Лекция 2. Производящие функции

2.1 Действия над производящими функциями

Определение 2.1. *Производящей функцией (производящим рядом)* для последовательности $a_0,\ a_1,\ a_2 \dots$ будем называть выражение вида

$$a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots, \tag{1}$$

или, в сокращенной записи,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n.$$

По-другому выражение $a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$ называется *формальным степенным рядом* от *формальной переменной* s. Ключевое слово в этом определении «формальная переменная». Это значит, что мы не планируем и не будет ни в какой момент пытаться подставить вместо s какое-то число, посчитать «значение» формального степенного ряда при каком-то s. Рассматривать производящий ряд, вместо последовательности оказывается удобно и полезно, потому что работая с производящим рядом, мы работаем со всей последовательностью сразу. В некоторых случаях это позволяет продвинуться в изучении свойств последовательности гораздо дальше.

Для операций над формальными степенными рядами (производящими функциями) введём понятие *формальной алгебраической операции*. Операция с рядом называется формальной, если любой член результирующего ряда может быть вычислен за конечное число операций.

На лекции мы не успели уделить должное внимание операциям над рядами. Ближайшая страница служит цели немного устранить это упущение.

Пример 2.2. Рассмотрим последовательность $1, 1, 1, 1, \dots$, соответствующий производящий ряд $1 + s + s^2 + s^3 + \dots = \dfrac{1}{1-s}$. И более общо: $1 + P(s) + (P(s))^2 + (P(s))^3 + \dots = \dfrac{1}{1 - P(S)}$.

Две производящие функции называются *равными*, если у них соответственно равны коэффициенты при одинаковых степенях формальной переменной.

Суммой двух производящих функций $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n s^n$ называется производящая функция $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) s^n$.

Произведением двух производящих функций $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n s^n$ называется производящая функция

$$A(s)B(s) = (a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots)(b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)s + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)s^2 + \dots$$

Очевидно, что сумма и произведение являются формальными алгебраическими операциями — коэффициент при s^n у суммы и произведения двух рядов вычисляется за конечное количество действий.

Подстановкой производящей функции $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n s^n$ в производящую функцию $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ называется ряд (иногда я буду опускать слово производящий, потому что других в этой лекции встречаться не будет)

$$B(A(s)) = b_0 + b_1(a_1 s + a_2 s^2 + \dots) + b_2(a_1 s + a_2 s^2 + \dots)^2 + \dots \tag{2}$$

Для операции подстановки важно, что коэффициент a_0 равен 0. В противном случае для вычисления коэффициента при s^0 у ряда $B(A(s))$ потребовалось бы бесконечное количество действий.

Упражнение 2.1. Убедитесь, что подстановка является формальной алгебраической операцией.

Пример 2.3. Пусть $A(s) = -s$, тогда $B(A(s)) = b_0 - b_1 s + b_2 s^2 - b_3 s^3 + \ldots$

Ряд $B(t)$ называется *обратным* слева к ряду $A(s)$, если $B(A(s)) = s$. И обратным справа, если $A(B(t)) = t$.

Утверждение 2.4. *Рассмотрим ряд $A(s)$ у которого $a_0 = 0, a_1 \neq 0$, тогда у него существует левый и правый обратные ряды.*

Доказательство. Докажем, что существует ряд $B(t)$ такой, что $B(A(s)) = s$. Для этого научимся вычислять n-ый коэффициент ряда $B(t)$.

$$B(A(s)) = b_0 + b_1(a_1 s + a_2 s^2 + \ldots) + b_2(a_1 s + a_2 s^2 + \ldots)^2 + \ldots$$

Очевидно, что $b_0 = 0,\ b_1 = \dfrac{1}{a_1}$. Выпишем коэффициент при s^2:

$$b_1 a_2 + b_2 a_1^2.$$

Он должен быть равен 0, поэтому $b_2 = -\dfrac{b_1 a_2}{a_1^2}$. Выпишем коэффициент при s^n:

$$b_n a_1^n + \{\text{многочлен от } b_2, \ldots, b_{n-1} \text{ и } a_2, \ldots, a_{n-1}\}.$$

Мы знаем, что $a_1 \neq 0$ и по индукции знаем все b_i при $i < n$, поэтому можем найти b_n. Существование правого обратного аналогично и предоставляется читателю. □

Для читателей знакомых с теорией групп отметим, что множество формальных степенных рядов является группой относительно операций сложения и умножения. А множество формальных степенных рядов с нулевым свободным коэффициентом являются группой относительной операции подстановки. Кроме того у рядов с нулевым свободным коэффициентом совпадают левые и правые обратные ряды. Они обозначаются $A^{-1}(s)$.

