*Travaux dirigés n^o 3 : Algèbre de Boole (***CORRECTIONS***)*

Les composants électroniques d'un ordinateur manipulent des données binaires via des circuits logiques. Ces circuits effectuent des opérations élémentaires sur les bits ; des opérations logiques telles que la conjonction (et), la disjonction (ou), la négation (non) ou encore le XOR (ou-exclusif). Les exercices de ces travaux dirigés constituent une bref rappel d'algèbre de Boole (ou algèbre booléenne) permettant de mettre en œuvre les opérations de logique binaire.

1 Exercice *n^o* 1

Donner les tables de vérité des opérateurs logiques *et*, *ou*, *non* et *xor*.

Corrections

$$\begin{array}{c|cc} et & 0 & 1 \\ \hline\hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \tag{1}$$

$$\begin{array}{c|cc} ou & 0 & 1 \\ \hline\hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \tag{2}$$

$$\begin{array}{c|cc} non & 0 & 1 \\ \hline\hline & 1 & 0 \end{array} \tag{3}$$

$$\begin{array}{c|cc} xor & 0 & 1 \\ \hline\hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \tag{4}$$

2 Exercice *n^o* 2

Montrer comment l'opérateur *et* peut être obtenu à partir des opérateurs *ou* et *non*. De même pour l'opérateur *ou* avec les opérateurs *et* et *non*.

Correction :

$x\ et\ y = non(non(x)\ ou\ non(y))$. Pour vérifier cela il suffit de calculer pour les différentes valeurs de x et de y.
On a $1\ et\ 1 = 1$ et $non(non(1)\ ou\ non(1)) = non(0\ ou\ 0) = non(0) = 1$;
$1\ et\ 0 = 0$ et $non(non(1)\ ou\ non(0)) = non(0\ ou\ 1) = non(1) = 0$;
$0\ et\ 1 = 0$ et $non(non(0)\ ou\ non(1)) = non(1\ ou\ 0) non(1) = 0$;
$0\ et\ 0 = 0$ et $non(non(0)\ ou\ non(0)) = non(1\ ou\ 1) = non(1) = 0$.

$x\ ou\ y = non(non(x)\ et\ non(y))$ (on fait le même raisonnement).
- $0\ ou\ 0 = 0$ et $non(non(0)\ et\ non(0)) = non(1\ et\ 1) = non(1) = 0$;
- $0\ ou\ 1 = 1$ et $non(non(0)\ et\ non(1)) = non(1\ et\ 0) = non(0) = 1$;
- $1\ ou\ 0 = 1$ et $non(non(1)\ et\ non(0)) = non(0\ et\ 1) = non(0) = 1$;
- $1\ ou\ 1 = 1$ et $non(non(1)\ et\ non(1)) = non(0\ et\ 0) = non(0) = 1$.

3 Exercice n^o 3

On note respectivement les opérateurs *ou*, *et*, *xor* et *non* par " + ", " · ", " ⊕ " et " ‾ ". Montrer à l'aide de tables de vérité que $A \oplus B = (\overline{A} \cdot B) + (A \cdot \overline{B})$ et que $A \oplus B = (A + B) \cdot (\overline{A} + \overline{B})$.

Correction

A	B	$\overline{A} \cdot B$	$A \cdot \overline{B}$	$(\overline{A} \cdot B) + (A \cdot \overline{B})$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
1	1	0	0	0

(5)

A	B	$A + B$	$\overline{A} + \overline{B}$	$(A + B) \cdot (\overline{A} + \overline{B})$
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	1	1	0	0

(6)

Les deux tables sont identiques à la table du ou-exclusif ⊕. Les deux formules définissent donc le même opérateur logique, à savoir, ⊕.

Rappels

Les *lois de De Morgan* permettent de transformer une conjonction en une disjonction (et réciproquement) via la négation.

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B} \tag{7}$$

et

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}\ . \tag{8}$$

Parmi les règles de calcul logique importantes il y a aussi les règles suivantes.

1. *Règle de double-négation*
$$\overline{\overline{A}} = A\ . \tag{9}$$
2. *Règles de commutativité*
$$A\#B = B\#A \tag{10}$$
pour $\# = \cdot$ ou $\# = +$;
3. *Règles de distributivité*
$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C) \tag{11}$$
et
$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)\ . \tag{12}$$
4. *Règles d'associativité*
$$A\#(B\#C) = (A\#B)\#C \tag{13}$$
pour $\# = \cdot$ ou $\# = +$;

5. *Règles d'idempotence*

$$A\#A = A \tag{14}$$

pour $\# = \cdot$ ou $\# = +$.

Toute expression booléenne peut être écrite sous une forme particulière.

