

## Задачи к курсу — 2

**Определение 2.1.** *Движением* или *изометрией* называется любое преобразование плоскости, сохраняющее расстояние.

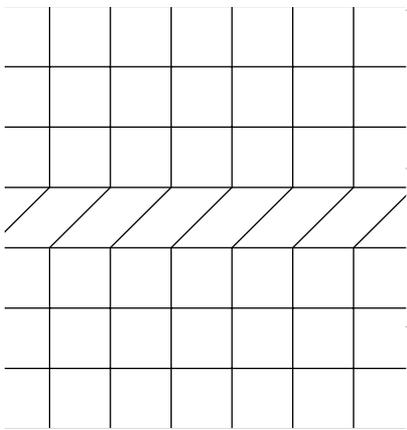
**Определение 2.2.** *Симметрией* множества  $T$  (замощения  $\mathcal{T}$ ) называется любое движение, которое переводит это множество (замощение) в себя.

**Определение 2.3.** Множество всех симметрий фигуры  $T$  (замощения  $\mathcal{T}$ ) называется *группой симметрий* фигуры  $T$  (замощения  $\mathcal{T}$ ).

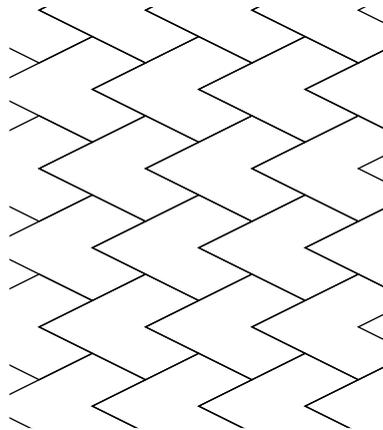
**Упражнение 2.1. (1 балл)** Для каждой из пяти фигур тетрамино найдите её группу симметрий.

**Упражнение 2.2. (1 балл)** Для каждого натурального числа  $n$  приведите пример замощения, группой симметрий которого является группа диэдра  $D_n$  (она же — группа симметрий правильного  $n$ -угольника).

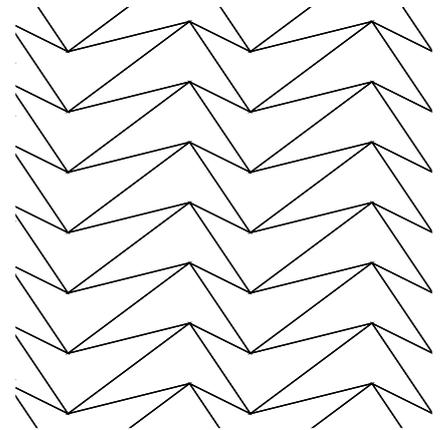
**Упражнение 2.3.** Для каждого из указанных замощений найдите его группу симметрий.



а) (1 балл)



б) (1 балл)



в) (1 балл)

**Определение 2.4.** Плитки  $T_1$  и  $T_2$  замощения  $\mathcal{T}$  называются *эквивалентными*, если в группе симметрий замощения  $\mathcal{T}$  существует движение, переводящее  $T_1$  в  $T_2$ . Множество плиток замощения  $\mathcal{T}$  разбивается на классы эквивалентности, которые называются *орбитами*.

**Определение 2.5.** Замощение  $\mathcal{T}$  называется *эквитранзитивным*, если все его плитки, равные между собой, лежат в одной орбите.

**Упражнение 2.4. (2 балла)** Какие из Архимедовых замощений являются эквитранзитивными?

**Определение 2.6.** Замощение  $\mathcal{T}$  называется *односторонним*, если каждое его ребро является стороной не более, чем одной плитки.

**Упражнение 2.5. (1 балл)** Приведите пример одностороннего эквитранзитивного замощения правильными треугольниками двух различных размеров.

**Упражнение 2.6. (1 балл)** Приведите три примера различных односторонних эквитранзитивных замощений квадратами, длины сторон которых равны 1, 2, 3.

**Упражнение 2.7. (1 балл)** Приведите пример одностороннего эквитранзитивного замощения квадратами, длины сторон которых равны 1, 2, 3, 4.

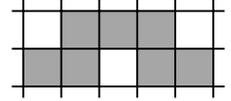
**Задача 2.1. а) (6 баллов)** Для каждого  $n$  приведите пример моноэдрального замощения, группа симметрий которого есть  $C_n$  (группа симметрий «свастики» с  $n$  хвостами).

**б) (6 баллов)** Для каждого  $n$  приведите пример моноэдрального замощения, группа симметрий которого есть  $D_n$  (группа симметрий правильного  $n$ -угольника).

**Задача 2.2. (6 баллов)** Приведите примеры трёх эквитранзитивных паркетов из правильных многоугольников, которые не являются Архимедовыми.

**Определение 2.7.** Замощение называется *изоэдрическим*, если для любых его двух плиток найдётся симметрия замощения, переводящая первую плитку во вторую.

**Задача 2.3. (8 баллов)** Найдите все изоэдрические замощения, которые допускает протоплитка 7-мино, изображённая справа.



**Задача 2.4. (10+2 баллов)** Доказано, что все односторонние эквитранзитивные замощения квадратами четырёх различных размеров можно поделить на пять групп. В каждой из групп длины сторон трёх разных квадратов имеют вид  $x$ ,  $y$  (где  $x < y$ ) и  $x + y$ , а четвёртый есть  $2x$ ,  $2y$ ,  $2x + y$ ,  $2y + x$  или  $2x + 2y$ . Приведите примеры искомого замощения для каждой из указанных пяти четвёрок.

**Задача 2.5. (5 баллов)** Приведите пример одностороннего эквитранзитивного замощения квадратами, длины сторон которых равны 1, 2, 3, 4, 5.

**Задача 2.6. (7 баллов)** Приведите пример одностороннего эквитранзитивного замощения квадратами, длины сторон которых равны 1, 2, 3, 4, 6, так, чтобы группа симметрий замощения обладала осевой симметрией.

**Задача 2.7. (7 баллов)** Постройте замощение плоскости такими квадратами, среди которых было бы лишь два равных.

**Примечание.** Для зачёта необходимо набрать 60 баллов (в сумме из этого и предыдущего листочков). Баллы являются динамическими и имеют свойство со временем уменьшаться. Баллы за упражнения зачисляются только в течение двух дней и обнуляются после следующей лекции. Баллы за задачи уменьшаются постепенно — в первый день зачисляется полная стоимость задачи, а в последующие работает правило, описанное в нижеследующей таблице.

День сдачи	16 февраля	17 февраля	18 февраля	19 февраля
Стоимость 2	2	2	1	1
Стоимость 5	5	5	4	4
Стоимость 6	6	5	5	4
Стоимость 7	7	7	6	6
Стоимость 8	8	7	7	6

При этом баллы за задачу 2.4 зачисляются как за задачу стоимостью 2 балла, плюс за каждую исследованную группу квадратов гарантированно начисляется по два балла.