

Паркеты и замощения

Лекция — 2

Хайдар Нурлигареев

Зимняя школа
Комбинаторная Математика и Теория Алгоритмы

13-20 февраля 2016

Классификация движений плоскости

Движение или *изометрия* — это преобразование плоскости, сохраняющее расстояние.

Классификация движений плоскости

Движение или *изометрия* — это преобразование плоскости, сохраняющее расстояние.

Теорема Шаля. Существует 4 вида движений плоскости:

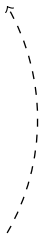
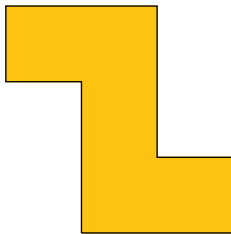
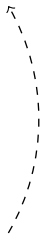
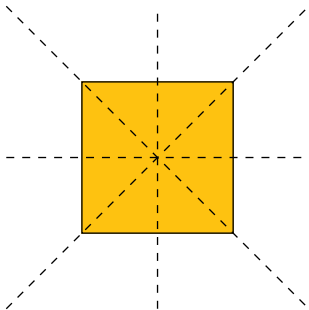
- параллельный перенос;
- поворот;
- осевая симметрия (отражение относительно прямой);
- скользящая симметрия.

Понятие симметрии множества

Симметрия множества T — это движение, которое переводит множество T в себя.

Понятие симметрии множества

Симметрия множества T — это движение, которое переводит множество T в себя.



Понятие группы симметрии множества

Группа симметрий множества T — это множество всех движений, которые переводят множество T в себя.

Понятие группы симметрии множества

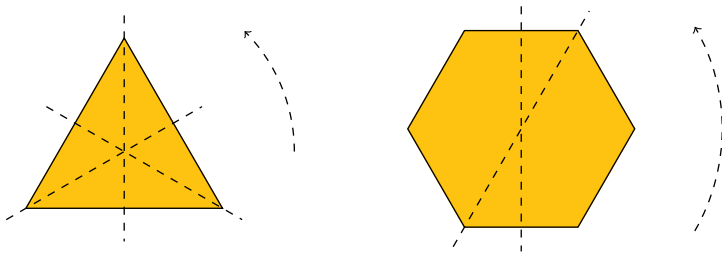
Группа симметрий множества T — это множество всех движений, которые переводят множество T в себя.

Группа диэдра D_n — это группа симметрий правильного n -угольника.

Понятие группы симметрии множества

Группа симметрий множества T — это множество всех движений, которые переводят множество T в себя.

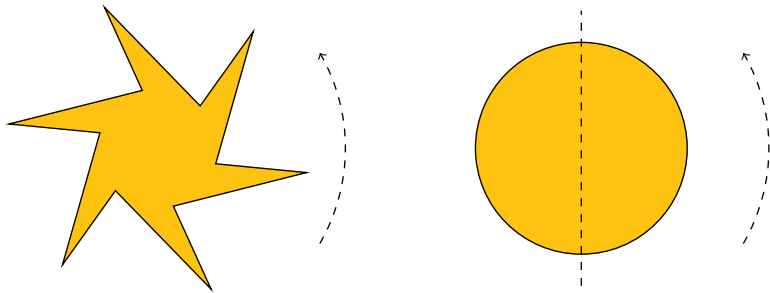
Группа диэдра D_n — это группа симметрий правильного n -угольника.



Понятие группы симметрии множества

Циклическая группа C_n — это группа симметрий «курносой звёздочки с n ручками».

Обобщённая группа диэдра D_∞ — это группа симметрий круга (она же — ортогональная группа O_2).



Понятие группы симметрии замощения

Симметрия замощения \mathcal{T} — это движение, которое переводит замощение \mathcal{T} в себя.

Понятие группы симметрии замощения

Симметрия замощения \mathcal{T} — это движение, которое переводит замощение \mathcal{T} в себя.

Множество всех симметрий замощения \mathcal{T} называется *группой симметрий* замощения \mathcal{T} .

Понятие группы симметрии замощения

Симметрия замощения \mathcal{T} — это движение, которое переводит замощение \mathcal{T} в себя.

Множество всех симметрий замощения \mathcal{T} называется *группой симметрий* замощения \mathcal{T} .

Группы симметрий бывают трёх видов:

- группы, не содержащие параллельных переносов;

Понятие группы симметрии замощения

Симметрия замощения \mathcal{T} — это движение, которое переводит замощение \mathcal{T} в себя.

