1. Замощения правильными многоугольниками

Прежде, чем перейти к математическому описанию необъятного многообразия мозаик, нам необходимо определиться с тем, как именно мы будем называть те или иные объекты, попадающие в сферу наших интересов. К сожалению, на сегодняшний день терминология ещё не устоялась: в различных источниках одни и те же вещи могут называться несколько по-разному, но что ещё хуже, одними и теми же словами могут именоваться разные вещи. Более того, для части исследуемых учёными объектов просто не существует подходящего русского названия. Чтобы избежать недоразумений, сразу же оговоримся, что в своём изложении мы будем придерживаться книги Грюнбаума и Шефарда [6], а также всюду будем приводить оригинальные английские наименования.

Определение 1.1. *Замощением плоскости* (а *plane tiling*) называется такое счётное семейство замкнутых множеств $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, T_3, \ldots\}$, которое покрывает всю плоскость без пробелов и наложений. Множества $T_1, T_2, T_3, \ldots$ называются *плитками* (а *tile*) замощения $\mathcal{T}$.

Как отмечают Грюнбаум и Шефард [6], в русской математической литературе этот или похожий смысл имеют также слова *разбиение*, *мозаика* и *паркетаж*. В соответствии с Энциклопедией «Аванта+» [5] на протяжении всего изложения мы будем использовать в основном термин *замощение*, время от времени оговаривая, как иначе называют разные авторы частные случаи понятия, описанного в определении 1.1.

Сделаем ещё одно замечание общего характера. В нашем курсе мы ограничимся рассмотрением замощений, все плитки которых являются простыми многоугольниками. Тем не менее, многие полученные результаты можно естественным образом обобщить и на замощения плитками более сложной формы. Большая часть изложения будет посвящена замощениям, плитки которых представляют собой копии многоугольников из некоторого заданного конечного набора. Однако в отдельных специально оговоренных случаях мы не будем вносить подобные ограничения.

Одним из наиболее простых примеров замощения является клетчатая бумага — это регулярное замощение плоскости одинаковыми квадратами. Без особого труда можно покрыть плоскость копиями треугольника произвольного вида — для этого достаточно складывать их попарно в параллелограммы, которыми, очевидно, плоскость замащивается. Чуть труднее придумать, как покрыть плоскость одинаковыми четырёхугольниками. Идея здесь точно такая же: сложив два четырёхугольника вместе, мы получим шестиугольник, любые две противоположные стороны которого равны и параллельны друг другу. А подобными шестиугольниками замостить плоскость нетрудно, так что даже неважно, был ли исходный четырёхугольник выпуклым или нет (рис. 1). Другие примеры замощений нам встретятся ниже.

