TRAVAUX PRATIQUES MAPLE NO. 1

CPES FEYDER 2

Exercice 1 : Calculer le terme général des suites périodiques suivantes :

(1) $u_n := \sin n\pi$;

(2) $v_n := \cos(\frac{\pi}{2} + n\pi)$;

(3) $w_n := \tan n\pi$;

(4) $x_n := \sin(\frac{\pi}{2} + n\pi)$;

(5) $y_n := \cos n\pi$.

Vous indiquerez que n est un entier grâce à la commande `assume` (étudier au passage cette commande avec l'aide en ligne). Le nombre π se note `Pi`.

Exercice 2 : Calculer les limites des suites suivantes (utiliser la commande `limit` dont vous trouverez le fonctionnement avec l'aide en ligne). Rappelons que la fonction $x \mapsto e^x$ s'écrit `exp(x)` sous Maple.

(1) $\frac{\ln^5 n}{n^3}$;

(2) $\frac{n^6}{e^{n^2}}$;

(3) $\frac{e^{n^8}}{n!}$;

(4) $\frac{n!}{n^n}$.

Exercice 3 : Calculer les limites des suites suivantes :

(1) $\dfrac{3n^2+1}{-5n^2+6n-6}$;

(2) $\dfrac{4n^3+9n}{2n^2+7}$;

(3) $\dfrac{n^2+n+1}{-6n^3+4n}$.

Date: 29-09-2009 14:47.

Exercice 4 : Calculer les limites des suites suivantes :

(1) $n \sin \frac{1}{n}$;

(2) $n^2(\cos \frac{1}{n} - 1)$;

(3) $n \tan \frac{1}{n}$;

(4) $n \ln(1 + \frac{1}{n})$;

(5) $n(e^{\frac{1}{n}} - 1)$;

(6) $n(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1)$;

(7) $n((1 + \frac{1}{n})^\alpha - 1)$.

Exercice 5 :
Rappels : Développement asymptotique. Soit f une fonction numérique réelle. S'il existe une fonction g telle que le quotient $\frac{f}{g}$ ait une limite finie **non nulle** ℓ_1, alors on dit que $\ell_1 g$ est la **partie principale** du développement asymptotique de f. On parle aussi d'**équivalent de** f **à l'infini**. On peut alors tenter de mieux préciser le comportement asymptotique de f en cherchant si la différence $f - \ell_1 g$ n'aurait pas à son tour un équivalent à l'infini $\ell_2 h$. Dans l'affirmative, on a alors $f = \ell_1 g + \ell_2 h + o(h)$, et, h est le **second terme** du développement asymptotique de f.

On peut également définir la notion de développement asymptotique pour une suite numérique $(u_n)_n$. S'il existe une suite $(v_n)_n$ telle que le quotient $\frac{u_n}{v_n}$ ait une limite finie **non nulle** ℓ_1, alors on dit que la suite de terme général $\ell_1 v_n$ est un **équivalent** de $(u_n)_n$. Il se peut également que la suite de terme général $u_n - \ell_1 v_n$ admette un équivalent $(\ell_2 w_n)_n$, alors cette dernière suite est le **second terme** du développement asymptotique de $(u_n)_n$. Cela signifie que $(u_n)_n$ se comporte asymptotiquement comme la suite de terme général $\ell_1 v_n + \ell_2 w_n$.

On considère la suite $u_n := n!$.

(1) Calculer le quotient de u_n par $v_n := \sqrt{n} n^n e^{-n}$. Déterminer sa limite. En déduire un équivalent de u_n (à l'infini) que l'on note u_n^1 ;

(2) Calculer le quotient du reste $u_n - u_n^1$ par $w_n := \frac{1}{\sqrt{n}} n^n e^{-n}$. Déterminer sa limite. En déduire le deuxième terme du développement asymptotique de u_n ;

(3) Vérifier le résultat grâce à la commande `series`.

Exercice 6 : On considère la suite $u_n := u_0 + nr$ (suite arithmétique).

