

Периодические и аperiodические замощения Часть — 2

Хайдар Нурлигареев

Летняя Школа
Современная Математика – XVIII

19-30 июля 2018

Классификация движений плоскости

Движение или *изометрия* — преобразование плоскости, сохраняющее расстояние.

Теорема Шаля. Существует 4 вида движений плоскости:

- параллельный перенос;
- поворот;
- осевая симметрия (отражение относительно прямой);
- скользящая симметрия.

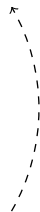
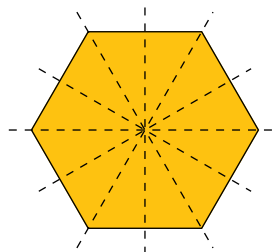
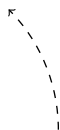
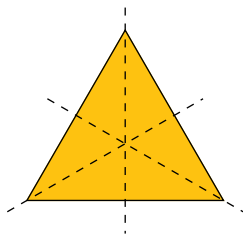
Группа симметрии множества

Симметрия множества T — движение, которое переводит множество T в себя.

Группа симметрий множества T — все симметрии множества T .

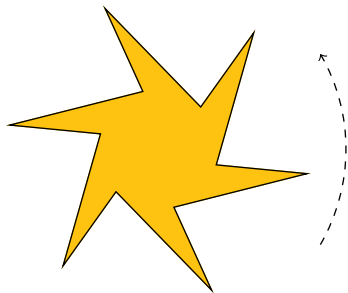
Группа симметрии множества

Группа диэдра D_n .

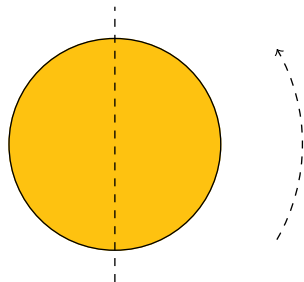


Группа симметрии множества

Циклическая группа C_n



Обобщённая группа диэдра D_∞
(ортогональная группа O_2)



Группа симметрии замощения

Симметрия замощения \mathcal{T} — движение, которое переводит замощение \mathcal{T} в себя.

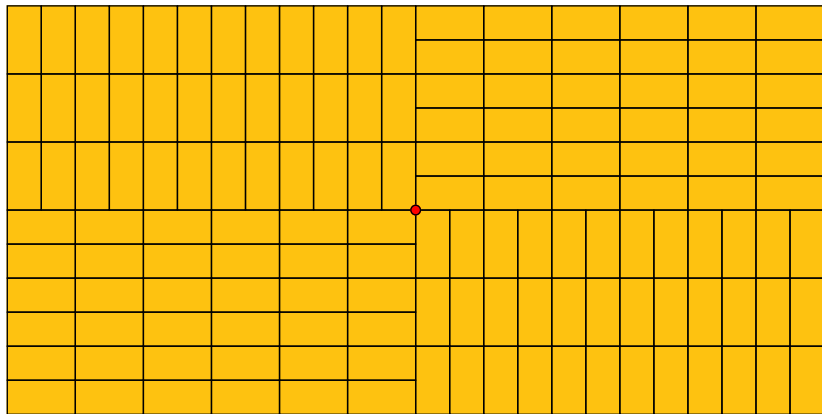
Группа симметрий замощения \mathcal{T} — все симметрии замощения \mathcal{T} .

Группы симметрий бывают трёх видов:

- группы, не содержащие параллельных переносов;
- 7 групп симметрий фризов, все параллельные переносы имеют одно и то же направление;
- 17 групп симметрий орнаментов, есть параллельные переносы разных направлений.

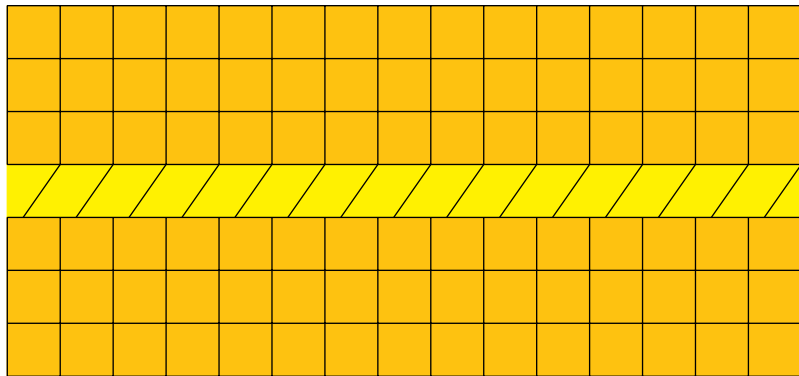
Примеры групп симметрий

Группа симметрии C_4 .



