Паркеты и замощения
Лекция — 3

Хайдар Нурлигареев

Зимняя школа
Комбинаторная Математика и Теория Алгоритмы

13-20 февраля 2016

Понятие периодического замощения

Замощение $\mathcal{T}$ называется *периодическим*, если его группа симметрий содержит два несонаправленных параллельных переноса.

Понятие периодического замощения

Замощение $\mathcal{T}$ называется *периодическим*, если его группа симметрий содержит два несонаправленных параллельных переноса.

Рассмотрим векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, соответствующие двум несонаправленным параллельным переносам из группы симметрий замощения $\mathcal{T}$, порождают решётку на плоскости.

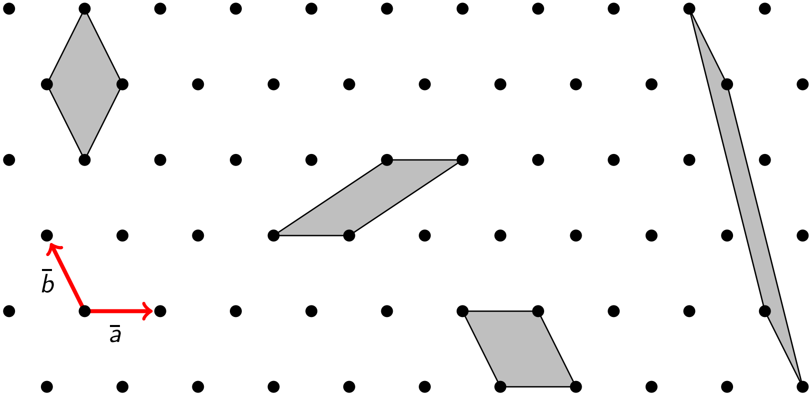
Понятие периодического замощения

Замощение $\mathcal{T}$ называется *периодическим*, если его группа симметрий содержит два несонаправленных параллельных переноса.

Рассмотрим векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, соответствующие двум несонаправленным параллельным переносам из группы симметрий замощения $\mathcal{T}$, порождают решётку на плоскости.

Любой параллелограмм, не содержащий внутри себя и на своей границе узлов решётки, отличных от вершин, называется *фундаментальным*.

Примеры фундаментальных параллелограммов



Формула Эйлера

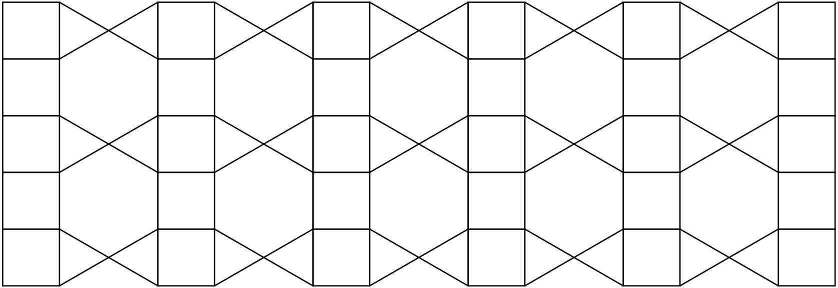
Пусть внутри фундаментального параллелограмма:
V — число вершин, E — число рёбер, F — число плиток.

Тогда $V - E + F = 0$ (формула Эйлера).

Формула Эйлера

Пусть внутри фундаментального параллелограмма:
V — число вершин, E — число рёбер, F — число плиток.

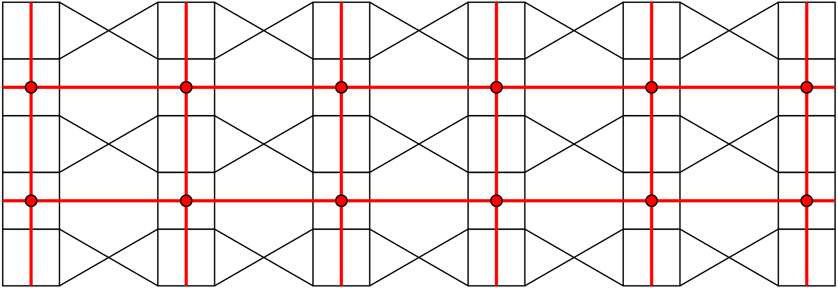
Тогда $V - E + F = 0$ (формула Эйлера).



