Лекция 3. И разбиения и графы

3.1 Разбиения. Продолжение

В конце прошлой лекции мы познакомились с понятиями *количество разложений числа n на k слагаемых* и *количество разбиений числа n*. Мы посчитали явно первое количество, а сейчас получим производящую функцию и ещё кое-что для второго количества. Для начала же, несложное утверждение, с важной идеей в доказательстве, про производящую функцию для количества разложений на k слагаемых.

Утверждение 3.1. *Производящая функция для числа разложений на k слагаемых имеет вид*

$$B_k(s) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k-1}^{k-1} s^n = (1-s)^{-k}.$$

Доказательство. Из прошлой лекции мы знаем, что $(1-s)^{-k} = (1+s+s^2+\ldots)^k$. Посмотрим внимательно на коэффициент при s^k после раскрытия скобок (кстати, сегодня мы будем очень часто пользоваться этим нехитрым приёмом). Он равен сумме k слагаемых — по одному из каждой скобки, причём всеми возможными способами. А это и есть искомое количество! □

Перейдём к числам разбиений p_n.

Ответим сначала на такой вопрос: сколько существует разбиений числа n, каждое слагаемое (слагаемые называют ещё *частями* разбиения) которого равно 1? Правильно — 1! Пользуясь знаниями о производящих функциях это же можно сказать по-другому — производящая функция для чисел разбиений на части, равные 1, это функция $1+s+s^2+s^3+\ldots = \dfrac{1}{1-s}$.

А сколько разбиений у числа n, каждая часть которых равна 2. Очевидно, 0 — для нечётных n и 1 — для чётных. Поэтому соответствующая последовательность: $1+s^2+s^4+\ldots = \dfrac{1}{1-s^2}$.

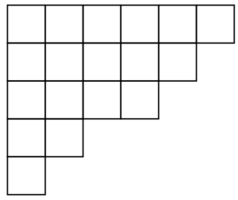
Контрольный вопрос: написать производящую функцию количества разбиений числа n на слагаемые, равные 1 или 2. Для того чтобы понять ответ, надо внимательно посмотреть на коэффициент при s^n в произведении $\dfrac{1}{1-s}\cdot\dfrac{1}{1-s^2} = (1+s+s^2+\ldots)(1+s^2+s^4+\ldots)$. Действительно, он равен сумме нескольких единиц, каждая из которых стоит при s^n, где степень n каждый раз получается как сумма скольких-то единиц и двоек, причём всевозможными способами.

Теперь всё готово для того чтобы написать производящую функцию $P(s)$ для чисел p_n.

$$P(s) = \frac{1}{(1-s)(1-s^2)(1-s^3)\ldots} \quad \text{(Эйлер, 1740)} \tag{1}$$

Упражнение 3.1. Проверьте, что бесконечное произведение в знаменателе является формальным степенным рядом.

Упражнение 3.2. Найдите производящую функцию $R(s)$ для количества разбиений на различные слагаемые.
Указание. Производящая функция количества разбиений на различные части, каждая из которых равна 1 — это производящая функция $1+s$.
Ответ: $R(s) = (1+s)(1+s^2)(1+s^3)\ldots$



Определение 3.2. *Диаграмма Юнга* — это множество единичных квадратов на плоскости, расположенных по строкам невозрастающей длины сверху вниз и выровненные по левому краю.

Диаграмма Юнга на рисунке справа соответствует разбиению числа 18: $18 = 6 + 5 + 4 + 2 + 1$.

Рассмотрим диаграммы площади n. Каждому разбиению числа n соответствует диаграмма площади n и наоборот. Разбиениям на различные слагаемые соответствуют диаграммы, у которых длины всех строк различны.

