Задачи к лекции 2. Производящие функции

Упражнение 2.1. Докажите, что не существует формального степенного ряда $A(s)$ такого, что $sA(s) = 1$.

Упражнение 2.2. Докажите, что если каждый из степенных рядов $A(s)$ и $B(s)$ отличен от нуля, то и их произведение отлично от нуля.

Упражнение 2.3. Пусть $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$, где все числа a_k — целые. При каких условиях на a_k ряды $\dfrac{1}{A(s)}$ и $A^{-1}(s)$ имеют целые коэффициенты?

Упражнение 2.4. Пусть $A(s) = 1 + s + s^2 + \ldots,\ B(s) = 1 - s + s^2 - s^3 + \ldots$. Найдите
а) $A(s) + B(s)$; б) $A^2(s)$; в) $A(s)B(s)$.

Упражнение 2.5. Найдите производящую функцию $A(s)$ такую, что $(2 - s)A(s) = 1$.

Задача 2.1. (1 балл) Пусть $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$ — производящая функция для последовательности $a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots$. Выразите через A производящие функции для последовательностей
а) $a_0,\ a_0 + a_1,\ a_0 + a_1 + a_2, \ldots$;
б) $a_0,\ a_1 b,\ a_2 b^2, \ldots$;
в) $a_0,\ 0,\ a_2,\ 0,\ a_4,\ 0, \ldots$.

Задача 2.2. Рациональны ли производящие функции следующих последовательностей?
а) **(1 балл)** $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$;
б) **(1 балл)** $2, 6, 12, \ldots, k(k+1), \ldots$;
в) **(1 балл)** $1, 4, 9, 16, \ldots, k^2, \ldots$;
г) **(2 балла)** $1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \ldots, \dfrac{1}{k^2}, \ldots$.

Задача 2.3. Для следующих последовательностей, заданных неоднородными линейными рекуррентными соотношениями, найдите задающие их однородные линейные рекуррентные соотношения и производящие функции:
а) **(1 балл)** $a_{n+1} = a_n + 2, a_0 = 1$;
б) **(1 балл)** $a_{n+1} = 2a_n - 1, a_0 = 2$.

Задача 2.4. Пусть $A(s) = 1 + \dfrac{s}{1!} + \dfrac{s^2}{2!} + \dfrac{s^3}{3!} + \ldots,\ B(s) = 1 - \dfrac{s}{1!} + \dfrac{s^2}{2!} - \dfrac{s^3}{3!} + \ldots$. Найдите
а) **(2 балла)** $A(s)B(s)$;
б) **(3 балла)** $A^2(s)$.

Задача 2.5. (2 балла) Найдите производящую функцию $A(s)$, которая удовлетворяет соотношению $(s^2 + s^3 + s^4 + \ldots)A(s) = s^4 - s^6 + s^8 - \ldots$

Задача 2.6. Найдите производящие функции и явные выражения для элементов последовательностей, заданных рекуррентными соотношениями
а) **(2 балла)** $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n,\ a_0 = a_1 = 1$;
б) **(2 балла)** $a_{n+3} = \dfrac{3}{2}a_{n+2} - \dfrac{1}{2}a_n,\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2$.

Задача 2.7. (1 балл) Докажите, что $\dfrac{1}{1-s} = (1+s)(1+s^2)(1+s^4)(1+s^8)\ldots$.

Задача 2.8. (2 балла) Найдите производящую функцию количества разбиений на нечётные слагаемые.

Задача 2.9. (2 балла) Докажите, что количество разбиений на различные слагаемые равно количеству разбиений на нечётные слагаемые.

Задача 2.10. (2 балла) Обозначим через a_n число разбиений полоски $1 \times n$ на части, каждая из которых является либо квадратиком 1×1, либо домино 1×2. Найдите производящую функцию для последовательности a_n.

Задача 2.11. (3 балла) Рассмотрим множество путей на плоскости, состоящих из векторов $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$. Найдите производящую функцию для числа таких путей длины n, которые начинаются в 0 и несамопересекаются (то есть векторы $(1,0)$ и $(-1,0)$ в таких путях не могут быть соседними).

Задача 2.12. (4 балла) Двое играют в такую игру. Один задумывает число от 1 до 144, а второй пытается его отгадать, задавая вопросы, на которые первый честно отвечает «да» или «нет». В случае ответа «да» второй платит 1 рубль, в случае ответа «нет» — 2 рубля. Как должен играть второй игрок, чтобы сделать свой проигрыш в наихудшей ситуации минимальным? А как он должен себя вести, если вместо 144 стоит другое число?

Примечание. Для зачёта необходимо набрать 14 баллов.