Задачи к лекции 3. Графы

Упражнение 3.1. Докажите, что если у дерева не меньше двух вершин, то среди них есть
а) вершина степени 1 (такие вершины называются *висячими*);
б) две вершины степени 1.

Упражнение 3.2. Сколько рёбер у дерева с n вершинами?

Упражнение 3.3. В стране из каждого города выходит 100 дорог, и из любого города можно попасть в любой. Одну из дорог закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь из любого города можно проехать в любой другой.

Упражнение 3.4. Нарисуйте плоский граф, у которого
а) 6 вершин, степень каждой из которых равна 3;
а) 6 вершин, степень каждой из которых равна 4;
а) 8 вершин, степень каждой из которых равна 4.

Упражнение 3.5. Пусть плоский граф имеет V вершин, E рёбер, F граней и k компонент связности. Докажите, что тогда справедливо равенство $V - E + F = 1 + k$.

Задача 3.1. (1 балл) Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с 3 другими?

Задача 3.2. (1 балл) Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 50×600 клеток. Какое наибольшее число верёвочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?

Задача 3.3. (1 балл) На чаепитие собрались 25 школьников. Каждый принёс по 2 пирожных. Все пирожные разложили на 25 тарелок (по 2 на тарелку). Докажите, что как бы ни были размещены пирожные, можно так раздать тарелки школьникам, что каждому достанется хотя бы одно пирожное, которое он сам принес.

Задача 3.4. (1 балл) В стране 15 городов, каждый соединён дорогами не менее, чем с семью другими. Докажите, что из любого города можно проехать в любой другой напрямую или через один промежуточный город.

Задача 3.5. (2 балла) У Пети 28 одноклассников, причём все они имеют разное число друзей в классе. Сколько из них дружит с Петей?

Задача 3.6. (2 балла) Каждый из 450 депутатов дал пощёчину ровно одному своему коллеге. Докажите, что из них можно выбрать 150 человек, среди которых никто никому не давал пощёчины.

Задача 3.7. (3 балла) Каких графов на n данных вершинах больше: связных или несвязных? Дайте ответ для всех n.

Задача 3.8. (1 балл) Докажите, что в плоском графе существует вершина, степень которой не превосходит 5.

Задача 3.9. (1 балл) Докажите формулу Эйлера для произвольного выпуклого многогранника.

Задача 3.10. а) **(1 балл)** Дан выпуклый многогранник, грани которого являются n-угольниками, и в каждой вершине сходится k граней. Докажите, что $1/n + 1/k = 1/2 + 1/r$, где r — число рёбер многогранника.

б) **(1 балл)** Выпуклый многогранник называют правильным, если все его грани — правильные n-угольники, и в каждой его вершине сходится k граней. Докажите, что любой такой многогранник — либо тетраэдр, либо куб, либо октаэдр, либо додекаэдр, либо икосаэдр.

Задача 3.11. (2 балла) Докажите, что связный плоский граф является эйлеровым если и только если его грани можно раскрасить в два цвета так, чтобы любое ребро принадлежало границам двух граней разного цвета.

Задача 3.12. Пусть T — некоторое множество транспозиций из S_n. Отметим на плоскости n точек $A_1, \ldots, A_n$ и проведём рёбра согласно такому правилу: A_i и A_j соединяются ребром, если в T есть транспозиция (i, j).
а) **(1 балл)** Докажите, что полученный граф является связным если и только если любая перестановка из S_n есть произведение транспозиций из T.
б) **(2 балла)** Докажите, что если полученный граф является деревом, то произведение всех транспозиций из T (в любом порядке) — цикл длины n.

Задача 3.13. (3 балла) Гриша забыл трёхзначный код своего замка́. Замо́к открывается, если три цифры кода набраны подряд (даже если ранее были набраны другие цифры). Докажите, что Гриша сможет открыть замок не более чем за 1002 секунды, набирая по одной цифре в секунду.

