Chap. IV : Théorie des structures récursives

Laurent Poinsot

21 janvier 2009

Soit $\mathcal{U} \neq \emptyset$ un ensemble. Soit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$, $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Soit un ensemble d'applications $\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{U}^{\mathcal{U}^n}$. On appelle **arité de** $f \in \mathcal{F}$ l'unique entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f : \mathcal{U}^n \to \mathcal{U}$ et on le note $ar(f)$.

Soit $\mathcal{U} \neq \emptyset$ un ensemble. Soit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$, $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Soit un ensemble d'applications $\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{U}^{\mathcal{U}^n}$. On appelle **arité de** $f \in \mathcal{F}$ l'unique entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f : \mathcal{U}^n \rightarrow \mathcal{U}$ et on le note $ar(f)$.

Soit $\mathcal{U} \neq \emptyset$ un ensemble. Soit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$, $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Soit un ensemble d'applications $\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{U}^{\mathcal{U}^n}$. On appelle **arité de** $f \in \mathcal{F}$ l'unique entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f : \mathcal{U}^n \to \mathcal{U}$ et on le note $ar(f)$.

Soit $\mathcal{U} \neq \emptyset$ un ensemble. Soit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$, $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Soit un ensemble d'applications $\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{U}^{\mathcal{U}^n}$. On appelle **arité de** $f \in \mathcal{F}$ l'unique entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f : \mathcal{U}^n \to \mathcal{U}$ et on le note $ar(f)$.

Dans un tel triplet $(\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$, dit **triplet d'induction**, $\mathcal{U}$ est l'**univers**, $\mathcal{B}$ est la **base d'induction** et $\mathcal{F}$ est l'**ensemble des règles d'induction**.

Dans un tel triplet $(\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$, dit **triplet d'induction**,$\mathcal{U}$ est l'**univers**, $\mathcal{B}$ est la **base d'induction** et $\mathcal{F}$ est l'**ensemble des règles d'induction**.

Dans un tel triplet $(\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$, dit **triplet d'induction**,$\mathcal{U}$ est l'**univers**, $\mathcal{B}$ est la **base d'induction** et $\mathcal{F}$ est l'**ensemble des règles d'induction.**

Dans un tel triplet $(\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$, dit **triplet d'induction**,$\mathcal{U}$ est l'**univers**, $\mathcal{B}$ est la **base d'induction** et $\mathcal{F}$ est l'**ensemble des règles d'induction.**

Notion d'ensembles clos

Soit $(\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Soit $E \subseteq \mathcal{U}$. On dit que E est **clos par** $\mathcal{F}$ si, et seulement si, quel que soit $f \in \mathcal{F}$ et quel que soit $x \in E^{ar(f)}$, $f(x) \in E$ (autrement dit, $f(E^n) \subseteq E$ pour $n = ar(f)$).

Notion d'ensembles clos

Soit $(\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Soit $E \subseteq \mathcal{U}$. On dit que E est **clos par** $\mathcal{F}$ si, et seulement si, quel que soit $f \in \mathcal{F}$ et quel que soit $x \in E^{ar(f)}$, $f(x) \in E$ (autrement dit, $f(E^n) \subseteq E$ pour $n = ar(f)$).

Notion d'ensembles clos

Soit $(\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Soit $E \subseteq \mathcal{U}$. On dit que E est **clos par** $\mathcal{F}$ si, et seulement si, quel que soit $f \in \mathcal{F}$ et quel que soit $x \in E^{ar(f)}$, $f(x) \in E$ (autrement dit, $f(E^n) \subseteq E$ pour $n = ar(f)$).

Notion d'ensembles clos

Soit $(\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Soit $E \subseteq \mathcal{U}$. On dit que E est **clos par** $\mathcal{F}$ si, et seulement si, quel que soit $f \in \mathcal{F}$ et quel que soit $x \in E^{ar(f)}$, $f(x) \in E$ (autrement dit, $f(E^n) \subseteq E$ pour $n = ar(f)$).

Notion d'ensembles clos

Soit $(\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Soit $E \subseteq \mathcal{U}$. On dit que E est **clos par** $\mathcal{F}$ si, et seulement si, quel que soit $f \in \mathcal{F}$ et quel que soit $x \in E^{ar(f)}$, $f(x) \in E$ (autrement dit, $f(E^n) \subseteq E$ pour $n = ar(f)$).

Notion d'ensembles clos

Soit $(\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Soit $E \subseteq \mathcal{U}$. On dit que E est **clos par** $\mathcal{F}$ si, et seulement si, quel que soit $f \in \mathcal{F}$ et quel que soit $x \in E^{ar(f)}$, $f(x) \in E$ (autrement dit, $f(E^n) \subseteq E$ pour $n = ar(f)$).

Clairement $\mathcal{U}$ lui-même est clos par $\mathcal{F}$.

Notion d'ensembles inductifs

Soit $(\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Soit $E \subseteq \mathcal{U}$. On dit que E est **inductif sur** $(\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ si, et seulement si, $\mathcal{B} \subseteq E$ et E est clos par $\mathcal{F}$.

Notion d'ensembles inductifs

Soit $(\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Soit $E \subseteq \mathcal{U}$. On dit que E est **inductif sur** $(\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ si, et seulement si, $\mathcal{B} \subseteq E$ et E est clos par $\mathcal{F}$.

Notion d'ensembles inductifs

Soit $(\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Soit $E \subseteq \mathcal{U}$. On dit que E est **inductif sur** $(\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ si, et seulement si, $\mathcal{B} \subseteq E$ et E est clos par $\mathcal{F}$.

Notion d'ensembles inductifs

Soit $(\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Soit $E \subseteq \mathcal{U}$. On dit que E est **inductif sur** $(\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ si, et seulement si, $\mathcal{B} \subseteq E$ et E est clos par $\mathcal{F}$.

Notion d'ensembles inductifs

Soit $(\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Soit $E \subseteq \mathcal{U}$. On dit que E est **inductif sur** $(\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ si, et seulement si, $\mathcal{B} \subseteq E$ et E est clos par $\mathcal{F}$.

Notion d'ensembles inductifs

Soit $(\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Soit $E \subseteq \mathcal{U}$. On dit que E est **inductif sur** $(\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ si, et seulement si, $\mathcal{B} \subseteq E$ et E est clos par $\mathcal{F}$.

$\mathcal{U}$ est évidemment inductif sur $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$.

Notons

$$ind(I) := \{E \subseteq \mathcal{U} : E \text{ est inductif sur } I\} .$$

Puisque $\mathcal{U} \in ind(I)$, $IND(I) := \bigcap_{E \in ind(I)} E$ est bien défini.

Notons

$$ind(I) := \{E \subseteq \mathcal{U} : E \text{ est inductif sur } I\} .$$

Puisque $\mathcal{U} \in ind(I)$, $IND(I) := \bigcap_{E \in ind(I)} E$ est bien défini.

Notons

$$ind(I) := \{E \subseteq \mathcal{U} : E \text{ est inductif sur } I\} .$$

Puisque $\mathcal{U} \in ind(I)$, $IND(I) := \bigcap_{E \in ind(I)} E$ est bien défini.

Notons

$$ind(I) := \{E \subseteq \mathcal{U} : E \text{ est inductif sur } I\} .$$

Puisque $\mathcal{U} \in ind(I)$, $IND(I) := \bigcap_{E \in ind(I)} E$ est bien défini.

Notons qu'en général plusieurs ensembles sont des éléments de $ind(I)$. Considérons par exemple $\mathcal{U} := \mathbb{N}$, $\mathcal{B} := \{0\}$ et $\mathcal{F} := \{f : n \in \mathbb{N} \mapsto n+2 \in \mathbb{N}\}$. Il y a une infinité de parties de $\mathbb{N}$ qui appatiennent à $ind(\mathbb{N}, \{0\}, \{f\})$: $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\mathbb{N} \setminus \{1, 3\}$, $\mathbb{N} \setminus \{1, 3, 5\}$, etc. sont de telles parties. La partie $IND(I)$ n'est d'ailleurs aucune de celles-là puisqu'il s'agit de l'ensemble des entiers pairs.

Notons qu'en général plusieurs ensembles sont des éléments de $ind(I)$. Considérons par exemple $\mathcal{U} := \mathbb{N}$, $\mathcal{B} := \{0\}$ et $\mathcal{F} := \{f : n \in \mathbb{N} \mapsto n+2 \in \mathbb{N}\}$. Il y a une infinité de parties de $\mathbb{N}$ qui appatiennent à $ind(\mathbb{N}, \{0\}, \{f\})$: $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\mathbb{N} \setminus \{1, 3\}$, $\mathbb{N} \setminus \{1, 3, 5\}$, etc. sont de telles parties. La partie $IND(I)$ n'est d'ailleurs aucune de celles-là puisqu'il s'agit de l'ensemble des entiers pairs.

Notons qu'en général plusieurs ensembles sont des éléments de $ind(I)$. Considérons par exemple $\mathcal{U} := \mathbb{N}$, $\mathcal{B} := \{0\}$ et $\mathcal{F} := \{f : n \in \mathbb{N} \mapsto n + 2 \in \mathbb{N}\}$. Il y a une infinité de parties de $\mathbb{N}$ qui appatiennent à $ind(\mathbb{N}, \{0\}, \{f\})$: $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\mathbb{N} \setminus \{1, 3\}$, $\mathbb{N} \setminus \{1, 3, 5\}$, etc. sont de telles parties. La partie $IND(I)$ n'est d'ailleurs aucune de celles-là puisqu'il s'agit de l'ensemble des entiers pairs.

Notons qu'en général plusieurs ensembles sont des éléments de *ind*(I). Considérons par exemple $\mathcal{U} := \mathbb{N}$, $\mathcal{B} := \{0\}$ et $\mathcal{F} := \{f : n \in \mathbb{N} \mapsto n+2 \in \mathbb{N}\}$. Il y a une infinité de parties de $\mathbb{N}$ qui appatiennent à *ind*$(\mathbb{N}, \{0\}, \{f\})$: $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\mathbb{N} \setminus \{1, 3\}$, $\mathbb{N} \setminus \{1, 3, 5\}$, etc. sont de telles parties. La partie *IND*(I) n'est d'ailleurs aucune de celles-là puisqu'il s'agit de l'ensemble des entiers pairs.

Notons qu'en général plusieurs ensembles sont des éléments de $ind(I)$. Considérons par exemple $\mathcal{U} := \mathbb{N}$, $\mathcal{B} := \{0\}$ et $\mathcal{F} := \{f : n \in \mathbb{N} \mapsto n + 2 \in \mathbb{N}\}$. Il y a une infinité de parties de $\mathbb{N}$ qui appatiennent à $ind(\mathbb{N}, \{0\}, \{f\})$: $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\mathbb{N} \setminus \{1, 3\}$, $\mathbb{N} \setminus \{1, 3, 5\}$, etc. sont de telles parties. La partie $IND(I)$ n'est d'ailleurs aucune de celles-là puisqu'il s'agit de l'ensemble des entiers pairs.

Notons qu'en général plusieurs ensembles sont des éléments de $ind(I)$. Considérons par exemple $\mathcal{U} := \mathbb{N}$, $\mathcal{B} := \{0\}$ et $\mathcal{F} := \{f : n \in \mathbb{N} \mapsto n + 2 \in \mathbb{N}\}$. Il y a une infinité de parties de $\mathbb{N}$ qui appatiennent à $ind(\mathbb{N}, \{0\}, \{f\})$: $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\mathbb{N} \setminus \{1, 3\}$, $\mathbb{N} \setminus \{1, 3, 5\}$, etc. sont de telles parties. La partie $IND(I)$ n'est d'ailleurs aucune de celles-là puisqu'il s'agit de l'ensemble des entiers pairs.

Notons qu'en général plusieurs ensembles sont des éléments de $ind(I)$. Considérons par exemple $\mathcal{U} := \mathbb{N}$, $\mathcal{B} := \{0\}$ et $\mathcal{F} := \{f : n \in \mathbb{N} \mapsto n + 2 \in \mathbb{N}\}$. Il y a une infinité de parties de $\mathbb{N}$ qui appatiennent à $ind(\mathbb{N}, \{0\}, \{f\})$: $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\mathbb{N} \setminus \{1, 3\}$, $\mathbb{N} \setminus \{1, 3, 5\}$, etc. sont de telles parties. La partie $IND(I)$ n'est d'ailleurs aucune de celles-là puisqu'il s'agit de l'ensemble des entiers pairs.

Notons qu'en général plusieurs ensembles sont des éléments de $ind(I)$. Considérons par exemple $\mathcal{U} := \mathbb{N}$, $\mathcal{B} := \{0\}$ et $\mathcal{F} := \{f : n \in \mathbb{N} \mapsto n + 2 \in \mathbb{N}\}$. Il y a une infinité de parties de $\mathbb{N}$ qui appatiennent à $ind(\mathbb{N}, \{0\}, \{f\})$: $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\mathbb{N} \setminus \{1, 3\}$, $\mathbb{N} \setminus \{1, 3, 5\}$, etc. sont de telles parties. La partie $IND(I)$ n'est d'ailleurs aucune de celles-là puisqu'il s'agit de l'ensemble des entiers pairs.

On montre facilement que $IND(I)$ est lui-même inductif sur I.
En effet $\mathcal{B} \subseteq E$ quel que soit $E \in ind(I)$ et donc $\mathcal{B} \subseteq IND(I)$.
Soit $f \in \mathcal{F}$ et $x = (x_1, \ldots, x_{ar(f)}) \in IND(I)^{ar(f)}$, alors quel que soit $E \in ind(I)$, $x \in E^{ar(f)}$, et donc $f(x) \in E$.

On montre facilement que $IND(I)$ est lui-même inductif sur I. En effet $\mathcal{B} \subseteq E$ quel que soit $E \in ind(I)$ et donc $\mathcal{B} \subseteq IND(I)$. Soit $f \in \mathcal{F}$ et $x = (x_1, \ldots, x_{ar(f)}) \in IND(I)^{ar(f)}$, alors quel que soit $E \in ind(I)$, $x \in E^{ar(f)}$, et donc $f(x) \in E$.

On montre facilement que $IND(I)$ est lui-même inductif sur I. En effet $\mathcal{B} \subseteq E$ quel que soit $E \in ind(I)$ et donc $\mathcal{B} \subseteq IND(I)$. Soit $f \in \mathcal{F}$ et $x = (x_1, \ldots, x_{ar(f)}) \in IND(I)^{ar(f)}$, alors quel que soit $E \in ind(I)$, $x \in E^{ar(f)}$, et donc $f(x) \in E$.

On montre facilement que $IND(I)$ est lui-même inductif sur I. En effet $\mathcal{B} \subseteq E$ quel que soit $E \in ind(I)$ et donc $\mathcal{B} \subseteq IND(I)$. Soit $f \in \mathcal{F}$ et $x = (x_1, \ldots, x_{ar(f)}) \in IND(I)^{ar(f)}$, alors quel que soit $E \in ind(I)$, $x \in E^{ar(f)}$, et donc $f(x) \in E$.

On montre facilement que $IND(I)$ est lui-même inductif sur I. En effet $\mathcal{B} \subseteq E$ quel que soit $E \in ind(I)$ et donc $\mathcal{B} \subseteq IND(I)$. Soit $f \in \mathcal{F}$ et $x = (x_1, \ldots, x_{ar(f)}) \in IND(I)^{ar(f)}$, alors quel que soit $E \in ind(I)$, $x \in E^{ar(f)}$, et donc $f(x) \in E$.

On montre facilement que $IND(I)$ est lui-même inductif sur I. En effet $\mathcal{B} \subseteq E$ quel que soit $E \in ind(I)$ et donc $\mathcal{B} \subseteq IND(I)$. Soit $f \in \mathcal{F}$ et $x = (x_1, \ldots, x_{ar(f)}) \in IND(I)^{ar(f)}$, alors quel que soit $E \in ind(I)$, $x \in E^{ar(f)}$, et donc $f(x) \in E$.

On montre facilement que $IND(I)$ est lui-même inductif sur I. En effet $\mathcal{B} \subseteq E$ quel que soit $E \in ind(I)$ et donc $\mathcal{B} \subseteq IND(I)$. Soit $f \in \mathcal{F}$ et $x = (x_1, \ldots, x_{ar(f)}) \in IND(I)^{ar(f)}$, alors quel que soit $E \in ind(I)$, $x \in E^{ar(f)}$, et donc $f(x) \in E$.

$IND(I)$ est même **le plus petit ensemble inductif sur I**, et on l'appelle **clôture inductive de $\mathcal{B}$ sous $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{U}$** (on peut omettre la référence à l'univers lorsque cela ne provoque pas d'ambiguïtés). On dit aussi que $IND(I)$ est l'**ensemble défini par induction structurelle sur I**.

$IND(I)$ est même **le plus petit ensemble inductif sur I**, et on l'appelle **clôture inductive de $\mathcal{B}$ sous $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{U}$** (on peut omettre la référence à l'univers lorsque cela ne provoque pas d'ambiguïtés). On dit aussi que $IND(I)$ est l'**ensemble défini par induction structurelle sur I**.

$IND(I)$ est même **le plus petit ensemble inductif sur** I, et on l'appelle **clôture inductive de** $\mathcal{B}$ **sous** $\mathcal{F}$ **dans** $\mathcal{U}$ (on peut omettre la référence à l'univers lorsque cela ne provoque pas d'ambiguïtés). On dit aussi que $IND(I)$ est **l'ensemble défini par induction structurelle sur** I.

$IND(I)$ est même **le plus petit ensemble inductif sur I**, et on l'appelle **clôture inductive de $\mathcal{B}$ sous $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{U}$** (on peut omettre la référence à l'univers lorsque cela ne provoque pas d'ambiguïtés). On dit aussi que $IND(I)$ est l'**ensemble défini par induction structurelle sur I.**

Remarque

La notion d'ensemble défini par induction structurelle se généralise au cas où l'on suppose que $ar(f)$ est un cardinal quelconque possiblement infini (et même indénombrable) κ_f pour $f \in \mathcal{F}$. Dans ce cas on dit que $E \subseteq \mathcal{U}$ est clos par $\mathcal{F}$ si, et seulement si, quels que soient $f \in \mathcal{F}$, et pour tout $\kappa < \kappa_f$, $x_\kappa \in E$, $f((x_\kappa)_{\kappa<\kappa_f}) \in E$. Dans la suite on supposera que $ar(f)$ est fini pour tout $f \in \mathcal{F}$.

Remarque

La notion d'ensemble défini par induction structurelle se généralise au cas où l'on suppose que $ar(f)$ est un cardinal quelconque possiblement infini (et même indénombrable) κ_f pour $f \in \mathcal{F}$. Dans ce cas on dit que $E \subseteq \mathcal{U}$ est clos par $\mathcal{F}$ si, et seulement si, quels que soient $f \in \mathcal{F}$, et pour tout $\kappa < \kappa_f$, $x_\kappa \in E$, $f((x_\kappa)_{\kappa<\kappa_f}) \in E$. Dans la suite on supposera que $ar(f)$ est fini pour tout $f \in \mathcal{F}$.

Remarque

La notion d'ensemble défini par induction structurelle se généralise au cas où l'on suppose que $ar(f)$ est un cardinal quelconque possiblement infini (et même indénombrable) κ_f pour $f \in \mathcal{F}$. Dans ce cas on dit que $E \subseteq \mathcal{U}$ est clos par $\mathcal{F}$ si, et seulement si, quels que soient $f \in \mathcal{F}$, et pour tout $\kappa < \kappa_f$, $x_\kappa \in E$, $f((x_\kappa)_{\kappa < \kappa_f}) \in E$. Dans la suite on supposera que $ar(f)$ est fini pour tout $f \in \mathcal{F}$.

Remarque

La notion d'ensemble défini par induction structurelle se généralise au cas où l'on suppose que $ar(f)$ est un cardinal quelconque possiblement infini (et même indénombrable) κ_f pour $f \in \mathcal{F}$. Dans ce cas on dit que $E \subseteq \mathcal{U}$ est clos par $\mathcal{F}$ si, et seulement si, quels que soient $f \in \mathcal{F}$, et pour tout $\kappa < \kappa_f$, $x_\kappa \in E$, $f((x_\kappa)_{\kappa<\kappa_f}) \in E$. Dans la suite on supposera que $ar(f)$ est fini pour tout $f \in \mathcal{F}$.

Remarque

La notion d'ensemble défini par induction structurelle se généralise au cas où l'on suppose que $ar(f)$ est un cardinal quelconque possiblement infini (et même indénombrable) κ_f pour $f \in \mathcal{F}$. Dans ce cas on dit que $E \subseteq \mathcal{U}$ est clos par $\mathcal{F}$ si, et seulement si, quels que soient $f \in \mathcal{F}$, et pour tout $\kappa < \kappa_f$, $x_\kappa \in E$, $f((x_\kappa)_{\kappa<\kappa_f}) \in E$. Dans la suite on supposera que $ar(f)$ est fini pour tout $f \in \mathcal{F}$.