Множество всех симметрий замощения \mathcal{T} называется *группой симметрий* замощения \mathcal{T} .

Группы симметрий бывают трёх видов:

- группы, не содержащие параллельных переносов;
- 7 групп симметрии фриз, в них все параллельные переносы имеют одно и то же направление;

Понятие группы симметрии замощения

Симметрия замощения \mathcal{T} — это движение, которое переводит замощение \mathcal{T} в себя.

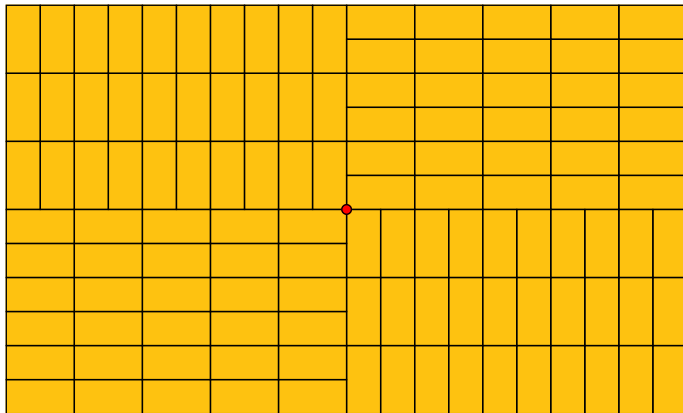
Множество всех симметрий замощения \mathcal{T} называется *группой симметрий* замощения \mathcal{T} .

Группы симметрий бывают трёх видов:

- группы, не содержащие параллельных переносов;
- 7 групп симметрии фризов, в них все параллельные переносы имеют одно и то же направление;
- 17 групп симметрии орнаментов, в них входят параллельные переносы разных направлений.

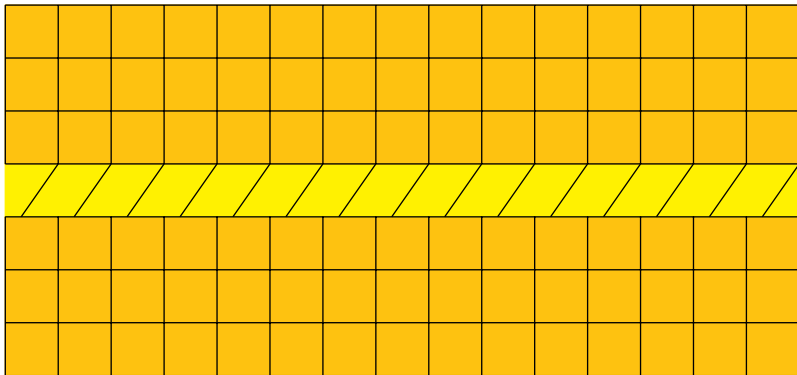
Примеры групп симметрий

Замощение с группой симметрии C_4 .



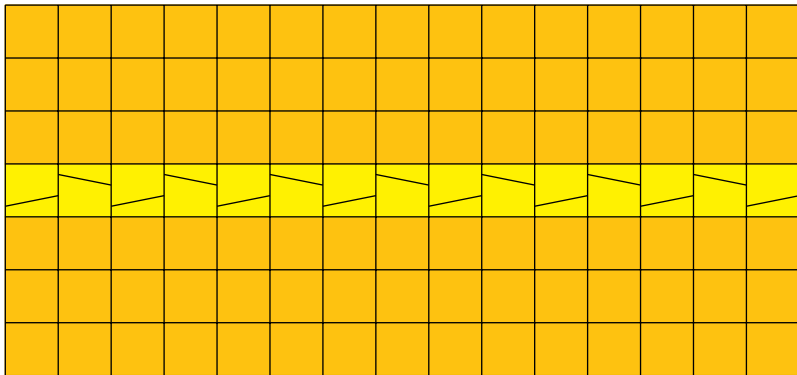
Примеры групп симметрий

Замощение с группой симметрии $p111$, содержащей только параллельный перенос.