1. *Forme normale conjonctive* (FNC) : Une expression logique est en FNC si et seulement si elle est une conjonction d'une ou plusieurs disjonctions d'un ou plusieurs littéraux. Par exemple, $(A + \overline{B} + \overline{C}) \cdot (\overline{D} + E + F)$;
2. *Forme normale disjonctive* (FND) : Une expression logique est en FND si et seulement si elle est une disjonction d'une ou plusieurs conjonctions d'un ou plusieurs littéraux. Par exemple, $(\overline{A} \cdot \overline{B}) + B + (\overline{C} \cdot D \cdot E)$;

Rappelons qu'un *littéral* est une variable booléenne (une lettre) ou la négation d'une variable.

4 Exercice n^o 4

Démontrer les deux dernières règles (associativité et idempotence) à l'aide d'une table de vérité.

Corrections :

– Associativité pour "$\cdot$" :

A	B	C	$(A \cdot B)$	$(A \cdot B) \cdot C$	$(B \cdot C)$	$A \cdot (B \cdot C)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

(15)

– Idempotence pour "$\cdot$" :

A	$A \cdot A$
0	$0 \cdot 0 = 0$
1	$1 \cdot 1 = 1$

(16)

– Associativité pour "+" :

A	B	C	$(A + B)$	$(A + B) + C$	$(B + C)$	$A + (B + C)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

(17)

– Idempotence pour "+" :

$$\begin{array}{c|l} A & A+A \\ \hline 0 & 0+0=0 \\ 1 & 1+1=1 \end{array} \tag{18}$$

5 Exercice n^o 5

Écrire l'expression $\overline{A+(\overline{B}\cdot C)}$ sous forme normale conjonctive et puis sous forme normale disjonctive.

Correction : On utilise notamment les lois de De Morgan.
$\overline{A+(\overline{B}\cdot C)} = \overline{A}\cdot\overline{\overline{B}\cdot C} = \overline{A}\cdot(\overline{\overline{B}}+\overline{C}) = \overline{A}\cdot(B+\overline{C}) = \overline{A}\cdot B+\overline{A}\cdot\overline{C}$ (FND) et $\overline{A+(\overline{B}\cdot C)} = \overline{A}\cdot\overline{\overline{B}\cdot C} = \overline{A}\cdot(\overline{\overline{B}}+\overline{C}) = \overline{A}\cdot(B+\overline{C})$ (FNC).

6 Exercice n^o 6

Montrer que les deux règles d'associativité sont duales, *i.e.*, montrer qu'à partir de la règle d'associativité de l'opérateur *ou*, on peut déduire, en utilisant les règles précédentes (excepté l'associativité de l'opérateur *et*), la règle d'associativité de l'opérateur *et* (et inversement).

Correction :

$$\begin{array}{rcll} (A+B)+C & = & \overline{\overline{(A+B)}\cdot\overline{C}} & \text{(De Morgan et double-négation)} \\ & = & \overline{(\overline{A}\cdot\overline{B})\cdot\overline{C}} & \text{De Morgan} \\ & = & \overline{\overline{A}\cdot(\overline{B}\cdot\overline{C})} & \text{(associativité de "·")} \\ & = & \overline{\overline{A}}+\overline{\overline{B}\cdot\overline{C}} & \text{De Morgan} \\ & = & A+(\overline{\overline{B}}+\overline{\overline{C}}) & \text{(double-négation sur } A \text{ et De Morgan)} \\ & = & A+(B+C) & \text{(double-négation)} \end{array} \tag{19}$$

et

$$\begin{array}{rcl} (A\cdot B)\cdot C & = & \overline{\overline{(A\cdot B)}+\overline{C}} \\ & = & \overline{(\overline{A}+\overline{B})+\overline{C}} \\ & = & \overline{\overline{A}+(\overline{B}+\overline{C})} \\ & = & \overline{\overline{A}}\cdot\overline{(\overline{B}+\overline{C})} \\ & = & A\cdot(\overline{\overline{B}}\cdot\overline{\overline{C}}) \\ & = & A\cdot(B\cdot C)\ . \end{array} \tag{20}$$

7 Exercice n^o 7

Écrire les expressions suivantes sous forme normale conjonctive puis sous forme normale disjonctive. (Pour la dernière formule, vous vous contenterez de donner sa FND.)

Correction :

1. $\overline{A\oplus B}$.

