

Задачи к курсу

Определение 1. Замощение называется *моноэдральным*, если оно составлено из одинаковых копий одной и той же плитки. В таком случае эта плитка называется *протоплиткой*.

Упражнение 1. Постройте моноэдральное замощение, протоплиткой которого является

- а) произвольный треугольник; б) произвольный четырёхугольник;
 в) пятиугольник, две стороны которого параллельны;
 г) шестиугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны и равны.

Упражнение 2. Приведите пример многоугольника, который не может быть протоплиткой ни одного моноэдрального замощения.

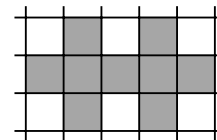
Определение 2. Пусть U — многоугольник, составленный из некоторых плиток замощения (4^4) (то есть из нескольких ячеек клетчатой бумаги). Тогда если фигура U состоит из n плиток, то она называется n -мино.

Упражнение 3. Для каждого из пяти 4-мино (тетрамино, фигурки из игры "Тетрис") приведите пример моноэдрального замощения, протоплиткой которого является данное тетрамино.

Упражнение 4. Докажите, что если замощение правильными многоугольниками содержит восьмиугольник, то это замощение $(4, 8^2)$.

Задача 1. (1 балл) Для каждого натурального n приведите пример моноэдрального замощения, протоплиткой которого является некоторый n -угольник.

Задача 2. (1 балл) Докажите, что существует бесконечно много моноэдральных замощений, протоплитка которых изображена на рисунке справа.



Задача 3. (2 балла) Докажите, что невыпуклый пятиугольник, обладающий двумя соседними углами, большими π , не может быть протоплиткой ни одного моноэдрального замощения.

Задача 4. (2 балла) Приведите пример какого-либо 7-мино, которое не является протоплиткой ни одной моноэдральной мозаики.

Задача 5. (3 балла) Найдите 12 фигурок 5-мино (пентамино) и определите, какие из них являются протоплитками единственного моноэдрального замощения. Для остальных пентамино приведите примеры как минимум трёх различных моноэдральных замощений.

Задача 6. (3 балла) Дайте определения n -монда и n -гекса, заменив в определении 2 замощение (4^4) на (3^6) и (6^3) соответственно. Приведите хотя бы три примера моноэдральных замощений 7-мондами или 6-гексами и найдите какой-нибудь 7-монд или 6-гекс, не допускающий моноэдрального замощения.

Определение 3. Плитка называется *мономорфной* (*диморфной*, *n -морфной*), если она является протоплиткой ровно одного моноэдрального замощения (двух, n различных замощений соответственно).

Задача 7. Приведите пример а) (1 балл) мономорфной плитки;
 б) (2 балла) диморфной плитки; в) (3 балла) триморфной плитки.

Задача 8. (1 балл) Приведите пример замощения правильными многоугольниками, которое содержит 12-угольники и квадраты, но не содержит шестиугольники.

Примечание. Для зачёта необходимо набрать 12 баллов (но не обязательно только из этого листочка — завтра будет ещё один).