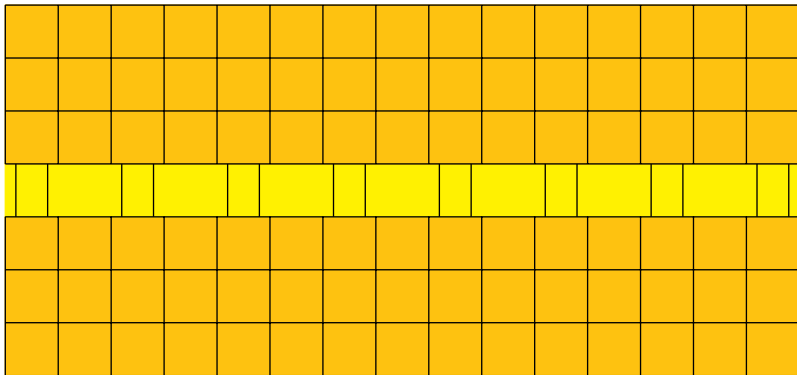
Примеры групп симметрий

Замощение с группой симметрии $p1a1$, содержащей параллельный перенос и скользящую симметрию.



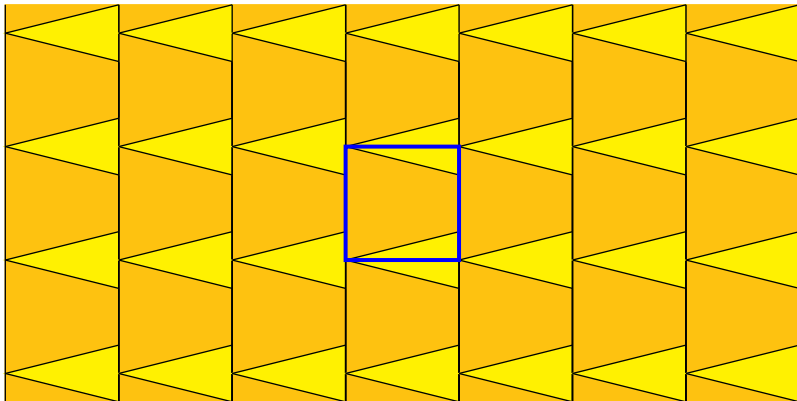
Примеры групп симметрий

Замощение с группой симметрии $ptm2$, содержащей параллельный перенос, повороты и осевую симметрию.



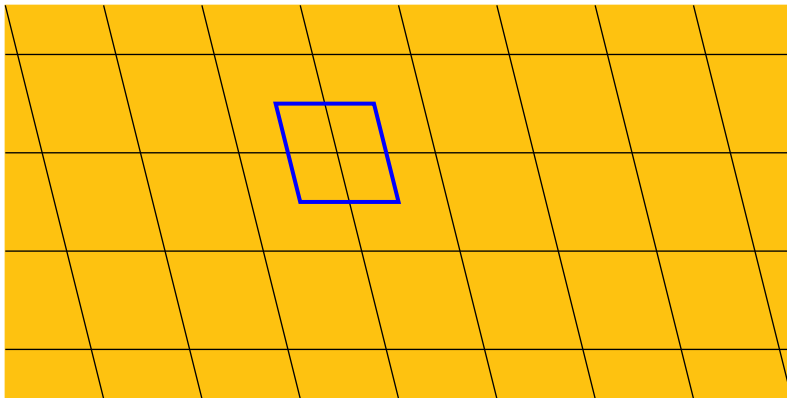
Примеры групп симметрий

Замощение с группой симметрии pt .



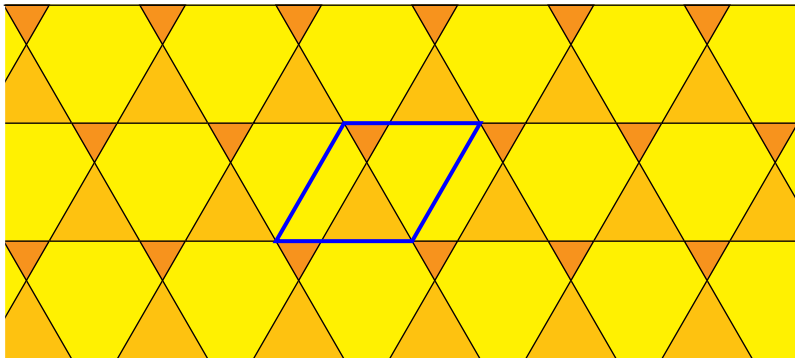
Примеры групп симметрий

Замощение с группой симметрии $p2$.