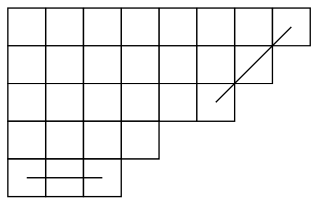
Обозначим бесконечное произведение в знаменателе правой части (1) за $Q(s)$

$$Q(s) = (1 - s)(1 - s^2)(1 - s^3)\dots$$

Теорема 3.3 (пентагональное тождество Эйлера, 1756)**.**

$$Q(s) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(s^{\frac{3k^2-k}{2}} + s^{\frac{3k^2+k}{2}}\right). \tag{2}$$

Доказательство. Рассмотрим ряд $R(s) = (1 + s)(1 + s^2)(1 + s^3)\dots$ — это производящая функция количества разбиений на различные слагаемые (см. упражнение 3.2). Заметим, что если в рядах $Q(s)$ и $R(s)$ раскрыть скобки, но не приводить подобные слагаемые, то будут одинаковые по модулю коэффициенты при одинаковых степенях s, просто потому что ряды совершенно одинаковые, только у одного в скобках стоят минусы, а другого плюсы. При этом одинаковый знак у слагаемых, соответствующим разбиениям на чётное число различных слагаемых и разный — у разбиений на нечётное. Сейчас мы докажем, что для очень многих значений n количество разбиений на чётное число различных слагаемых равно количеству разбиений на нечётное число различных слагаемых. Из этого будет следовать, что для таких n коэффициент при s^n в ряду $Q(s)$ равен 0.



Построим взаимно-однозначное отображение из диаграмм Юнга с различными длинами строк в себя, меняющее чётность количества строк. Обозначим за d длину правой диагонали и за l длину нижней строки в таблице (см. рис. справа). За k будем обозначать количество строк в таблице.

Будем действовать так: либо отреза́ть нижнюю строку и приклеивать справа к диагонали, либо наоборот отрезать диагональ и приклеивать её снизу к нижней строке. Будем делать это в тех случаях, когда возможно, и будем следить, чтобы строки в таблице остались разной длины. При такой операции чётность количества строк в таблице будет меняться. Следовательно, для тех n, при которых такое отображение (отрезание-приклеивание) возможно, коэффициент будет равен нулю — каждому разбиению на чётные различные слагаемые будет соответствовать разбиение на нечётные различные слагаемые.

Давайте выясним, для каких n такое отрезание-приклеивание невозможно. Для улучшения понимания разберём несколько примеров.

$$5 = 4 + 1 = 3 + 2.$$

5 переходит в $4 + 1$, а разбиению $3 + 2$ ничего не соответствует. Действительно, мы не можем отрезать нижнюю строку, потому что тогда останется слишком мало строк в таблице и не можем отрезать диагональ, потому что строки перестанут быть невозрастающими. Заметим, что в этом случае $d = l = k$. Оказывается такое исключение является совершенно общим случаем.

$$6 = 5 + 1 = 4 + 2 = 3 + 2 + 1 \text{ — соответствие взаимно-однозначно.}$$

$$7 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3 = 4 + 2 + 1.$$

7 переходит в $6 + 1$, $5 + 2$ переходит в $4 + 2 + 1$, а разбиению $4 + 3$ ничего не соответствует. Действительно, мы не можем отрезать нижнюю строку, потому что тогда останется слишком мало строк в таблице, и не можем отрезать диагональ, потому что части разбиения перестанут быть различными. Заметим, что в этом случае $d = l - 1 = k$ и аналогично предыдущему такое исключение на n является общим случаем. Остаётся заметить, что во всех остальных случаях удаётся отрезать-приклеить либо нижнюю строку, либо диагональ.

Нетрудно посчитать исключительные n:

в первом случае $n = k + (k+1) + \ldots + (2k-1) = \dfrac{3k^2 - k}{2}$;

во втором $n = (k+1) + (k+2) + \ldots 2k = \dfrac{3k^2 + k}{2}$. □

Задача 2.13. (**3 балла**) Докажите, что $p_n = p_{n-1} + p_{n-2} - p_{n-5} - p_{n-7} + p_{n-12} + p_{n-15} - \ldots$.

3.2 Понятие графа

Определение 3.4. *Графом* называется множество точек на плоскости, некоторые пары которых соединены линиями. Точки называются *вершинами* графа, а линии — его *рёбрами.* Ребро, соединяющее некоторую вершину саму с собой, называется *петлёй.* Рёбра, соединяющие одну и ту же пару вершин, называются *параллельными* или *кратными.* Говорят, что граф *простой*, если в нём нет петель и кратных рёбер.

У нас в курсе будут только простые графы, множество вершин которых конечно.