Ряд $B(s)$ называется *обратным по умножению* к ряду $A(s)$, если $A(s)B(s) = 1$. Обозначение: $B(s) = \dfrac{1}{A(s)}$.

Утверждение 2.5. *Пусть $a_0 \neq 0$, тогда у ряда $A(s) = a_0 + a_1 s + \ldots$ существует обратный ряд по умножению $B(s)$.*

Доказательство. Совершенно аналогично утверждению 2.4 последовательно по индукции доказываем возможность вычисления коэффициентов ряда $B(s)$. □

2.2 Рекуррентные соотношения

Пример 2.6. Производящая функция последовательности Фибоначчи.

Рассмотрим последовательность $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$. Это несколько первых членов последовательности Фибоначчи f_n. Она удовлетворяет рекуррентному соотношению $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ и $f_0 = f_1 = 1$.

Запишем соответствующий производящий ряд: $F(s) = 1 + s + 2s^2 + 3s^3 + 5s^4 + \ldots$

Фокус: $(s+s^2)F(s) = s+s^2+2s^3+3s^4+\ldots+s^2+s^3+2s^4+\ldots = s+2s^2+3s^3+5s^4+\ldots = F(s)-1$.

Следовательно $F(s) = \dfrac{1}{1-s-s^2}$.

Это ещё не всё, хотелось бы получить формулу для n-ого члена!

Небольшое отступление. Сформулируем и поверим в несколько утверждений про рациональные функции (отношения двух многочленов).

Утверждение 2.7. $\dfrac{1}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)} = \dfrac{a_1}{x-x_1} + \dfrac{a_2}{x-x_2} + \dots + \dfrac{a_n}{x-x_n}$.

Утверждение 2.8. $\dfrac{1}{(x-x_0)^n} = \dfrac{a_1}{x-x_0} + \dfrac{a_2}{(x-x_0)^2} + \dots + \dfrac{a_n}{(x-x_0)^n}$.

Утверждение 2.9. *Пусть $P(x) = ax^2+bx+c$ — квадратный трёхчлен с отрицательным дискриминантом, тогда* $\dfrac{1}{P(x)} = \dfrac{a_1}{P(x)} + \dfrac{a_2 x + a_3}{P(x)}$.

Эти утверждения называются теоремой о разложении рациональной функции в сумму простейших дробей. Доказательство представляет собой поиск неизвестных $a_1, \dots, a_n$ и по существу является решением системы линейных уравнений.

В частности, в нашем случае найдём корни квадратного уравнения $1-s-s^2$. $s_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $s_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $s_1 s_2 = -1,\ s_1+s_2 = 1,\ s_1 - s_2 = \sqrt{5}$.

$$\frac{1}{1-s-s^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{s-s_2} - \frac{1}{s-s_1}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{s_1-s} - \frac{1}{s_2-s}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{s_1\left(1-\frac{s}{s_1}\right)} - \frac{1}{s_2\left(1-\frac{s}{s_2}\right)}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{s_1}\left(1+\frac{s}{s_1}+\left(\frac{s}{s_1}\right)^2+\dots\right) - \frac{1}{s_2}\left(1+\frac{s}{s_2}+\left(\frac{s}{s_2}\right)^2+\dots\right)\right).$$

Легко понять, что коэффициент при s^n равен

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1}{s_1}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{s_2}\right)^{n+1}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}}\left(s_2^{n+1} - s_1^{n+1}\right).$$

Очень похожие рассуждения работают и в более общих случаях. Пусть дана последовательность $a_1, a_2, \dots$, заданная рекуррентным соотношением порядка k с постоянными $c_1, \dots, c_k$:

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n \tag{3}$$

и числа $a_0,\ a_1, \dots, a_{k-1}$ заданы. Такое рекуррентное соотношение называется *линейным и однородным*.

