

Задачи к курсу — 2

Определение 2.1. *Движением* или *изометрией* называется любое преобразование плоскости, сохраняющее расстояние.

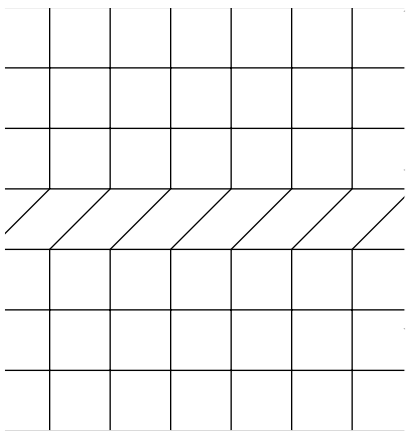
Определение 2.2. *Симметрией* множества T (замощения \mathcal{T}) называется любое движение, которое переводит это множество (замощение) в себя.

Определение 2.3. Множество всех симметрий фигуры T (замощения \mathcal{T}) называется *группой симметрий* фигуры T (замощения \mathcal{T}).

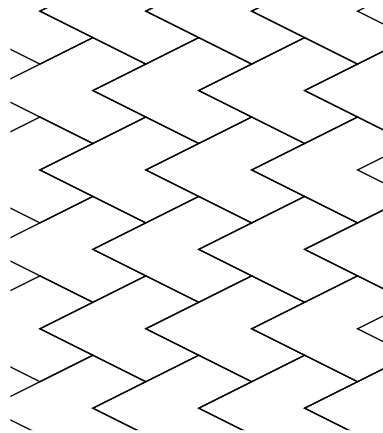
Упражнение 2.1. (1 балл) Для каждой из пяти фигур тетрамино найдите её группу симметрий.

Упражнение 2.2. (1 балл) Для каждого натурального числа n приведите пример замощения, группой симметрий которого является группа диэдра D_n (она же — группа симметрий правильного n -угольника).

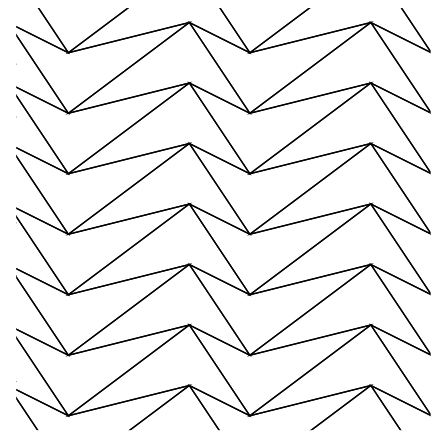
Упражнение 2.3. Для каждого из указанных замощений найдите его группу симметрий.



а) (1 балл)



б) (1 балл)



в) (1 балл)

Определение 2.4. Плитки T_1 и T_2 замощения \mathcal{T} называются *эквивалентными*, если в группе симметрий замощения \mathcal{T} существует движение, переводящее T_1 в T_2 . Множество плиток замощения \mathcal{T} разбивается на классы эквивалентности, которые называются *орбитами*.

Определение 2.5. Замощение \mathcal{T} называется *эквитранзитивным*, если все его плитки, равные между собой, лежат в одной орбите.

Упражнение 2.4. (2 балла) Какие из Архимедовых замощений являются эквитранзитивными?

Определение 2.6. Замощение \mathcal{T} называется *односторонним*, если каждое его ребро является стороной не более, чем одной плитки.

Упражнение 2.5. (1 балл) Приведите пример одностороннего эквитранзитивного замощения правильными треугольниками двух различных размеров.

Упражнение 2.6. (1 балл) Приведите три примера различных односторонних эквитранзитивных замощений квадратами, длины сторон которых равны 1, 2, 3.

Упражнение 2.7. (1 балл) Приведите пример одностороннего эквитранзитивного замощения квадратами, длины сторон которых равны 1, 2, 3, 4.

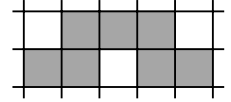
Задача 2.1. а) (6 баллов) Для каждого n приведите пример моноэдрального замощения, группа симметрий которого есть C_n (группа симметрий «свастики» с n хвостами).

б) (6 баллов) Для каждого n приведите пример моноэдрального замощения, группа симметрий которого есть D_n (группа симметрий правильного n -угольника).

Задача 2.2. (6 баллов) Приведите примеры трёх эквитранзитивных паркетов из правильных многоугольников, которые не являются Архимедовыми.

Определение 2.7. Замощение называется *изоэдрическим*, если для любых его двух плиток найдётся симметрия замощения, переводящая первую плитку во вторую.

Задача 2.3. (8 баллов) Найдите все изоэдрические замощения, которые допускает протоплитка 7-мино, изображённая справа.



Задача 2.4. (10+2 баллов) Доказано, что все односторонние эквитранзитивные замощения квадратами четырёх различных размеров можно поделить на пять групп. В каждой из групп длины сторон трёх разных квадратов имеют вид x , y (где $x < y$) и $x + y$, а четвёртый есть $2x$, $2y$, $2x + y$, $2y + x$ или $2x + 2y$. Приведите примеры искомого замощения для каждой из указанных пяти четвёрок.

Задача 2.5. (5 баллов) Приведите пример одностороннего эквитранзитивного замощения квадратами, длины сторон которых равны 1, 2, 3, 4, 5.

Задача 2.6. (7 баллов) Приведите пример одностороннего эквитранзитивного замощения квадратами, длины сторон которых равны 1, 2, 3, 4, 6, так, чтобы группа симметрий замощения обладала осевой симметрией.

Задача 2.7. (7 баллов) Постройте замощение плоскости такими квадратами, среди которых было бы лишь два равных.

Примечание. Для зачёта необходимо набрать 60 баллов (в сумме из этого и предыдущего листочков). Баллы являются динамическими и имеют свойство со временем уменьшаться. Баллы за упражнения зачисляются только в течение двух дней и обнуляются после следующей лекции. Баллы за задачи уменьшаются постепенно — в первый день зачисляется полная стоимость задачи, а в последующие работает правило, описанное в нижеследующей таблице.

День сдачи	16 февраля	17 февраля	18 февраля	19 февраля
Стоимость 2	2	2	1	1
Стоимость 5	5	5	4	4
Стоимость 6	6	5	5	4
Стоимость 7	7	7	6	6
Стоимость 8	8	7	7	6

При этом баллы за задачу 2.4 зачисляются как за задачу стоимостью 2 балла, плюс за каждую исследованную группу квадратов гарантированно начисляется по два балла.