Remarque

La notion d'ensemble défini par induction structurelle se généralise au cas où l'on suppose que $ar(f)$ est un cardinal quelconque possiblement infini (et même indénombrable) κ_f pour $f \in \mathcal{F}$. Dans ce cas on dit que $E \subseteq \mathcal{U}$ est clos par $\mathcal{F}$ si, et seulement si, quels que soient $f \in \mathcal{F}$, et pour tout $\kappa < \kappa_f$, $x_\kappa \in E$, $f((x_\kappa)_{\kappa<\kappa_f}) \in E$. Dans la suite on supposera que $ar(f)$ est fini pour tout $f \in \mathcal{F}$.

Remarque

La notion d'ensemble défini par induction structurelle se généralise au cas où l'on suppose que $ar(f)$ est un cardinal quelconque possiblement infini (et même indénombrable) κ_f pour $f \in \mathcal{F}$. Dans ce cas on dit que $E \subseteq \mathcal{U}$ est clos par $\mathcal{F}$ si, et seulement si, quels que soient $f \in \mathcal{F}$, et pour tout $\kappa < \kappa_f$, $x_\kappa \in E$, $f((x_\kappa)_{\kappa<\kappa_f}) \in E$. Dans la suite on supposera que $ar(f)$ est fini pour tout $f \in \mathcal{F}$.

Construction récursive de $IND(I)$

Il est possible de construire $IND(I)$ par récurrence. Soit un triplet d'induction $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$. On définit la suite d'ensembles $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} I_0 & = & \mathcal{B}\ , \\ I_{n+1} & = & I_n \cup \{f(x) \in \mathcal{U} : f \in \mathcal{F},\ x \in I_n^{ar(f)}\}\ . \end{array}$$

Il est clair que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n \subseteq I_{n+1}$ (c'est-à-dire que la suite est croissante).

Construction récursive de $IND(I)$

Il est possible de construire $IND(I)$ par récurrence. Soit un triplet d'induction $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$. On définit la suite d'ensembles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{lcl} I_0 & = & \mathcal{B}\ , \\ I_{n+1} & = & I_n \cup \{f(x) \in \mathcal{U} : f \in \mathcal{F},\ x \in I_n^{ar(f)}\}\ . \end{array}$$

Il est clair que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n \subseteq I_{n+1}$ (c'est-à-dire que la suite est croissante).

Construction récursive de $IND(I)$

Il est possible de construire $IND(I)$ par récurrence. Soit un triplet d'induction $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$. On définit la suite d'ensembles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{lll} I_0 & = & \mathcal{B} , \\ I_{n+1} & = & I_n \cup \{f(x) \in \mathcal{U} : f \in \mathcal{F},\ x \in I_n^{ar(f)}\} . \end{array}$$

Il est clair que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n \subseteq I_{n+1}$ (c'est-à-dire que la suite est croissante).

Construction récursive de $IND(I)$

Il est possible de construire $IND(I)$ par récurrence. Soit un triplet d'induction $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$. On définit la suite d'ensembles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} I_0 &= \mathcal{B}\,, \\ I_{n+1} &= I_n \cup \{f(x) \in \mathcal{U} : f \in \mathcal{F},\ x \in I_n^{ar(f)}\}\,. \end{aligned}$$

Il est clair que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n \subseteq I_{n+1}$ (c'est-à-dire que la suite est croissante).

Construction récursive de $IND(I)$

Il est possible de construire $IND(I)$ par récurrence. Soit un triplet d'induction $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$. On définit la suite d'ensembles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} I_0 &= \mathcal{B}\ , \\ I_{n+1} &= I_n \cup \{f(x) \in \mathcal{U} : f \in \mathcal{F},\ x \in I_n^{ar(f)}\}\ . \end{aligned}$$

Il est clair que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n \subseteq I_{n+1}$ (c'est-à-dire que la suite est croissante).

Construction récursive de $IND(I)$

Il est possible de construire $IND(I)$ par récurrence. Soit un triplet d'induction $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$. On définit la suite d'ensembles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \mathcal{B} \,, \\
I_{n+1} &= I_n \cup \{ f(x) \in \mathcal{U} : f \in \mathcal{F},\ x \in I_n^{ar(f)} \} \,.
\end{aligned}
$$

Il est clair que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n \subseteq I_{n+1}$ (c'est-à-dire que la suite est croissante).

Construction récursive de $IND(I)$

Il est possible de construire $IND(I)$ par récurrence. Soit un triplet d'induction $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$. On définit la suite d'ensembles $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{lcl} I_0 & = & \mathcal{B}\ , \\ I_{n+1} & = & I_n \cup \{ f(x) \in \mathcal{U} : f \in \mathcal{F},\ x \in I_n^{ar(f)} \}\ . \end{array}$$

Il est clair que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n \subseteq I_{n+1}$ (c'est-à-dire que la suite est croissante).

Construction récursive de $IND(I)$

Il est possible de construire $IND(I)$ par récurrence. Soit un triplet d'induction $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$. On définit la suite d'ensembles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} I_0 &= \mathcal{B}\ , \\ I_{n+1} &= I_n \cup \{f(x) \in \mathcal{U} : f \in \mathcal{F},\ x \in I_n^{ar(f)}\}\ . \end{aligned}$$

Il est clair que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n \subseteq I_{n+1}$ (c'est-à-dire que la suite est croissante).

Construction récursive de $IND(I)$

Il est possible de construire $IND(I)$ par récurrence. Soit un triplet d'induction $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$. On définit la suite d'ensembles $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{lcl} I_0 & = & \mathcal{B} \, , \\ I_{n+1} & = & I_n \cup \{ f(x) \in \mathcal{U} : f \in \mathcal{F}, \; x \in I_n^{ar(f)} \} \, . \end{array}$$

Il est clair que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n \subseteq I_{n+1}$ (c'est-à-dire que la suite est croissante).

Construction récursive de $IND(I)$

Il est possible de construire $IND(I)$ par récurrence. Soit un triplet d'induction $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$. On définit la suite d'ensembles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \mathcal{B} \, , \\
I_{n+1} &= I_n \cup \{f(x) \in \mathcal{U} : f \in \mathcal{F},\ x \in I_n^{ar(f)}\} \, .
\end{aligned}
$$

Il est clair que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n \subseteq I_{n+1}$ (c'est-à-dire que la suite est croissante).

Construction récursive de $IND(I)$

Il est possible de construire $IND(I)$ par récurrence. Soit un triplet d'induction $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$. On définit la suite d'ensembles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} I_0 &= \mathcal{B} \, , \\ I_{n+1} &= I_n \cup \{f(x) \in \mathcal{U} : f \in \mathcal{F},\ x \in I_n^{ar(f)}\} \, . \end{aligned}$$

Il est clair que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n \subseteq I_{n+1}$ (c'est-à-dire que la suite est croissante).

Construction récursive de $IND(I)$

Il est possible de construire $IND(I)$ par récurrence. Soit un triplet d'induction $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$. On définit la suite d'ensembles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{lcl} I_0 & = & \mathcal{B} \, , \\ I_{n+1} & = & I_n \cup \{f(x) \in \mathcal{U} : f \in \mathcal{F},\ x \in I_n^{ar(f)}\} \, . \end{array}$$

Il est clair que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n \subseteq I_{n+1}$ (c'est-à-dire que la suite est croissante).

Construction récursive de $IND(I)$

Il est possible de construire $IND(I)$ par récurrence. Soit un triplet d'induction $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$. On définit la suite d'ensembles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{lcl} I_0 & = & \mathcal{B}\ , \\ I_{n+1} & = & I_n \cup \{f(x) \in \mathcal{U} : f \in \mathcal{F},\ x \in I_n^{ar(f)}\}\ . \end{array}$$

Il est clair que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n \subseteq I_{n+1}$ (c'est-à-dire que la suite est croissante).

Lemme

Notons

$$I_\omega := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \ .$$

On a :

$$IND(I) = I_\omega \ .$$

Lemme

Notons

$$I_\omega := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \ .$$

On a :

$$IND(I) = I_\omega \ .$$

Lemme

Notons

$$I_\omega := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \ .$$

On a :

$$IND(I) = I_\omega \ .$$

Lemme

Notons

$$I_\omega := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \ .$$

On a :

$$IND(I) = I_\omega \ .$$

Preuve

Commençons par démontrer que I_ω est inductif sur I. Puisque $I_0 = \mathcal{B}$, I_ω contient la base d'induction. Puis nous devons montrer que I_ω est clos par $\mathcal{F}$. Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ d'arité $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in I_\omega^n$, par définition de I_ω il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in I_k$, et comme $f(x) \in I_{k+1}$ (par définition), $f(x) \in I_\omega$. Puisque I_ω est inductif sur I et $IND(I)$ est le plus petit ensemble inductif sur I, $IND(I) \subseteq I_\omega$.

Preuve

Commençons par démontrer que I_ω est inductif sur I. Puisque $I_0 = \mathcal{B}$, I_ω contient la base d'induction. Puis nous devons montrer que I_ω est clos par $\mathcal{F}$. Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ d'arité $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in I_\omega^n$, par définition de I_ω il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in I_k$, et comme $f(x) \in I_{k+1}$ (par définition), $f(x) \in I_\omega$. Puisque I_ω est inductif sur I et $IND(I)$ est le plus petit ensemble inductif sur I, $IND(I) \subseteq I_\omega$.

Preuve

Commençons par démontrer que I_ω est inductif sur I. Puisque $I_0 = \mathcal{B}$, I_ω contient la base d'induction. Puis nous devons montrer que I_ω est clos par $\mathcal{F}$. Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ d'arité $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in I_\omega^n$, par définition de I_ω il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in I_k$, et comme $f(x) \in I_{k+1}$ (par définition), $f(x) \in I_\omega$. Puisque I_ω est inductif sur I et $IND(I)$ est le plus petit ensemble inductif sur I, $IND(I) \subseteq I_\omega$.

Preuve

Commençons par démontrer que I_ω est inductif sur I. Puisque $I_0 = \mathcal{B}$, I_ω contient la base d'induction. Puis nous devons montrer que I_ω est clos par $\mathcal{F}$. Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ d'arité $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in I_\omega^n$, par définition de I_ω il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in I_k$, et comme $f(x) \in I_{k+1}$ (par définition), $f(x) \in I_\omega$. Puisque I_ω est inductif sur I et $IND(I)$ est le plus petit ensemble inductif sur I, $IND(I) \subseteq I_\omega$.

Preuve

Commençons par démontrer que I_ω est inductif sur I. Puisque $I_0 = \mathcal{B}$, I_ω contient la base d'induction. Puis nous devons montrer que I_ω est clos par $\mathcal{F}$. Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ d'arité $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in I_\omega^n$, par définition de I_ω il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in I_k$, et comme $f(x) \in I_{k+1}$ (par définition), $f(x) \in I_\omega$. Puisque I_ω est inductif sur I et $IND(I)$ est le plus petit ensemble inductif sur I, $IND(I) \subseteq I_\omega$.

Preuve

Commençons par démontrer que I_ω est inductif sur I. Puisque $I_0 = \mathcal{B}$, I_ω contient la base d'induction. Puis nous devons montrer que I_ω est clos par $\mathcal{F}$. Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ d'arité $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in I_\omega^n$, par définition de I_ω il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in I_k$, et comme $f(x) \in I_{k+1}$ (par définition), $f(x) \in I_\omega$. Puisque I_ω est inductif sur I et $IND(I)$ est le plus petit ensemble inductif sur I, $IND(I) \subseteq I_\omega$.

Preuve

Commençons par démontrer que I_ω est inductif sur I. Puisque $I_0 = \mathcal{B}$, I_ω contient la base d'induction. Puis nous devons montrer que I_ω est clos par $\mathcal{F}$. Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ d'arité $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in I_\omega^n$, par définition de I_ω il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in I_k$, et comme $f(x) \in I_{k+1}$ (par définition), $f(x) \in I_\omega$. Puisque I_ω est inductif sur I et $IND(I)$ est le plus petit ensemble inductif sur I, $IND(I) \subseteq I_\omega$.

Preuve

Commençons par démontrer que I_ω est inductif sur I. Puisque $I_0 = \mathcal{B}$, I_ω contient la base d'induction. Puis nous devons montrer que I_ω est clos par $\mathcal{F}$. Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ d'arité $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in I_\omega^n$, par définition de I_ω il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in I_k$, et comme $f(x) \in I_{k+1}$ (par définition), $f(x) \in I_\omega$. Puisque I_ω est inductif sur I et $IND(I)$ est le plus petit ensemble inductif sur I, $IND(I) \subseteq I_\omega$.

Preuve

Commençons par démontrer que I_ω est inductif sur I. Puisque $I_0 = \mathcal{B}$, I_ω contient la base d'induction. Puis nous devons montrer que I_ω est clos par $\mathcal{F}$. Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ d'arité $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in I_\omega^n$, par définition de I_ω il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in I_k$, et comme $f(x) \in I_{k+1}$ (par définition), $f(x) \in I_\omega$. Puisque I_ω est inductif sur I et $IND(I)$ est le plus petit ensemble inductif sur I, $IND(I) \subseteq I_\omega$.

Preuve

Commençons par démontrer que I_ω est inductif sur I. Puisque $I_0 = \mathcal{B}$, I_ω contient la base d'induction. Puis nous devons montrer que I_ω est clos par $\mathcal{F}$. Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ d'arité $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in I_\omega^n$, par définition de I_ω il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in I_k$, et comme $f(x) \in I_{k+1}$ (par définition), $f(x) \in I_\omega$. Puisque I_ω est inductif sur I et $IND(I)$ est le plus petit ensemble inductif sur I, $IND(I) \subseteq I_\omega$.

Preuve

Commençons par démontrer que I_ω est inductif sur I. Puisque $I_0 = \mathcal{B}$, I_ω contient la base d'induction. Puis nous devons montrer que I_ω est clos par $\mathcal{F}$. Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ d'arité $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in I_\omega^n$, par définition de I_ω il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in I_k$, et comme $f(x) \in I_{k+1}$ (par définition), $f(x) \in I_\omega$. Puisque I_ω est inductif sur I et $IND(I)$ est le plus petit ensemble inductif sur I, $IND(I) \subseteq I_\omega$.

Preuve (suite)

Il reste à démontrer l'inclusion réciproque, ce que l'on fait par récurrence sur n. $I_0 = \mathcal{B} \subseteq IND(I)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $I_n \subseteq IND(I)$. Soit $x \in I_{n+1}$. Alors soit $x \in I_n$ et donc $x \in IND(I)$, soit il existe $f \in \mathcal{F}$ et $x_0 \in I_n^{ar(f)}$ tels que $x = f(x_0)$. Or on sait que par hypothèse de récurrence que $I_n \subseteq IND(I)$ et donc $I_n^{ar(f)} \subseteq IND(I)^{ar(f)}$. Il s'ensuit que $x = f(x_0) \in IND(I)$ (puisque $IND(I)$ est clos par $\mathcal{F}$). On en déduit donc que $I_\omega \subseteq IND(I)$.

Preuve (suite)

Il reste à démontrer l'inclusion réciproque, ce que l'on fait par récurrence sur n. $I_0 = \mathcal{B} \subseteq IND(I)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $I_n \subseteq IND(I)$. Soit $x \in I_{n+1}$. Alors soit $x \in I_n$ et donc $x \in IND(I)$, soit il existe $f \in \mathcal{F}$ et $x_0 \in I_n^{ar(f)}$ tels que $x = f(x_0)$. Or on sait que par hypothèse de récurrence que $I_n \subseteq IND(I)$ et donc $I_n^{ar(f)} \subseteq IND(I)^{ar(f)}$. Il s'ensuit que $x = f(x_0) \in IND(I)$ (puisque $IND(I)$ est clos par $\mathcal{F}$). On en déduit donc que $I_\omega \subseteq IND(I)$.

Preuve (suite)

Il reste à démontrer l'inclusion réciproque, ce que l'on fait par récurrence sur n. $I_0 = \mathcal{B} \subseteq IND(I)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $I_n \subseteq IND(I)$. Soit $x \in I_{n+1}$. Alors soit $x \in I_n$ et donc $x \in IND(I)$, soit il existe $f \in \mathcal{F}$ et $x_0 \in I_n^{ar(f)}$ tels que $x = f(x_0)$. Or on sait que par hypothèse de récurrence que $I_n \subseteq IND(I)$ et donc $I_n^{ar(f)} \subseteq IND(I)^{ar(f)}$. Il s'ensuit que $x = f(x_0) \in IND(I)$ (puisque $IND(I)$ est clos par $\mathcal{F}$). On en déduit donc que $I_\omega \subseteq IND(I)$.

Preuve (suite)

Il reste à démontrer l'inclusion réciproque, ce que l'on fait par récurrence sur n. $I_0 = \mathcal{B} \subseteq IND(I)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $I_n \subseteq IND(I)$. Soit $x \in I_{n+1}$. Alors soit $x \in I_n$ et donc $x \in IND(I)$, soit il existe $f \in \mathcal{F}$ et $x_0 \in I_n^{ar(f)}$ tels que $x = f(x_0)$. Or on sait que par hypothèse de récurrence que $I_n \subseteq IND(I)$ et donc $I_n^{ar(f)} \subseteq IND(I)^{ar(f)}$. Il s'ensuit que $x = f(x_0) \in IND(I)$ (puisque $IND(I)$ est clos par $\mathcal{F}$). On en déduit donc que $I_\omega \subseteq IND(I)$.

Preuve (suite)

Il reste à démontrer l'inclusion réciproque, ce que l'on fait par récurrence sur n. $I_0 = \mathcal{B} \subseteq IND(I)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $I_n \subseteq IND(I)$. Soit $x \in I_{n+1}$. Alors soit $x \in I_n$ et donc $x \in IND(I)$, soit il existe $f \in \mathcal{F}$ et $x_0 \in I_n^{ar(f)}$ tels que $x = f(x_0)$. Or on sait que par hypothèse de récurrence que $I_n \subseteq IND(I)$ et donc $I_n^{ar(f)} \subseteq IND(I)^{ar(f)}$. Il s'ensuit que $x = f(x_0) \in IND(I)$ (puisque $IND(I)$ est clos par $\mathcal{F}$). On en déduit donc que $I_\omega \subseteq IND(I)$.

Preuve (suite)

Il reste à démontrer l'inclusion réciproque, ce que l'on fait par récurrence sur n. $I_0 = \mathcal{B} \subseteq IND(I)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $I_n \subseteq IND(I)$. Soit $x \in I_{n+1}$. Alors soit $x \in I_n$ et donc $x \in IND(I)$, soit il existe $f \in \mathcal{F}$ et $x_0 \in I_n^{ar(f)}$ tels que $x = f(x_0)$. Or on sait que par hypothèse de récurrence que $I_n \subseteq IND(I)$ et donc $I_n^{ar(f)} \subseteq IND(I)^{ar(f)}$. Il s'ensuit que $x = f(x_0) \in IND(I)$ (puisque $IND(I)$ est clos par $\mathcal{F}$). On en déduit donc que $I_\omega \subseteq IND(I)$.

Preuve (suite)

Il reste à démontrer l'inclusion réciproque, ce que l'on fait par récurrence sur n. $I_0 = \mathcal{B} \subseteq IND(I)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $I_n \subseteq IND(I)$. Soit $x \in I_{n+1}$. Alors soit $x \in I_n$ et donc $x \in IND(I)$, soit il existe $f \in \mathcal{F}$ et $x_0 \in I_n^{ar(f)}$ tels que $x = f(x_0)$. Or on sait que par hypothèse de récurrence que $I_n \subseteq IND(I)$ et donc $I_n^{ar(f)} \subseteq IND(I)^{ar(f)}$. Il s'ensuit que $x = f(x_0) \in IND(I)$ (puisque $IND(I)$ est clos par $\mathcal{F}$). On en déduit donc que $I_\omega \subseteq IND(I)$.

Preuve (suite)

Il reste à démontrer l'inclusion réciproque, ce que l'on fait par récurrence sur n. $I_0 = \mathcal{B} \subseteq IND(I)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $I_n \subseteq IND(I)$. Soit $x \in I_{n+1}$. Alors soit $x \in I_n$ et donc $x \in IND(I)$, soit il existe $f \in \mathcal{F}$ et $x_0 \in I_n^{ar(f)}$ tels que $x = f(x_0)$. Or on sait que par hypothèse de récurrence que $I_n \subseteq IND(I)$ et donc $I_n^{ar(f)} \subseteq IND(I)^{ar(f)}$. Il s'ensuit que $x = f(x_0) \in IND(I)$ (puisque $IND(I)$ est clos par $\mathcal{F}$). On en déduit donc que $I_\omega \subseteq IND(I)$.