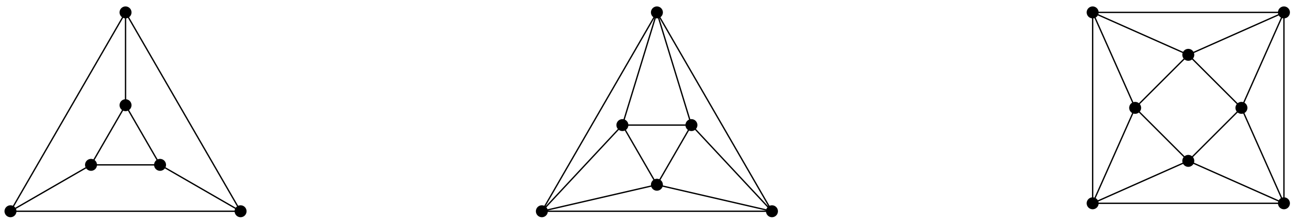
Задача 3.14. (4 балла) Докажите, что среди любых 50 человек найдётся двое, у которых чётное число общих знакомых (быть может, 0) среди остальных 48 человек.

Примечание. Для зачёта необходимо набрать 12 баллов.

Задачи к лекции 3 (ответы)

Упражнение 3.2. $n-1$.

Упражнение 3.4. Смотри рисунок ниже.



Упражнение 3.5. Индукция по числу компонент связности с использованием формулы Эйлера для связных графов.

Задача 3.1. Нет — сумма степеней вершин соответствующего графа нечётная.

Задача 3.2. Исходя, например, из формулы Эйлера: $50 \cdot 600 = 30\,000$.

Задача 3.5. 14 человек.

Задача 3.7. Сопоставим каждому графу двойственный граф: если вершины соединены ребром — сотрём его, а если нет — проведём. Если граф несвязный, то двойственный ему граф связен. Однако при $n > 3$ существуют связные графы, двойственные к которым тоже связны. Значит, при $n > 3$ связных графов больше, а при $n \leqslant 3$ связных и несвязных графов поровну.

Задача 3.8. Следует из неравенства $E \leqslant 3V - 6$ для плоских графов.

Задача 3.11. Следующее решение предложено Александром Федоткиным. Если грани плоского графа можно покрасить в два цвета требуемым способом, то рассмотрение окрестности любой вершины показывает, что её степень чётная. Значит, граф эйлеров. Обратно, пусть степень любой вершины четна. Рассмотрим произвольную грань и покрасим в первый цвет. Затем рассмотрим все грани, которые имеют с закрашенной общую границу. Аккуратное рассмотрение этой границы показывает, что эти грани тоже можно покрасить требуемым образом. Затем рассматриваем грани, имеющие общую границу с уже покрашенными и так далее. По сути, применяется индукция по удалённости от первой грани.

Задача 3.12. а) Если граф несвязный, то нельзя получить транспозицию (i, j), соответствующую вершинам A_i и A_j из разных компонент связности. Если же граф связный, то можно получить любую транспозицию (а значит, и любую перестановку). Действительно, пусть мы хотим получить транспозицию (a_1, a_{k+1}). Рассмотрим путь $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$, соединяющий вершины A_1 и A_{k+1}. Его существование показывает, что в T лежат циклы

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}) = (a_1, a_2)(a_2, a_3)\ldots(a_k, a_{k+1}) \qquad \text{и} \qquad (a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1) = (a_k, a_{k-1})\ldots(a_2, a_1).$$

Значит, $(a_1, a_{k+1}) = (a_1, a_2, \ldots, a_{k+1})(a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1)$ также лежит в T.

б) Будем вести индукцию по числу вершин в дереве. База очевидна. Шаг: пусть всё доказано для деревьев, число вершин которых не превышает n. Рассмотрим дерево с $n+1$ вершиной. В произведении транспозиций, соответствующей этому дереву, выкинем транспозицию, стоящую на первом месте, а сопоставляемое ей ребро в дереве сотрём. Тогда дерево распадётся на два поддерева, которым в произведении соответствуют две группы независимых друг от друга транспозиций (внутри групп зависимость имеется). То есть их можно переставить удобным нам образом (например, сначала разместить транспозиции, относящиеся к первому дереву, а в конце — ко второму), а затем воспользоваться предположением индукции. Теперь искомое утверждение следует из равенства $(a_1, b_1)(a_1, a_2, \ldots, a_k)(b_1, b_2, \ldots, b_m) = (a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m)$.