Определение 3.5. *Степенью* вершины V называется число выходящих из неё рёбер (при этом каждая петля учитываются дважды). Обозначение: $\deg V$.

Утверждение 3.6. *Сумма степеней вершин четна.*

Доказательство. Справедливость этого утверждения вытекает из того, что сумма степеней вершин любого графа равна удвоенному числу его рёбер. □

Определение 3.7. *Путь* в графе — это последовательность вершин $V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}$, в которой каждые две соседние вершины соединены ребром. Соответствующую последовательность рёбер $V_1V_2, V_2V_3, \ldots, V_nV_{n+1}$ также называют путём. Если $V_1 = V_{n+1}$, то путь называется *циклическим*, если при этом рёбра пути различны — *циклом*, а если ещё и вершины разные (кроме V_1 и V_{n+1}) — *простым циклом.*

Определение 3.8. Говорят, что граф *связный*, если любые две его вершины соединены некоторым путём. Несвязный граф распадается на некоторое количество связных кусочков, которые называются *компонентами связности.*

Определение 3.9. Граф называется *деревом*, если он не содержит нетривиальных простых циклов.

Утверждение 3.10. *У дерева с n вершинами $n - 1$ ребро.*

Доказательство этого утверждения мы оставим читателю в качестве упражнения.

3.3 Эйлеровы графы

Определение 3.11. *Эйлеровым* называется связный граф, в котором есть цикл, содержащий все рёбра.

Удобно представлять себе эйлеров граф как граф, который можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги. При этом закончить надо в той же точке, из которой мы начали.

Утверждение 3.12. *Граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степень любой его вершины четна.*

Доказательство. Пусть в графе существует цикл, содержащий все его рёбра. Рассмотрим произвольную вершину V этого графа. Если мы двигаемся по циклу, то каждый раз проходя через эту вершину, мы задействуем два ребра: то, через которое попадаем в V, и то, по которому мы её покидаем. Таким образом, величина $\deg V$ является чётной.

Пусть теперь дан связный граф, в котором степень любой вершины четна. Рассмотрим произвольную его вершину и создадим путь, начиная с неё. При этом мы будем идти только по тем рёбрам, по которым ещё не ходили, и, пока это возможно, будем продолжать путь. Оказывается, так получится цикл (хотя, возможно, он и не будет содержать все рёбра). В самом деле, если мы попали не в ту вершину, из которой начали, то мы задействовали нечётное число рёбер, исходящих из этой вершины. А так как её степень четна, то мы можем продолжить путь.

Если полученный цикл не содержит все рёбра, то оставшиеся рёбра образуют граф, все вершины которого имеют чётную степень. Применив к нему ту же операцию построения пути, мы получим ещё один цикл, потом ещё один и так далее. В итоге весь граф окажется разбит на некоторое количество циклов, причём каждое ребро будет содержаться ровно в одном цикле.

Однако если у нас есть два цикла, имеющих общую вершину, то их можно склеить в один. Действительно, в то место первого цикла, где впервые встречается общая вершина, достаточно вставить второй цикл, а затем продолжить первый. Осталось отметить, что так как исходный граф связен, то все циклы можно склеить между собой в один большой, а значит, граф эйлеров. □

3.4 Плоские (планарные) графы

Определение 3.13. Говорят, что граф *плоский (планарный)*, если его рёбра не пересекаются (нигде, кроме вершин). Такой граф делит плоскость на части, называемые *гранями* графа.

Теорема 3.14. *(Формула Эйлера) Пусть связный плоский граф имеет V вершин, E рёбер и F граней. Тогда справедливо равенство* $V - E + F = 2$.

Доказательство. Будем вести доказательство индукцией по количеству рёбер. Если их нет, то граф состоит из одной вершины и обладает одной гранью. Значит, формула Эйлера выполняется, так как $1 - 0 + 1 = 2$. Тем самым, доказана база индукции.

Предположим, формула Эйлера справедлива для всех графов, у которых n рёбер. Рассмотрим произвольный граф с $(n + 1)$ ребром. Если у этого графа есть висячая вершина (то есть вершина, степень которой равна единице), то сотрём её вместе с выходящим из неё ребром. При этом число вершин и число рёбер уменьшатся на единицу, а количество граней не изменится. Следовательно, не изменится и величина $(V - E + F)$, а у полученного графа по предположению индукции она равна 2.