Preuve (suite)

Il reste à démontrer l'inclusion réciproque, ce que l'on fait par récurrence sur n. $I_0 = \mathcal{B} \subseteq IND(I)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $I_n \subseteq IND(I)$. Soit $x \in I_{n+1}$. Alors soit $x \in I_n$ et donc $x \in IND(I)$, soit il existe $f \in \mathcal{F}$ et $x_0 \in I_n^{ar(f)}$ tels que $x = f(x_0)$. Or on sait que par hypothèse de récurrence que $I_n \subseteq IND(I)$ et donc $I_n^{ar(f)} \subseteq IND(I)^{ar(f)}$. Il s'ensuit que $x = f(x_0) \in IND(I)$ (puisque $IND(I)$ est clos par $\mathcal{F}$). On en déduit donc que $I_\omega \subseteq IND(I)$.

Preuve (suite)

Il reste à démontrer l'inclusion réciproque, ce que l'on fait par récurrence sur n. $I_0 = \mathcal{B} \subseteq IND(I)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $I_n \subseteq IND(I)$. Soit $x \in I_{n+1}$. Alors soit $x \in I_n$ et donc $x \in IND(I)$, soit il existe $f \in \mathcal{F}$ et $x_0 \in I_n^{ar(f)}$ tels que $x = f(x_0)$. Or on sait que par hypothèse de récurrence que $I_n \subseteq IND(I)$ et donc $I_n^{ar(f)} \subseteq IND(I)^{ar(f)}$. Il s'ensuit que $x = f(x_0) \in IND(I)$ (puisque $IND(I)$ est clos par $\mathcal{F}$). On en déduit donc que $I_\omega \subseteq IND(I)$.

Preuve (suite)

Il reste à démontrer l'inclusion réciproque, ce que l'on fait par récurrence sur n. $I_0 = \mathcal{B} \subseteq IND(I)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $I_n \subseteq IND(I)$. Soit $x \in I_{n+1}$. Alors soit $x \in I_n$ et donc $x \in IND(I)$, soit il existe $f \in \mathcal{F}$ et $x_0 \in I_n^{ar(f)}$ tels que $x = f(x_0)$. Or on sait que par hypothèse de récurrence que $I_n \subseteq IND(I)$ et donc $I_n^{ar(f)} \subseteq IND(I)^{ar(f)}$. Il s'ensuit que $x = f(x_0) \in IND(I)$ (puisque $IND(I)$ est clos par $\mathcal{F}$). On en déduit donc que $I_\omega \subseteq IND(I)$.

Preuve (suite)

Il reste à démontrer l'inclusion réciproque, ce que l'on fait par récurrence sur n. $I_0 = \mathcal{B} \subseteq IND(I)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $I_n \subseteq IND(I)$. Soit $x \in I_{n+1}$. Alors soit $x \in I_n$ et donc $x \in IND(I)$, soit il existe $f \in \mathcal{F}$ et $x_0 \in I_n^{ar(f)}$ tels que $x = f(x_0)$. Or on sait que par hypothèse de récurrence que $I_n \subseteq IND(I)$ et donc $I_n^{ar(f)} \subseteq IND(I)^{ar(f)}$. Il s'ensuit que $x = f(x_0) \in IND(I)$ (puisque $IND(I)$ est clos par $\mathcal{F}$). On en déduit donc que $I_\omega \subseteq IND(I)$.

I_ω comme une solution d'équation de point fixe

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. I_ω est la plus petite solution de l'équation

$$X = \mathcal{B} \cup \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(X^{ar(f)}) \tag{1}$$

pour $X \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$.

I_ω comme une solution d'équation de point fixe

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. I_ω est la plus petite solution de l'équation

$$X = \mathcal{B} \cup \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(X^{ar(f)}) \tag{1}$$

pour $X \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$.

I_ω comme une solution d'équation de point fixe

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. I_ω est la plus petite solution de l'équation

$$X = \mathcal{B} \cup \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(X^{ar(f)}) \tag{1}$$

pour $X \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$.

I_ω comme une solution d'équation de point fixe

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. I_ω est la plus petite solution de l'équation

$$X = \mathcal{B} \cup \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(X^{ar(f)}) \tag{1}$$

pour $X \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$.

I_ω comme une solution d'équation de point fixe

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. I_ω est la plus petite solution de l'équation

$$X = \mathcal{B} \cup \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(X^{ar(f)}) \tag{1}$$

pour $X \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$.

Preuve

Soit $x \in I_\omega$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in I_n$. Si $n = 0$, alors $x \in X$. Si $n > 0$, alors il existe $f \in \mathcal{F}$ et $x_0 \in I_{n-1}^{ar(f)}$ tels que $f(x_0) = x$ et donc $x \in \displaystyle\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)})$. Il en résulte que

$$x \in \mathcal{B} \cup \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)}).$$

Preuve

Soit $x \in I_\omega$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in I_n$. Si $n = 0$, alors $x \in X$. Si $n > 0$, alors il existe $f \in \mathcal{F}$ et $x_0 \in I_{n-1}^{ar(f)}$ tels que $f(x_0) = x$ et donc $x \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)})$. Il en résulte que

$$x \in \mathcal{B} \cup \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)}).$$

Preuve

Soit $x \in I_\omega$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in I_n$. Si $n = 0$, alors $x \in X$. Si $n > 0$, alors il existe $f \in \mathcal{F}$ et $x_0 \in I_{n-1}^{ar(f)}$ tels que $f(x_0) = x$ et donc $x \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)})$. Il en résulte que $x \in \mathcal{B} \cup \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)})$.

Preuve

Soit $x \in I_\omega$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in I_n$. Si $n = 0$, alors $x \in X$. Si $n > 0$, alors il existe $f \in \mathcal{F}$ et $x_0 \in I_{n-1}^{ar(f)}$ tels que $f(x_0) = x$ et donc $x \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)})$. Il en résulte que $x \in \mathcal{B} \cup \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)})$.

Preuve

Soit $x \in I_\omega$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in I_n$. Si $n = 0$, alors $x \in X$. Si $n > 0$, alors il existe $f \in \mathcal{F}$ et $x_0 \in I_{n-1}^{ar(f)}$ tels que $f(x_0) = x$ et donc $x \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)})$. Il en résulte que

$$x \in \mathcal{B} \cup \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)}).$$

Preuve

Soit $x \in I_\omega$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in I_n$. Si $n = 0$, alors $x \in X$. Si $n > 0$, alors il existe $f \in \mathcal{F}$ et $x_0 \in I_{n-1}^{ar(f)}$ tels que $f(x_0) = x$ et donc $x \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)})$. Il en résulte que

$$x \in \mathcal{B} \cup \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)}).$$

Preuve

Soit $x \in I_\omega$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in I_n$. Si $n = 0$, alors $x \in X$. Si $n > 0$, alors il existe $f \in \mathcal{F}$ et $x_0 \in I_{n-1}^{ar(f)}$ tels que $f(x_0) = x$ et donc $x \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)})$. Il en résulte que $x \in \mathcal{B} \cup \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)})$.

Preuve

Soit $x \in I_\omega$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in I_n$. Si $n = 0$, alors $x \in X$. Si $n > 0$, alors il existe $f \in \mathcal{F}$ et $x_0 \in I_{n-1}^{ar(f)}$ tels que $f(x_0) = x$ et donc $x \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)})$. Il en résulte que

$$x \in \mathcal{B} \cup \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)}).$$

Preuve (suite)

Réciproquement soit $x \in \mathcal{B} \cup \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)})$. Si $x \in \mathcal{B}$, alors $x \in I_\omega$. Supposons donc que $x \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)})$. Alors il existe $f \in \mathcal{F}$ tel que $x \in f(I_\omega^{ar(f)}) \subseteq I_\omega$ puisque cet ensemble est clos par $\mathcal{F}$.

Supposons enfin que E soit une solution de l'équation (1). Alors en particulier E est inductif sur I, d'où $I_\omega \subseteq E$.

Preuve (suite)

Réciproquement soit $x \in \mathcal{B} \cup \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)})$. Si $x \in \mathcal{B}$, alors $x \in I_\omega$. Supposons donc que $x \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)})$. Alors il existe $f \in \mathcal{F}$ tel que $x \in f(I_\omega^{ar(f)}) \subseteq I_\omega$ puisque cet ensemble est clos par $\mathcal{F}$.
Supposons enfin que E soit une solution de l'équation (1). Alors en particulier E est inductif sur I, d'où $I_\omega \subseteq E$.

Preuve (suite)

Réciproquement soit $x \in \mathcal{B} \cup \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)})$. Si $x \in \mathcal{B}$, alors $x \in I_\omega$. Supposons donc que $x \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)})$. Alors il existe $f \in \mathcal{F}$ tel que $x \in f(I_\omega^{ar(f)}) \subseteq I_\omega$ puisque cet ensemble est clos par $\mathcal{F}$.

Supposons enfin que E soit une solution de l'équation (1). Alors en particulier E est inductif sur I, d'où $I_\omega \subseteq E$.

Preuve (suite)

Réciproquement soit $x \in \mathcal{B} \cup \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)})$. Si $x \in \mathcal{B}$, alors $x \in I_\omega$. Supposons donc que $x \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)})$. Alors il existe $f \in \mathcal{F}$ tel que $x \in f(I_\omega^{ar(f)}) \subseteq I_\omega$ puisque cet ensemble est clos par $\mathcal{F}$.

Supposons enfin que E soit une solution de l'équation (1). Alors en particulier E est inductif sur I, d'où $I_\omega \subseteq E$.

Preuve (suite)

Réciproquement soit $x \in \mathcal{B} \cup \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)})$. Si $x \in \mathcal{B}$, alors $x \in I_\omega$. Supposons donc que $x \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)})$. Alors il existe $f \in \mathcal{F}$ tel que $x \in f(I_\omega^{ar(f)}) \subseteq I_\omega$ puisque cet ensemble est clos par $\mathcal{F}$.

Supposons enfin que E soit une solution de l'équation (1). Alors en particulier E est inductif sur I, d'où $I_\omega \subseteq E$.

Preuve (suite)

Réciproquement soit $x \in \mathcal{B} \cup \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)})$. Si $x \in \mathcal{B}$, alors $x \in I_\omega$. Supposons donc que $x \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)})$. Alors il existe $f \in \mathcal{F}$ tel que $x \in f(I_\omega^{ar(f)}) \subseteq I_\omega$ puisque cet ensemble est clos par $\mathcal{F}$.

Supposons enfin que E soit une solution de l'équation (1). Alors en particulier E est inductif sur I, d'où $I_\omega \subseteq E$.

Preuve (suite)

Réciproquement soit $x \in \mathcal{B} \cup \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)})$. Si $x \in \mathcal{B}$, alors $x \in I_\omega$. Supposons donc que $x \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)})$. Alors il existe $f \in \mathcal{F}$ tel que $x \in f(I_\omega^{ar(f)}) \subseteq I_\omega$ puisque cet ensemble est clos par $\mathcal{F}$.
Supposons enfin que E soit une solution de l'équation (1).
Alors en particulier E est inductif sur I, d'où $I_\omega \subseteq E$.

Preuve (suite)

Réciproquement soit $x \in \mathcal{B} \cup \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)})$. Si $x \in \mathcal{B}$, alors $x \in I_\omega$. Supposons donc que $x \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)})$. Alors il existe $f \in \mathcal{F}$ tel que $x \in f(I_\omega^{ar(f)}) \subseteq I_\omega$ puisque cet ensemble est clos par $\mathcal{F}$.
Supposons enfin que E soit une solution de l'équation (1). Alors en particulier E est inductif sur I, d'où $I_\omega \subseteq E$.

Preuve (suite)

Réciproquement soit $x \in \mathcal{B} \cup \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)})$. Si $x \in \mathcal{B}$, alors $x \in I_\omega$. Supposons donc que $x \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(I_\omega^{ar(f)})$. Alors il existe $f \in \mathcal{F}$ tel que $x \in f(I_\omega^{ar(f)}) \subseteq I_\omega$ puisque cet ensemble est clos par $\mathcal{F}$.
Supposons enfin que E soit une solution de l'équation (1). Alors en particulier E est inductif sur I, d'où $I_\omega \subseteq E$.

Entiers naturels

Soit $I = (\mathbb{N}, \{0\}, \{n \mapsto n+1\})$. Alors I_ω n'est autre que $\mathbb{N}$.

Entiers naturels

Soit $I = (\mathbb{N}, \{0\}, \{n \mapsto n+1\})$. Alors I_ω n'est autre que $\mathbb{N}$.

Monoïde libre

Soit A un alphabet (c'est-à-dire un ensemble). On note A^* le monoïde libre avec ϵ le mot vide et *conc* la concaténation. Alors $(A^*, A \cup \{\epsilon\}, \{conc\})_\omega = A^*$.

Monoïde libre

Soit A un alphabet (c'est-à-dire un ensemble). On note A^* le monoïde libre avec ϵ le mot vide et *conc* la concaténation. Alors $(A^*, A \cup \{\epsilon\}, \{conc\})_\omega = A^*$.

Monoïde libre

Soit A un alphabet (c'est-à-dire un ensemble). On note A^* le monoïde libre avec ϵ le mot vide et *conc* la concaténation.

Alors $(A^*, A \cup \{\epsilon\}, \{conc\})_\omega = A^*$.

Monoïde libre

Soit A un alphabet (c'est-à-dire un ensemble). On note A^* le monoïde libre avec ϵ le mot vide et *conc* la concaténation. Alors $(A^*, A \cup \{\epsilon\}, \{conc\})_\omega = A^*$.

Langage de Dyck

Soit $A = \{\mathrm{p}, \mathrm{q}\}$ l'alphabet constitué de deux parenthèses (ouvrante et fermante) symbolisées ici par les lettres "p" et "q" afin de lever les ambiguïtés avec les parenthèses utilisées dans la notation mathématique. Soient les fonctions

$$f_1 : \begin{array}{ccc} A^* & \to & A^* \\ x & \mapsto & \mathrm{p}x\mathrm{q} \end{array}$$

et

$$f_2 : \begin{array}{ccc} A^* \times A^* & \to & A^* \\ (x, y) & \mapsto & xy \; . \end{array}$$

Alors $(A^*, \{\epsilon\}, \{f_1, f_2\})_\omega$ est appelé **langage de Dyck** des parenthésages bien formés.

Langage de Dyck

Soit $A = \{\mathrm{p}, \mathrm{q}\}$ l'alphabet constitué de deux parenthèses (ouvrante et fermante) symbolisées ici par les lettres "p" et "q" afin de lever les ambiguïtés avec les parenthèses utilisées dans la notation mathématique. Soient les fonctions

$$\begin{array}{rccc} f_1 : & A^* & \to & A^* \\ & x & \mapsto & \mathrm{p}x\mathrm{q} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} f_2 : & A^* \times A^* & \to & A^* \\ & (x, y) & \mapsto & xy . \end{array}$$

Alors $(A^*, \{\epsilon\}, \{f_1, f_2\})_\omega$ est appelé **langage de Dyck** des parenthésages bien formés.

Langage de Dyck

Soit $A = \{\mathrm{p}, \mathrm{q}\}$ l'alphabet constitué de deux parenthèses (ouvrante et fermante) symbolisées ici par les lettres "p" et "q" afin de lever les ambiguïtés avec les parenthèses utilisées dans la notation mathématique. Soient les fonctions

$$\begin{array}{rccc} f_1 : & A^* & \to & A^* \\ & x & \mapsto & \mathrm{p}x\mathrm{q} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} f_2 : & A^* \times A^* & \to & A^* \\ & (x, y) & \mapsto & xy\ . \end{array}$$

Alors $(A^*, \{\epsilon\}, \{f_1, f_2\})_\omega$ est appelé **langage de Dyck** des parenthésages bien formés.

Langage de Dyck

Soit $A = \{\mathrm{p}, \mathrm{q}\}$ l'alphabet constitué de deux parenthèses (ouvrante et fermante) symbolisées ici par les lettres "p" et "q" afin de lever les ambiguïtés avec les parenthèses utilisées dans la notation mathématique. Soient les fonctions

$$\begin{array}{rccc} f_1 : & A^* & \to & A^* \\ & x & \mapsto & \mathrm{p}x\mathrm{q} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} f_2 : & A^* \times A^* & \to & A^* \\ & (x, y) & \mapsto & xy \ . \end{array}$$

Alors $(A^*, \{\epsilon\}, \{f_1, f_2\})_\omega$ est appelé **langage de Dyck** des parenthésages bien formés.

Langage de Dyck

Soit $A = \{\mathrm{p}, \mathrm{q}\}$ l'alphabet constitué de deux parenthèses (ouvrante et fermante) symbolisées ici par les lettres "p" et "q" afin de lever les ambiguïtés avec les parenthèses utilisées dans la notation mathématique. Soient les fonctions

$$\begin{array}{rccc} f_1 : & A^* & \rightarrow & A^* \\ & x & \mapsto & \mathrm{p}x\mathrm{q} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} f_2 : & A^* \times A^* & \rightarrow & A^* \\ & (x, y) & \mapsto & xy\ . \end{array}$$

Alors $(A^*, \{\epsilon\}, \{f_1, f_2\})_\omega$ est appelé **langage de Dyck** des parenthésages bien formés.

Langage de Dyck

Soit $A = \{\mathrm{p}, \mathrm{q}\}$ l'alphabet constitué de deux parenthèses (ouvrante et fermante) symbolisées ici par les lettres "p" et "q" afin de lever les ambiguïtés avec les parenthèses utilisées dans la notation mathématique. Soient les fonctions

$$\begin{array}{rccc} f_1 : & A^* & \rightarrow & A^* \\ & x & \mapsto & \mathrm{p}x\mathrm{q} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} f_2 : & A^* \times A^* & \rightarrow & A^* \\ & (x, y) & \mapsto & xy\ . \end{array}$$

Alors $(A^*, \{\epsilon\}, \{f_1, f_2\})_\omega$ est appelé **langage de Dyck** des parenthésages bien formés.

