

Задачи к лекции 1. Перестановки

Упражнение 1.1. Вычислите: а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;
 в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$;
 е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^3$; ж) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 9 & 7 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 6 & 1 & 2 & 7 & 9 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Упражнение 1.2. Разложите в произведение независимых циклов следующие перестановки:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 & 9 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Упражнение 1.3. Вычислите порядок следующих перестановок: а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;
 б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 9 & 7 & 2 & 1 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Упражнение 1.4. Вычислите: а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{1000}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1000}$;
 в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{500}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-127}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{1001}$.

Упражнение 1.5. Какие из следующих перестановок являются чётными: а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;
 б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 7 & 2 & 1 & 9 & 5 & 8 \end{pmatrix}$?

Задача 1.1. (1 балл) Вычислите порядок следующих перестановок:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 1.2. (1 балл) Какой максимальный порядок может иметь перестановка из S_{13} ?

Задача 1.3. (1 балл) Пусть для некоторой $\tau \in S_n$ и для всех $\sigma \in S_n$ выполнено $\sigma\tau = \tau\sigma$. Верно ли, что $\tau = e$?

Задача 1.4. (1 балл) Верно ли, что если σ и τ — два различных цикла, причём $\sigma\tau = \tau\sigma$, то эти циклы независимы?

Задача 1.5. (1 балл) Сколько в S_n циклов длины k ?

Задача 1.6. (1 балл) Докажите, что порядок любой перестановки в S_n делит $n!$. Может ли он быть в точности равен $n!$?

Задача 1.7. (2 балла) Пусть $\sigma = (1, 2, \dots, n)$ — цикл длины n . На какое количество независимых циклов раскладывается перестановка σ^k ? Каковы длины этих циклов?

Задача 1.8. Докажите, что любую перестановку можно разложить в произведение

а) (1 балл) транспозиций вида $(k, k+1)$; б) (1 балл) транспозиций вида $(1, k)$;
 в) (1 балл) перестановок вида $(1, 2, \dots, k)$.

Задача 1.9. (1 балл) Найдите количество чётных перестановок в S_n .

Задача 1.10. (1 балл) Текст зашифрован программой, заменяющей взаимно однозначно каждую букву на некую другую. Докажите, что этот текст можно расшифровать, применив определённое число раз шифрующую программу.

Задача 1.11. Петя и Вася наблюдали за стоявшими во дворе n мальчиками, каждый из которых держал в руках мяч. Внезапно мальчики одновременно кинули свои мячи друг другу. Петя утверждает, что может мысленно расположить мальчиков по кругу так, что каждый кинул мяч стоящему через одного по часовой стрелке. Вася утверждает, что может мысленно расположить мальчиков по кругу так, что каждый кинул мяч стоящему через двух по часовой стрелке. Может ли такое быть, если а) (1 балл) $n = 17$, б) (1 балл) $n = 18$?

Задача 1.12. На n катушках намотано n магнитных лент красным концом (ракордом) наружу, а белым — внутрь. Есть дополнительная катушка и магнитофон, позволяющий перемотать ленту с одной катушки на другую (при этом внутри оказывается другой конец).

а) (1 балл) Можно ли добиться того, чтобы все ленты оказались белым концом наружу и пустой осталась та же дополнительная катушка?

б) (2 балла) Можно ли добиться, чтобы при этом каждая лента осталась на своей катушке?

Задача 1.13. (3 балла) Несколько жителей города N хотят обменяться квартирами. У каждого есть по квартире, но каждый хочет переехать в другую (разные люди хотят переехать в разные квартиры). По законам города разрешены только парные обмены: если два человека обмениваются квартирами, то в тот же день они не участвуют в других обменах. Докажите, что можно устроить парные обмены так, что уже через два дня каждый будет жить в той квартире, куда хотел переехать.

Задача 1.14. (3 балла) Докажите, что в игре «пятнашки» нельзя поменять местами фишки с номерами 14 и 15, не меняя при этом положение остальных фишек.

Задача 1.15. (4 балла) Для прохождения теста тысячу мудрецов выстраивают в колонну. Из колпаков с номерами от 1 до 1001 один прячут, а остальные в случайном порядке надевают на мудрецов. Каждый видит только номера на колпаках всех впереди стоящих. Далее мудрецы по порядку от заднего к переднему называют вслух целые числа. Каждое число должно быть от 1 до 1001, причем нельзя называть то, что уже было сказано. Результат теста — число мудрецов, назвавших номер своего колпака. Как должны действовать мудрецы, чтобы гарантировать результат не менее 999?

Задача 1.16. (4 балла) Каждому из n мудрецов написали на лбу число и выдали две варежки: чёрную и белую. По сигналу все мудрецы одновременно надевают варежки. После этого их строят в шеренгу в порядке возрастания написанных на их лбах чисел и просят соседей взяться за руки. Как мудрецам надевать варежки, чтобы в результате каждая белая варежка взялась за белую, а каждая чёрная — за чёрную? (Мудрец видит все числа, кроме своего.)

Примечание. Для зачёта необходимо набрать 14 баллов.