Формула Эйлера

Пусть внутри фундаментального параллелограмма:
V — число вершин, E — число рёбер, F — число плиток.

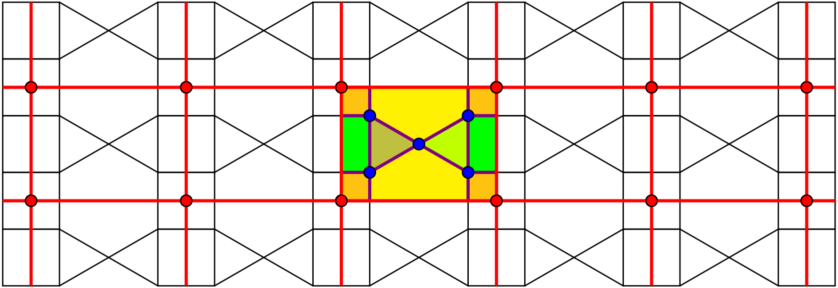
Тогда $V - E + F = 0$ (формула Эйлера).



Формула Эйлера

Пусть внутри фундаментального параллелограмма:
V — число вершин, E — число рёбер, F — число плиток.

Тогда $V - E + F = 0$ (формула Эйлера).

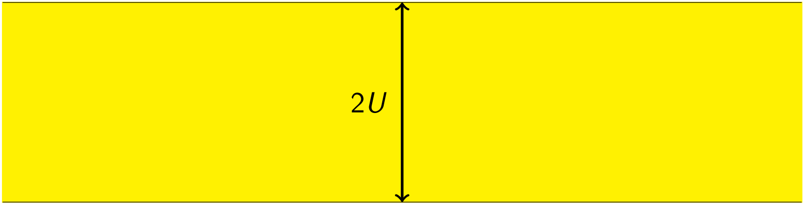


Теорема о периодичности для паркетов

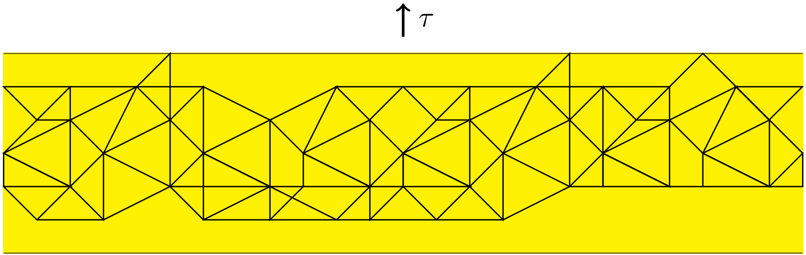
Теорема 1.

- Пусть на основе набора многоугольных протоплиток $\mathcal{M} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ можно построить паркет $\mathcal{T}$, группа симметрий которого содержит параллельный перенос. Тогда на основе этого же набора $\mathcal{M}$ можно построить периодический паркет.