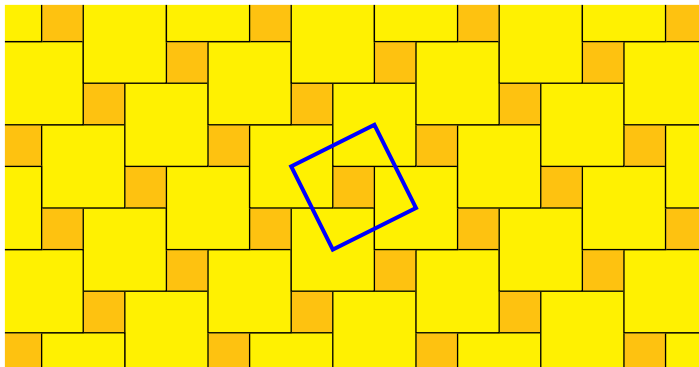
Примеры групп симметрий

Замощение с группой симметрии $p3m1$.



Примеры групп симметрий

Замощение с группой симметрии $p4$.



Понятия орбиты и стабилизатора

Плитки T_1 и T_2 замощения \mathcal{T} называются *эквивалентными*, если в группе симметрий замощения \mathcal{T} существует движение, переводящее T_1 в T_2 .

Понятия орбиты и стабилизатора

Плитки T_1 и T_2 замощения \mathcal{T} называются *эквивалентными*, если в группе симметрий замощения \mathcal{T} существует движение, переводящее T_1 в T_2 .

Множество плиток замощения \mathcal{T} разбивается на классы эквивалентности, которые называются *орбитами*.

Понятия орбиты и стабилизатора

Плитки T_1 и T_2 замощения \mathcal{T} называются *эквивалентными*, если в группе симметрий замощения \mathcal{T} существует движение, переводящее T_1 в T_2 .

Множество плиток замощения \mathcal{T} разбивается на классы эквивалентности, которые называются *орбитами*.

Множество движений которые переводят замощение \mathcal{T} само в себя, а данную плитку T оставляют на месте, называется *стабилизатором* плитки T .

Понятия орбиты и стабилизатора

Плитки T_1 и T_2 замощения \mathcal{T} называются *эквивалентными*, если в группе симметрий замощения \mathcal{T} существует движение, переводящее T_1 в T_2 .

Множество плиток замощения \mathcal{T} разбивается на классы эквивалентности, которые называются *орбитами*.

Множество движений которые переводят замощение \mathcal{T} само в себя, а данную плитку T оставляют на месте, называется *стабилизатором* плитки T .

Орбиты и стабилизаторы можно определить не только для плиток замощения \mathcal{T} , но и для его рёбер, а также для вершин.



Виды регулярных замощений

Замощение \mathcal{T} называется

- *изоэдрическим*, если все его плитки лежат в одной орбите;

Виды регулярных замощений

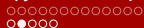
Замощение \mathcal{T} называется

- *изоэдрическим*, если все его плитки лежат в одной орбите;
- *изотоксальным*, если все его рёбра лежат в одной орбите;

Виды регулярных замощений

Замощение \mathcal{T} называется

- *изоэдрическим*, если все его плитки лежат в одной орбите;
- *изотоксальным*, если все его рёбра лежат в одной орбите;
- *изогональным*, если все его вершины лежат в одной орбите.

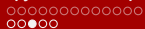


Виды регулярных замощений

Замощение \mathcal{T} называется

- *изоэдрическим*, если все его плитки лежат в одной орбите;
- *изотоксальным*, если все его рёбра лежат в одной орбите;
- *изогональным*, если все его вершины лежат в одной орбите.

Замощение \mathcal{T} называется *эквитранзитивным*, если все его плитки, равные между собой, лежат в одной орбите.



Изоэдрические замощения

Изоэдрические замощения состоят из одинаковых плиток (то есть являются моноэдральными), но обратное не верно.

Изоэдрические замощения

Изоэдрические замощения состоят из одинаковых плиток (то есть являются моноэдральными), но обратное не верно.

Замощение \mathcal{T} называется *точным*, если пересечение любых его двух плиток содержится в стороне каждой плитки. Иными словами, пересечение плиток — либо точка, либо отрезок.

Изоэдрические замощения

Изоэдрические замощения состоят из одинаковых плиток (то есть являются моноэдральными), но обратное не верно.