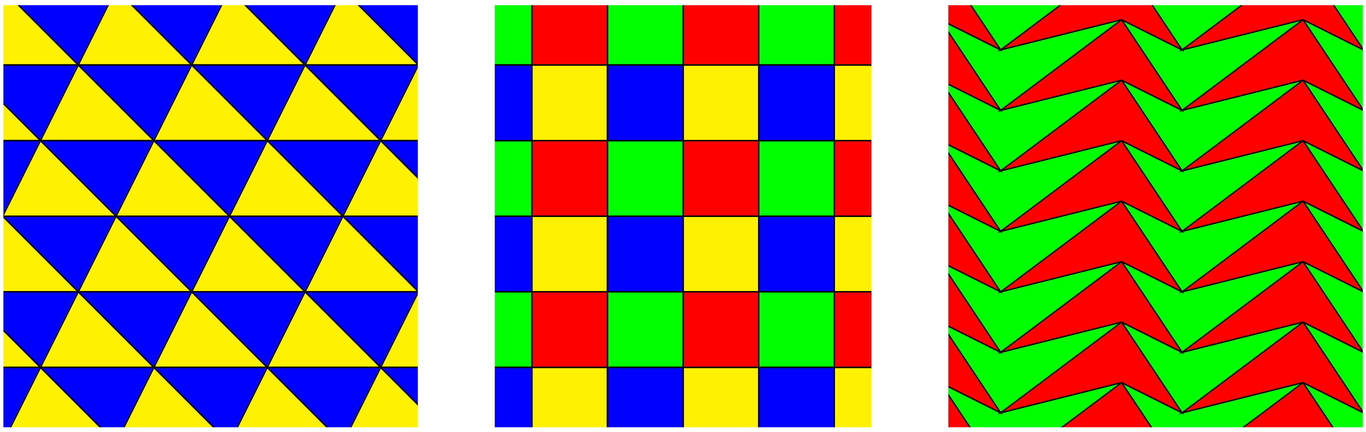

Рис. 1.

Упражнение 1.1. Приведите пример замощения плоскости копиями пятиугольника, две стороны которого параллельны друг другу.

Как следует из определения 1.1, пересечение любых двух плиток замощения, если они вообще пересекаются, состоит из набора отдельных точек и ломаных. Каждая такая ломаная называется *ребром* замощения (an *edge* of the tiling), а точки — *вершинами* замощения (a *vertex* of the tiling); концы рёбер также считаются вершинами. Важно отличать рёбра и вершины замощения от сторон и углов многоугольников, являющихся плитками. Например, на рис. 2 плитки F_1 и F_2 пересекаются по отрезку BC, а плитки F_1 и F_3 — по отрезкам AB и CD. Поэтому точки A, B, C и D являются вершинами замощения, а отрезки AB, BC и CD — его рёбрами, в то время как углами многоугольника F_1 являются только точки A и D, а все три указанных выше ребра образуют лишь одну его сторону. Напротив, плитки F_2 и F_3 пересекаются по ломаной $BPQC$, и, таким образом, углы P и Q многоугольника F_2 вершинами замощения не являются.

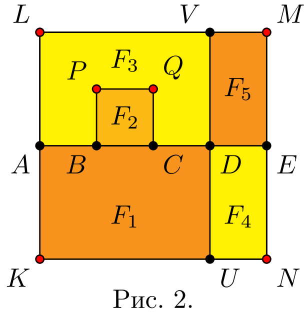

Рис. 2.

Последнее, что нам необходимо сделать заранее — договориться, какие замощения мы будем считать одинаковыми. Довольно естественной кажется мысль, что если мы возьмём какое-нибудь замощение и применим ко всем его плиткам одно и то же преобразование движения (например, повернём на 90° относительно начала координат), то само замощение от этого не изменится. С другой стороны, клетчатая бумага не перестанет быть клетчатой бумагой, если все её квадратики увеличатся или уменьшатся в два раза. Эти соображения приводят нас к следующему определению.

Определение 1.2. Будем называть замощения $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ *равными* (*equal* or *the same* tilings), если одно из них переводится в другое преобразованием подобия.

Таким образом, мы будем исследовать замощения с точностью до преобразования подобия.

1.1. Моноэдральные замощения

Теперь, когда самые главные понятия освещены, мы можем вплотную перейти к изучению замощений, плитки которых являются правильными многоугольниками. Подобными замощениями люди интересовались с древних времён, пытаясь, прежде всего, описать все замощения, удовлетворяющие тому или иному дополнительному условию. Мы также проследуем этим путём, осветив наиболее естественные способы наложить ограничения на весь спектр возможностей. Первое условие, которое мы рассмотрим, таково: все плитки замощения должны быть одинаковыми.

Определение 1.3. Замощение $\mathcal{T}$ называется *моноэдральным* (*monohedral* tiling), если каждая входящая в его состав плитка является копией данного многоугольника T. Этот многоугольник называется *протоплиткой* замощения $\mathcal{T}$ (the *prototile* of $\mathcal{T}$).

Другими словами, все плитки, входящие в моноэдральное замощение, имеют один и тот же размер и одну и ту же форму. С некоторыми из таких замощений мы уже знакомы (рис. 1), а одно из них — клетчатая бумага — даже состоит только из правильных многоугольников. Породить бесчисленное множество других примеров не составляет большого труда.