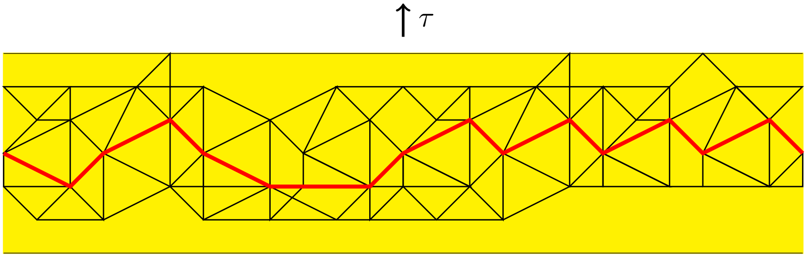
Доказательство теоремы о периодичности



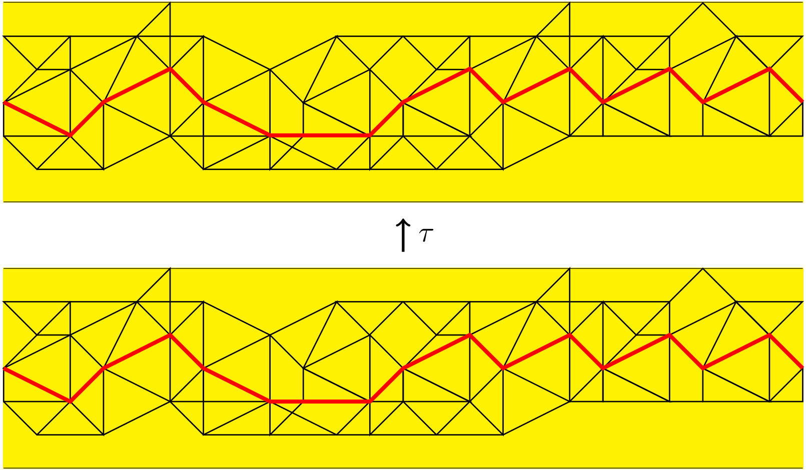
Доказательство теоремы о периодичности



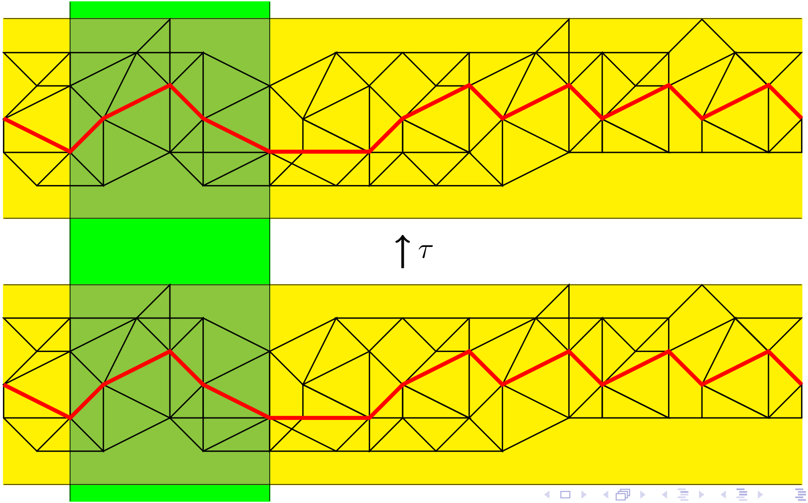
Доказательство теоремы о периодичности



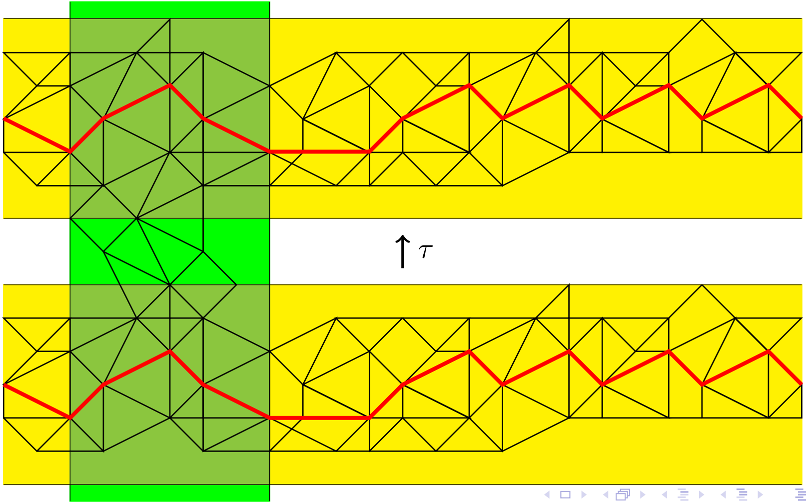
Доказательство теоремы о периодичности



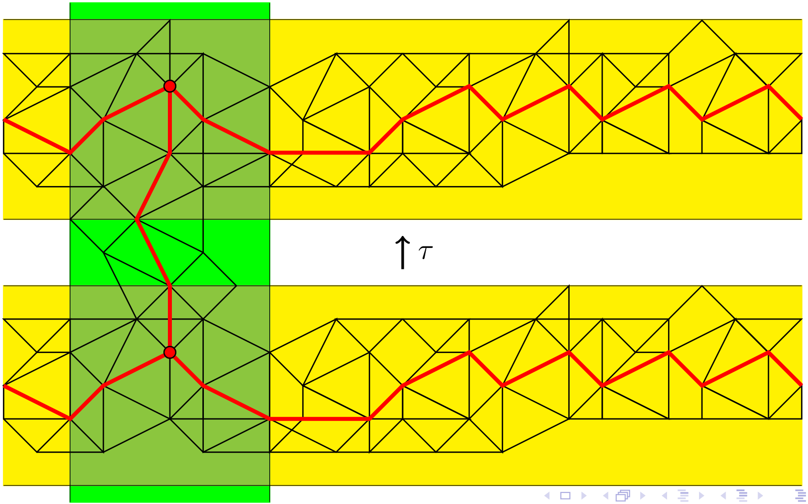
Доказательство теоремы о периодичности



