Задачи к курсу — 2

Классификация замощений плоскости правильными многоугольниками, которые могут пересекаться только по вершине или стороне (то есть замощений «ребро-к-ребру») начинается с классификации возможных типов вершин. Под *типом вершины* подразумевается порядок, в котором встречаются плитки при обходе вершины; его можно записать в виде последовательности чисел, отвечающих количеству сторон соответствующих плиток. Например, тип каждой вершины в квадратном паркете (клетчатой бумаге) есть (4,4,4,4) или сокращённо (4^4). Все возможные типы вершин указаны в таблице ниже.

Тип	3^6	$3^4,6$	$3^3,4^2$	$3^2,4,3,4$	$3^2,4,12$	$3,4,3,12$	$3^2,6^2$	$3,6,3,6$	$3,4^2,6$	$3,4,6,4$
	a	a	a	a	b	b	b	a	b	a

Тип	$3,7,42$	$3,8,24$	$3,9,18$	$3,10,15$	$3,12^2$	4^4	$4,5,20$	$4,6,12$	$4,8^2$	$5^2,10$	6^3
	c	c	c	c	a	a	c	a	a	c	a

Упражнение 1. а) Проверьте, что для каждого типа вершины, отмеченного в таблице буквой «a», существует замощение плоскости правильными многоугольниками, все вершины которого имеют указанный тип (такие замощения называются *Архимедовыми*).
б) Для каждого типа вершины, отмеченного буквой «b», приведите пример какого-нибудь замощения плоскости правильными многоугольниками, содержащее вершины указанного типа.
в) Докажите, что ни одно замощение плоскости правильными многоугольниками не может иметь вершину, тип которой отмечен в таблице буквой «c».

Определение 1. Замощение плоскости правильными многоугольниками называется *k-Архимедовым*, если оно содержит вершины в точности k различных типов.

Упражнение 2. а) Докажите, что ни одно 2-Архимедово замощение не может содержать вершину типа $(4,8^2)$.
б) Докажите, что если 2-Архимедово замощение обладает вершинами типа $(3,12^2)$, то оно обладает также вершинами типа $(3,4,3,12)$.
в) Покажите, что замощений, удовлетворяющих условиям пункта б), бесконечно много.

Определение 2. Замощение плоскости правильными многоугольниками называется *эквитранзитивным*, если любая его плитка может быть переведена в любую другою равную ей плитку движением, переводящим замощение само в себя (то есть являющимся симметрией замощения).

Упражнение 3. Какие из Архимедовых замощений являются эквитранзитивными?

Определение 3. Замощение называется *односторонним*, если каждое его ребро является стороной не более, чем одной плитки.

Упражнение 4. Приведите пример одностороннего эквитранзитивного замощения квадратами, которые имеют размеры а) 1, 2; б) 1, 2, 3; в) 1, 2, 3, 4.

Упражнение 5. Докажите, что одностороннее эквитранзитивное замощение квадратами трёх размеров x, y и z (где $x < y < z$) возможно тогда и только тогда, когда $z = x + y$.

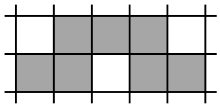
Упражнение 6. Приведите примеры *не являющихся изоэдрическими* моноэдральных замощений какими-либо n-мондами и k-гексами (для таких замощений должны найтись две плитки, которые невозможно перевести одна в другую ни одним движением, сохраняющим замощение).

Задача 1. а) **(1 балл)** Приведите три примера пары типов вершин, допускающих бесконечное количество 2-Архимедовых замощений с вершинами указанного типа.
б) **(1 балл)** Приведите пример пары типов вершин, для которых соответствующее 2-Архимедово замощение единственно.

Задача 2. а) **(1 балл)** Существует ли 15-Архимедово замощение?
б) **(2 балла)** Существует ли периодическое 14-Архимедово замощение?

Задача 3. **(1 балл)** Приведите примеры трёх эквитранзитивных замощений правильными многоугольниками «ребро-к-ребру», не являющихся Архимедовыми.

Задача 4. **(1 балл)** Найдите все изоэдрические замощения, которые допускает протоплитка 7-мино, изображённая справа.



Задача 5. **(1 балл)** Приведите пример одностороннего эквитранзитивного замощения квадратами, которые имеют размеры 1, 2, 3, 4, 5.

Задача 6. **(1 балл)** Приведите пример одностороннего эквитранзитивного замощения квадратами размеров 1, 2, 3, 4, 6, группа симметрий которого обладает осевой симметрией.

Задача 7. **(2 балла)** Доказано, что все односторонние эквитранзитивные замощения квадратами четырёх размеров можно поделить на пять групп. В каждой из групп три размера квадратов имеют вид x, y (где $x < y$) и $x + y$, а четвёртый есть $2x$, $2y$, $2x + y$, $2y + x$ и $2x + 2y$. Приведите примеры искомого замощения для каждой из указанных пяти четвёрок.

Задача 8. **(2 балла)** Пусть G — либо группа cn (группа симметрий «свастики» с n хвостами), либо группа dn (группа симметрий правильного n-угольника). Для каждой такой группы G приведите пример моноэдрального замощения, группа симметрий которого совпадает с G.

Примечание. Для зачёта необходимо набрать 12 баллов (в сумме из этого и предыдущего листочка). Другой вариант получения зачёта — написать программу, которая бы позволяла пользователю рисовать различные замощения плоскости многоугольниками. В случае желания получить зачёт вторым способом просьба обсудить эту возможность с Хайдаром для уточнения технического задания.