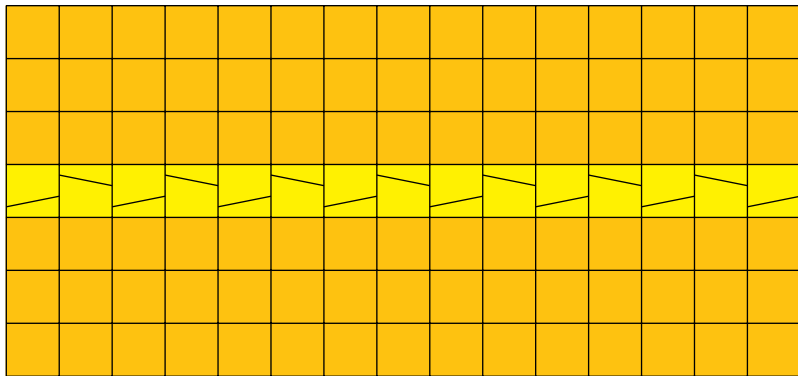
Примеры групп симметрий

Группа симметрии $p111$
(только параллельный перенос).



Примеры групп симметрий

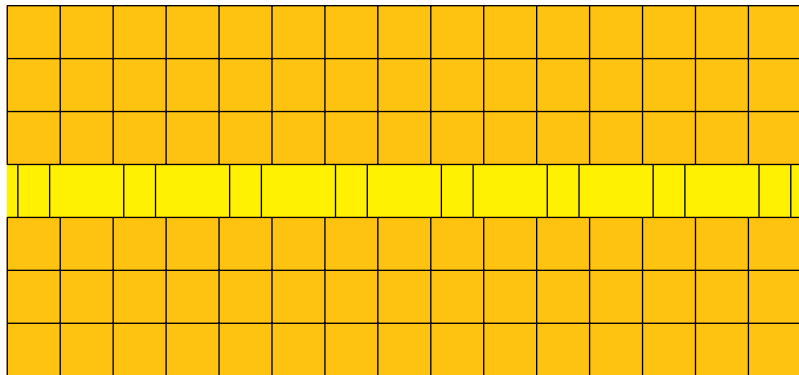
Группа симметрии $p1a1$
(параллельный перенос и скользящая симметрия).



Примеры групп симметрий

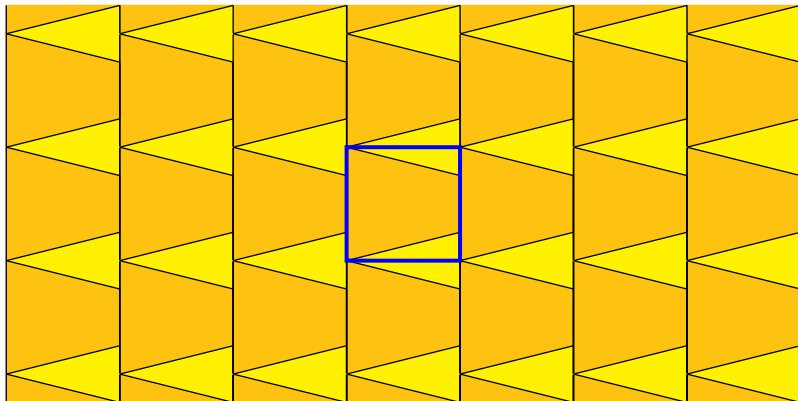
Группа симметрии $ptm2$

(параллельный перенос, повороты, осевая симметрия).



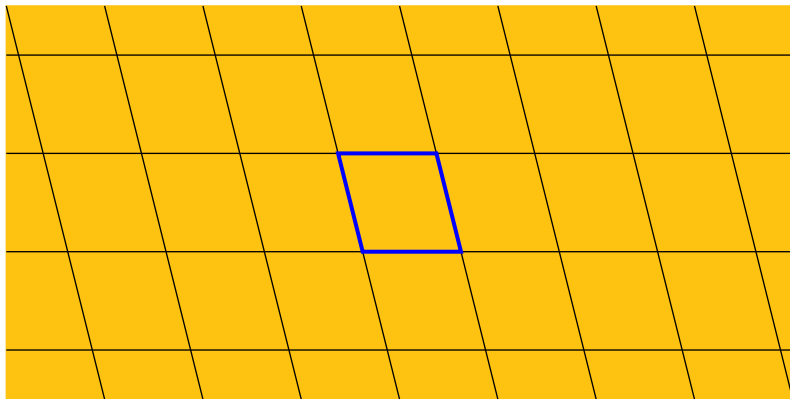
Примеры групп симметрий

Группа симметрии pm .