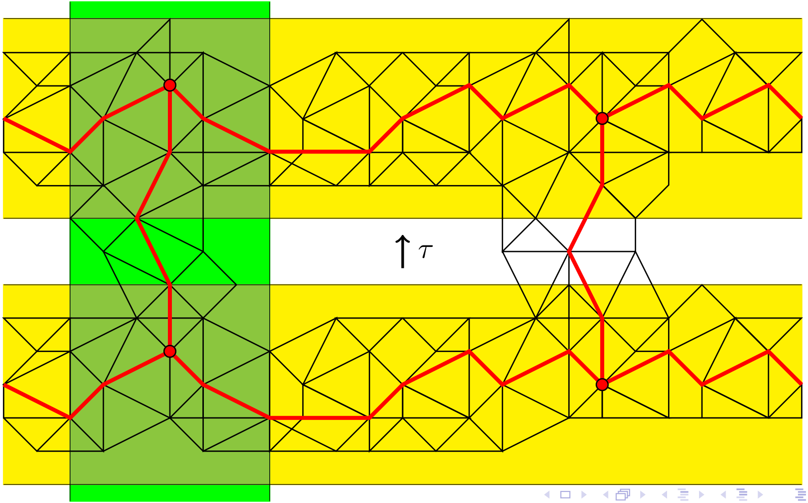
Доказательство теоремы о периодичности



Доказательство теоремы о периодичности

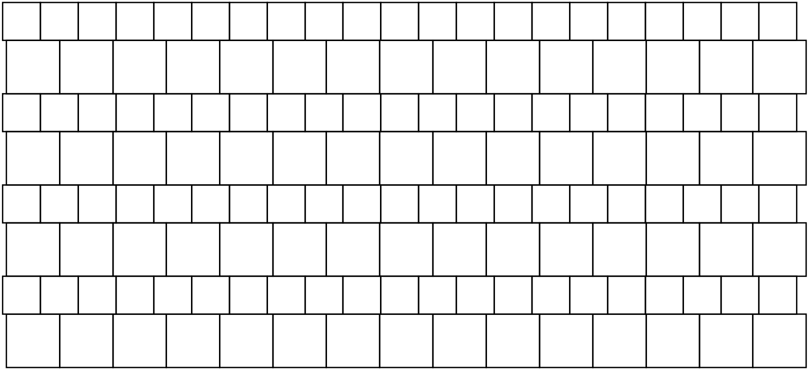


Доказательство теоремы о периодичности



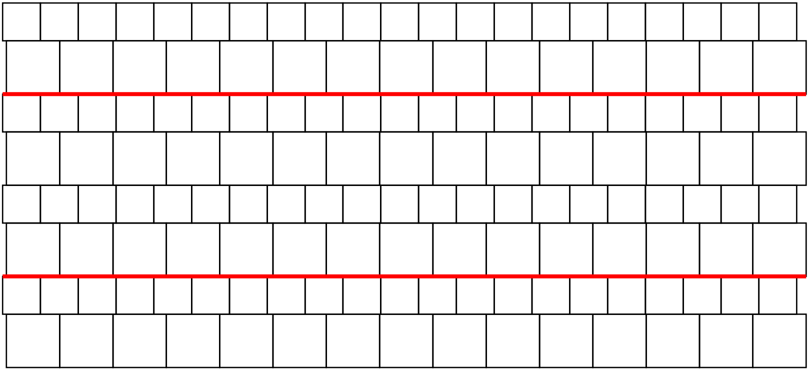
Замощение несоизмеримыми квадратами

Замощение, для которого не годится доказательство теоремы 1.



Замощение несоизмеримыми квадратами

Замощение, для которого не годится доказательство теоремы 1.