– FND :

$$\begin{aligned}\overline{A \oplus B} &= \overline{(A+B)\cdot(\overline{A}+\overline{B})} \\ &= \overline{(A+B)} + \overline{(\overline{A}+\overline{B})} \\ &= (\overline{A}\cdot\overline{B}) + (\overline{\overline{A}}\cdot\overline{\overline{B}}) \\ &= (\overline{A}\cdot\overline{B}) + (A\cdot B)\ .\end{aligned} \tag{21}$$

– FNC :

$$\begin{aligned}\overline{A \oplus B} &= \overline{(\overline{A}\cdot B) + (A\cdot\overline{B})} \\ &= \overline{(\overline{A}\cdot B)} \cdot \overline{(A\cdot\overline{B})} \\ &= (\overline{\overline{A}}+\overline{B}) \cdot (\overline{A}+\overline{\overline{B}}) \\ &= (A+\overline{B})\cdot(\overline{A}+B)\ .\end{aligned} \tag{22}$$

2. $(\overline{A}\cdot B) + (\overline{A}\cdot B)$
   – FND : OK il est déjà en FND ;
   – FNC :

$$\begin{aligned}(\overline{A}\cdot B) + (\overline{A}\cdot B) &= (\overline{A} + (\overline{A}\cdot B))\cdot(B+(\overline{A}\cdot B)) \text{ (distributivité)} \\ &= ((\overline{A}+\overline{A})\cdot(\overline{A}+B))\cdot((B+\overline{A})\cdot(B+B)) \text{ (distributivité)} \\ &= \overline{A}\cdot(\overline{A}+B)\cdot(B+\overline{A})\cdot B \text{ (idempotence)} \\ &= \overline{A}\cdot(\overline{A}+B)\cdot B \text{ (commutativité et idempotence)}\ .\end{aligned} \tag{23}$$

3. $(A+\overline{B})\cdot(A+\overline{B})$
   –

$$\begin{aligned}(A+\overline{B})\cdot(A+\overline{B}) &= (A\cdot(A+\overline{B})) + (\overline{B}\cdot(A+\overline{B})) \\ &= (A\cdot A) + (A\cdot\overline{B}) + (\overline{B}\cdot A) + (\overline{B}\cdot\overline{B}) \\ &= A + (A\cdot\overline{B}) + \overline{B}\ .\end{aligned} \tag{24}$$

   – FNC : OK il est déjà en FNC ;
4. $A + (A\cdot B)$
   – FND : OK il est déjà en FND ;
   – FNC : $A + (A\cdot B) = (A+A)\cdot(A+B) = A\cdot(A+B)$;
5. $A\cdot(A+B)$
   – FNC : $A\cdot(A+B) = (A\cdot A) + (A\cdot B) = A + (A\cdot B)$;
   – FND : OK ;
6. $(\overline{A}\cdot B) + \overline{(A+\overline{B}+C+D)}$
   – FND :

$$\begin{aligned}(\overline{A}\cdot B) + \overline{(A+\overline{B}+C+D)} &= (\overline{A}\cdot B) + (\overline{A}\cdot\overline{\overline{B}}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}) \\ &= (\overline{A}\cdot B) + (\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D})\ .\end{aligned} \tag{25}$$

   – FNC :

$$\begin{aligned}(\overline{A}\cdot B) + \overline{(A+\overline{B}+C+D)} &= (\overline{A}\cdot B) + (\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}) \\ &= (\overline{A}+\overline{A})\cdot(\overline{A}+B)\cdot(\overline{A}+\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{D})\cdot(B+\overline{A}) \\ &\quad \cdot(B+B)\cdot(B+\overline{C})\cdot(B+\overline{D}) \\ &= \overline{A}\cdot(\overline{A}+B)\cdot(\overline{A}+\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{D})\cdot B\cdot(B+\overline{C})\cdot(B+\overline{D})\ .\end{aligned} \tag{26}$$

7. $A + (B\cdot\overline{C}) + ((\overline{A}\cdot\overline{(B\cdot\overline{C})})\cdot((A\cdot D)+B))$.

– FND : Il suffit d'écrire $((\overline{A} \cdot \overline{(B \cdot \overline{C})}) \cdot ((A \cdot D) + B))$ en FND.

$$
\begin{aligned}
(\overline{A} \cdot \overline{(B \cdot \overline{C})}) \cdot ((A \cdot D) + B) &= (\overline{A} \cdot (\overline{B} + C)) \cdot ((A \cdot D) + B) \\
&= ((\overline{A} \cdot \overline{B}) + (\overline{A} \cdot C)) \cdot ((A \cdot D) + B) \\
&= ((\overline{A} \cdot \overline{B}) + (\overline{A} \cdot C)) \cdot (A \cdot D) + ((\overline{A} \cdot \overline{B}) + (\overline{A} \cdot C)) \cdot B \\
&= (\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot A \cdot D) + (\overline{A} \cdot C \cdot A \cdot D) + (\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot B) + (\overline{A} \cdot C \cdot B)\ .
\end{aligned} \tag{27}
$$

D'où l'on a la FND de la formule :

$$
A + (B \cdot \overline{C}) + (\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot A \cdot D) + (\overline{A} \cdot C \cdot A \cdot D) + (\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot B) + (\overline{A} \cdot C \cdot B)\ . \tag{28}
$$