Langage des expressions arithmétiques

Soit $X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un ensemble infini dénombrable dont les éléments sont appelés des **variables**. On suppose que $X \cap \{0,1\} = \emptyset$. Soit $S = \{+, *, \mathrm{p}, \mathrm{q}\}$ un ensemble à quatre éléments tel que $X \cap S = \{0,1\} \cap S = \emptyset$. Soient $A := X \cup \{0,1\} \cup S$ et les deux fonctions

$$\begin{array}{rccc} C_+ : & A^* \times A^* & \to & A^* \\ & (x,y) & \mapsto & \mathrm{p}x + y\mathrm{q} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} C_* : & A^* \times A^* & \to & A^* \\ & (x,y) & \mapsto & \mathrm{p}x * y\mathrm{q}\ . \end{array}$$

Alors $Arith\_Expr := (A^*, V \cup \{0,1\}, \{C_+, C_*\})_\omega$ est appelé l'**ensemble des expressions arithmétiques.**

Langage des expressions arithmétiques

Soit $X = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un ensemble infini dénombrable dont les éléments sont appelés des **variables**. On suppose que $X \cap \{0,1\} = \emptyset$. Soit $S = \{+, *, \mathrm{p}, \mathrm{q}\}$ un ensemble à quatre éléments tel que $X \cap S = \{0,1\} \cap S = \emptyset$. Soient $A := X \cup \{0,1\} \cup S$ et les deux fonctions

$$\begin{array}{llll} C_+ : & A^* \times A^* & \to & A^* \\ & (x,y) & \mapsto & \mathrm{p}x+y\mathrm{q} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{llll} C_* : & A^* \times A^* & \to & A^* \\ & (x,y) & \mapsto & \mathrm{p}x*y\mathrm{q}\ . \end{array}$$

Alors $Arith\_Expr := (A^*, V \cup \{0,1\}, \{C_+, C_*\})_\omega$ est appelé l'**ensemble des expressions arithmétiques.**

Langage des expressions arithmétiques

Soit $X = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un ensemble infini dénombrable dont les éléments sont appelés des **variables**. On suppose que $X \cap \{0, 1\} = \emptyset$. Soit $S = \{+, *, \mathrm{p}, \mathrm{q}\}$ un ensemble à quatre éléments tel que $X \cap S = \{0, 1\} \cap S = \emptyset$. Soient $A := X \cup \{0, 1\} \cup S$ et les deux fonctions

$$\begin{array}{rccc} C_+ : & A^* \times A^* & \to & A^* \\ & (x, y) & \mapsto & \mathrm{p}x + y\mathrm{q} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} C_* : & A^* \times A^* & \to & A^* \\ & (x, y) & \mapsto & \mathrm{p}x * y\mathrm{q}\ . \end{array}$$

Alors $Arith\_Expr := (A^*, V \cup \{0, 1\}, \{C_+, C_*\})_\omega$ est appelé l'**ensemble des expressions arithmétiques.**

Langage des expressions arithmétiques

Soit $X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un ensemble infini dénombrable dont les éléments sont appelés des **variables**. On suppose que $X \cap \{0,1\} = \emptyset$. Soit $S = \{+, *, \mathrm{p}, \mathrm{q}\}$ un ensemble à quatre éléments tel que $X \cap S = \{0,1\} \cap S = \emptyset$. Soient $A := X \cup \{0,1\} \cup S$ et les deux fonctions

$$\begin{array}{llll} C_+ : & A^* \times A^* & \to & A^* \\ & (x,y) & \mapsto & \mathrm{p}x + y\mathrm{q} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{llll} C_* : & A^* \times A^* & \to & A^* \\ & (x,y) & \mapsto & \mathrm{p}x * y\mathrm{q}\ . \end{array}$$

Alors $Arith\_Expr := (A^*, V \cup \{0,1\}, \{C_+, C_*\})_\omega$ est appelé l'**ensemble des expressions arithmétiques.**

Langage des expressions arithmétiques

Soit $X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un ensemble infini dénombrable dont les éléments sont appelés des **variables**. On suppose que $X \cap \{0,1\} = \emptyset$. Soit $S = \{+, *, \mathrm{p}, \mathrm{q}\}$ un ensemble à quatre éléments tel que $X \cap S = \{0,1\} \cap S = \emptyset$. Soient $A := X \cup \{0,1\} \cup S$ et les deux fonctions

$$\begin{array}{rccl} C_+ : & A^* \times A^* & \to & A^* \\ & (x,y) & \mapsto & \mathrm{p}x + y\mathrm{q} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} C_* : & A^* \times A^* & \to & A^* \\ & (x,y) & \mapsto & \mathrm{p}x * y\mathrm{q}\ . \end{array}$$

Alors $Arith\_Expr := (A^*, V \cup \{0,1\}, \{C_+, C_*\})_\omega$ est appelé l'**ensemble des expressions arithmétiques.**

Langage des expressions arithmétiques

Soit $X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un ensemble infini dénombrable dont les éléments sont appelés des **variables**. On suppose que $X \cap \{0,1\} = \emptyset$. Soit $S = \{+, *, \mathrm{p}, \mathrm{q}\}$ un ensemble à quatre éléments tel que $X \cap S = \{0,1\} \cap S = \emptyset$. Soient $A := X \cup \{0,1\} \cup S$ et les deux fonctions

$$\begin{array}{rccc} C_+ : & A^* \times A^* & \to & A^* \\ & (x,y) & \mapsto & \mathrm{p}x + y\mathrm{q} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} C_* : & A^* \times A^* & \to & A^* \\ & (x,y) & \mapsto & \mathrm{p}x * y\mathrm{q}\ . \end{array}$$

Alors $Arith\_Expr := (A^*, V \cup \{0,1\}, \{C_+, C_*\})_\omega$ est appelé l'**ensemble des expressions arithmétiques.**

Langage des expressions arithmétiques

Soit $X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un ensemble infini dénombrable dont les éléments sont appelés des **variables**. On suppose que $X \cap \{0,1\} = \emptyset$. Soit $S = \{+, *, \mathrm{p}, \mathrm{q}\}$ un ensemble à quatre éléments tel que $X \cap S = \{0,1\} \cap S = \emptyset$. Soient $A := X \cup \{0,1\} \cup S$ et les deux fonctions

$$\begin{array}{cccc} C_+ : & A^* \times A^* & \to & A^* \\ & (x,y) & \mapsto & \mathrm{p}x + y\mathrm{q} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{cccc} C_* : & A^* \times A^* & \to & A^* \\ & (x,y) & \mapsto & \mathrm{p}x * y\mathrm{q}\ . \end{array}$$

Alors $Arith\_Expr := (A^*, V \cup \{0,1\}, \{C_+, C_*\})_\omega$ est appelé l'**ensemble des expressions arithmétiques.**

Langage des expressions arithmétiques

Soit $X = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un ensemble infini dénombrable dont les éléments sont appelés des **variables**. On suppose que $X \cap \{0,1\} = \emptyset$. Soit $S = \{+, *, \mathrm{p}, \mathrm{q}\}$ un ensemble à quatre éléments tel que $X \cap S = \{0,1\} \cap S = \emptyset$. Soient $A := X \cup \{0,1\} \cup S$ et les deux fonctions

$$\begin{array}{rccc} C_+ : & A^* \times A^* & \rightarrow & A^* \\ & (x,y) & \mapsto & \mathrm{p}x + y\mathrm{q} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} C_* : & A^* \times A^* & \rightarrow & A^* \\ & (x,y) & \mapsto & \mathrm{p}x * y\mathrm{q}\ . \end{array}$$

Alors $Arith\_Expr := (A^*, V \cup \{0,1\}, \{C_+, C_*\})_\omega$ est appelé l'**ensemble des expressions arithmétiques.**

Langage des expressions arithmétiques

Soit $X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un ensemble infini dénombrable dont les éléments sont appelés des **variables.** On suppose que $X \cap \{0,1\} = \emptyset$. Soit $S = \{+, *, \mathrm{p}, \mathrm{q}\}$ un ensemble à quatre éléments tel que $X \cap S = \{0,1\} \cap S = \emptyset$. Soient $A := X \cup \{0,1\} \cup S$ et les deux fonctions

$$\begin{array}{rccl} C_+ : & A^* \times A^* & \to & A^* \\ & (x,y) & \mapsto & \mathrm{p}x + y\mathrm{q} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} C_* : & A^* \times A^* & \to & A^* \\ & (x,y) & \mapsto & \mathrm{p}x * y\mathrm{q}\ . \end{array}$$

Alors $Arith\_Expr := (A^*, V \cup \{0,1\}, \{C_+, C_*\})_\omega$ est appelé l'**ensemble des expressions arithmétiques.**

Lemme : Principe d'induction structurelle

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Soit $E \subseteq I_\omega$. Si $\mathcal{B} \subseteq E$ et si E est clos par $\mathcal{F}$, alors $E = I_\omega$.

Lemme : Principe d'induction structurelle

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Soit $E \subseteq I_\omega$. Si $\mathcal{B} \subseteq E$ et si E est clos par $\mathcal{F}$, alors $E = I_\omega$.

Lemme : Principe d'induction structurelle

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Soit $E \subseteq I_\omega$. Si $\mathcal{B} \subseteq E$ et si E est clos par $\mathcal{F}$, alors $E = I_\omega$.

Lemme : Principe d'induction structurelle

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Soit $E \subseteq I_\omega$. Si $\mathcal{B} \subseteq E$ et si E est clos par $\mathcal{F}$, alors $E = I_\omega$.

Lemme : Principe d'induction structurelle

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Soit $E \subseteq I_\omega$. Si $\mathcal{B} \subseteq E$ et si E est clos par $\mathcal{F}$, alors $E = I_\omega$.

Preuve

Par hypothèse, E est inductif sous I. Puisque $I_\omega = IND(I)$ et que $IND(I)$ est le plus petit ensemble inductif sous I, alors $I_\omega \subseteq E$. Mais E est contenu dans I_ω, ainsi $E = I_\omega$.

Preuve

Par hypothèse, E est inductif sous I. Puisque $I_\omega = IND(I)$ et que $IND(I)$ est le plus petit ensemble inductif sous I, alors $I_\omega \subseteq E$. Mais E est contenu dans I_ω, ainsi $E = I_\omega$.

Preuve

Par hypothèse, E est inductif sous I. Puisque $I_\omega = IND(I)$ et que $IND(I)$ est le plus petit ensemble inductif sous I, alors $I_\omega \subseteq E$. Mais E est contenu dans I_ω, ainsi $E = I_\omega$.

Preuve

Par hypothèse, E est inductif sous I. Puisque $I_\omega = IND(I)$ et que $IND(I)$ est le plus petit ensemble inductif sous I, alors $I_\omega \subseteq E$. Mais E est contenu dans I_ω, ainsi $E = I_\omega$.

Preuve

Par hypothèse, E est inductif sous I. Puisque $I_\omega = IND(I)$ et que $IND(I)$ est le plus petit ensemble inductif sous I, alors $I_\omega \subseteq E$. Mais E est contenu dans I_ω, ainsi $E = I_\omega$.

Preuve

Par hypothèse, E est inductif sous I. Puisque $I_\omega = IND(I)$ et que $IND(I)$ est le plus petit ensemble inductif sous I, alors $I_\omega \subseteq E$. Mais E est contenu dans I_ω, ainsi $E = I_\omega$.

En guise d'illustration du principe d'induction, on prouve que chaque expression arithmétiques dans *Arith_Expr* a le même nombre de parenthèses ouvrantes (p) et fermantes (q). Soit E le sous-ensemble de *Arith_Expr* consistant en toutes les expressions ayant un nombre égal de parenthèses ouvrantes et fermantes. Notons que E contient $\mathcal{B} = V \cup \{0, 1\}$ puisque ni les variables ni 0 ou 1 ne contiennent de parenthèses. E est clos par $\{C_+, C_*\}$ puisque ces applications introduisent chacune une parenthèse ouvrante et une parenthèse fermante. Alors par le principe d'induction $E = \mathit{Arith\_Expr}$.

En guise d'illustration du principe d'induction, on prouve que chaque expression arithmétiques dans *Arith_Expr* a le même nombre de parenthèses ouvrantes ($\mathtt{p}$) et fermantes ($\mathtt{q}$). Soit E le sous-ensemble de *Arith_Expr* consistant en toutes les expressions ayant un nombre égal de parenthèses ouvrantes et fermantes. Notons que E contient $\mathcal{B} = V \cup \{0, 1\}$ puisque ni les variables ni 0 ou 1 ne contiennent de parenthèses. E est clos par $\{C_+, C_*\}$ puisque ces applications introduisent chacune une parenthèse ouvrante et une parenthèse fermante. Alors par le principe d'induction $E = \mathit{Arith\_Expr}$.

En guise d'illustration du principe d'induction, on prouve que chaque expression arithmétiques dans *Arith_Expr* a le même nombre de parenthèses ouvrantes (p) et fermantes (q). Soit E le sous-ensemble de *Arith_Expr* consistant en toutes les expressions ayant un nombre égal de parenthèses ouvrantes et fermantes. Notons que E contient $\mathcal{B} = V \cup \{0, 1\}$ puisque ni les variables ni 0 ou 1 ne contiennent de parenthèses. E est clos par $\{C_+, C_*\}$ puisque ces applications introduisent chacune une parenthèse ouvrante et une parenthèse fermante. Alors par le principe d'induction $E = Arith\_Expr$.

En guise d'illustration du principe d'induction, on prouve que chaque expression arithmétiques dans *Arith_Expr* a le même nombre de parenthèses ouvrantes (p) et fermantes (q). Soit E le sous-ensemble de *Arith_Expr* consistant en toutes les expressions ayant un nombre égal de parenthèses ouvrantes et fermantes. Notons que E contient $\mathcal{B} = V \cup \{0, 1\}$ puisque ni les variables ni 0 ou 1 ne contiennent de parenthèses. E est clos par $\{C_+, C_*\}$ puisque ces applications introduisent chacune une parenthèse ouvrante et une parenthèse fermante. Alors par le principe d'induction $E = \mathit{Arith\_Expr}$.

En guise d'illustration du principe d'induction, on prouve que chaque expression arithmétiques dans *Arith_Expr* a le même nombre de parenthèses ouvrantes (p) et fermantes (q). Soit E le sous-ensemble de *Arith_Expr* consistant en toutes les expressions ayant un nombre égal de parenthèses ouvrantes et fermantes. Notons que E contient $\mathcal{B} = V \cup \{0, 1\}$ puisque ni les variables ni 0 ou 1 ne contiennent de parenthèses. E est clos par $\{C_+, C_*\}$ puisque ces applications introduisent chacune une parenthèse ouvrante et une parenthèse fermante. Alors par le principe d'induction $E = \mathit{Arith\_Expr}$.

En guise d'illustration du principe d'induction, on prouve que chaque expression arithmétiques dans *Arith_Expr* a le même nombre de parenthèses ouvrantes ($\mathtt{p}$) et fermantes ($\mathtt{q}$). Soit E le sous-ensemble de *Arith_Expr* consistant en toutes les expressions ayant un nombre égal de parenthèses ouvrantes et fermantes. Notons que E contient $\mathcal{B} = V \cup \{0, 1\}$ puisque ni les variables ni 0 ou 1 ne contiennent de parenthèses. E est clos par $\{C_+, C_*\}$ puisque ces applications introduisent chacune une parenthèse ouvrante et une parenthèse fermante. Alors par le principe d'induction $E = \mathit{Arith\_Expr}$.

Définition

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. On dit que I_ω est **(inductivement) libre** ou **non ambigu** si, et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées :

1. La restriction de chaque application $f \in \mathcal{F}$ à l'ensemble $I_\omega^{ar(f)}$ est injective ;
2. Pour chaque $(f, g) \in \mathcal{F}^2$, si $f \neq g$, alors $f(I_\omega^{ar(f)}) \cap g(I_\omega^{ar(g)}) = \emptyset$;
3. Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ et chaque $x \in I_\omega^{ar(f)}$, $f(x) \notin \mathcal{B}$.

Définition

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. On dit que I_ω est **(inductivement) libre** ou **non ambigu** si, et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées :

1. La restriction de chaque application $f \in \mathcal{F}$ à l'ensemble $I_\omega^{ar(f)}$ est injective ;
2. Pour chaque $(f, g) \in \mathcal{F}^2$, si $f \neq g$, alors $f(I_\omega^{ar(f)}) \cap g(I_\omega^{ar(g)}) = \emptyset$;
3. Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ et chaque $x \in I_\omega^{ar(f)}$, $f(x) \notin \mathcal{B}$.

Définition

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. On dit que I_ω est **(inductivement) libre** ou **non ambigu** si, et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées :

1. La restriction de chaque application $f \in \mathcal{F}$ à l'ensemble $I_\omega^{ar(f)}$ est injective ;
2. Pour chaque $(f, g) \in \mathcal{F}^2$, si $f \neq g$, alors $f(I_\omega^{ar(f)}) \cap g(I_\omega^{ar(g)}) = \emptyset$;
3. Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ et chaque $x \in I_\omega^{ar(f)}$, $f(x) \notin \mathcal{B}$.

Définition

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. On dit que I_ω est **(inductivement) libre** ou **non ambigu** si, et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées :

1. La restriction de chaque application $f \in \mathcal{F}$ à l'ensemble $I_\omega^{ar(f)}$ est injective ;
2. Pour chaque $(f, g) \in \mathcal{F}^2$, si $f \neq g$, alors $f(I_\omega^{ar(f)}) \cap g(I_\omega^{ar(g)}) = \emptyset$;
3. Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ et chaque $x \in I_\omega^{ar(f)}$, $f(x) \notin \mathcal{B}$.

Définition

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. On dit que I_ω est **(inductivement) libre** ou **non ambigu** si, et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées :

1. La restriction de chaque application $f \in \mathcal{F}$ à l'ensemble $I_\omega^{ar(f)}$ est injective ;
2. Pour chaque $(f, g) \in \mathcal{F}^2$, si $f \neq g$, alors $f(I_\omega^{ar(f)}) \cap g(I_\omega^{ar(g)}) = \emptyset$;
3. Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ et chaque $x \in I_\omega^{ar(f)}$, $f(x) \notin \mathcal{B}$.

Définition

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. On dit que I_ω est **(inductivement) libre** ou **non ambigu** si, et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées :

1. La restriction de chaque application $f \in \mathcal{F}$ à l'ensemble $I_\omega^{ar(f)}$ est injective ;
2. Pour chaque $(f, g) \in \mathcal{F}^2$, si $f \neq g$, alors $f(I_\omega^{ar(f)}) \cap g(I_\omega^{ar(g)}) = \emptyset$;
3. Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ et chaque $x \in I_\omega^{ar(f)}$, $f(x) \notin \mathcal{B}$.

Définition

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. On dit que I_ω est **(inductivement) libre** ou **non ambigu** si, et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées :

1. La restriction de chaque application $f \in \mathcal{F}$ à l'ensemble $I_\omega^{ar(f)}$ est injective ;
2. Pour chaque $(f, g) \in \mathcal{F}^2$, si $f \neq g$, alors $f(I_\omega^{ar(f)}) \cap g(I_\omega^{ar(g)}) = \emptyset$;
3. Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ et chaque $x \in I_\omega^{ar(f)}$, $f(x) \notin \mathcal{B}$.

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Posons $I_{-1} = \emptyset$. Nous montrons maintenant les lemmes suivants.

Lemme 1. Si I_ω est inductivement libre, alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $I_{n-1} \neq I_n$ et pour chaque $f \in \mathcal{F}$ et chaque $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, $f(x) \notin I_n$.

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Posons $I_{-1} = \emptyset$.
Nous montrons maintenant les lemmes suivants.
Lemme 1. Si I_ω est inductivement libre, alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $I_{n-1} \neq I_n$ et pour chaque $f \in \mathcal{F}$ et chaque $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, $f(x) \notin I_n$.

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Posons $I_{-1} = \emptyset$. Nous montrons maintenant les lemmes suivants.

Lemme 1. Si I_ω est inductivement libre, alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $I_{n-1} \neq I_n$ et pour chaque $f \in \mathcal{F}$ et chaque $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, $f(x) \notin I_n$.

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Posons $I_{-1} = \emptyset$. Nous montrons maintenant les lemmes suivants.

Lemme 1. Si I_ω est inductivement libre, alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $I_{n-1} \neq I_n$ et pour chaque $f \in \mathcal{F}$ et chaque $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, $f(x) \notin I_n$.

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Posons $I_{-1} = \emptyset$. Nous montrons maintenant les lemmes suivants.

Lemme 1. Si I_ω est inductivement libre, alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $I_{n-1} \neq I_n$ et pour chaque $f \in \mathcal{F}$ et chaque $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, $f(x) \notin I_n$.

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Posons $I_{-1} = \emptyset$.
Nous montrons maintenant les lemmes suivants.

Lemme 1. Si I_ω est inductivement libre, alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $I_{n-1} \neq I_n$ et pour chaque $f \in \mathcal{F}$ et chaque $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, $f(x) \notin I_n$.

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Posons $I_{-1} = \emptyset$. Nous montrons maintenant les lemmes suivants.

Lemme 1. Si I_ω est inductivement libre, alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $I_{n-1} \neq I_n$ et pour chaque $f \in \mathcal{F}$ et chaque $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, $f(x) \notin I_n$.

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Posons $I_{-1} = \emptyset$. Nous montrons maintenant les lemmes suivants.

Lemme 1. Si I_ω est inductivement libre, alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $I_{n-1} \neq I_n$ et pour chaque $f \in \mathcal{F}$ et chaque $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, $f(x) \notin I_n$.

Preuve

Nous procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. C'est trivial pour $n = 0$ puisque $I_{-1} = \emptyset$ et $I_0 = \mathcal{B}$ et par la condition (3) des ensembles inductivement libres. Soit un entier $n > 0$, on prouve par induction sur $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq i$, que si $f \in \mathcal{F}$ et $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, alors $f(x) \notin I_k$. Pour $k = 0$, cela s'ensuit de la condition (3) des ensembles inductivement libres. Maintenant, supposons que si $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, alors $f(x) \notin I_k$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Si $f(x) \in I_{k+1}$, alors $f(x) \in I_{k+1} \setminus I_k$. Par la condition (2) des ensembles inductivement libres et la définition de I_{k+1}, il existe $y \in I_k^{ar(f)}$ tel que $f(x) = f(y)$. Puisque f est injectif sur $I_\omega^{ar(f)}$, nous avons $x = y$. Ainsi $x \in I_k^{ar(f)}$ pour $k < n$, ce qui contredit l'hypothèse que $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$. Donc $f(x) \notin I_{k+1}$, ce qui établit l'étape d'induction sur k. Mais cela montre aussi que $I_n \neq I_{n+1}$, ce qui conclue l'étape d'induction pour n.