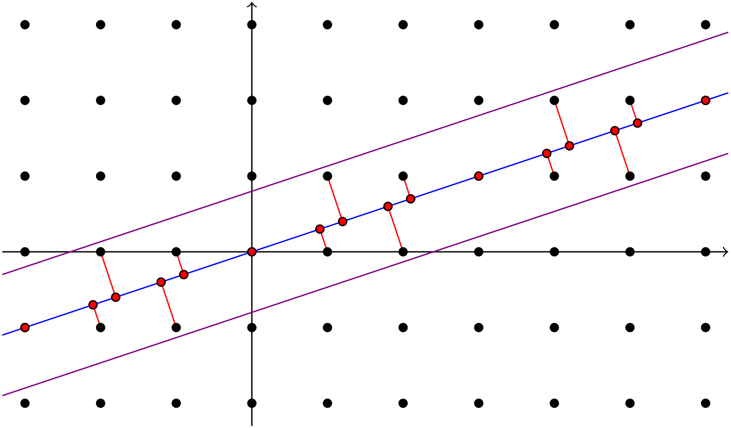


Теорема о периодичности для замощений

Теорема 2.

- Пусть на основе набора многоугольных протоплиток $\mathcal{M} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ можно построить замощение $\mathcal{T}$, группа симметрий которого содержит параллельный перенос. Тогда на основе этого же набора $\mathcal{M}$ можно построить периодическое замощение.

Конструкция слоёного пирога

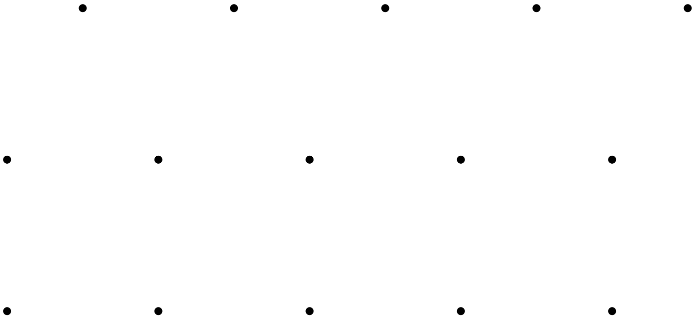


Понятие области Дирихле

Пусть дано дискретное множество точек X на плоскости, $x \in X$. Фигура $F_x = \{y \mid d(x,y) \leqslant d(x,z)$ для всех $z \in X\}$ называется *областью Дирихле*.

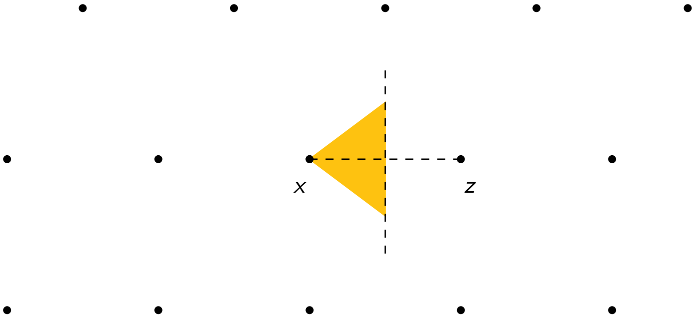
Понятие области Дирихле

Пусть дано дискретное множество точек X на плоскости, $x \in X$. Фигура $F_x = \{y \mid d(x,y) \leqslant d(x,z)$ для всех $z \in X\}$ называется *областью Дирихле*.



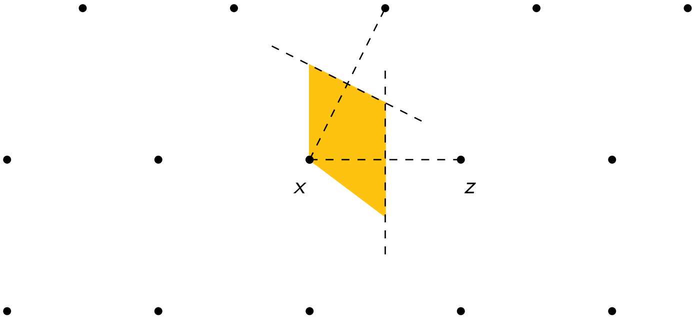
Понятие области Дирихле

Пусть дано дискретное множество точек X на плоскости, $x \in X$. Фигура $F_x = \{y \mid d(x, y) \leqslant d(x, z)$ для всех $z \in X\}$ называется *областью Дирихле*.