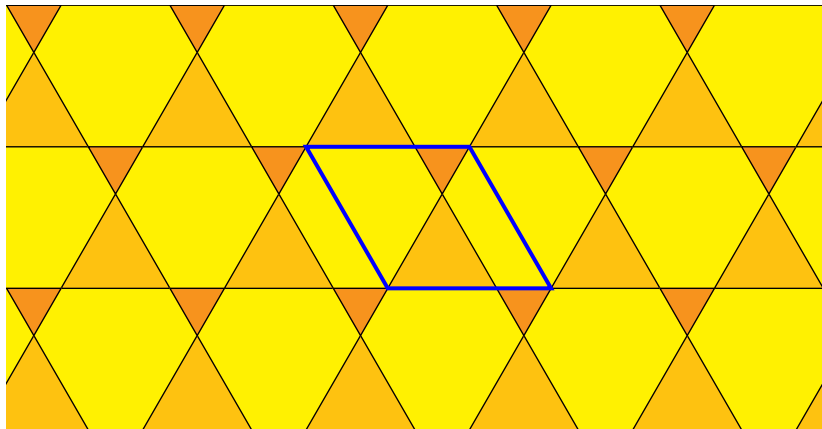
Примеры групп симметрий

Группа симметрии $p2$.



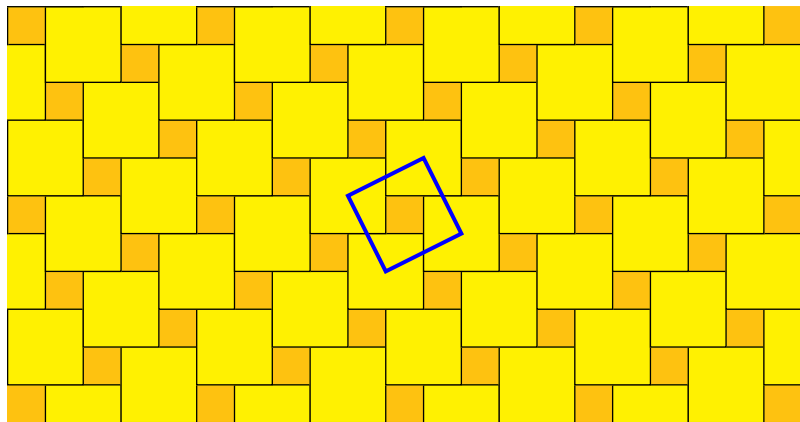
Примеры групп симметрий

Группа симметрии $p3m1$.



Примеры групп симметрий

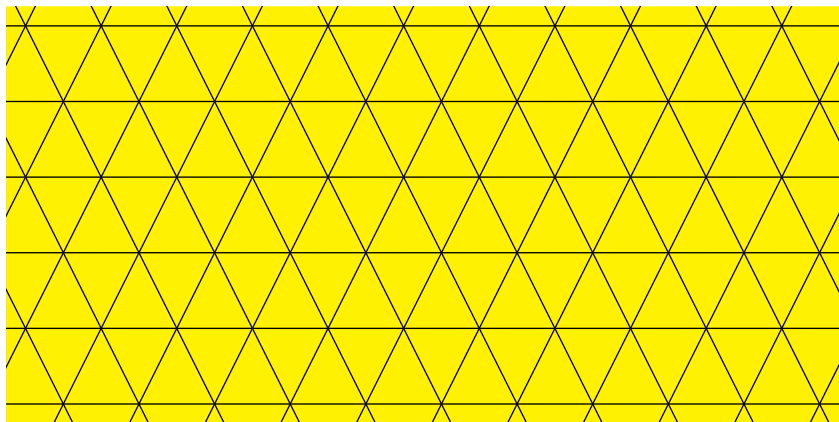
Группа симметрии $p4$.