Упражнение 1.2. Для каждого натурального числа $n > 4$ приведите пример моноэдрального замощения, протоплиткой которого являлся бы некоторый n-угольник.

Упражнение 1.3. Приведите пример многоугольника, который не является протоплиткой ни одного моноэдрального замощения.

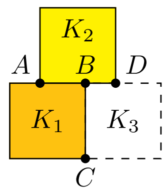

Рис. 3.

Наша ближайшая цель — описать все моноэдральные замощения из правильных многоугольников. Для начала посмотрим, какие замощения можно построить, используя только копии данного квадрата. Если моноэдральное замощение квадратами отличается от замощения, изображённого на рис. 1, то в нём найдётся ребро, не совпадающее со стороной квадрата. Рассмотрим рис. 3, иллюстрирующий эту ситуацию: мы видим, что ребро AB не совпадает ни со стороной квадрата K_1, ни со стороной квадрата K_2. Ясно, что приложить квадрат к двум данным квадратам так, чтобы он покрывал угол CBD, можно ровно одним способом. Развивая это соображение для квадратов K_2 и K_3 и далее, мы приходим к выводу, что рассматриваемое замощение содержит бесконечную полосу, изображённую на рис. 4.

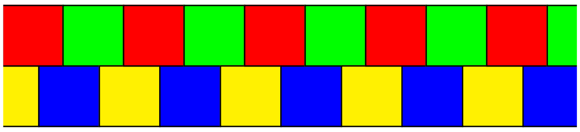
Рис. 4.

Теперь уже легко сообразить, что всё замощение будет представлять собой набор таких полос, сдвинутых друг относительно друга на разные расстояния. И подобным образом будет выглядеть любое моноэдральное замощение, протоплитка которого является квадратом.

Замощения треугольниками практически ничем не отличаются от замощений квадратами.

Упражнение 1.4. Докажите, что любое моноэдральное замощение плоскости правильными треугольниками есть набор полос, сдвинутых друг относительно друга на разные расстояния.

Аналогичные рассуждения помогают нам установить результат и для других правильных многоугольников.

Упражнение 1.5. Докажите, что существует ровно одно моноэдральное замощение плоскости правильными шестиугольниками.

Упражнение 1.6. Докажите, что если $n = 5$ или $n > 6$, то правильный n-угольник не является протоплиткой ни для какого моноэдрального замощения.

Таким образом, только три правильных многоугольника являются протоплитками моноэдральных замощений: треугольник, квадрат и шестиугольник. Примеры соответствующих замощений изображены на рис. 5.

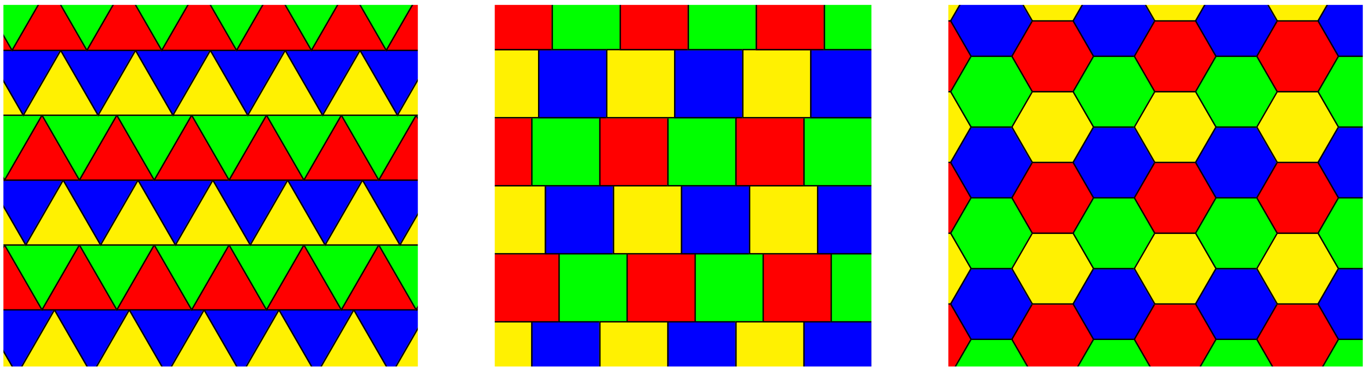
Рис. 5.