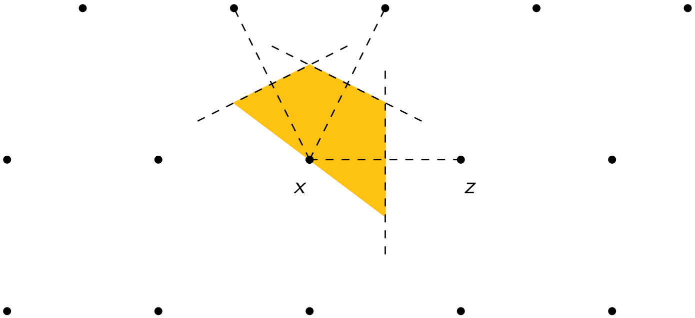
Понятие области Дирихле

Пусть дано дискретное множество точек X на плоскости, $x \in X$. Фигура $F_x = \{y \mid d(x,y) \leqslant d(x,z)$ для всех $z \in X\}$ называется *областью Дирихле*.



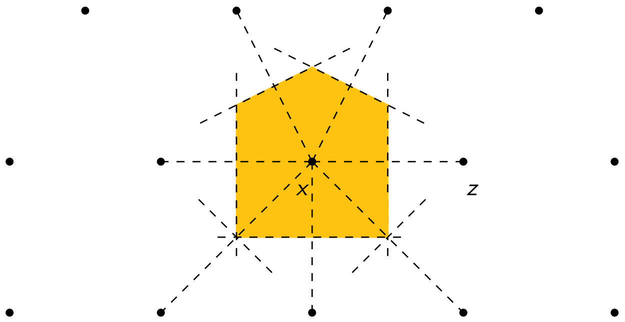
Понятие области Дирихле

Пусть дано дискретное множество точек X на плоскости, $x \in X$. Фигура $F_x = \{y \mid d(x, y) \leqslant d(x, z)$ для всех $z \in X\}$ называется *областью Дирихле*.



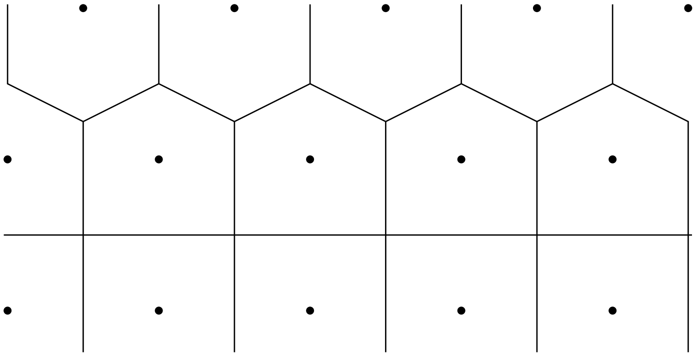
Понятие области Дирихле

Пусть дано дискретное множество точек X на плоскости, $x \in X$. Фигура $F_x = \{y \mid d(x,y) \leqslant d(x,z) \text{ для всех } z \in X\}$ называется *областью Дирихле*.



Понятие разбиения Вороного

Пусть дано дискретное множество точек на плоскости. *Разбиением (замощением) Вороного* называется замощение плоскости областями Дирихле.



Разбиение Вороного для слоёного пирога

Разбиение Вороного для «слоёного пирога» обладает следующими свойствами.

Разбиение Вороного для слоёного пирога

Разбиение Вороного для «слоёного пирога» обладает следующими свойствами.

- Множество протоплиток разбиения конечно.

Разбиение Вороного для слоёного пирога

Разбиение Вороного для «слоёного пирога» обладает следующими свойствами.

- Множество протоплиток разбиения конечно.
- Параллельные переносы из группы симметрий для разбиения Вороного однозначно сопоставляются рациональным точкам на исходной плоскости.

Разбиение Вороного для слоёного пирога

Разбиение Вороного для «слоёного пирога» обладает следующими свойствами.