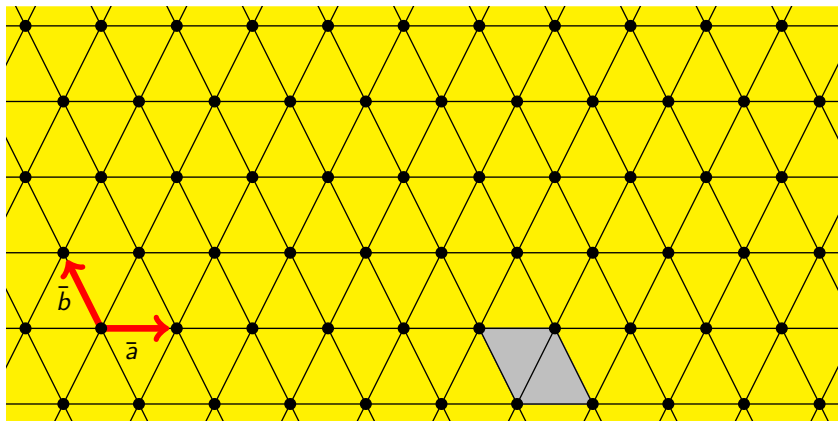
Периодические замощения

- *Периодическое* замощение — группа симметрий содержит два несонаправленных параллельных переноса.
- Соответствующие этим параллельным переносам векторы \bar{a} и \bar{b} порождают решётку на плоскости.
- *Фундаментальный* параллелограмм — вершины в узлах решётки, других узлов внутри и на границе нет.

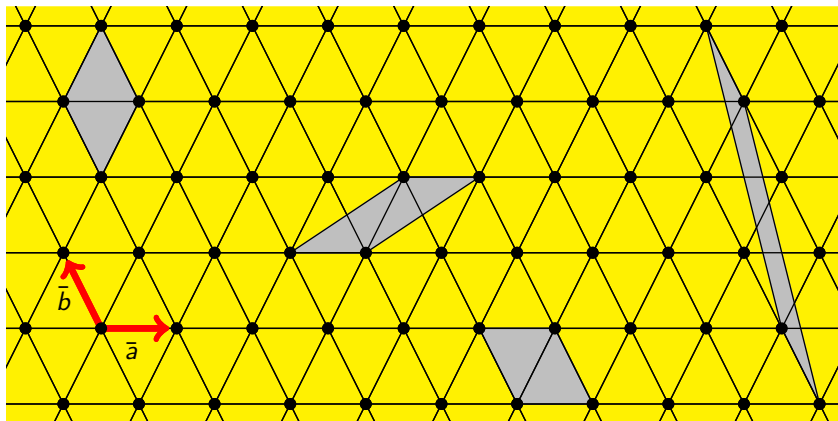
Примеры фундаментальных параллелограммов



Примеры фундаментальных параллелограммов



Примеры фундаментальных параллелограммов

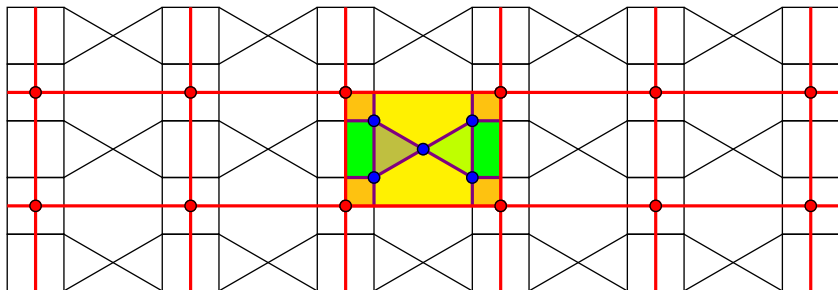


Формула Эйлера

Пусть внутри фундаментального параллелограмма:

V — число вершин, E — число рёбер, F — число плиток.

Тогда $V - E + F = 0$ (формула Эйлера).