Preuve

Nous procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. C'est trivial pour $n = 0$ puisque $I_{-1} = \emptyset$ et $I_0 = \mathcal{B}$ et par la condition (3) des ensembles inductivement libres. Soit un entier $n > 0$, on prouve par induction sur $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq i$, que si $f \in \mathcal{F}$ et $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, alors $f(x) \notin I_k$. Pour $k = 0$, cela s'ensuit de la condition (3) des ensembles inductivement libres. Maintenant, supposons que si $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, alors $f(x) \notin I_k$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Si $f(x) \in I_{k+1}$, alors $f(x) \in I_{k+1} \setminus I_k$. Par la condition (2) des ensembles inductivement libres et la définition de I_{k+1}, il existe $y \in I_k^{ar(f)}$ tel que $f(x) = f(y)$. Puisque f est injectif sur $I_\omega^{ar(f)}$, nous avons $x = y$. Ainsi $x \in I_k^{ar(f)}$ pour $k < n$, ce qui contredit l'hypothèse que $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$. Donc $f(x) \notin I_{k+1}$, ce qui établit l'étape d'induction sur k. Mais cela montre aussi que $I_n \neq I_{n+1}$, ce qui conclue l'étape d'induction pour n.

Preuve

Nous procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. C'est trivial pour $n = 0$ puisque $I_{-1} = \emptyset$ et $I_0 = \mathcal{B}$ et par la condition (3) des ensembles inductivement libres. Soit un entier $n > 0$, on prouve par induction sur $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq i$, que si $f \in \mathcal{F}$ et $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, alors $f(x) \notin I_k$. Pour $k = 0$, cela s'ensuit de la condition (3) des ensembles inductivement libres. Maintenant, supposons que si $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, alors $f(x) \notin I_k$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Si $f(x) \in I_{k+1}$, alors $f(x) \in I_{k+1} \setminus I_k$. Par la condition (2) des ensembles inductivement libres et la définition de I_{k+1}, il existe $y \in I_k^{ar(f)}$ tel que $f(x) = f(y)$. Puisque f est injectif sur $I_\omega^{ar(f)}$, nous avons $x = y$. Ainsi $x \in I_k^{ar(f)}$ pour $k < n$, ce qui contredit l'hypothèse que $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$. Donc $f(x) \notin I_{k+1}$, ce qui établit l'étape d'induction sur k. Mais cela montre aussi que $I_n \neq I_{n+1}$, ce qui conclue l'étape d'induction pour n.

Preuve

Nous procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. C'est trivial pour $n = 0$ puisque $I_{-1} = \emptyset$ et $I_0 = \mathcal{B}$ et par la condition (3) des ensembles inductivement libres. Soit un entier $n > 0$, on prouve par induction sur $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq i$, que si $f \in \mathcal{F}$ et $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, alors $f(x) \notin I_k$. Pour $k = 0$, cela s'ensuit de la condition (3) des ensembles inductivement libres. Maintenant, supposons que si $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, alors $f(x) \notin I_k$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Si $f(x) \in I_{k+1}$, alors $f(x) \in I_{k+1} \setminus I_k$. Par la condition (2) des ensembles inductivement libres et la définition de I_{k+1}, il existe $y \in I_k^{ar(f)}$ tel que $f(x) = f(y)$. Puisque f est injectif sur $I_\omega^{ar(f)}$, nous avons $x = y$. Ainsi $x \in I_k^{ar(f)}$ pour $k < n$, ce qui contredit l'hypothèse que $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$. Donc $f(x) \notin I_{k+1}$, ce qui établit l'étape d'induction sur k. Mais cela montre aussi que $I_n \neq I_{n+1}$, ce qui conclut l'étape d'induction pour n.

Preuve

Nous procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. C'est trivial pour $n = 0$ puisque $I_{-1} = \emptyset$ et $I_0 = \mathcal{B}$ et par la condition (3) des ensembles inductivement libres. Soit un entier $n > 0$, on prouve par induction sur $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq i$, que si $f \in \mathcal{F}$ et $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, alors $f(x) \notin I_k$. Pour $k = 0$, cela s'ensuit de la condition (3) des ensembles inductivement libres.

Maintenant, supposons que si $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, alors $f(x) \notin I_k$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Si $f(x) \in I_{k+1}$, alors $f(x) \in I_{k+1} \setminus I_k$. Par la condition (2) des ensembles inductivement libres et la définition de I_{k+1}, il existe $y \in I_k^{ar(f)}$ tel que $f(x) = f(y)$. Puisque f est injectif sur $I_\omega^{ar(f)}$, nous avons $x = y$. Ainsi $x \in I_k^{ar(f)}$ pour $k < n$, ce qui contredit l'hypothèse que $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$. Donc $f(x) \notin I_{k+1}$, ce qui établit l'étape d'induction sur k. Mais cela montre aussi que $I_n \neq I_{n+1}$, ce qui conclue l'étape d'induction pour n.

Preuve

Nous procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. C'est trivial pour $n = 0$ puisque $I_{-1} = \emptyset$ et $I_0 = \mathcal{B}$ et par la condition (3) des ensembles inductivement libres. Soit un entier $n > 0$, on prouve par induction sur $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq i$, que si $f \in \mathcal{F}$ et $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, alors $f(x) \notin I_k$. Pour $k = 0$, cela s'ensuit de la condition (3) des ensembles inductivement libres. Maintenant, supposons que si $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, alors $f(x) \notin I_k$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Si $f(x) \in I_{k+1}$, alors $f(x) \in I_{k+1} \setminus I_k$. Par la condition (2) des ensembles inductivement libres et la définition de I_{k+1}, il existe $y \in I_k^{ar(f)}$ tel que $f(x) = f(y)$. Puisque f est injectif sur $I_\omega^{ar(f)}$, nous avons $x = y$. Ainsi $x \in I_k^{ar(f)}$ pour $k < n$, ce qui contredit l'hypothèse que $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$. Donc $f(x) \notin I_{k+1}$, ce qui établit l'étape d'induction sur k. Mais cela montre aussi que $I_n \neq I_{n+1}$, ce qui conclut l'étape d'induction pour n.

Preuve

Nous procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. C'est trivial pour $n = 0$ puisque $I_{-1} = \emptyset$ et $I_0 = \mathcal{B}$ et par la condition (3) des ensembles inductivement libres. Soit un entier $n > 0$, on prouve par induction sur $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq i$, que si $f \in \mathcal{F}$ et $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, alors $f(x) \notin I_k$. Pour $k = 0$, cela s'ensuit de la condition (3) des ensembles inductivement libres. Maintenant, supposons que si $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, alors $f(x) \notin I_k$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Si $f(x) \in I_{k+1}$, alors $f(x) \in I_{k+1} \setminus I_k$. Par la condition (2) des ensembles inductivement libres et la définition de I_{k+1}, il existe $y \in I_k^{ar(f)}$ tel que $f(x) = f(y)$. Puisque f est injectif sur $I_\omega^{ar(f)}$, nous avons $x = y$. Ainsi $x \in I_k^{ar(f)}$ pour $k < n$, ce qui contredit l'hypothèse que $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$. Donc $f(x) \notin I_{k+1}$, ce qui établit l'étape d'induction sur k. Mais cela montre aussi que $I_n \neq I_{n+1}$, ce qui conclue l'étape d'induction pour n.

Preuve

Nous procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. C'est trivial pour $n = 0$ puisque $I_{-1} = \emptyset$ et $I_0 = \mathcal{B}$ et par la condition (3) des ensembles inductivement libres. Soit un entier $n > 0$, on prouve par induction sur $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq i$, que si $f \in \mathcal{F}$ et $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, alors $f(x) \notin I_k$. Pour $k = 0$, cela s'ensuit de la condition (3) des ensembles inductivement libres. Maintenant, supposons que si $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, alors $f(x) \notin I_k$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Si $f(x) \in I_{k+1}$, alors $f(x) \in I_{k+1} \setminus I_k$. Par la condition (2) des ensembles inductivement libres et la définition de I_{k+1}, il existe $y \in I_k^{ar(f)}$ tel que $f(x) = f(y)$. Puisque f est injectif sur $I_\omega^{ar(f)}$, nous avons $x = y$. Ainsi $x \in I_k^{ar(f)}$ pour $k < n$, ce qui contredit l'hypothèse que $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$. Donc $f(x) \notin I_{k+1}$, ce qui établit l'étape d'induction sur k. Mais cela montre aussi que $I_n \neq I_{n+1}$, ce qui conclue l'étape d'induction pour n.

Preuve

Nous procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. C'est trivial pour $n = 0$ puisque $I_{-1} = \emptyset$ et $I_0 = \mathcal{B}$ et par la condition (3) des ensembles inductivement libres. Soit un entier $n > 0$, on prouve par induction sur $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq i$, que si $f \in \mathcal{F}$ et $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, alors $f(x) \notin I_k$. Pour $k = 0$, cela s'ensuit de la condition (3) des ensembles inductivement libres. Maintenant, supposons que si $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, alors $f(x) \notin I_k$ pour $0 \leq k \leq n - 1$. Si $f(x) \in I_{k+1}$, alors $f(x) \in I_{k+1} \setminus I_k$. Par la condition (2) des ensembles inductivement libres et la définition de I_{k+1}, il existe $y \in I_k^{ar(f)}$ tel que $f(x) = f(y)$. Puisque f est injectif sur $I_\omega^{ar(f)}$, nous avons $x = y$. Ainsi $x \in I_k^{ar(f)}$ pour $k < n$, ce qui contredit l'hypothèse que $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$. Donc $f(x) \notin I_{k+1}$, ce qui établit l'étape d'induction sur k. Mais cela montre aussi que $I_n \neq I_{n+1}$, ce qui conclue l'étape d'induction pour n.

Preuve

Nous procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. C'est trivial pour $n = 0$ puisque $I_{-1} = \emptyset$ et $I_0 = \mathcal{B}$ et par la condition (3) des ensembles inductivement libres. Soit un entier $n > 0$, on prouve par induction sur $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq i$, que si $f \in \mathcal{F}$ et $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, alors $f(x) \notin I_k$. Pour $k = 0$, cela s'ensuit de la condition (3) des ensembles inductivement libres. Maintenant, supposons que si $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, alors $f(x) \notin I_k$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Si $f(x) \in I_{k+1}$, alors $f(x) \in I_{k+1} \setminus I_k$. Par la condition (2) des ensembles inductivement libres et la définition de I_{k+1}, il existe $y \in I_k^{ar(f)}$ tel que $f(x) = f(y)$. Puisque f est injectif sur $I_\omega^{ar(f)}$, nous avons $x = y$. Ainsi $x \in I_k^{ar(f)}$ pour $k < n$, ce qui contredit l'hypothèse que $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$. Donc $f(x) \notin I_{k+1}$, ce qui établit l'étape d'induction sur k. Mais cela montre aussi que $I_n \neq I_{n+1}$, ce qui conclue l'étape d'induction pour n.

Preuve

Nous procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. C'est trivial pour $n = 0$ puisque $I_{-1} = \emptyset$ et $I_0 = \mathcal{B}$ et par la condition (3) des ensembles inductivement libres. Soit un entier $n > 0$, on prouve par induction sur $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq i$, que si $f \in \mathcal{F}$ et $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, alors $f(x) \notin I_k$. Pour $k = 0$, cela s'ensuit de la condition (3) des ensembles inductivement libres. Maintenant, supposons que si $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, alors $f(x) \notin I_k$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Si $f(x) \in I_{k+1}$, alors $f(x) \in I_{k+1} \setminus I_k$. Par la condition (2) des ensembles inductivement libres et la définition de I_{k+1}, il existe $y \in I_k^{ar(f)}$ tel que $f(x) = f(y)$. Puisque f est injectif sur $I_\omega^{ar(f)}$, nous avons $x = y$. Ainsi $x \in I_k^{ar(f)}$ pour $k < n$, ce qui contredit l'hypothèse que $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$. Donc $f(x) \notin I_{k+1}$, ce qui établit l'étape d'induction sur k. Mais cela montre aussi que $I_n \neq I_{n+1}$, ce qui conclue l'étape d'induction pour n.

Preuve

Nous procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. C'est trivial pour $n = 0$ puisque $I_{-1} = \emptyset$ et $I_0 = \mathcal{B}$ et par la condition (3) des ensembles inductivement libres. Soit un entier $n > 0$, on prouve par induction sur $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq i$, que si $f \in \mathcal{F}$ et $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, alors $f(x) \notin I_k$. Pour $k = 0$, cela s'ensuit de la condition (3) des ensembles inductivement libres. Maintenant, supposons que si $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, alors $f(x) \notin I_k$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Si $f(x) \in I_{k+1}$, alors $f(x) \in I_{k+1} \setminus I_k$. Par la condition (2) des ensembles inductivement libres et la définition de I_{k+1}, il existe $y \in I_k^{ar(f)}$ tel que $f(x) = f(y)$. Puisque f est injectif sur $I_\omega^{ar(f)}$, nous avons $x = y$. Ainsi $x \in I_k^{ar(f)}$ pour $k < n$, ce qui contredit l'hypothèse que $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$. Donc $f(x) \notin I_{k+1}$, ce qui établit l'étape d'induction sur k. Mais cela montre aussi que $I_n \neq I_{n+1}$, ce qui conclue l'étape d'induction pour n.

Preuve

Nous procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. C'est trivial pour $n = 0$ puisque $I_{-1} = \emptyset$ et $I_0 = \mathcal{B}$ et par la condition (3) des ensembles inductivement libres. Soit un entier $n > 0$, on prouve par induction sur $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq i$, que si $f \in \mathcal{F}$ et $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, alors $f(x) \notin I_k$. Pour $k = 0$, cela s'ensuit de la condition (3) des ensembles inductivement libres. Maintenant, supposons que si $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, alors $f(x) \notin I_k$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Si $f(x) \in I_{k+1}$, alors $f(x) \in I_{k+1} \setminus I_k$. Par la condition (2) des ensembles inductivement libres et la définition de I_{k+1}, il existe $y \in I_k^{ar(f)}$ tel que $f(x) = f(y)$. Puisque f est injectif sur $I_\omega^{ar(f)}$, nous avons $x = y$. Ainsi $x \in I_k^{ar(f)}$ pour $k < n$, ce qui contredit l'hypothèse que $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$. Donc $f(x) \notin I_{k+1}$, ce qui établit l'étape d'induction sur k. Mais cela montre aussi que $I_n \neq I_{n+1}$, ce qui conclut l'étape d'induction pour n.

Preuve

Nous procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. C'est trivial pour $n = 0$ puisque $I_{-1} = \emptyset$ et $I_0 = \mathcal{B}$ et par la condition (3) des ensembles inductivement libres. Soit un entier $n > 0$, on prouve par induction sur $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq i$, que si $f \in \mathcal{F}$ et $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, alors $f(x) \notin I_k$. Pour $k = 0$, cela s'ensuit de la condition (3) des ensembles inductivement libres. Maintenant, supposons que si $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, alors $f(x) \notin I_k$ pour $0 \leq k \leq n - 1$. Si $f(x) \in I_{k+1}$, alors $f(x) \in I_{k+1} \setminus I_k$. Par la condition (2) des ensembles inductivement libres et la définition de I_{k+1}, il existe $y \in I_k^{ar(f)}$ tel que $f(x) = f(y)$. Puisque f est injectif sur $I_\omega^{ar(f)}$, nous avons $x = y$. Ainsi $x \in I_k^{ar(f)}$ pour $k < n$, ce qui contredit l'hypothèse que $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$. Donc $f(x) \notin I_{k+1}$, ce qui établit l'étape d'induction sur k. Mais cela montre aussi que $I_n \neq I_{n+1}$, ce qui conclut l'étape d'induction pour n.

Lemme

Si I_ω est inductivement libre, alors quel que soit $x \in I_\omega$, il existe un plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in I_n$ et $x \notin I_k$ pour tout $k < n$.

Lemme

Si I_ω est inductivement libre, alors quel que soit $x \in I_\omega$, il existe un plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in I_n$ et $x \notin I_k$ pour tout $k < n$.

Lemme

Si I_ω est inductivement libre, alors quel que soit $x \in I_\omega$, il existe un plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in I_n$ et $x \notin I_k$ pour tout $k < n$.

Preuve

Soit $x \in I_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Alors $\{m \in \mathbb{N} : x \in I_m\} \neq \emptyset$. Comme $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante, dès que $x \in I_m$, $x \in I_n$ pour tout $n \geq m$. Soit alors $n = \min\{m \in \mathbb{N} : x \in I_m\}$. On a donc $x \in I_n$ et si $m < n$, $x \notin I_m$.

Preuve

Soit $x \in I_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Alors $\{m \in \mathbb{N} : x \in I_m\} \neq \emptyset$. Comme $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante, dès que $x \in I_m$, $x \in I_n$ pour tout $n \geq m$. Soit alors $n = \min\{m \in \mathbb{N} : x \in I_m\}$. On a donc $x \in I_n$ et si $m < n$, $x \notin I_m$.

Preuve

Soit $x \in I_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Alors $\{m \in \mathbb{N} : x \in I_m\} \neq \emptyset$. Comme $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante, dès que $x \in I_m$, $x \in I_n$ pour tout $n \geq m$. Soit alors $n = \min\{m \in \mathbb{N} : x \in I_m\}$. On a donc $x \in I_n$ et si $m < n$, $x \notin I_m$.

Preuve

Soit $x \in I_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Alors $\{m \in \mathbb{N} : x \in I_m\} \neq \emptyset$. Comme $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante, dès que $x \in I_m$, $x \in I_n$ pour tout $n \geq m$. Soit alors $n = \min\{m \in \mathbb{N} : x \in I_m\}$. On a donc $x \in I_n$ et si $m < n$, $x \notin I_m$.

Preuve

Soit $x \in I_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Alors $\{m \in \mathbb{N} : x \in I_m\} \neq \emptyset$. Comme $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante, dès que $x \in I_m$, $x \in I_n$ pour tout $n \geq m$. Soit alors $n = \min\{m \in \mathbb{N} : x \in I_m\}$. On a donc $x \in I_n$ et si $m < n$, $x \notin I_m$.

Preuve

Soit $x \in I_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Alors $\{m \in \mathbb{N} : x \in I_m\} \neq \emptyset$. Comme $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante, dès que $x \in I_m$, $x \in I_n$ pour tout $n \geq m$. Soit alors $n = \min\{m \in \mathbb{N} : x \in I_m\}$. On a donc $x \in I_n$ et si $m < n$, $x \notin I_m$.

Preuve

Soit $x \in I_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Alors $\{m \in \mathbb{N} : x \in I_m\} \neq \emptyset$. Comme $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante, dès que $x \in I_m$, $x \in I_n$ pour tout $n \geq m$. Soit alors $n = \min\{m \in \mathbb{N} : x \in I_m\}$. On a donc $x \in I_n$ et si $m < n$, $x \notin I_m$.

Preuve

Soit $x \in I_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Alors $\{m \in \mathbb{N} : x \in I_m\} \neq \emptyset$. Comme $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante, dès que $x \in I_m$, $x \in I_n$ pour tout $n \geq m$. Soit alors $n = \min\{m \in \mathbb{N} : x \in I_m\}$. On a donc $x \in I_n$ et si $m < n$, $x \notin I_m$.

Preuve

Soit $x \in I_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Alors $\{m \in \mathbb{N} : x \in I_m\} \neq \emptyset$. Comme $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante, dès que $x \in I_m$, $x \in I_n$ pour tout $n \geq m$. Soit alors $n = \min\{m \in \mathbb{N} : x \in I_m\}$. On a donc $x \in I_n$ et si $m < n$, $x \notin I_m$.

Remarque

Moralement dire qu'un ensemble est inductivement libre signifie que tout élément de I_ω ne peut être construit que d'une et une seule façon par application des règles de $\mathcal{F}$. Ainsi quel que soit $x \in I_\omega$, alors soit il existe un unique $c \in \mathcal{B}$ tel que $x = c$, soit il existe une et une seule application $f \in \mathcal{F}$ et un et un seul $v \in I_\omega^{ar(f)}$ tels que $x = f(v)$.

Remarque

Moralement dire qu'un ensemble est inductivement libre signifie que tout élément de I_ω ne peut être construit que d'une et une seule façon par application des règles de $\mathcal{F}$.

Ainsi quel que soit $x \in I_\omega$, alors soit il existe un unique $c \in \mathcal{B}$ tel que $x = c$, soit il existe une et une seule application $f \in \mathcal{F}$ et un et un seul $v \in I_\omega^{ar(f)}$ tels que $x = f(v)$.

Remarque

Moralement dire qu'un ensemble est inductivement libre signifie que tout élément de I_ω ne peut être construit que d'une et une seule façon par application des règles de $\mathcal{F}$. Ainsi quel que soit $x \in I_\omega$, alors soit il existe un unique $c \in \mathcal{B}$ tel que $x = c$, soit il existe une et une seule application $f \in \mathcal{F}$ et un et un seul $v \in I_\omega^{ar(f)}$ tels que $x = f(v)$.