(1) Calculer la limite de u_n selon que $r > 0, r < 0$ ou $r = 0$;

(2) Calculer et factoriser la somme $s_N := \sum_{n=0}^{N} u_n$. (Vous utiliserez les commandes `factor` et `sum`.) Avant de faire cela, vous taperez "`r :='r' ;`" pour enlever toutes les hypothèses sur `r`.

Exercice 7 : Calculer et factoriser les sommes suivantes :

(1) $\sum_{k=0}^{n} k$;

(2) $\sum_{k=0}^{n} k^2$;

(3) $\sum_{k=0}^{n} k^3$;

(4) $\sum_{k=0}^{n} k^4$;

(5) $\sum_{k=0}^{n} k^5$;

(6) $\sum_{k=0}^{n} (ak^3 + bk^2 + ck + d)$.

Exercice 8 : On considère la suite géométrique $u_n := u_0 q^n$.

(1) Calculer la limite de u_n selon que $q > 1, q < -1$ ou $-1 < q < 1$;

(2) Calculer et factoriser $s_N := \sum_{n=0}^{N} u_n$ (taper "`q :='q' ;`") ;

(3) Calculer la limite de s_N selon que $q > 1$, $q < -1$ ou $-1 < q < 1$.

Exercice 9 : Tracés de courbes.

(1) À l'aide de la fonction `plot` donner une représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 3x + 2$ puis de la fonction $g : x \mapsto x^3 - 3x^2 + x + 1$;

(2) Soit le code `Maple` suivant :

```
F :=proc(x,n)
if (x=0) then return n ;
else return n*(sin(x)/x) ;
```

```
end if ;
end proc ;
```

(a) Selon vous, quel est le traitement effectué par ce programme. (Vous pouvez taper `F(0,4), F(Pi,3)` pour essayer de comprendre ce bout de code.)

(b) Supposons fixé un entier n, disons $n = 13$. Définir en Maple une fonction (mathématique) f telle $f(x) = \begin{cases} n & \text{si} \quad x = 0 \ , \\ n^{\frac{\sin(x)}{x}} & \text{si} \quad x \neq 0 \ . \end{cases}$

(c) Donner une représentation graphique sur $[-10..10]$ de la fonction f que vous venez de définir.

(3) Donner les représentations graphiques de cos et sin sur un même graphique ;

(4) On considère l'expression $l_t = te^x + x^2$.
- Donner une définition de cette expression sous la forme d'une fonction ;
- Tracer sur un même graphique les courbes représentatives de l_{-1}, l_1 et l_0.

Exercice 10 : Expressions et fonctions simples.

(1) Affecter à u la valeur 2 puis évaluer $u, u+2, u \times 3, |u-5| \times u$ et $\sqrt{u^{-2}+1}$;

(2) Affecter à x la valeur 5, afficher x, puis affecter à x l'expression 'x' (ne pas oublier les apostrophes entourant x) et afficher x. Que constatez-vous ? (On dit que l'on a **libéré la variable** x.)

(3) Affecter à P le polynôme $3x^4 + 5x^3 - 2x + 2$. Puis donner à x la valeur 2, et évaluer à nouveau P. Libérer la variable x puis évaluer P. La variable P est-elle libérée ? Libérer la variable x puis utiliser maintenant la fonction `subs` pour calculer $P(100)$, $P(-1)$ et $P(-43)$. Une fois cela fait, évaluer P. Quelle est la différence entre les deux méthodes d'évaluation du polynôme ?

(4) Affecter à x l'expression y^2. Évaluer P puis entrer les commandes `eval`$(P, 1)$ et `eval`$(P, 2)$;

(5) Définir un polynôme Q ayant pour racines $1, 2$ et $3,65$. Rechercher des informations sur la commande `expand`. Développer le polynôme Q ;

(6) Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$, $\tan(3x)$ en fonction de $\tan(x)$ et $(\cos(x) + \sin(x))^2$ en fonction de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$ (utiliser également la fonction `simplify`) ;

(7) Utiliser la fonction expand sur l'expression $\ln((x+1)(x-1))$.