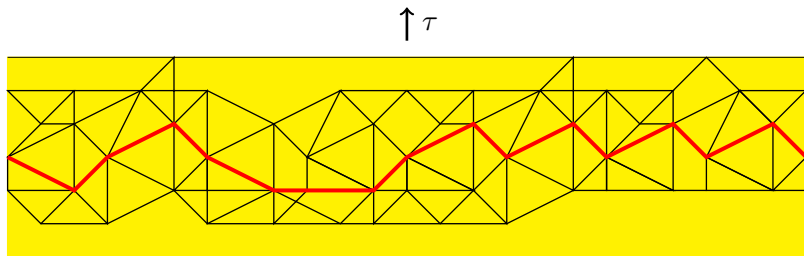
Теорема о периодичности для замощений

Пусть

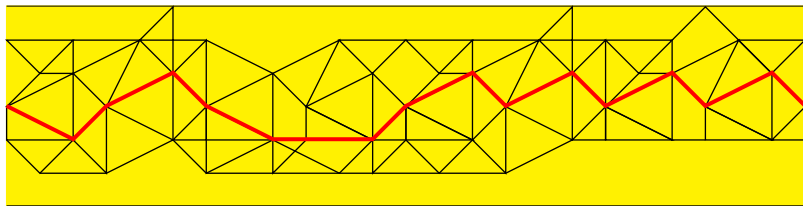
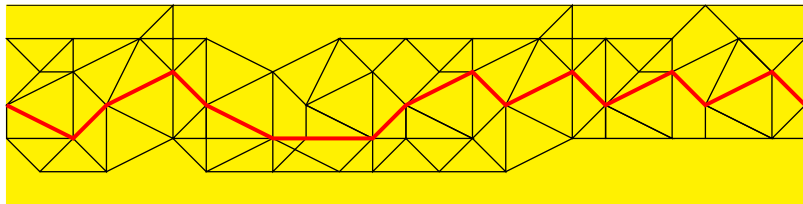
- $\mathcal{M} = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ — протомножество замощения \mathcal{T} ;
- группа симметрий \mathcal{T} содержит параллельный перенос.

Тогда \mathcal{M} допускает периодическое замощение.

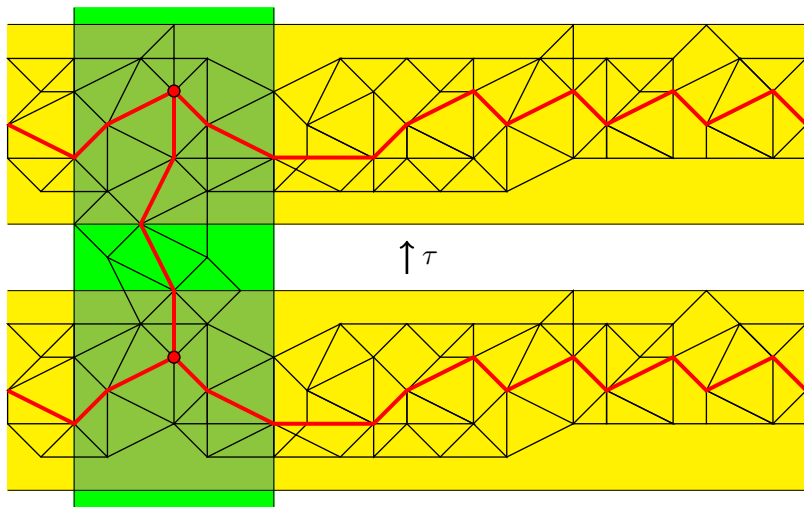
Доказательство для замощений ребро-к-ребру



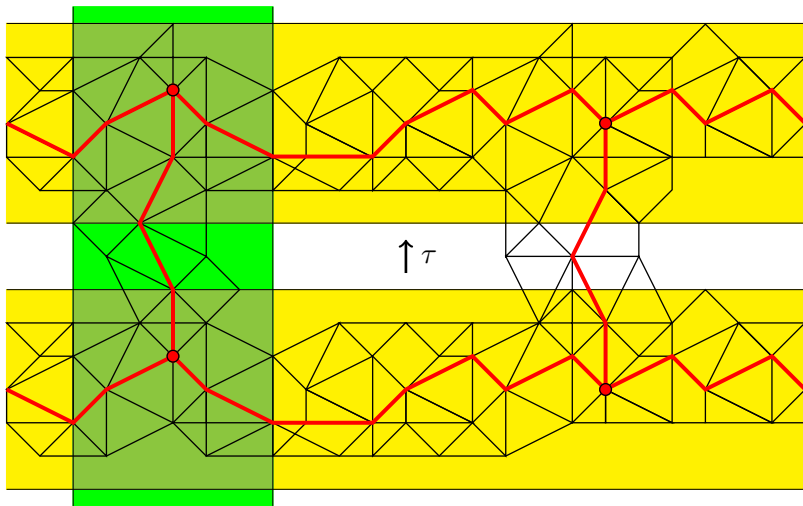
Доказательство для замощений ребро-к-ребру

 $\uparrow \tau$ 

Доказательство для замощений ребро-к-ребру



Доказательство для замощений ребро-к-ребру



Замощение несоизмеримыми квадратами

Замощение, для которого доказательство не применимо.