Замощение \mathcal{T} называется *точным*, если пересечение любых его двух плиток содержится в стороне каждой плитки. Иными словами, пересечение плиток — либо точка, либо отрезок.

Существует ровно 107 изоэдрических типов точных замощений выпуклыми многоугольниками. Среди них:

- 14 типов замощений треугольниками;

Изоэдрические замощения

Изоэдрические замощения состоят из одинаковых плиток (то есть являются моноэдральными), но обратное не верно.

Замощение \mathcal{T} называется *точным*, если пересечение любых его двух плиток содержится в стороне каждой плитки. Иными словами, пересечение плиток — либо точка, либо отрезок.

Существует ровно 107 изоэдрических типов точных замощений выпуклыми многоугольниками. Среди них:

- 14 типов замощений треугольниками;
- 56 типов замощений четырёхугольниками;

Изоэдрические замощения

Изоэдрические замощения состоят из одинаковых плиток (то есть являются моноэдральными), но обратное не верно.

Замощение \mathcal{T} называется *точным*, если пересечение любых его двух плиток содержится в стороне каждой плитки. Иными словами, пересечение плиток — либо точка, либо отрезок.

Существует ровно 107 изоэдрических типов точных замощений выпуклыми многоугольниками. Среди них:

- 14 типов замощений треугольниками;
- 56 типов замощений четырёхугольниками;
- 24 типа замощений пятиугольниками;

Изоэдрические замощения

Изоэдрические замощения состоят из одинаковых плиток (то есть являются моноэдральными), но обратное не верно.

Замощение \mathcal{T} называется *точным*, если пересечение любых его двух плиток содержится в стороне каждой плитки. Иными словами, пересечение плиток — либо точка, либо отрезок.

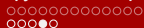
Существует ровно 107 изоэдрических типов точных замощений выпуклыми многоугольниками. Среди них:

- 14 типов замощений треугольниками;
- 56 типов замощений четырёхугольниками;
- 24 типа замощений пятиугольниками;
- 13 типов замощений шестиугольниками.



Изотоксальные замощения

Изотоксальные замощения состоят из плиток не более двух различных видов.



Изотоксальные замощения

Изотоксальные замощения состоят из плиток не более двух различных видов.

Среди Архимедовых паркетов изотоксальными являются лишь следующие четыре: 3^6 ; 4^4 ; 6^3 и $3, 6, 3, 6$.

Изотоксальные замощения

Изотоксальные замощения состоят из плиток не более двух различных видов.

Среди Архимедовых паркетов изотоксальными являются лишь следующие четыре: 3^6 ; 4^4 ; 6^3 и $3, 6, 3, 6$.

Замощение \mathcal{T} называется *k-изотоксальным*, если множество его рёбер разбивается ровно на k орбит.

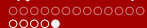
Изотоксальные замощения

Изотоксальные замощения состоят из плиток не более двух различных видов.

Среди Архимедовых паркетов изотоксальными являются лишь следующие четыре: 3^6 ; 4^4 ; 6^3 и $3, 6, 3, 6$.

Замощение \mathcal{T} называется k -изотоксальным, если множество его рёбер разбивается ровно на k орбит.

Среди Архимедовых паркетов 2-изотоксальными являются следующие четыре: $3^2, 4, 3, 4$; $3, 4, 6, 4$; $3, 12^2$ и $4, 8^2$.



Изогональные замощения

Изогональные замощения из правильных многоугольников в точности совпадают с Архимедовыми паркетками.

Изогональные замощения

Изогональные замощения из правильных многоугольников в точности совпадают с Архимедовыми паркетам.

Замощение \mathcal{T} называется *k -изогональным*, если множество его вершин разбивается ровно на k орбит.

Изогональные замощения

Изогональные замощения из правильных многоугольников в точности совпадают с Архимедовыми паркетам.

Замощение \mathcal{T} называется *k -изогональным*, если множество его вершин разбивается ровно на k орбит.

Каждый k -изогональный паркет из правильных многоугольников является k -Архимедовым, но обратное не верно. В частности, множество вершин уже 2-Архимедовых паркетов может разбиваться на сколь угодно большое число орбит (в том числе и на бесконечное).

Литература I



Коксетер Г.С.М.

Введение в геометрию.

Москва: Наука, 1966.



Grünbaum Branco, Shephard G.C.

Tilings and Patterns.

New-York: W.H. Freeman and Company, 1986.