1.2. Архимедовы замощения

Как мы только что увидели, моноэдральные замощения правильными многоугольниками хотя и многочисленны, особым разнообразием не отличаются. Поэтому мы наложим на рассматриваемые замощения другое условие: его рёбра должны совпадать со сторонами плиток.

Определение 1.4. Замощение $\mathcal{T}$ называется *паркетом* (*edge-to-edge* tiling), если любые две его пересекающиеся плитки пересекаются либо по вершине, либо по стороне.

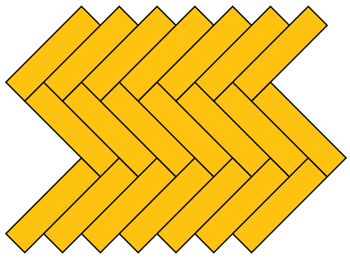
Рис. 6.

Определение 1.4 противоречит нашим бытовым представлениям о паркетах как о напольном покрытии деревянными дощечками. Так, знакомый всем с детства паркет типа «ёлочка», который до сих пор встречается в старых квартирах, сложен из прямоугольных дощечек (рис. 6). Однако он не является паркетом в указанном выше математическом смысле, поскольку далеко не все его рёбра являются сторонами этих прямоугольников. Тем не менее, ввиду особой важности введённого понятия нам очень нужно какое-либо наименование для него, и с этой точки зрения термин «паркет» выглядит не так уж плохо (см. также [5]).

Итак, множество рёбер каждого паркета совпадает со множеством сторон образующих его плиток, а множество вершин паркета — со множеством вершин этих плиток. Наша ближайшая цель — понять, какими бывают паркеты, составленные из правильных многоугольников.[1] Мы уже знаем, что моноэдральных паркетов такого вида всего три. Тем не менее, не посчитаем за труд привести ещё одно объяснение этого факта, позволяющее взглянуть на ситуацию немного с другого ракурса.

Итак, предположим, что в каждой вершине моноэдрального паркета сходится k одинаковых правильных n-угольников. Так как сумма углов n-угольника есть $(n-2)\pi$, то каждый его угол составляет ровно $\dfrac{(n-2)\pi}{n}$. С учётом нашего предположения отсюда вытекает равенство $k\cdot\dfrac{(n-2)\pi}{n}=2\pi$. Преобразовывая его, мы приходим к тому, что $\dfrac{2}{k}+\dfrac{2}{n}=1$. Несложный перебор показывает, что полученное уравнение имеет лишь три решения в натуральных числах: $(3;6)$, $(4;4)$ и $(6;3)$. Эти решения в точности соответствуют паркетам из треугольников, квадратов и шестиугольников (рис. 7).

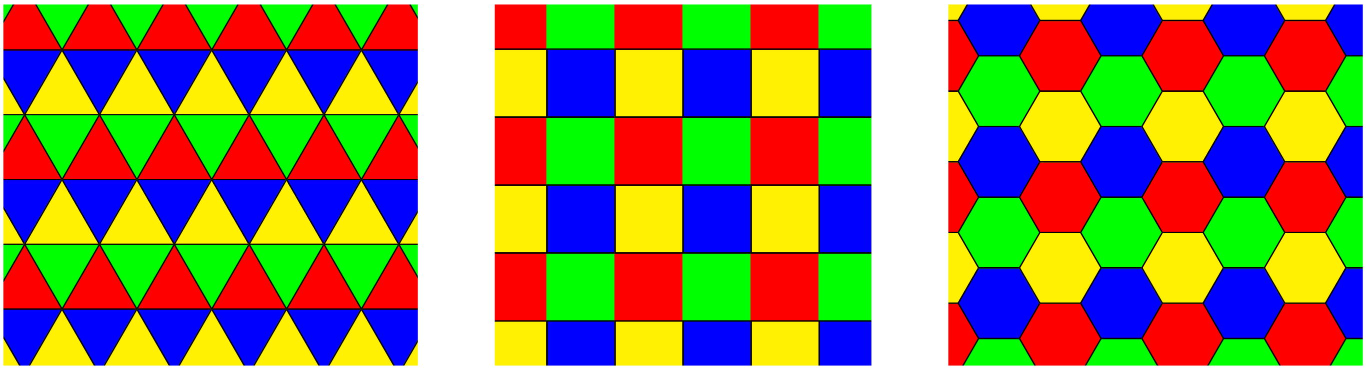

Рис. 7.