Если же наш граф с $(n + 1)$ ребром не имеет висячих вершин, то степени всех его вершин не меньше двух. Такой граф обязательно обладает простым циклом. Чтобы найти его, достаточно начать путь из любой вершины и идти, пока какая-то вершина не повторится. Сотрём любое ребро, входящее в этот простой цикл. При этом граф останется связным, количество вершин у него не изменится, а вот число рёбер и число граней уменьшатся на единицу. Значит, у полученного графа величина $(V - E + F)$ будет точно такой же, как и у исходного, а по предположению индукции она равна 2. □

Следствие 3.15. *Пусть плоский граф имеет V вершин, E рёбер, F граней и k компонент связности. Тогда справедливо равенство* $V - E + F = 1 + k$.

Доказательство мы оставим читателю в качестве упражнения.

Следствие 3.16. *Пусть связный плоский граф имеет V вершин, E рёбер и F граней. Тогда при $V > 2$ справедливо неравенство* $E \leqslant 3V - 6$.

Доказательство. Пусть исходный граф имеет по меньшей мере две грани. Тогда каждая из его граней ограничена хотя бы тремя рёбрами. Поскольку каждое ребро касается двух граней, отсюда следует, что $F \leqslant \frac{2}{3} \cdot E$. Подставляя это неравенство в формулу Эйлера, имеем:

$$2 = V - E + F \leqslant V - E + \frac{2}{3} \cdot E = V - \frac{E}{3} \qquad \Rightarrow \qquad E \leqslant 3V - 6.$$

Если же грань у исходного графа только одна, то у него нет циклов. Это значит, что граф является деревом, а у деревьев $E = V - 1$. Ясно, что $V - 1 \leqslant 3V - 6 \quad \Leftrightarrow \quad V \geqslant \frac{5}{2}$. □

Определение 3.17. Граф называется *полным*, если любые две его вершины соединены ребром. Полный граф на n вершинах обозначается K_n.

Утверждение 3.18. *Полный граф K_5 не является плоским.*

Доказательство. Заметим, что у полного графа на n вершинах ровно C_n^2 ребёр. То есть у полного графа на $V = 5$ вершинах $E = 10$ рёбер. Следовательно, $3V - 6 = 9 < 10 = E$, и неравенство из следствия 3.16 не выполняется. □

Определение 3.19. Граф называется *двудольным*, если множество его вершин можно разбить на два подмножества V_1 и V_2 таким образом, чтобы любое ребро графа соединяло вершины из разных подмножеств (про такие рёбра будем говорить, что они *соединяют* множества V_1 и V_2). Если граф содержит все рёбра, соединяющие соединяющие множества V_1 и V_2, то этот граф называется *полным двудольным*. Если при этом в множестве V_1 содержится m вершин, а в множестве V_2 содержится n вершин, то соответствующий граф мы будем обозначать $K_{m,n}$.

Типичный пример полного двудольного графа представляет следующая задача: можно ли построить 3 домика, вырыть 3 колодца и соединить каждый домик с каждым колодцем тропинками так, чтобы тропинки не пересекались? Другими словами, верно ли, что полный двудольный граф $K_{3,3}$ является плоским? Для плоских двудольных графов неравенство из следствия 3.16 можно усилить, потому что каждая грань ограничена как минимум четырьмя рёбрами. Это значит, что $F \leqslant \frac{E}{2}$, откуда из формулы Эйлера следует, что $E \leqslant 2V - 4$. Однако в графе $K_{3,3}$ вершин 6, а рёбер 9, и $9 > 2 \cdot 6 - 4 = 8$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 3.20. *Полный двудольный граф $K_{3,3}$ не является плоским.*

Графы K_5 и $K_{3,3}$ являются основными неплоскими графами. Все остальные неплоские графы так или иначе к ним сводятся. Об этом нам говорит знаменитая теорема Понтрягина-Куратовского, доказывать которую мы не будем.

Теорема 3.21. *(Теорема Понтрягина-Куратовского) Граф является плоским тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного K_5 или $K_{3,3}$.*