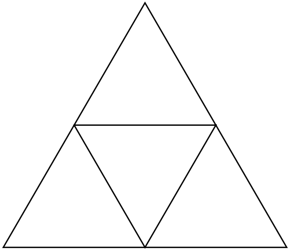
- Множество протоплиток разбиения конечно.
- Параллельные переносы из группы симметрий для разбиения Вороного однозначно сопоставляются рациональным точкам на исходной плоскости.
- В частности, если исходная плоскость не проходит ни через одну точку с рациональными координатами, за исключением начала координат (например, плоскость $x + y\sqrt{2} + z\sqrt{3} = 0$), то получающееся замощение непериодично.

Понятие самоподобной фигуры

Фигура F называется *самоподобной*, если её можно разделить на несколько фигур F_1, F_2, …, F_n, каждая из которых подобна исходной фигуре.

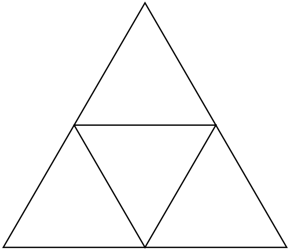
Понятие самоподобной фигуры

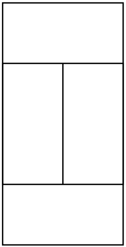
Фигура F называется *самоподобной*, если её можно разделить на несколько фигур F_1, F_2, …, F_n, каждая из которых подобна исходной фигуре.



Понятие самоподобной фигуры

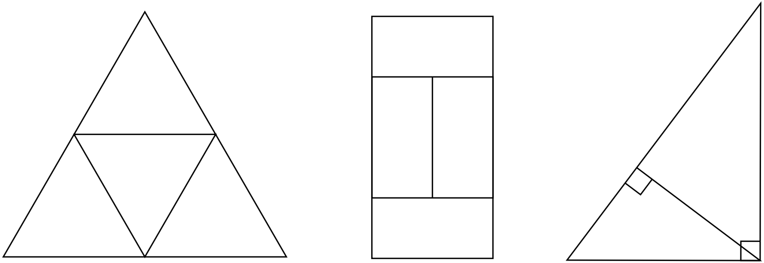
Фигура F называется *самоподобной*, если её можно разделить на несколько фигур F_1, F_2, $\ldots$, F_n, каждая из которых подобна исходной фигуре.



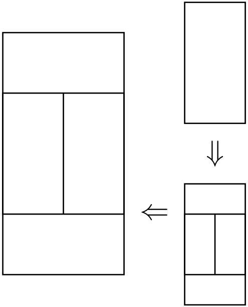


Понятие самоподобной фигуры

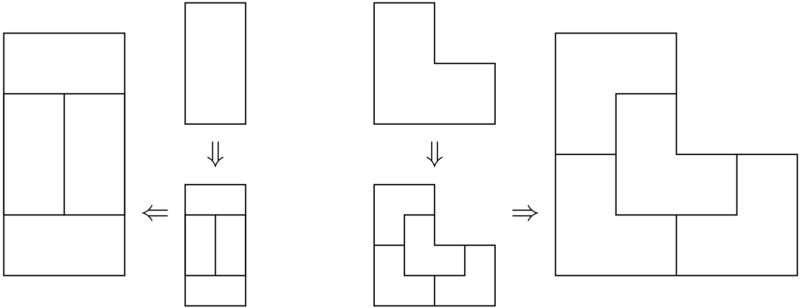
Фигура F называется *самоподобной*, если её можно разделить на несколько фигур F_1, F_2, ..., F_n, каждая из которых подобна исходной фигуре.



Процесс дефляции-инфляции



Процесс дефляции-инфляции



Понятие самоподобного замощения

Замощение называется *самоподобным*, если выполняются следующие условия:

Понятие самоподобного замощения

Замощение называется *самоподобным*, если выполняются следующие условия:

- плитки этого замощения (плитки 1-го уровня) могут быть объединены в более крупные плитки (плитки 2-го уровня), которые подобны плиткам 1-го уровня;

Понятие самоподобного замощения

Замощение называется *самоподобным*, если выполняются следующие условия:

- плитки этого замощения (плитки 1-го уровня) могут быть объединены в более крупные плитки (плитки 2-го уровня), которые подобны плиткам 1-го уровня;
- плитки 2-го уровня могут быть объединены в плитки 3-го уровня, которые подобны плиткам 2-го уровня;

Понятие самоподобного замощения

Замощение называется *самоподобным*, если выполняются следующие условия:

- плитки этого замощения (плитки 1-го уровня) могут быть объединены в более крупные плитки (плитки 2-го уровня), которые подобны плиткам 1-го уровня;
- плитки 2-го уровня могут быть объединены в плитки 3-го уровня, которые подобны плиткам 2-го уровня;
- такое последовательное укрупнение возможно для любого k-го уровня.