Пусть теперь плитки, составляющие паркет, являются различными правильными многоугольниками — стороны этих многоугольников, очевидно, имеют одну и ту же длину, но количество сторон от многоугольника к многоугольнику может различаться. Каждая вершина такого паркета характеризуется набором примыкающих к ней плиток, который называется *видом* вершины (the *species* of the vertex). Зачастую, как, например, на рис. 8, играет роль не только набор плиток, но и порядок, в котором они встречаются при обходе вершины. Этот порядок можно записать в виде последовательности чисел, отвечающих количеству сторон обходимых плиток, которая называется *типом* данной вершины (the *type* of the vertex). Так, в паркете, составленном из квадратов, каждая вершина имеет тип 4,4,4,4, что сокращённо записывается как 4^4, а на рис. 8 вершины имеют тип $3,4^2,6$ и $3,4,6,4$ соответственно.

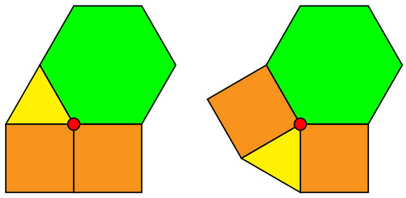

Рис. 8.

В качестве первого шага к описанию паркетов из различных правильных многоугольников опишем все возможные виды и типы вершин. Для этого рассмотрим произвольную вершину V некоторого такого паркета. Пусть количество плиток, сходящихся в этой вершине, равно d (эта величина называется *степенью* вершины V). Поскольку сумма углов, примыкающих к вершине V, равна 2π, а каждый угол правильного многоугольника не меньше $\dfrac{\pi}{3}$, имеем $d\leqslant 6$. Кроме того, $d\geqslant 3$, ведь хотя бы три плитки в каждой вершине паркета должны сходиться. Значит, возможны варианты $d=3$, $d=4$, $d=5$ и $d=6$.

Понятно, что если $d=6$, то все плитки паркета являются правильными треугольниками. Три другие возможности не столь быстро поддаются анализу, но тоже не доставляют суще-

[1]Кстати говоря, Колмогоров называл паркетами именно то, что мы называем паркетами из правильных многоугольников, см. [1], [2]. А согласно Современной Иллюстрированной Энциклопедии [3] паркет — это замощение, которое мы называем моноэдральным.

ственных трудностей. Разберём в качестве примера случай $d = 4$.

Допустим, что к вершине V примыкают многоугольники, количество вершин которых равно k, l, m и n соответственно. Поскольку каждый угол правильного n-угольника равен $\frac{(n-2)\pi}{n}$, из рассмотрения прилегающих к V углов вытекает соотношение

$$\frac{(k-2)\pi}{k} + \frac{(l-2)\pi}{l} + \frac{(m-2)\pi}{m} + \frac{(n-2)\pi}{n} = 2\pi.$$

Несложные преобразования приводят нас к следующему уравнению:

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1.$$

Решая его в целых числах, без ограничения общности можно считать, что $3 \leqslant k \leqslant l \leqslant m \leqslant n$. Тогда нетрудно видеть, что либо $k = 3$, либо $k = 4$ (потому что при $k \geqslant 5$ сумма дробей слева от знака равенства меньше единицы). Во втором случае решение единственно: $k = l = m = n = 4$. А первый сводится к уравнению

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{2}{3}.$$

Здесь снова есть две возможности: $l = 3$ и $l = 4$. Аналогичное проведённому выше рассмотрение каждой из них приводит нас к таким решениям: $(k, l, m, n) \in \{(3, 3, 4, 12), (3, 3, 6, 6), (3, 4, 4, 6)\}$.

