенных рядов $A(s)$ и $B(s)$ отличен от нуля, то и их произведение отлично от нуля.

Упражнение 2.3. Пусть $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$, где все числа a_k — целые. При каких условиях на a_k ряды $\dfrac{1}{A(s)}$ и $A^{-1}(s)$ имеют целые коэффициенты?

Упражнение 2.4. Пусть $A(s) = 1 + s + s^2 + \ldots,\ B(s) = 1 - s + s^2 - s^3 + \ldots$. Найдите
а) $A(s) + B(s)$; б) $A^2(s)$; в) $A(s)B(s)$.

Упражнение 2.5. Найдите производящую функцию $A(s)$ такую, что $(2 - s)A(s) = 1$.

Задача 2.1. (1 балл) Пусть $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$ — производящая функция для последовательности $a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots$. Выразите через A производящие функции для последовательностей
а) $a_0,\ a_0 + a_1,\ a_0 + a_1 + a_2, \ldots$;
б) $a_0,\ a_1 b,\ a_2 b^2, \ldots$;
в) $a_0,\ 0,\ a_2,\ 0,\ a_4,\ 0, \ldots$.

Задача 2.2. Рациональны ли производящие функции следующих последовательностей?
а) **(1 балл)** $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$;
б) **(1 балл)** $2, 6, 12, \ldots, k(k+1), \ldots$;
в) **(1 балл)** $1, 4, 9, 16, \ldots, k^2, \ldots$;
г) **(2 балла)** $1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \ldots, \dfrac{1}{k^2}, \ldots$.

Задача 2.3. Для следующих последовательностей, заданных неоднородными линейными рекуррентными соотношениями, найдите задающие их однородные линейные рекуррентные соотношения и производящие функции:
а) **(1 балл)** $a_{n+1} = a_n + 2, a_0 = 1$;
б) **(1 балл)** $a_{n+1} = 2a_n - 1, a_0 = 2$.

Задача 2.4. Пусть $A(s) = 1 + \dfrac{s}{1!} + \dfrac{s^2}{2!} + \dfrac{s^3}{3!} + \ldots,\ A(s) = 1 - \dfrac{s}{1!} + \dfrac{s^2}{2!} - \dfrac{s^3}{3!} + \ldots$. Найдите
а) **(2 балла)** $A(s)B(s)$;
б) **(3 балла)** $A^2(s)$.

Задача 2.5. (2 балла) Найдите производящую функцию $A(s)$, которая удовлетворяет соотношению $(s^2 + s^3 + s^4 + \ldots)A(s) = s^4 - s^6 + s^8 - \ldots$

Задача 2.6. Найдите производящие функции и явные выражения для элементов последовательностей, заданных рекуррентными соотношениями
а) **(2 балла)** $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n,\ a_0 = a_1 = 1$;
б) **(2 балла)** $a_{n+3} = \dfrac{3}{2}a_{n+2} - \dfrac{1}{2}a_n,\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2$.

Задача 2.7. (1 балл) Докажите, что $\dfrac{1}{1-s} = (1+s)(1+s^2)(1+s^4)(1+s^8)\ldots$.

Задача 2.8. (2 балла) Найдите производящую функцию количества разбиений на нечётные слагаемые.

Задача 2.9. (2 балла) Докажите, что количество разбиений на различные слагаемые равно количеству разбиений на нечётные слагаемые.

Задача 2.10. (2 балла) Обозначим через a_n число разбиений полоски $1\times n$ на части, каждая из которых является либо квадратиком 1×1, либо домино 1×2. Найдите производящую функцию для последовательности a_n.

Задача 2.11. (3 балла) Рассмотрим множество путей на плоскости, состоящих из векторов $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$. Найдите производящую функцию для числа таких путей длины n, которые начинаются в 0 и несамопересекаются (то есть векторы $(1,0)$ и $(-1,0)$ в таких путях не могут быть соседними).

Задача 2.12. (4 балла) Двое играют в такую игру. Один задумывает число от 1 до 144, а второй пытается его отгадать, задавая вопросы, на которые первый честно отвечает «да» или «нет». В случае ответа «да» второй платит 1 рубль, в случае ответа «нет» — 2 рубля. Как должен играть второй игрок, чтобы сделать свой проигрыш в наихудшей ситуации минимальным? А как он должен себя вести, если вместо 144 стоит другое число?

Примечание. Для зачёта необходимо набрать 14 баллов.

Задачи к лекции 2 (ответы)

Упражнение 2.3. Ряд $\dfrac{1}{A(s)}$ имеет целые коэффициенты тогда, когда $a_0 = \pm 1$.
Ряд $A^{-1}(s)$ имеет целые коэффициенты, если $a_0 = 0$, $a_1 = \pm 1$.

Упражнение 2.4. а) $A(s) + B(s) = 2 + 2s^2 + 2s^4 + \ldots = \dfrac{2}{1-s^2} = 2A(s^2)$.
б) $A^2(s) = 1 + 2s + 3s^2 + 4s^3 + \ldots = \dfrac{1}{(1-s)^2}$. в) $A(s)B(s) = 1 + s^2 + s^4 + \ldots = \dfrac{1}{1-s^2} = A(s^2)$.

Упражнение 2.5. $A(s) = \dfrac{1}{2-s} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{s}{2}} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{s}{2} + \left(\dfrac{s}{2}\right)^2 + \ldots\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{s}{4} + \dfrac{s^2}{8} + \ldots$.