Remarque

Moralement dire qu'un ensemble est inductivement libre signifie que tout élément de I_ω ne peut être construit que d'une et une seule façon par application des règles de $\mathcal{F}$. Ainsi quel que soit $x \in I_\omega$, alors soit il existe un unique $c \in \mathcal{B}$ tel que $x = c$, soit il existe une et une seule application $f \in \mathcal{F}$ et un et un seul $v \in I_\omega^{ar(f)}$ tels que $x = f(v)$.

Remarque

Moralement dire qu'un ensemble est inductivement libre signifie que tout élément de I_ω ne peut être construit que d'une et une seule façon par application des règles de $\mathcal{F}$. Ainsi quel que soit $x \in I_\omega$, alors soit il existe un unique $c \in \mathcal{B}$ tel que $x = c$, soit il existe une et une seule application $f \in \mathcal{F}$ et un et un seul $v \in I_\omega^{ar(f)}$ tels que $x = f(v)$.

Remarque

Moralement dire qu'un ensemble est inductivement libre signifie que tout élément de I_ω ne peut être construit que d'une et une seule façon par application des règles de $\mathcal{F}$. Ainsi quel que soit $x \in I_\omega$, alors soit il existe un unique $c \in \mathcal{B}$ tel que $x = c$, soit il existe une et une seule application $f \in \mathcal{F}$ et un et un seul $v \in I_\omega^{ar(f)}$ tels que $x = f(v)$.

Remarque

Moralement dire qu'un ensemble est inductivement libre signifie que tout élément de I_ω ne peut être construit que d'une et une seule façon par application des règles de $\mathcal{F}$. Ainsi quel que soit $x \in I_\omega$, alors soit il existe un unique $c \in \mathcal{B}$ tel que $x = c$, soit il existe une et une seule application $f \in \mathcal{F}$ et un et un seul $v \in I_\omega^{ar(f)}$ tels que $x = f(v)$.

Contre-exemple

Considérons le triplet d'induction suivant $I := (\mathbb{N}^2, \{(0,0)\}, \{f : (m,n) \mapsto (m+1,n), g : (m,n) \mapsto (m,n+1)\})$. Alors I_ω n'est pas inductivement libre. En effet le couple $(1,1)$ s'obtient à partir de $(0,1)$ en utilisant f ou à partir de $(1,0)$ en utilisant la règle g.

Contre-exemple

Considérons le triplet d'induction suivant $I := (\mathbb{N}^2, \{(0,0)\}, \{f : (m,n) \mapsto (m+1,n), g : (m,n) \mapsto (m,n+1)\})$. Alors I_ω n'est pas inductivement libre. En effet le couple $(1,1)$ s'obtient à partir de $(0,1)$ en utilisant f ou à partir de $(1,0)$ en utilisant la règle g.

Contre-exemple

Considérons le triplet d'induction suivant $I := (\mathbb{N}^2, \{(0,0)\}, \{f : (m,n) \mapsto (m+1,n), g : (m,n) \mapsto (m,n+1)\})$. Alors I_ω n'est pas inductivement libre. En effet le couple $(1,1)$ s'obtient à partir de $(0,1)$ en utilisant f ou à partir de $(1,0)$ en utilisant la règle g.

Contre-exemple

Considérons le triplet d'induction suivant $I := (\mathbb{N}^2, \{(0,0)\}, \{f : (m,n) \mapsto (m+1,n), g : (m,n) \mapsto (m,n+1)\})$. Alors I_ω n'est pas inductivement libre. En effet le couple $(1,1)$ s'obtient à partir de $(0,1)$ en utilisant f ou à partir de $(1,0)$ en utilisant la règle g.

Contre-exemple

Considérons le triplet d'induction suivant $I := (\mathbb{N}^2, \{(0,0)\}, \{f : (m,n) \mapsto (m+1,n), g : (m,n) \mapsto (m,n+1)\})$. Alors I_ω n'est pas inductivement libre. En effet le couple $(1,1)$ s'obtient à partir de $(0,1)$ en utilisant f ou à partir de $(1,0)$ en utilisant la règle g.

Contre-exemple

Considérons le triplet d'induction suivant $I := (\mathbb{N}^2, \{(0,0)\}, \{f : (m,n) \mapsto (m+1,n), g : (m,n) \mapsto (m,n+1)\})$. Alors I_ω n'est pas inductivement libre. En effet le couple $(1,1)$ s'obtient à partir de $(0,1)$ en utilisant f ou à partir de $(1,0)$ en utilisant la règle g.

Équation de point fixe

Si $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction pour lequel I_ω est inductivement libre, alors I_ω est maintenant la plus petite solution de l'équation

$$X = \mathcal{B} + \sum_{f \in \mathcal{F}} f(X^{ar(f)}) \tag{2}$$

où $+$ et $\sum$ représentent la somme disjointe ensembliste.

Équation de point fixe

Si $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction pour lequel I_ω est inductivement libre, alors I_ω est maintenant la plus petite solution de l'équation

$$X = \mathcal{B} + \sum_{f \in \mathcal{F}} f(X^{ar(f)}) \tag{2}$$

où $+$ et $\sum$ représentent la somme disjointe ensembliste.

Équation de point fixe

Si $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction pour lequel I_ω est inductivement libre, alors I_ω est maintenant la plus petite solution de l'équation

$$X = \mathcal{B} + \sum_{f \in \mathcal{F}} f(X^{ar(f)}) \tag{2}$$

où $+$ et $\sum$ représentent la somme disjointe ensembliste.

Équation de point fixe

Si $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction pour lequel I_ω est inductivement libre, alors I_ω est maintenant la plus petite solution de l'équation

$$X = \mathcal{B} + \sum_{f \in \mathcal{F}} f(X^{ar(f)}) \tag{2}$$

où $+$ et $\sum$ représentent la somme disjointe ensembliste.

Exemple 1

L'ensemble des entiers naturels est inductivement libre.

Nous avons notamment : $\mathbb{N} = \{0\} + succ(\mathbb{N})$ où $succ : n \mapsto n + 1$.

Exemple 1

L'ensemble des entiers naturels est inductivement libre. Nous avons notamment : $\mathbb{N} = \{0\} + succ(\mathbb{N})$ où $succ : n \mapsto n + 1$.

Exemple 1

L'ensemble des entiers naturels est inductivement libre. Nous avons notamment : $\mathbb{N} = \{0\} + \mathit{succ}(\mathbb{N})$ où $\mathit{succ} : n \mapsto n + 1$.

(Contre-)Exemple 2

Le monoïde libre A^* tel qu'on l'a présenté n'est pas inductivement libre. En effet un mot non vide peut être obtenu par concaténation de plusieurs façons.

(Contre-)Exemple 2

Le monoïde libre A^* tel qu'on l'a présenté n'est pas inductivement libre. En effet un mot non vide peut être obtenu par concaténation de plusieurs façons.

Exemple 3

On appelle **signature** un ensemble $\mathbb{N}$-gradué, *i.e.*, un ensemble Σ muni d'une application $ar : \Sigma \to \mathbb{N}$. On note pour $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma_n := \{f \in \Sigma : ar(f) = n\}$. Si $f \in \Sigma$ et $ar(f) = n$, on dit que f est d'arité n ou que f est n-aire ; si $n \geq 1$, f est un **symbole fonctionnel**, et si $n = 0$, c'est un **symbole de constante**. On définit l'ensemble des **Σ-termes finis** T_Σ par induction structurelle sur $(\Sigma^*, \Sigma_0, \{c_f : f \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \Sigma_n\})$ où l'on a

$$\begin{array}{rlcl} c_f : & (\Sigma^*)^{ar(f)} & \to & \Sigma^* \\ & (t_1, \ldots, t_{ar(f)}) & \mapsto & ft_1 \ldots t_{ar(f)} . \end{array}$$

On montre facilement que T_Σ est inductivement libre et, bien entendu,

$$T_\Sigma = \Sigma_0 + \sum_{f \in \Sigma,\ ar(f) > 0} f \underbrace{T_\Sigma \ldots T_\Sigma}_{ar(f) \text{ fois}} .$$

Exemple 3

On appelle **signature** un ensemble $\mathbb{N}$-gradué, *i.e.*, un ensemble Σ muni d'une application $ar : \Sigma \to \mathbb{N}$. On note pour $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma_n := \{f \in \Sigma : ar(f) = n\}$. Si $f \in \Sigma$ et $ar(f) = n$, on dit que f est d'arité n ou que f est n-aire ; si $n \geq 1$, f est un **symbole fonctionnel**, et si $n = 0$, c'est un **symbole de constante**. On définit l'ensemble des **Σ-termes finis** T_Σ par induction structurelle sur $(\Sigma^*, \Sigma_0, \{c_f : f \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \Sigma_n\})$ où l'on a

$$\begin{array}{rrcl} c_f : & (\Sigma^*)^{ar(f)} & \to & \Sigma^* \\ & (t_1, \ldots, t_{ar(f)}) & \mapsto & f t_1 \ldots t_{ar(f)} . \end{array}$$

On montre facilement que T_Σ est inductivement libre et, bien entendu,

$$T_\Sigma = \Sigma_0 + \sum_{f \in \Sigma,\ ar(f) > 0} f \underbrace{T_\Sigma \ldots T_\Sigma}_{ar(f)\ fois} .$$

Exemple 3

On appelle **signature** un ensemble $\mathbb{N}$-gradué, *i.e.*, un ensemble Σ muni d'une application $ar : \Sigma \to \mathbb{N}$. On note pour $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma_n := \{f \in \Sigma : ar(f) = n\}$. Si $f \in \Sigma$ et $ar(f) = n$, on dit que f est d'arité n ou que f est n-aire ; si $n \geq 1$, f est un **symbole fonctionnel**, et si $n = 0$, c'est un **symbole de constante**. On définit l'ensemble des **Σ-termes finis** T_Σ par induction structurelle sur $(\Sigma^*, \Sigma_0, \{c_f : f \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \Sigma_n\})$ où l'on a

$$\begin{array}{rccl} c_f : & (\Sigma^*)^{ar(f)} & \to & \Sigma^* \\ & (t_1, \ldots, t_{ar(f)}) & \mapsto & f t_1 \ldots t_{ar(f)} \ . \end{array}$$

On montre facilement que T_Σ est inductivement libre et, bien entendu,

$$T_\Sigma = \Sigma_0 + \sum_{f \in \Sigma,\ ar(f) > 0} f \underbrace{T_\Sigma \ldots T_\Sigma}_{ar(f)\ fois} \ .$$

Exemple 3

On appelle **signature** un ensemble $\mathbb{N}$-gradué, *i.e.*, un ensemble Σ muni d'une application $ar : \Sigma \to \mathbb{N}$. On note pour $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma_n := \{f \in \Sigma : ar(f) = n\}$. Si $f \in \Sigma$ et $ar(f) = n$, on dit que f est d'arité n ou que f est n-aire ; si $n \geq 1$, f est un **symbole fonctionnel**, et si $n = 0$, c'est un **symbole de constante**. On définit l'ensemble des **Σ-termes finis** T_Σ par induction structurelle sur $(\Sigma^*, \Sigma_0, \{c_f : f \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \Sigma_n\})$ où l'on a

$$\begin{array}{rccc} c_f : & (\Sigma^*)^{ar(f)} & \to & \Sigma^* \\ & (t_1, \ldots, t_{ar(f)}) & \mapsto & ft_1 \ldots t_{ar(f)} . \end{array}$$

On montre facilement que T_Σ est inductivement libre et, bien entendu,

$$T_\Sigma = \Sigma_0 + \sum_{f \in \Sigma,\ ar(f) > 0} f \underbrace{T_\Sigma \ldots T_\Sigma}_{ar(f)\ fois} .$$

Exemple 3

On appelle **signature** un ensemble $\mathbb{N}$-gradué, *i.e.*, un ensemble Σ muni d'une application $ar : \Sigma \to \mathbb{N}$. On note pour $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma_n := \{f \in \Sigma : ar(f) = n\}$. Si $f \in \Sigma$ et $ar(f) = n$, on dit que f est d'arité n ou que f est n-aire ; si $n \geq 1$, f est un **symbole fonctionnel**, et si $n = 0$, c'est un **symbole de constante**. On définit l'ensemble des **Σ-termes finis** T_Σ par induction structurelle sur $(\Sigma^*, \Sigma_0, \{c_f : f \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \Sigma_n\})$ où l'on a

$$\begin{array}{rccc} c_f : & (\Sigma^*)^{ar(f)} & \to & \Sigma^* \\ & (t_1, \ldots, t_{ar(f)}) & \mapsto & ft_1 \ldots t_{ar(f)} . \end{array}$$

On montre facilement que T_Σ est inductivement libre et, bien entendu,

$$T_\Sigma = \Sigma_0 + \sum_{f \in \Sigma,\ ar(f) > 0} f \underbrace{T_\Sigma \ldots T_\Sigma}_{ar(f)\ fois} .$$

Exemple 3

On appelle **signature** un ensemble $\mathbb{N}$-gradué, *i.e.*, un ensemble Σ muni d'une application $ar : \Sigma \to \mathbb{N}$. On note pour $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma_n := \{f \in \Sigma : ar(f) = n\}$. Si $f \in \Sigma$ et $ar(f) = n$, on dit que f est d'arité n ou que f est n-aire ; si $n \geq 1$, f est un **symbole fonctionnel**, et si $n = 0$, c'est un **symbole de constante.** On définit l'ensemble des **Σ-termes finis** T_Σ par induction structurelle sur $(\Sigma^*, \Sigma_0, \{c_f : f \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \Sigma_n\})$ où l'on a

$$\begin{array}{rccc} c_f : & (\Sigma^*)^{ar(f)} & \to & \Sigma^* \\ & (t_1, \ldots, t_{ar(f)}) & \mapsto & f t_1 \ldots t_{ar(f)} \ . \end{array}$$

On montre facilement que T_Σ est inductivement libre et, bien entendu,

$$T_\Sigma = \Sigma_0 + \sum_{f \in \Sigma,\ ar(f) > 0} f \underbrace{T_\Sigma \ldots T_\Sigma}_{ar(f)\ \text{fois}} \ .$$

Exemple 3

On appelle **signature** un ensemble $\mathbb{N}$-gradué, *i.e.*, un ensemble Σ muni d'une application $ar : \Sigma \to \mathbb{N}$. On note pour $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma_n := \{f \in \Sigma : ar(f) = n\}$. Si $f \in \Sigma$ et $ar(f) = n$, on dit que f est d'arité n ou que f est n-aire ; si $n \geq 1$, f est un **symbole fonctionnel**, et si $n = 0$, c'est un **symbole de constante**. On définit l'ensemble des **Σ-termes finis** T_Σ par induction structurelle sur $(\Sigma^*, \Sigma_0, \{c_f : f \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \Sigma_n\})$ où l'on a

$$\begin{array}{rccc} c_f : & (\Sigma^*)^{ar(f)} & \to & \Sigma^* \\ & (t_1, \ldots, t_{ar(f)}) & \mapsto & f t_1 \ldots t_{ar(f)} \,. \end{array}$$

On montre facilement que T_Σ est inductivement libre et, bien entendu,

$$T_\Sigma = \Sigma_0 + \sum_{f \in \Sigma,\ ar(f) > 0} f \underbrace{T_\Sigma \ldots T_\Sigma}_{ar(f)\ fois} \,.$$

Exemple 3

On appelle **signature** un ensemble $\mathbb{N}$-gradué, *i.e.*, un ensemble Σ muni d'une application $ar : \Sigma \to \mathbb{N}$. On note pour $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma_n := \{f \in \Sigma : ar(f) = n\}$. Si $f \in \Sigma$ et $ar(f) = n$, on dit que f est d'arité n ou que f est n-aire ; si $n \geq 1$, f est un **symbole fonctionnel**, et si $n = 0$, c'est un **symbole de constante**. On définit l'ensemble des Σ-**termes finis** T_Σ par induction structurelle sur $(\Sigma^*, \Sigma_0, \{c_f : f \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \Sigma_n\})$ où l'on a

$$\begin{array}{rccc} c_f : & (\Sigma^*)^{ar(f)} & \to & \Sigma^* \\ & (t_1, \ldots, t_{ar(f)}) & \mapsto & f t_1 \ldots t_{ar(f)} . \end{array}$$

On montre facilement que T_Σ est inductivement libre et, bien entendu,

$$T_\Sigma = \Sigma_0 + \sum_{f \in \Sigma,\ ar(f) > 0} f \underbrace{T_\Sigma \ldots T_\Sigma}_{ar(f)\ \text{fois}} .$$

Exemple 3

On appelle **signature** un ensemble $\mathbb{N}$-gradué, *i.e.*, un ensemble Σ muni d'une application $ar : \Sigma \to \mathbb{N}$. On note pour $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma_n := \{f \in \Sigma : ar(f) = n\}$. Si $f \in \Sigma$ et $ar(f) = n$, on dit que f est d'arité n ou que f est n-aire ; si $n \geq 1$, f est un **symbole fonctionnel**, et si $n = 0$, c'est un **symbole de constante.** On définit l'ensemble des **Σ-termes finis** T_Σ par induction structurelle sur $(\Sigma^*, \Sigma_0, \{c_f : f \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Sigma_n\})$ où l'on a

$$\begin{array}{rccc} c_f : & (\Sigma^*)^{ar(f)} & \to & \Sigma^* \\ & (t_1, \ldots, t_{ar(f)}) & \mapsto & ft_1 \ldots t_{ar(f)} \ . \end{array}$$

On montre facilement que T_Σ est inductivement libre et, bien entendu,

$$T_\Sigma = \Sigma_0 + \sum_{f\in\Sigma,\ ar(f)>0} f \underbrace{T_\Sigma \ldots T_\Sigma}_{ar(f)\ \text{fois}} \ .$$

Exemple 3

On appelle **signature** un ensemble $\mathbb{N}$-gradué, *i.e.*, un ensemble Σ muni d'une application $ar : \Sigma \to \mathbb{N}$. On note pour $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma_n := \{f \in \Sigma : ar(f) = n\}$. Si $f \in \Sigma$ et $ar(f) = n$, on dit que f est d'arité n ou que f est n-aire ; si $n \geq 1$, f est un **symbole fonctionnel**, et si $n = 0$, c'est un **symbole de constante.** On définit l'ensemble des **Σ-termes finis** T_Σ par induction structurelle sur $(\Sigma^*, \Sigma_0, \{c_f : f \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \Sigma_n\})$ où l'on a

$$\begin{array}{rccc} c_f : & (\Sigma^*)^{ar(f)} & \to & \Sigma^* \\ & (t_1, \ldots, t_{ar(f)}) & \mapsto & ft_1 \ldots t_{ar(f)} . \end{array}$$

On montre facilement que T_Σ est inductivement libre et, bien entendu,

$$T_\Sigma = \Sigma_0 + \sum_{f \in \Sigma,\ ar(f) > 0} f\, \underbrace{T_\Sigma \ldots T_\Sigma}_{ar(f)\ \text{fois}} .$$

Exemple 3

On appelle **signature** un ensemble $\mathbb{N}$-gradué, *i.e.*, un ensemble Σ muni d'une application $ar : \Sigma \to \mathbb{N}$. On note pour $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma_n := \{f \in \Sigma : ar(f) = n\}$. Si $f \in \Sigma$ et $ar(f) = n$, on dit que f est d'arité n ou que f est n-aire ; si $n \geq 1$, f est un **symbole fonctionnel**, et si $n = 0$, c'est un **symbole de constante.** On définit l'ensemble des **Σ-termes finis** T_Σ par induction structurelle sur $(\Sigma^*, \Sigma_0, \{c_f : f \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \Sigma_n\})$ où l'on a

$$c_f : \begin{array}{ccc} (\Sigma^*)^{ar(f)} & \to & \Sigma^* \\ (t_1, \ldots, t_{ar(f)}) & \mapsto & ft_1 \ldots t_{ar(f)} \end{array} .$$

On montre facilement que T_Σ est inductivement libre et, bien entendu,

$$T_\Sigma = \Sigma_0 + \sum_{f \in \Sigma,\ ar(f) > 0} f \underbrace{T_\Sigma \ldots T_\Sigma}_{ar(f)\ \text{fois}} .$$

Exemple 3

On appelle **signature** un ensemble $\mathbb{N}$-gradué, *i.e.*, un ensemble Σ muni d'une application $ar : \Sigma \to \mathbb{N}$. On note pour $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma_n := \{f \in \Sigma : ar(f) = n\}$. Si $f \in \Sigma$ et $ar(f) = n$, on dit que f est d'arité n ou que f est n-aire ; si $n \geq 1$, f est un **symbole fonctionnel**, et si $n = 0$, c'est un **symbole de constante.** On définit l'ensemble des **Σ-termes finis** T_Σ par induction structurelle sur $(\Sigma^*, \Sigma_0, \{c_f : f \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \Sigma_n\})$ où l'on a

$$c_f : \begin{array}{rcl} (\Sigma^*)^{ar(f)} & \to & \Sigma^* \\ (t_1, \ldots, t_{ar(f)}) & \mapsto & ft_1 \ldots t_{ar(f)} \end{array} .$$