Точно такие же рассуждения позволяют найти все возможные виды вершин в случаях $d = 3$ и $d = 5$. Оказывается, всего существует 17 видов вершин, 4 из которых делятся на два типа каждый (то есть различных типов всего 21). Все эти возможности перечислены в таблице 1.

Тип	3^6	$3^4, 6$	$3^3, 4^2$	$3^2, 4, 3, 4$	$3^2, 4, 12$	$3, 4, 3, 12$	$3^2, 6^2$	$3, 6, 3, 6$	$3, 4^2, 6$	$3, 4, 6, 4$
	a	a	a	a	b	b	b	a	b	a

Тип	$3, 7, 42$	$3, 8, 24$	$3, 9, 18$	$3, 10, 15$	$3, 12^2$	4^4	$4, 5, 20$	$4, 6, 12$	$4, 8^2$	$5^2, 10$	6^3
	c	c	c	c	a	a	c	a	a	c	a

Таблица 1. Список всех возможных типов вершин.

Упражнение 1.7. а) Докажите, что типы вершин степени 5 исчерпываются следующими тремя вариантами: $3^4, 6$; $3^3, 4^2$ и $3^2, 4, 3, 4$.
б) Докажите, что типы вершин степени 3 исчерпываются следующими десятью вариантами: $3, 7, 42$; $3, 8, 24$; $3, 9, 18$; $3, 10, 15$; $3, 12^2$; $4, 5, 20$; $4, 6, 12$; $4, 8^2$; $5^2, 10$ и 6^3.

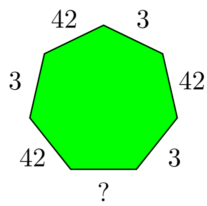

Рис. 9.

Сделаем некоторые пояснения к таблице 1. Оказывается, не все типы вершин, перечисленных в ней, встречаются в паркетах из правильных многоугольников. Так, типы вершин, отмеченные буквой «c», не входят ни в один такой паркет. Покажем, почему это так, на примере вершины типа $3, 7, 42$. В самом деле, заметим, что только один из типов вершин включает в себя число 7. Значит, если бы одна из плиток паркета была семиугольником, она соприкасалась бы только с треугольниками и 42-угольниками, причём по очереди. Но подобное чередование возможно только для многоугольников с чётным числом сторон (рис. 9).

Упражнение 1.8. Докажите, что если паркет из правильных многоугольников содержит восьмиугольник, то все его вершины имеют тип $4, 8^2$.

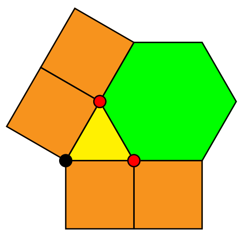
Рис. 10.

Что касается вершин типа «b», то они могут встречаться в паркетах из правильных многоугольников, но только в комбинации и какими-либо ещё типами. Продемонстрируем сказанное на примере вершин типа $3, 4^2, 6$. Рассмотрим какое-нибудь общее для треугольника и шестиугольника ребро. Если обе вершины, являющиеся концами этого ребра, имеют тип $3, 4^2, 6$, то прилегающие к треугольнику квадраты при обходе вокруг ещё одной вершины (на рис. 10

она отмечена чёрным цветом) встретятся не подряд, а будут разделены вышеозначенным треугольником. Следовательно, не все вершины искомого паркета имеют вид $3, 4^2, 6$.

Оставшиеся 11 типов вершин в таблице 1 помечены буквой «a» — это означает, что существует 11 паркетов из правильных многоугольников, все вершины которых имеют один и тот же тип. Такие паркеты называются *Архимедовыми* (*Archimedean* tilings).[2]

Упражнение 1.9. а) Проверьте, что только типы вершин, отмеченные в таблице 1 буквой «a», соответствуют Архимедовым паркетам.
б) Для каждого типа вершины, отмеченного в таблице 1 буквой «b», приведите пример какого-нибудь паркета из правильных многоугольников, содержащего вершины указанного типа.
в) Докажите, что ни один паркет из правильных многоугольников не может иметь вершину, тип которой отмечен в таблице 1 буквой «c».