Задача 3.13. Рассмотрим граф с вершинами в трёхзначных кодах; одну вершину соединим с другой ориентированным ребром в том случае, когда две последние цифры первого кода есть две первые цифры второго. Ясно, что достаточно доказать, что существует путь по всем вершинам этого графа. Но это так, как граф связен, в каждую вершину входит 10 рёбер и из каждой вершины выходит тоже 10 рёбер (рассуждение аналогично доказательству эйлеровости графа, все вершины которого имеют чётную степень).

Задача 3.14. Допустим противное, то есть что любые две вершины графа соединены нечётным числом двузвенных ломаных. Рассмотрим какую-либо вершину a и множество всевозможных вершин $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, связанных с ней ребром. Допустим, сначала что число k является нечётным. Каждая вершина a_j связана с a нечётным числом двузвенных ломаных. Рассмотрим множество средних вершин этих ломаных; их число обозначим через f_j (отметим, что все такие средние вершины принадлежат A). Все f_j по предположению нечётны. Следовательно, сумма $f_1 + f_2 + \ldots + f_k$ также нечётна. Но в этой сумме каждая вершина из A сосчитана столько раз, сколько рёбер подходит к ней от других вершин A. Поэтому сумма равна общему числу концов этих рёбер, то есть чётна. Противоречие. Итак, степень каждой вершины четна.

Докажем теперь основное утверждение. Пусть B — множество вершин, не связанных ребром с a. B содержит нечётное число вершин (всего вершин 50, вычитаем чётное число вершин в A и вершину a). Число всех двузвенных цепочек вида $a \rightleftarrows a_j \rightleftarrows b$ ($b \in B$) нечётно, так как элементов b нечётное число и троек $a \rightleftarrows a_j \rightleftarrows b$ при данных b и a также нечётное число. С другой стороны, каждая вершина a_j входит в чётное число таких цепочек, так как a_j связана ребрами с нечётным числом вершин в A (иначе a соединяется с a_j чётным числом двузвенных ломаных), с вершиной a, и следовательно, с чётным числом вершин в B (так как степень вершины a_j четна). Таким образом, получается, что число цепочек вида $a \rightleftarrows a_j \rightleftarrows b$ чётно. Это противоречие доказывает утверждение задачи.

Комментарий. Для того, чтобы получить зачёт за этот листок, было достаточно набрать 12 баллов из 30 возможных (здесь нужно отметить, что помимо указанных в данном листочке задач была бонусная задача на 3 балла с лекции 4: разобраться в том, как по коду Прюфера строится дерево). Баллы за решённые упражнения не начислялись. Всего в том или ином виде за листок принимались 17 школьников, из которых зачёт получили 14 человек. Среди несложных задач наибольшей популярностью пользовались задачи 2 (17 человек), 1 и 4 (по 16 человек), 3, 5, 6 и 8 (по 14 человек) и 9 (12 человек). Задачи 12б, и 14 не сделал никто, а задачу 12а — только один человек. Задачи 10 и 11 сделало по 5-6 человек, трое разобрались с бонусной задачей и двое — с задачей 13.

Пожалуй, листочек получился весьма удачным как с точки зрения распределения баллов, так и с точки зрения получения зачёта в целом. Графы, в целом, более знакомы школьникам, чем перестановки и производящие функции, а потому получить зачёт за них им было проще. Учитывая, что общий зачёт складывался из трёх составляющих, этот факт сыграл положительную роль. Распределение баллов тоже оказалось достаточно гармоничным. Разве что за бонусную задачу стоило давать не 3 балла, а 2 или даже 1. Но это уже мелочи.