On montre facilement que T_Σ est inductivement libre et, bien entendu,

$$T_\Sigma = \Sigma_0 + \sum_{f \in \Sigma,\ ar(f) > 0} f \underbrace{T_\Sigma \ldots T_\Sigma}_{ar(f) \text{ fois}} .$$

Exemple 3

On appelle **signature** un ensemble $\mathbb{N}$-gradué, *i.e.*, un ensemble Σ muni d'une application $ar : \Sigma \to \mathbb{N}$. On note pour $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma_n := \{f \in \Sigma : ar(f) = n\}$. Si $f \in \Sigma$ et $ar(f) = n$, on dit que f est d'arité n ou que f est n-aire ; si $n \geq 1$, f est un **symbole fonctionnel**, et si $n = 0$, c'est un **symbole de constante.** On définit l'ensemble des **Σ-termes finis** T_Σ par induction structurelle sur $(\Sigma^*, \Sigma_0, \{c_f : f \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \Sigma_n\})$ où l'on a

$$\begin{array}{rlcl} c_f : & (\Sigma^*)^{ar(f)} & \to & \Sigma^* \\ & (t_1, \ldots, t_{ar(f)}) & \mapsto & ft_1 \ldots t_{ar(f)} \end{array} .$$

On montre facilement que T_Σ est inductivement libre et, bien entendu,

$$T_\Sigma = \Sigma_0 + \sum_{f \in \Sigma,\ ar(f) > 0} f \underbrace{T_\Sigma \ldots T_\Sigma}_{ar(f)\ fois} .$$

Exemple 4

Remarquons au passage que *Arith_Expr* correspond à l'ensemble des Σ-termes finis avec $\Sigma := V \cup \{0,1\} \cup \{C_+, C_*\}$ et $\Sigma_0 := V \cup \{0,1\}$, $\Sigma_2 := \{C_+, C_*\}$, $\Sigma_n = \emptyset$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n \notin \{0,2\}$. On a donc aussi

$$\begin{aligned} Arith\_Expr &= V + \{0,1\} \\ &+ \mathrm{p}Arith\_Expr + Arith\_Expr\mathrm{q} \\ &+ \mathrm{p}Arith\_Expr * Arith\_Expr\mathrm{q} \,. \end{aligned}$$

Exemple 4

Remarquons au passage que *Arith_Expr* correspond à l'ensemble des Σ-termes finis avec $\Sigma := V \cup \{0, 1\} \cup \{C_+, C_*\}$ et $\Sigma_0 := V \cup \{0, 1\}$, $\Sigma_2 := \{C_+, C_*\}$, $\Sigma_n = \emptyset$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n \notin \{0, 2\}$. On a donc aussi

$$\begin{aligned} Arith\_Expr &= V + \{0, 1\} \\ &\quad + \mathrm{p} Arith\_Expr + Arith\_Expr \mathrm{q} \\ &\quad + \mathrm{p} Arith\_Expr * Arith\_Expr \mathrm{q} . \end{aligned}$$

Exemple 4

Remarquons au passage que *Arith_Expr* correspond à l'ensemble des Σ-termes finis avec $\Sigma := V \cup \{0,1\} \cup \{C_+, C_*\}$ et $\Sigma_0 := V \cup \{0,1\}$, $\Sigma_2 := \{C_+, C_*\}$, $\Sigma_n = \emptyset$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n \notin \{0,2\}$. On a donc aussi

$$\begin{array}{rcl} \mathit{Arith\_Expr} & = & V + \{0,1\} \\ & & + \mathrm{p}\mathit{Arith\_Expr} + \mathit{Arith\_Expr}\mathrm{q} \\ & & + \mathrm{p}\mathit{Arith\_Expr} * \mathit{Arith\_Expr}\mathrm{q} . \end{array}$$

Exemple 4

Remarquons au passage que *Arith_Expr* correspond à l'ensemble des Σ-termes finis avec $\Sigma := V \cup \{0,1\} \cup \{C_+, C_*\}$ et $\Sigma_0 := V \cup \{0,1\}$, $\Sigma_2 := \{C_+, C_*\}$, $\Sigma_n = \emptyset$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n \notin \{0,2\}$. On a donc aussi

$$\begin{aligned} Arith\_Expr &= V + \{0,1\} \\ &\quad + \mathrm{p}Arith\_Expr + Arith\_Expr\mathrm{q} \\ &\quad + \mathrm{p}Arith\_Expr * Arith\_Expr\mathrm{q} \,. \end{aligned}$$

Exemple 4

Remarquons au passage que *Arith_Expr* correspond à l'ensemble des Σ-termes finis avec $\Sigma := V \cup \{0,1\} \cup \{C_+, C_*\}$ et $\Sigma_0 := V \cup \{0,1\}$, $\Sigma_2 := \{C_+, C_*\}$, $\Sigma_n = \emptyset$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n \notin \{0,2\}$. On a donc aussi

$$\begin{aligned} Arith\_Expr &= V + \{0,1\} \\ &\quad + \mathrm{p}Arith\_Expr + Arith\_Expr\mathrm{q} \\ &\quad + \mathrm{p}Arith\_Expr * Arith\_Expr\mathrm{q}\ . \end{aligned}$$

Exemple 4

Remarquons au passage que *Arith_Expr* correspond à l'ensemble des Σ-termes finis avec $\Sigma := V \cup \{0, 1\} \cup \{C_+, C_*\}$ et $\Sigma_0 := V \cup \{0, 1\}$, $\Sigma_2 := \{C_+, C_*\}$, $\Sigma_n = \emptyset$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n \notin \{0, 2\}$. On a donc aussi

$$\begin{aligned} Arith\_Expr &= V + \{0,1\} \\ &\quad + \mathrm{p}Arith\_Expr + Arith\_Expr\mathrm{q} \\ &\quad + \mathrm{p}Arith\_Expr * Arith\_Expr\mathrm{q} \ . \end{aligned}$$

Langage de la logique propositionnelle

Le **langage de la logique propositionnelle** est un autre exemple d'ensemble de Σ-termes finis (et donc d'ensemble inductivement libre). On se donne $\mathbb{PS}$ un ensemble infini dénombrable de **symboles de propositions** :P_0, P_1, P_2, *etc.* Soient les **connecteurs logiques** : $\wedge$ (et), $\vee$ (ou), $\Rightarrow$ (implication), $\neg$ (négation), $\Leftrightarrow$ (équivalence) et $\perp$ (le faux). Soient enfin les **symboles auxiliaires** : p (parenthèse ouvrante) et q (parenthèse fermante).

Langage de la logique propositionnelle

Le **langage de la logique propositionnelle** est un autre exemple d'ensemble de Σ-termes finis (et donc d'ensemble inductivement libre). On se donne $\mathbb{PS}$ un ensemble infini dénombrable de **symboles de propositions** :P_0, P_1, P_2, *etc.* Soient les **connecteurs logiques** : $\wedge$ (et), $\vee$ (ou), $\Rightarrow$ (implication), $\neg$ (négation), $\Leftrightarrow$ (équivalence) et $\perp$ (le faux). Soient enfin les **symboles auxiliaires** : p (parenthèse ouvrante) et q (parenthèse fermante).

Langage de la logique propositionnelle

Le **langage de la logique propositionnelle** est un autre exemple d'ensemble de Σ-termes finis (et donc d'ensemble inductivement libre). On se donne $\mathbb{PS}$ un ensemble infini dénombrable de **symboles de propositions** : P_0, P_1, P_2, *etc.* Soient les **connecteurs logiques** : $\wedge$ (et), $\vee$ (ou), $\Rightarrow$ (implication), $\neg$ (négation), $\Leftrightarrow$ (équivalence) et $\perp$ (le faux). Soient enfin les **symboles auxiliaires** : p (parenthèse ouvrante) et q (parenthèse fermante).

Langage de la logique propositionnelle

Le **langage de la logique propositionnelle** est un autre exemple d'ensemble de Σ-termes finis (et donc d'ensemble inductivement libre). On se donne $\mathbb{PS}$ un ensemble infini dénombrable de **symboles de propositions** :P_0, P_1, P_2, *etc.* Soient les **connecteurs logiques** : $\wedge$ (et), $\vee$ (ou), $\Rightarrow$ (implication), $\neg$ (négation), $\Leftrightarrow$ (équivalence) et $\perp$ (le faux). Soient enfin les **symboles auxiliaires** : p (parenthèse ouvrante) et q (parenthèse fermante).

Langage de la logique propositionnelle

Le **langage de la logique propositionnelle** est un autre exemple d'ensemble de Σ-termes finis (et donc d'ensemble inductivement libre). On se donne $\mathbb{PS}$ un ensemble infini dénombrable de **symboles de propositions** :P_0, P_1, P_2, *etc.* Soient les **connecteurs logiques** : $\wedge$ (et), $\vee$ (ou), $\Rightarrow$ (implication), $\neg$ (négation), $\Leftrightarrow$ (équivalence) et $\perp$ (le faux). Soient enfin les **symboles auxiliaires** : p (parenthèse ouvrante) et q (parenthèse fermante).

Langage de la logique propositionnelle

Le **langage de la logique propositionnelle** est un autre exemple d'ensemble de Σ-termes finis (et donc d'ensemble inductivement libre). On se donne $\mathbb{PS}$ un ensemble infini dénombrable de **symboles de propositions** :P_0, P_1, P_2, *etc.* Soient les **connecteurs logiques** : $\wedge$ (et), $\vee$ (ou), $\Rightarrow$ (implication), $\neg$ (négation), $\Leftrightarrow$ (équivalence) et $\perp$ (le faux). Soient enfin les **symboles auxiliaires** : p (parenthèse ouvrante) et q (parenthèse fermante).

Langage de la logique propositionnelle

Le **langage de la logique propositionnelle** est un autre exemple d'ensemble de Σ-termes finis (et donc d'ensemble inductivement libre). On se donne $\mathbb{PS}$ un ensemble infini dénombrable de **symboles de propositions** :P_0, P_1, P_2, *etc.* Soient les **connecteurs logiques** : $\wedge$ (et), $\vee$ (ou), $\Rightarrow$ (implication), $\neg$ (négation), $\Leftrightarrow$ (équivalence) et $\perp$ (le faux). Soient enfin les **symboles auxiliaires** : p (parenthèse ouvrante) et q (parenthèse fermante).

Langage de la logique propositionnelle

Le **langage de la logique propositionnelle** est un autre exemple d'ensemble de Σ-termes finis (et donc d'ensemble inductivement libre). On se donne $\mathbb{PS}$ un ensemble infini dénombrable de **symboles de propositions** :P_0, P_1, P_2, *etc.* Soient les **connecteurs logiques** : $\wedge$ (et), $\vee$ (ou), $\Rightarrow$ (implication), $\neg$ (négation), $\Leftrightarrow$ (équivalence) et $\perp$ (le faux). Soient enfin les **symboles auxiliaires** : p (parenthèse ouvrante) et q (parenthèse fermante).

Soient les applications définies sur $\mathcal{U} := (\mathbb{PS} \cup \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow, \perp\} \cup \{\mathrm{p}, \mathrm{q}\})^*$ par, quels que soient les mots A et B,

$$\begin{array}{rcl} C_{\neg}(A) & = & \neg A\ , \\ C_{\wedge}(A) & = & \mathrm{p}A \wedge B\mathrm{q}\ , \\ C_{\vee}(A) & = & \mathrm{p}A \vee B\mathrm{q}\ , \\ C_{\Rightarrow}(A) & = & \mathrm{p}A \Rightarrow B\mathrm{q}\ , \\ C_{\Leftrightarrow}(A) & = & \mathrm{p}A \Leftrightarrow B\mathrm{q}\ . \end{array}$$

On définit l'ensemble *PROP* des **formules propositionnelles** comme $(\mathcal{U}, \mathbb{PS} \cup \{\perp\}, \{C_{\#} : \# \in \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\})_{\omega}$ ou encore comme l'ensemble des Σ-termes finis avec $\Sigma_0 := \mathbb{PS} \cup \{\perp\}$, $\Sigma_1 := \{C_{\neg}\}$, $\Sigma_2 := \{C_{\#} : \# \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\}$ et $\Sigma_n = \emptyset$ dès que $n > 2$.

Soient les applications définies sur $\mathcal{U} := (\mathbb{PS} \cup \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow, \bot\} \cup \{\mathsf{p}, \mathsf{q}\})^*$ par, quels que soient les mots A et B,

$$\begin{array}{rcl} C_{\neg}(A) & = & \neg A\ , \\ C_{\wedge}(A) & = & \mathsf{p}A \wedge B\mathsf{q}\ , \\ C_{\vee}(A) & = & \mathsf{p}A \vee B\mathsf{q}\ , \\ C_{\Rightarrow}(A) & = & \mathsf{p}A \Rightarrow B\mathsf{q}\ , \\ C_{\Leftrightarrow}(A) & = & \mathsf{p}A \Leftrightarrow B\mathsf{q}\ . \end{array}$$

On définit l'ensemble *PROP* des **formules propositionnelles** comme $(\mathcal{U}, \mathbb{PS} \cup \{\bot\}, \{C_{\#} : \# \in \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\})_{\omega}$ ou encore comme l'ensemble des Σ-termes finis avec $\Sigma_0 := \mathbb{PS} \cup \{\bot\}$, $\Sigma_1 := \{C_{\neg}\}$, $\Sigma_2 := \{C_{\#} : \# \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\}$ et $\Sigma_n = \emptyset$ dès que $n > 2$.

Chap. IV : Théorie des structures récursives

Laurent Poinsot

Soient les applications définies sur $\mathcal{U} := (\mathbb{PS} \cup \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow, \perp\} \cup \{\mathrm{p}, \mathrm{q}\})^*$ par, quels que soient les mots A et B,

$$\begin{array}{rcl} C_\neg(A) & = & \neg A\,, \\ C_\wedge(A) & = & \mathrm{p}A \wedge B\mathrm{q}\,, \\ C_\vee(A) & = & \mathrm{p}A \vee B\mathrm{q}\,, \\ C_\Rightarrow(A) & = & \mathrm{p}A \Rightarrow B\mathrm{q}\,, \\ C_\Leftrightarrow(A) & = & \mathrm{p}A \Leftrightarrow B\mathrm{q}\,. \end{array}$$

On définit l'ensemble *PROP* des **formules propositionnelles** comme $(\mathcal{U}, \mathbb{PS} \cup \{\perp\}, \{C_\# : \# \in \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\})_\omega$ ou encore comme l'ensemble des Σ-termes finis avec $\Sigma_0 := \mathbb{PS} \cup \{\perp\}$, $\Sigma_1 := \{C_\neg\}$, $\Sigma_2 := \{C_\# : \# \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\}$ et $\Sigma_n = \emptyset$ dès que $n > 2$.

Soient les applications définies sur $\mathcal{U} := (\mathbb{PS} \cup \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow, \bot\} \cup \{\mathrm{p}, \mathrm{q}\})^*$ par, quels que soient les mots A et B,

$$\begin{array}{rcl} C_\neg(A) & = & \neg A\ , \\ C_\wedge(A) & = & \mathrm{p}A \wedge B\mathrm{q}\ , \\ C_\vee(A) & = & \mathrm{p}A \vee B\mathrm{q}\ , \\ C_\Rightarrow(A) & = & \mathrm{p}A \Rightarrow B\mathrm{q}\ , \\ C_\Leftrightarrow(A) & = & \mathrm{p}A \Leftrightarrow B\mathrm{q}\ . \end{array}$$

On définit l'ensemble *PROP* des **formules propositionnelles** comme $(\mathcal{U}, \mathbb{PS} \cup \{\bot\}, \{C_\# : \# \in \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\})_\omega$ ou encore comme l'ensemble des Σ-termes finis avec $\Sigma_0 := \mathbb{PS} \cup \{\bot\}$, $\Sigma_1 := \{C_\neg\}$, $\Sigma_2 := \{C_\# : \# \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\}$ et $\Sigma_n = \emptyset$ dès que $n > 2$.

Soient les applications définies sur $\mathcal{U} := (\mathbb{PS} \cup \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow, \bot\} \cup \{\mathrm{p}, \mathrm{q}\})^*$ par, quels que soient les mots A et B,

$$
\begin{array}{rcl}
C_\neg(A) & = & \neg A \ , \\
C_\wedge(A) & = & \mathrm{p}A \wedge B\mathrm{q} \ , \\
C_\vee(A) & = & \mathrm{p}A \vee B\mathrm{q} \ , \\
C_\Rightarrow(A) & = & \mathrm{p}A \Rightarrow B\mathrm{q} \ , \\
C_\Leftrightarrow(A) & = & \mathrm{p}A \Leftrightarrow B\mathrm{q} \ .
\end{array}
$$

On définit l'ensemble *PROP* des **formules propositionnelles** comme $(\mathcal{U}, \mathbb{PS} \cup \{\bot\}, \{C_\# : \# \in \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\})_\omega$ ou encore comme l'ensemble des Σ-termes finis avec $\Sigma_0 := \mathbb{PS} \cup \{\bot\}$, $\Sigma_1 := \{C_\neg\}$, $\Sigma_2 := \{C_\# : \# \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ et $\Sigma_n = \emptyset$ dès que $n > 2$.

Soient les applications définies sur $\mathcal{U} := (\mathbb{PS} \cup \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow, \bot\} \cup \{\mathrm{p}, \mathrm{q}\})^*$ par, quels que soient les mots A et B,

$$\begin{array}{rcl} C_{\neg}(A) & = & \neg A\ , \\ C_{\wedge}(A) & = & \mathrm{p}A \wedge B\mathrm{q}\ , \\ C_{\vee}(A) & = & \mathrm{p}A \vee B\mathrm{q}\ , \\ C_{\Rightarrow}(A) & = & \mathrm{p}A \Rightarrow B\mathrm{q}\ , \\ C_{\Leftrightarrow}(A) & = & \mathrm{p}A \Leftrightarrow B\mathrm{q}\ . \end{array}$$

On définit l'ensemble *PROP* des **formules propositionnelles** comme $(\mathcal{U}, \mathbb{PS} \cup \{\bot\}, \{C_\# : \# \in \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\})_\omega$ ou encore comme l'ensemble des Σ-termes finis avec $\Sigma_0 := \mathbb{PS} \cup \{\bot\}$, $\Sigma_1 := \{C_\neg\}$, $\Sigma_2 := \{C_\# : \# \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\}$ et $\Sigma_n = \emptyset$ dès que $n > 2$.

Soient les applications définies sur $\mathcal{U} := (\mathbb{PS} \cup \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow, \perp\} \cup \{\mathrm{p}, \mathrm{q}\})^*$ par, quels que soient les mots A et B,

$$\begin{aligned}
C_{\neg}(A) &= \neg A\ , \\
C_{\wedge}(A) &= \mathrm{p}A \wedge B\mathrm{q}\ , \\
C_{\vee}(A) &= \mathrm{p}A \vee B\mathrm{q}\ , \\
C_{\Rightarrow}(A) &= \mathrm{p}A \Rightarrow B\mathrm{q}\ , \\
C_{\Leftrightarrow}(A) &= \mathrm{p}A \Leftrightarrow B\mathrm{q}\ .
\end{aligned}$$

On définit l'ensemble *PROP* des **formules propositionnelles** comme $(\mathcal{U}, \mathbb{PS} \cup \{\perp\}, \{C_{\#} : \# \in \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\})_{\omega}$ ou encore comme l'ensemble des Σ-termes finis avec $\Sigma_0 := \mathbb{PS} \cup \{\perp\}$, $\Sigma_1 := \{C_{\neg}\}$, $\Sigma_2 := \{C_{\#} : \# \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\}$ et $\Sigma_n = \emptyset$ dès que $n > 2$.

Soient les applications définies sur $\mathcal{U} := (\mathbb{PS} \cup \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow, \bot\} \cup \{\mathrm{p}, \mathrm{q}\})^*$ par, quels que soient les mots A et B,

$$\begin{array}{rcl} C_\neg(A) & = & \neg A\ , \\ C_\wedge(A) & = & \mathrm{p}A \wedge B\mathrm{q}\ , \\ C_\vee(A) & = & \mathrm{p}A \vee B\mathrm{q}\ , \\ C_\Rightarrow(A) & = & \mathrm{p}A \Rightarrow B\mathrm{q}\ , \\ C_\Leftrightarrow(A) & = & \mathrm{p}A \Leftrightarrow B\mathrm{q}\ . \end{array}$$

On définit l'ensemble *PROP* des **formules propositionnelles** comme $(\mathcal{U}, \mathbb{PS} \cup \{\bot\}, \{C_\# : \# \in \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\})_\omega$ ou encore comme l'ensemble des Σ-termes finis avec $\Sigma_0 := \mathbb{PS} \cup \{\bot\}$, $\Sigma_1 := \{C_\neg\}$, $\Sigma_2 := \{C_\# : \# \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\}$ et $\Sigma_n = \emptyset$ dès que $n > 2$.

