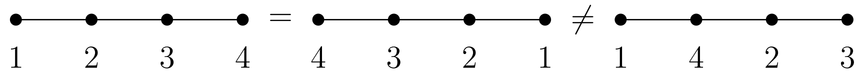
Лекция 4. Теорема Кэли

Эта лекция приоткроет читателю дверь в такой большой и неустаревающий раздел математики, как перечислительная комбинаторика. Зададимся задачей перечислить все деревья на n вершинах. Оказывается, это довольно сложно из-за того, что у разных деревьев могут быть различные *симметрии* — такие перестановки множества вершин дерева в себя, что любая пара вершин, соединённых ребром переходит в пару вершин, соединённых ребром. Поэтому рассмотрим более простую задачу — будем считать количество помеченных деревьев на n вершинах.

Определение 4.1. *Помеченным деревом* называется дерево, у которого каждая вершина помечена некоторым числом.

Отметим, что каждое дерево мы будем считать несколько раз. При этом деревья, получающиеся друг из друга симметриями, будем считать одинаковыми.

Пример 4.2.



Теорема 4.3 (Кэли)**.** *Число помеченных деревьев с n вершинами равно n^{n-2}.*

Доказательство. Считать деревья мы, конечно, не будем, а построим взаимно-однозначное соответствие между помеченными деревьями и кодами Прюфера.

Рассмотрим помеченное дерево на n вершинах и сопоставим ему код длины $n-2$ из символов $x_1, \ldots, x_n$. Начнём выписывать по дереву код. Возьмём висячую вершину с наименьшим номером и запишем в код x с индексом, равным номеру вершины, с которой соединена выбранная висячая вершина. Затем удалим эту выбранную висячую вершину и повторим процедуру. Таким образом получится код из $n-2$ символов и ребро на двух вершинах — пора остановиться. Очевидно, разным помеченным деревьям сопоставляются разные коды.

Обратно, рассмотрим код. Степень любой вершины в этом дереве на 1 больше частоты, с которой переменная с индексом, равным номеру этой вершины, встречается в коде. Каждому символу кода по порядку слева направо будем сопоставлять вершину с номером, равным индексу символа, и выходящим из неё ребром. Ребро соединяет вершину с висячей вершиной, номер которой равен минимальному из не встречающихся в коде индексу. Последнее ребро дерева соединяет две вершины, степени которых меньше требуемых.

Теперь поймём, что же доказано. Мы установили взаимно-однозначное соответствие между помеченными деревьями на n вершинах и всевозможными последовательностями из символов $x_1, \ldots, x_n$ длины $n-2$. Каждый элемент последовательности можно выбрать n способами, причём важен порядок, поэтому не надо ни на что делить. Всего членов последовательности $n-2$. $\square$