Задача 2.1. а) $\dfrac{A(s)}{1-s}$. б) $A(bs)$. в) $\dfrac{A(s)+A(-s)}{2}$.

Задача 2.2. а) Да, $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$, $A(s) = \dfrac{1}{(1-s)^2}$.
б) Да, $a_{n+1} = 3a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2}$, $A(s) = \dfrac{2}{(1-s)^3}$.
в) Да, $a_{n+1} = 3a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2}$, $A(s) = \dfrac{1+s}{(1-s)^3}$.
г) Нет. В противном случае можно построить многочлен, имеющий бесконечно много корней.

Задача 2.3. а) $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$, $A(s) = \dfrac{1+s}{(1-s)^2}$.
б) $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$, $A(s) = \dfrac{2-3s}{(1-s)(1-2s)} = \dfrac{1}{1-s} + \dfrac{1}{1-2s}$.

Задача 2.4. а) $A(s)B(s) = 1$. б) $A^2(s) = 1 + \dfrac{2s}{1!} + \dfrac{4s^2}{2!} + \dfrac{8s^3}{3!} + \ldots = A(2s)$.

Задача 2.5. $A(s) = \dfrac{s^2(1-s)}{1+s^2} = s^2 - s^3 - s^4 + s^5 + s^6 - s^7 - s^8 + s^9 + \ldots$.

Задача 2.6. а) $A(s) = \dfrac{1-3s}{(1-2s)^2} = \dfrac{3}{2(1-2s)} - \dfrac{1}{2(1-2s)^2}$, $a_n = 2^{n-1}\cdot(2-n)$.
б) $A(s) = \dfrac{s}{(1-s)^2} = \dfrac{1}{(1-s)^2} - \dfrac{1}{1-s}$, $a_n = n$.

Задача 2.8. $\dfrac{1}{1-s}\cdot\dfrac{1}{1-s^3}\cdot\dfrac{1}{1-s^5}\ldots$.

Задача 2.9. Утверждение следует из задач 7 и 8 посредством следующего равенства: $\dfrac{1}{1-s}\cdot\dfrac{1}{1-s^3}\cdot\dfrac{1}{1-s^5}\ldots = (1+s)(1+s^2)(1+s^3)(1+s^4)(1+s^5)\ldots$.

Задача 2.10. Это числа Фибоначчи: $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $A(s) = \dfrac{1}{1-s-s^2}$.

Задача 2.11. $a_{n+1} = a_n + 2(a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_0 + 1)$, $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$, $A(s) = \dfrac{1+s}{1-2s-s^2}$.

Задача 2.12. В этой задаче правильнее было бы написать в формулировке, что допускаются только вопросы вида: «Верно ли, что загаданное число принадлежит такому-то подмножеству множества $\{1, 2, 3, \ldots, 144\}$?». Пусть f_n — количество денег, необходимое для отгадывания числа n. Легко убедиться, что $f_2 = 2$, $f_3 = 3$, $f_4 = f_5 = 4$. Далее, заметим, что либо $f_{n+1} = f_n$, либо $f_{n+1} = f_n + 1$. Последнее значение n, для которого $f_{n+1} = f_n$, будем называть критическим. Учитывая, что $f_n \leqslant \min(f_k + 2, f_{n-k} + 1)$, индукцией легко показать, что критическими будут в точности числа Фибоначчи (причём номер числа Фибоначчи соответствует количеству необходимых денег). Число 144 является 11-ым числом Фибоначчи, значит, нам потребуется 11 рублей.

Комментарий. Для того, чтобы получить зачёт за этот листок, было достаточно набрать 14 баллов из 33 возможных. Баллы за решённые упражнения не начислялись. Всего в том или ином виде за листок принимались 14 школьников, из которых зачёт получили 12 человек. Среди несложных задач наибольшей популярностью пользовались задачи 3 (14 человек), 2а и 7 (по 13 человек), 2б, 2в и 5 (по 12 человек), 1 (11 человек), 4 (10 человек) и 10 (9 человек). Задачи 2г, 11 и 12 не сделал никто, а задачу 9 — только один человек. Не пользовались популярностью также задачи 6 и 8 (3-4 человека).

Пожалуй, задачу 7 можно было отнести к разряду упражнений. Задача 5 оказалась переоценена — ей красная цена 1 балл. Ситуация с задачей 4 двоякая: те, кто владеют биномом Ньютона, справляются с ней очень быстро. А тем, у кого с ним проблемы, она не под силам. Таким образом, предполагая, что на нашей школе бином Ньютона должны знать все, стоило оценить каждый пункт задачи 4 в 1 балл.

В остальном листочек оставил довольно приятное впечатление. Снова удалось соблюсти баланс: хотя баллы за несколько задач были явно завышены, это компенсировалось общей сложностью темы, с которой почти никто из школьников ранее не был знаком. Кроме того, важно отметить, что на лекциях мы успели рассказать гораздо меньше, чем планировали, из-за чего часть материала дошла до школьников только в листочках и личных обсуждениях с преподавателями. В частности, на лекциях были опущены такие вопросы, как вычисление произведения и композиции формальных степенных рядов, что существенно повысило сложность не только задач, но и упражнений. Словом, чтобы получить зачёт, нужно было приложить определённые усилия, однако сделать это было по силам абсолютно всем участникам.

Используемая литература.

1. Ландо С.К., «Введение в дискретную математику» — Москва, МЦНМО, 2012.
2. Ландо С.К., «Лекции о производящих функциях» — Москва, МЦНМО, 2002.