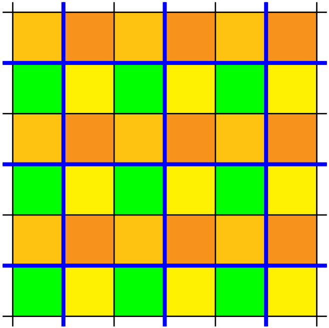
Уровни плиток замощения образуют *иерархию*, поэтому самоподобное замощение также называют *иерархическим*.

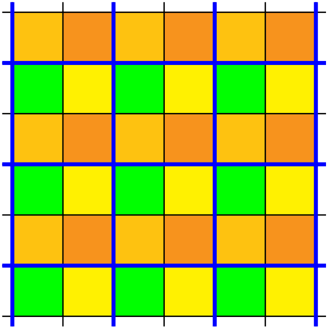
Замощения со слабой иерархией

Иерархия самоподобного замощения — *слабая*, если объединение плиток k-го уровня в плитки $(k+1)$-го уровня возможно несколькими способами.

Замощения со слабой иерархией

Иерархия самоподобного замощения — *слабая*, если объединение плиток k-го уровня в плитки $(k+1)$-го уровня возможно несколькими способами.



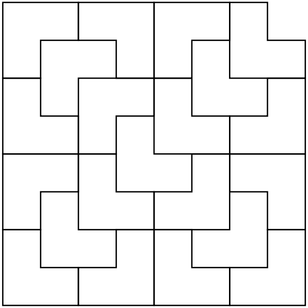


Замощения со строгой иерархией

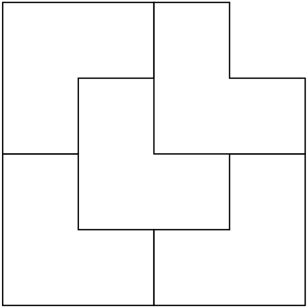
Иерархия самоподобного замощения — *строгая*, если объединение плиток k-го уровня в плитки $(k+1)$-го уровня возможно лишь одним способом.

Замощения со строгой иерархией

Иерархия самоподобного замощения — *строгая*, если объединение плиток k-го уровня в плитки $(k+1)$-го уровня возможно лишь одним способом.



$\Rightarrow$



Свойства самоподобных замощений

- Непериодичность: следует из того, что симметрия такого замощения должна быть симметрией замощения k-го уровня для любого натурального числа k.

Свойства самоподобных замощений

- Непериодичность: следует из того, что симметрия такого замощения должна быть симметрией замощения k-го уровня для любого натурального числа k.
- Каждый конечный фрагмент повторяется в любом таком замощении бесконечное число раз: потому что для достаточно большого числа k весь этот фрагмент содержится в некоторой плитке k-го уровня.

Свойства самоподобных замощений

- Непериодичность: следует из того, что симметрия такого замощения должна быть симметрией замощения k-го уровня для любого натурального числа k.
- Каждый конечный фрагмент повторяется в любом таком замощении бесконечное число раз: потому что для достаточно большого числа k весь этот фрагмент содержится в некоторой плитке k-го уровня.
- Различных самоподобных замощений, основанных на одном и том же разбиении, бесконечное количество (даже несчётное): следует из того, что, например, для фигуры «домино» каждому замощению можно сопоставить последовательность из чисел 1, 2, 3, 4.

Литература I

- Коксетер Г.С.М.
  Введение в геометрию.
  Москва: Наука, 1966.
- Grünbaum Branco, Shephard G.C.
  Tilings and Patterns.
  New-York: W.H. Freeman and Company, 1986.
- Долбилин Н.
  Самоподобные мозаики
  Квант, 1998, N2, стр. 10-15.