Теорема 2.10. *Пусть последовательность (a_n) задана линейным однородным рекуррентным соотношением. Тогда производящая функция $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$ рациональна, то есть $A(s) = \dfrac{P(S)}{Q(s)}$, причём степень многочлена Q равна k, а степень многочлена P не превосходит $k-1$.*

Доказательство. Проделаем тот же фокус, что и с числами Фибоначчи:

$$
\begin{aligned}
(c_1s + c_2s^2 + \ldots + c_ks^k)(a_0 + a_1s + a_2s^3 + \ldots) = & \\
= c_1a_0s + c_1a_1s^2 + c_1a_2s^3 + \ldots + c_1a_{k-1}s^k + \ldots + & \\
+ c_2a_0s^2 + c_2a_1s^3 + \ldots + c_2a_{k-2}s^k + \ldots + & \\
\vdots & \\
+ c_ka_0s^k + \ldots &
\end{aligned} \tag{4}
$$

Посмотрим на коэффициент при s^k :

$$c_1a_{k-1} + c_2a_{k-2} + \ldots + c_ka_0$$

Заметим, что по нашему рекуррентному соотношению, он равен a_k.

Таким образом, коэффициенты ряда (4), начиная с номера k, совпадают с коэффициентам ряда $A(s)$. Подправим начало ряда (4) многочленом $P(s)$ степени не выше k, чтобы было полное совпадение с рядом $A(s)$: добавим $a_0+a_1s+a_2s^2+\ldots+a_{k-1}s^{k-1}$ и вычтем $c_1a_0s+(c_1a_1+c_2a_0)s^2+\ldots+(c_1a_{k-2}+c_2a_{k-3}+\ldots+c_{k-1}a_0)s^{k-1}$. Получится:

$$(c_1s + c_2s^2 + \ldots + c_ks^k)A(s) + P(s) = A(s),$$

где $P(s) = a_0+(a_1-c_1a_0)s+(a_2-c_1a_1-c_2a_0)s^2+\ldots+(a_{k-1}-(c_1a_{k-2}+c_2a_{k-3}+\ldots+c_{k-1}a_0))s^{k-1}$.

$$A(s) = \frac{P(s)}{1 - (c_1s + c_2s^2 + \ldots + c_ks^k)}.$$

□

Пример 2.11. Бывают чуть более сложные рекуррентные соотношения, например $a_n = 1 + a_{n-1},\ a_0 = 1$. Оно не однородное, потому что есть слагаемое 1. Но легко сводится к однородному:

$$a_n = 1 + a_{n-1},\ a_{n-1} = 1 + a_{n-2},\ \text{следовательно } a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2} \Leftrightarrow a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}.$$

Оказывается, такой же способ работает в более общем случае. Мы сформулируем соответствующее утверждение без подробного доказательства. Усердный читатель без труда восстановит его.

Пусть последовательность $a_0, a_1, \ldots$ удовлетворяет неоднородному рекуррентному соотношению $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k} + P_m(n)$, где $P_m(n) = d_0 + d_1n + d_2n^2 + \ldots + d_mn^m$ — многочлен степени m от n, тогда она удовлетворяет некоторому однородному рекуррентному соотношению. Действительно, рассмотрим разность $a_{n+1} - a_n$ и заметим, что a_{n+1} удовлетворяет неоднородному рекуррентному соотношению, в котором неоднородная часть — многочлен от n имеет степень $m - 1$, на единицу меньше.

2.3 Разбиения

Утверждение 2.12. *Количество разложений числа n в сумму k неотрицательных слагаемых есть C_{n+k-1}^{k-1}.*

Доказательство. Чтобы разложить n в сумму k слагаемых, нужно расставить $k-1$ перегородку между n единицами. Но так как у нас разрешены нулевые слагаемые, несколько перегородок может стоять в одном месте. Чтобы разрешить эту трудность представим себе $n+k-1$ ячейку, в которые мы будем расставлять единицы и перегородки, по одной в каждую. Если мы расставим $k-1$ перегородку, то n единиц встанут на оставшиеся n свободных ячеек однозначно. Этим определяется каждое разложение. Количество способов расставить $k-1$ перегородку в $n+k-1$ ячеек равно C_{n+k-1}^{k-1}. $\square$

Определение 2.13. *Разбиением* p_n числа n называется количество разложений числа n в сумму нескольких ненулевых слагаемых. Разбиения, отличающиеся порядком сомножителей, считаются одинаковыми.

Пример 2.14. $4 = 1+1+1+1 = 2+2 = 3+1$, $p_4 = 4$

Наша задача на первую половину следующей лекции найти производящую функцию последовательности p_n и получить сколько-нибудь приличный алгоритм вычисления чисел p_n.