В заключение опишем естественное обобщение понятия Архимедового паркета.

Определение 1.5. Паркет из правильных многоугольников называется *k-Архимедовым*, если он содержит вершины в точности k различных типов.

1-Архимедовы паркеты — это в точности Архимедовы паркеты, их ровно 11 штук. А вот уже 2-Архимедовых паркетов бесконечно много. Это легко проиллюстрировать следующим примером. Архимедовы паркеты, вершины которых имеют тип $3^2, 4, 3, 4$ и $3^3, 4^2$, можно представить в виде объединения бесконечных полос из квадратов и правильных треугольников. 2-Архимедов паркет, включающий в себя оба этих типа вершин, можно построить, комбинируя кусочки этих полос (например, так, как показано на рис. 11). Даже таких паркетов бесконечно много, но ими всё многообразие возможностей не исчерпывается. Полное описание 2-Архимедовых паркетов, вершины которых имеют тип $3^2, 4, 3, 4$ и $3^3, 4^2$, на сегодняшний день неизвестно.

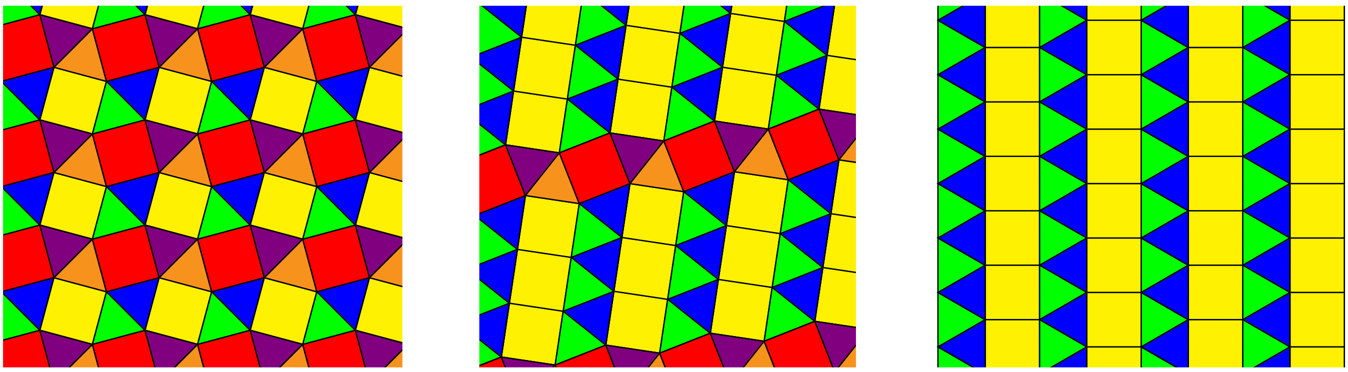

Рис. 11.

Литература

[1] Колмогоров А.Н., *Паркеты из правильных многоугольников*, — "Квант", 1986, N8, стр. 3-7.

[2] Михайлов О., *Одиннадцать правильных паркетов*, — "Квант", 1979, N2, стр. 9-14.

[3] Современная Иллюстрированная Энциклопедия. *Математика. Информатика*, — Москва, РОСМЭН, 2007.

[4] Штейнгауз Г., *Математический калейдоскоп*, — Москва, Наука, 1981.

[5] Энциклопедия для детей. Т.11. *Математика*, — Москва, Аванта+, 1999.

[6] Grünbaum Branco, Shephard G.C., *Tilings and Patterns*, — New-York: W.H. Freeman and Company, 1986.

[2] Как отмечают Грюнбаум и Шефард [6], некоторые авторы называют такие паркеты однородными (homogeneous) или полуправильными (semiregular). Также отметим, что 3 моноэдральных Архимедовых паркета логично было бы назвать Платоновыми — по аналогии с правильными многогранниками.