Soient les applications définies sur $\mathcal{U} := (\mathbb{PS} \cup \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow, \bot\} \cup \{\mathrm{p}, \mathrm{q}\})^*$ par, quels que soient les mots A et B,

$$\begin{array}{rcl} C_{\neg}(A) & = & \neg A \, , \\ C_{\wedge}(A) & = & \mathrm{p}A \wedge B\mathrm{q} \, , \\ C_{\vee}(A) & = & \mathrm{p}A \vee B\mathrm{q} \, , \\ C_{\Rightarrow}(A) & = & \mathrm{p}A \Rightarrow B\mathrm{q} \, , \\ C_{\Leftrightarrow}(A) & = & \mathrm{p}A \Leftrightarrow B\mathrm{q} \, . \end{array}$$

On définit l'ensemble *PROP* des **formules propositionnelles** comme $(\mathcal{U}, \mathbb{PS} \cup \{\bot\}, \{C_{\#} : \# \in \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\})_{\omega}$ ou encore comme l'ensemble des Σ-termes finis avec $\Sigma_0 := \mathbb{PS} \cup \{\bot\}$, $\Sigma_1 := \{C_{\neg}\}$, $\Sigma_2 := \{C_{\#} : \# \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\}$ et $\Sigma_n = \emptyset$ dès que $n > 2$.

Soient les applications définies sur $\mathcal{U} := (\mathbb{PS} \cup \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow, \bot\} \cup \{\mathrm{p}, \mathrm{q}\})^*$ par, quels que soient les mots A et B,

$$\begin{array}{rcl} C_{\neg}(A) & = & \neg A\ , \\ C_{\wedge}(A) & = & \mathrm{p}A \wedge B\mathrm{q}\ , \\ C_{\vee}(A) & = & \mathrm{p}A \vee B\mathrm{q}\ , \\ C_{\Rightarrow}(A) & = & \mathrm{p}A \Rightarrow B\mathrm{q}\ , \\ C_{\Leftrightarrow}(A) & = & \mathrm{p}A \Leftrightarrow B\mathrm{q}\ . \end{array}$$

On définit l'ensemble *PROP* des **formules propositionnelles** comme $(\mathcal{U}, \mathbb{PS} \cup \{\bot\}, \{C_{\#} : \# \in \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\})_{\omega}$ ou encore comme l'ensemble des Σ-termes finis avec $\Sigma_0 := \mathbb{PS} \cup \{\bot\}$, $\Sigma_1 := \{C_{\neg}\}$, $\Sigma_2 := \{C_{\#} : \# \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\}$ et $\Sigma_n = \emptyset$ dès que $n > 2$.

Soient les applications définies sur $\mathcal{U} := (\mathbb{PS} \cup \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow, \bot\} \cup \{\mathrm{p}, \mathrm{q}\})^*$ par, quels que soient les mots A et B,

$$\begin{array}{rcl} C_\neg(A) & = & \neg A\ , \\ C_\wedge(A) & = & \mathrm{p}A \wedge B\mathrm{q}\ , \\ C_\vee(A) & = & \mathrm{p}A \vee B\mathrm{q}\ , \\ C_\Rightarrow(A) & = & \mathrm{p}A \Rightarrow B\mathrm{q}\ , \\ C_\Leftrightarrow(A) & = & \mathrm{p}A \Leftrightarrow B\mathrm{q}\ . \end{array}$$

On définit l'ensemble *PROP* des **formules propositionnelles** comme $(\mathcal{U}, \mathbb{PS} \cup \{\bot\}, \{C_\# : \# \in \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\})_\omega$ ou encore comme l'ensemble des Σ-termes finis avec $\Sigma_0 := \mathbb{PS} \cup \{\bot\}$, $\Sigma_1 := \{C_\neg\}$, $\Sigma_2 := \{C_\# : \# \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\}$ et $\Sigma_n = \emptyset$ dès que $n > 2$.

Soient les applications définies sur $\mathcal{U} := (\mathbb{PS} \cup \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow, \perp\} \cup \{\text{p}, \text{q}\})^*$ par, quels que soient les mots A et B,

$$\begin{array}{rcl} C_\neg(A) & = & \neg A\ , \\ C_\wedge(A) & = & \text{p}A \wedge B\text{q}\ , \\ C_\vee(A) & = & \text{p}A \vee B\text{q}\ , \\ C_\Rightarrow(A) & = & \text{p}A \Rightarrow B\text{q}\ , \\ C_\Leftrightarrow(A) & = & \text{p}A \Leftrightarrow B\text{q}\ . \end{array}$$

On définit l'ensemble *PROP* des **formules propositionnelles** comme $(\mathcal{U}, \mathbb{PS} \cup \{\perp\}, \{C_\# : \# \in \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\})_\omega$ ou encore comme l'ensemble des Σ-termes finis avec $\Sigma_0 := \mathbb{PS} \cup \{\perp\}$, $\Sigma_1 := \{C_\neg\}$, $\Sigma_2 := \{C_\# : \# \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\}$ et $\Sigma_n = \emptyset$ dès que $n > 2$.

Soient les applications définies sur $\mathcal{U} := (\mathbb{PS} \cup \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow, \bot\} \cup \{\mathrm{p}, \mathrm{q}\})^*$ par, quels que soient les mots A et B,

$$\begin{array}{lcl} C_{\neg}(A) & = & \neg A\ , \\ C_{\wedge}(A) & = & \mathrm{p}A \wedge B\mathrm{q}\ , \\ C_{\vee}(A) & = & \mathrm{p}A \vee B\mathrm{q}\ , \\ C_{\Rightarrow}(A) & = & \mathrm{p}A \Rightarrow B\mathrm{q}\ , \\ C_{\Leftrightarrow}(A) & = & \mathrm{p}A \Leftrightarrow B\mathrm{q}\ . \end{array}$$

On définit l'ensemble *PROP* des **formules propositionnelles** comme $(\mathcal{U}, \mathbb{PS} \cup \{\bot\}, \{C_{\#} : \# \in \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\})_{\omega}$ ou encore comme l'ensemble des Σ-termes finis avec $\Sigma_0 := \mathbb{PS} \cup \{\bot\}$, $\Sigma_1 := \{C_{\neg}\}$, $\Sigma_2 := \{C_{\#} : \# \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\}$ et $\Sigma_n = \emptyset$ dès que $n > 2$.

Soient les applications définies sur $\mathcal{U} := (\mathbb{PS} \cup \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow, \perp\} \cup \{\mathrm{p}, \mathrm{q}\})^*$ par, quels que soient les mots A et B,

$$\begin{array}{rcl}
C_\neg(A) & = & \neg A\ , \\
C_\wedge(A) & = & \mathrm{p}A \wedge B\mathrm{q}\ , \\
C_\vee(A) & = & \mathrm{p}A \vee B\mathrm{q}\ , \\
C_\Rightarrow(A) & = & \mathrm{p}A \Rightarrow B\mathrm{q}\ , \\
C_\Leftrightarrow(A) & = & \mathrm{p}A \Leftrightarrow B\mathrm{q}\ .
\end{array}$$

On définit l'ensemble *PROP* des **formules propositionnelles** comme $(\mathcal{U}, \mathbb{PS} \cup \{\perp\}, \{C_\# : \# \in \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\})_\omega$ ou encore comme l'ensemble des Σ-termes finis avec $\Sigma_0 := \mathbb{PS} \cup \{\perp\}$, $\Sigma_1 := \{C_\neg\}$, $\Sigma_2 := \{C_\# : \# \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\}$ et $\Sigma_n = \emptyset$ dès que $n > 2$.

Soient les applications définies sur $\mathcal{U} := (\mathbb{PS} \cup \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow, \bot\} \cup \{\mathrm{p}, \mathrm{q}\})^*$ par, quels que soient les mots A et B,

$$\begin{array}{rcl} C_{\neg}(A) & = & \neg A\ , \\ C_{\wedge}(A) & = & \mathrm{p}A \wedge B\mathrm{q}\ , \\ C_{\vee}(A) & = & \mathrm{p}A \vee B\mathrm{q}\ , \\ C_{\Rightarrow}(A) & = & \mathrm{p}A \Rightarrow B\mathrm{q}\ , \\ C_{\Leftrightarrow}(A) & = & \mathrm{p}A \Leftrightarrow B\mathrm{q}\ . \end{array}$$

On définit l'ensemble *PROP* des **formules propositionnelles** comme $(\mathcal{U}, \mathbb{PS} \cup \{\bot\}, \{C_{\#} : \# \in \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\})_{\omega}$ ou encore comme l'ensemble des Σ-termes finis avec $\Sigma_0 := \mathbb{PS} \cup \{\bot\}$, $\Sigma_1 := \{C_{\neg}\}$, $\Sigma_2 := \{C_{\#} : \# \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\}$ et $\Sigma_n = \emptyset$ dès que $n > 2$.

Soient les applications définies sur $\mathcal{U} := (\mathbb{PS} \cup \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow, \bot\} \cup \{\mathrm{p}, \mathrm{q}\})^*$ par, quels que soient les mots A et B,

$$\begin{array}{rcl} C_{\neg}(A) & = & \neg A\ , \\ C_{\wedge}(A) & = & \mathrm{p}A \wedge B\mathrm{q}\ , \\ C_{\vee}(A) & = & \mathrm{p}A \vee B\mathrm{q}\ , \\ C_{\Rightarrow}(A) & = & \mathrm{p}A \Rightarrow B\mathrm{q}\ , \\ C_{\Leftrightarrow}(A) & = & \mathrm{p}A \Leftrightarrow B\mathrm{q}\ . \end{array}$$

On définit l'ensemble *PROP* des **formules propositionnelles** comme $(\mathcal{U}, \mathbb{PS} \cup \{\bot\}, \{C_\# : \# \in \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\})_\omega$ ou encore comme l'ensemble des Σ-termes finis avec $\Sigma_0 := \mathbb{PS} \cup \{\bot\}$, $\Sigma_1 := \{C_\neg\}$, $\Sigma_2 := \{C_\# : \# \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\}$ et $\Sigma_n = \emptyset$ dès que $n > 2$.

Soient les applications définies sur $\mathcal{U} := (\mathbb{PS} \cup \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow, \perp\} \cup \{\mathrm{p}, \mathrm{q}\})^*$ par, quels que soient les mots A et B,

$$\begin{array}{rcl} C_{\neg}(A) & = & \neg A\ , \\ C_{\wedge}(A) & = & \mathrm{p}A \wedge B\mathrm{q}\ , \\ C_{\vee}(A) & = & \mathrm{p}A \vee B\mathrm{q}\ , \\ C_{\Rightarrow}(A) & = & \mathrm{p}A \Rightarrow B\mathrm{q}\ , \\ C_{\Leftrightarrow}(A) & = & \mathrm{p}A \Leftrightarrow B\mathrm{q}\ . \end{array}$$

On définit l'ensemble *PROP* des **formules propositionnelles** comme $(\mathcal{U}, \mathbb{PS} \cup \{\perp\}, \{C_{\#} : \# \in \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\})_{\omega}$ ou encore comme l'ensemble des Σ-termes finis avec $\Sigma_0 := \mathbb{PS} \cup \{\perp\}$, $\Sigma_1 := \{C_{\neg}\}$, $\Sigma_2 := \{C_{\#} : \# \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\}$ et $\Sigma_n = \emptyset$ dès que $n > 2$.

Soient les applications définies sur $\mathcal{U} := (\mathbb{PS} \cup \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow, \perp\} \cup \{\mathrm{p}, \mathrm{q}\})^*$ par, quels que soient les mots A et B,

$$\begin{array}{rcl} C_{\neg}(A) & = & \neg A\ , \\ C_{\wedge}(A) & = & \mathrm{p}A \wedge B\mathrm{q}\ , \\ C_{\vee}(A) & = & \mathrm{p}A \vee B\mathrm{q}\ , \\ C_{\Rightarrow}(A) & = & \mathrm{p}A \Rightarrow B\mathrm{q}\ , \\ C_{\Leftrightarrow}(A) & = & \mathrm{p}A \Leftrightarrow B\mathrm{q}\ . \end{array}$$

On définit l'ensemble *PROP* des **formules propositionnelles** comme $(\mathcal{U}, \mathbb{PS} \cup \{\perp\}, \{C_{\#} : \# \in \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\})_{\omega}$ ou encore comme l'ensemble des Σ-termes finis avec $\Sigma_0 := \mathbb{PS} \cup \{\perp\}$, $\Sigma_1 := \{C_{\neg}\}$, $\Sigma_2 := \{C_{\#} : \# \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ et $\Sigma_n = \emptyset$ dès que $n > 2$.

Soient les applications définies sur $\mathcal{U} := (\mathbb{PS} \cup \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow, \perp\} \cup \{\mathrm{p}, \mathrm{q}\})^*$ par, quels que soient les mots A et B,

$$\begin{array}{rcl} C_{\neg}(A) & = & \neg A \,, \\ C_{\wedge}(A) & = & \mathrm{p}A \wedge B\mathrm{q} \,, \\ C_{\vee}(A) & = & \mathrm{p}A \vee B\mathrm{q} \,, \\ C_{\Rightarrow}(A) & = & \mathrm{p}A \Rightarrow B\mathrm{q} \,, \\ C_{\Leftrightarrow}(A) & = & \mathrm{p}A \Leftrightarrow B\mathrm{q} \,. \end{array}$$

On définit l'ensemble *PROP* des **formules propositionnelles** comme $(\mathcal{U}, \mathbb{PS} \cup \{\perp\}, \{C_{\#} : \# \in \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\})_{\omega}$ ou encore comme l'ensemble des Σ-termes finis avec $\Sigma_0 := \mathbb{PS} \cup \{\perp\}$, $\Sigma_1 := \{C_{\neg}\}$, $\Sigma_2 := \{C_{\#} : \# \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ et $\Sigma_n = \emptyset$ dès que $n > 2$.

Soient les applications définies sur $\mathcal{U} := (\mathbb{PS} \cup \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow, \perp\} \cup \{\mathrm{p}, \mathrm{q}\})^*$ par, quels que soient les mots A et B,

$$\begin{array}{rcl} C_{\neg}(A) & = & \neg A\ , \\ C_{\wedge}(A) & = & \mathrm{p}A \wedge B\mathrm{q}\ , \\ C_{\vee}(A) & = & \mathrm{p}A \vee B\mathrm{q}\ , \\ C_{\Rightarrow}(A) & = & \mathrm{p}A \Rightarrow B\mathrm{q}\ , \\ C_{\Leftrightarrow}(A) & = & \mathrm{p}A \Leftrightarrow B\mathrm{q}\ . \end{array}$$

On définit l'ensemble *PROP* des **formules propositionnelles** comme $(\mathcal{U}, \mathbb{PS} \cup \{\perp\}, \{C_{\#} : \# \in \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\})_{\omega}$ ou encore comme l'ensemble des Σ-termes finis avec $\Sigma_0 := \mathbb{PS} \cup \{\perp\}$, $\Sigma_1 := \{C_{\neg}\}$, $\Sigma_2 := \{C_{\#} : \# \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ et $\Sigma_n = \emptyset$ dès que $n > 2$.

Soient les applications définies sur $\mathcal{U} := (\mathbb{PS} \cup \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow, \perp\} \cup \{\mathrm{p}, \mathrm{q}\})^*$ par, quels que soient les mots A et B,

$$\begin{array}{rcl} C_{\neg}(A) & = & \neg A\,, \\ C_{\wedge}(A) & = & \mathrm{p}A \wedge B\mathrm{q}\,, \\ C_{\vee}(A) & = & \mathrm{p}A \vee B\mathrm{q}\,, \\ C_{\Rightarrow}(A) & = & \mathrm{p}A \Rightarrow B\mathrm{q}\,, \\ C_{\Leftrightarrow}(A) & = & \mathrm{p}A \Leftrightarrow B\mathrm{q}\,. \end{array}$$

On définit l'ensemble *PROP* des **formules propositionnelles** comme $(\mathcal{U}, \mathbb{PS} \cup \{\perp\}, \{C_{\#} : \# \in \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\})_{\omega}$ ou encore comme l'ensemble des Σ-termes finis avec $\Sigma_0 := \mathbb{PS} \cup \{\perp\}$, $\Sigma_1 := \{C_{\neg}\}$, $\Sigma_2 := \{C_{\#} : \# \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\}$ et $\Sigma_n = \emptyset$ dès que $n > 2$.

Soient les applications définies sur $\mathcal{U} := (\mathbb{PS} \cup \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow, \perp\} \cup \{\mathrm{p}, \mathrm{q}\})^*$ par, quels que soient les mots A et B,

$$
\begin{array}{rcl}
C_{\neg}(A) & = & \neg A \,, \\
C_{\wedge}(A) & = & \mathrm{p}A \wedge B\mathrm{q} \,, \\
C_{\vee}(A) & = & \mathrm{p}A \vee B\mathrm{q} \,, \\
C_{\Rightarrow}(A) & = & \mathrm{p}A \Rightarrow B\mathrm{q} \,, \\
C_{\Leftrightarrow}(A) & = & \mathrm{p}A \Leftrightarrow B\mathrm{q} \,.
\end{array}
$$

On définit l'ensemble *PROP* des **formules propositionnelles** comme $(\mathcal{U}, \mathbb{PS} \cup \{\perp\}, \{C_{\#} : \# \in \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\})_{\omega}$ ou encore comme l'ensemble des Σ-termes finis avec $\Sigma_0 := \mathbb{PS} \cup \{\perp\}$, $\Sigma_1 := \{C_{\neg}\}$, $\Sigma_2 := \{C_{\#} : \# \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\}$ et $\Sigma_n = \emptyset$ dès que $n > 2$.

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Soit $\mathcal{V}$ un ensemble non vide, soit $\mathcal{G} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{V}^{\mathcal{V}^n}$ et soit $d : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ tel que quel que soit $f \in \mathcal{F}$, $d(f) : \mathcal{V}^{ar(f)} \to \mathcal{V}$ appartient à $\mathcal{G}$ (il n'est nullement nécessaire que d soit une bijection).

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Soit $\mathcal{V}$ un ensemble non vide, soit $\mathcal{G} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{V}^{\mathcal{V}^n}$ et soit $d : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ tel que quel que soit $f \in \mathcal{F}$, $d(f) : \mathcal{V}^{ar(f)} \to \mathcal{V}$ appartient à $\mathcal{G}$ (il n'est nullement nécessaire que d soit une bijection).

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Soit $\mathcal{V}$ un ensemble non vide, soit $\mathcal{G} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{V}^{\mathcal{V}^n}$ et soit $d : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ tel que quel que soit $f \in \mathcal{F}$, $d(f) : \mathcal{V}^{ar(f)} \to \mathcal{V}$ appartient à $\mathcal{G}$ (il n'est nullement nécessaire que d soit une bijection).

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Soit $\mathcal{V}$ un ensemble non vide, soit $\mathcal{G} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{V}^{\mathcal{V}^n}$ et soit $d : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ tel que quel que soit $f \in \mathcal{F}$, $d(f) : \mathcal{V}^{ar(f)} \rightarrow \mathcal{V}$ appartient à $\mathcal{G}$ (il n'est nullement nécessaire que d soit une bijection).

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Soit $\mathcal{V}$ un ensemble non vide, soit $\mathcal{G} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{V}^{\mathcal{V}^n}$ et soit $d : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ tel que quel que soit $f \in \mathcal{F}$, $d(f) : \mathcal{V}^{ar(f)} \to \mathcal{V}$ appartient à $\mathcal{G}$ (il n'est nullement nécessaire que d soit une bijection).

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Soit $\mathcal{V}$ un ensemble non vide, soit $\mathcal{G} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{V}^{\mathcal{V}^n}$ et soit $d : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ tel que quel que soit $f \in \mathcal{F}$, $d(f) : \mathcal{V}^{ar(f)} \to \mathcal{V}$ appartient à $\mathcal{G}$ (il n'est nullement nécessaire que d soit une bijection).

Soit $I := (\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ un triplet d'induction. Soit $\mathcal{V}$ un ensemble non vide, soit $\mathcal{G} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{V}^{\mathcal{V}^n}$ et soit $d : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ tel que quel que soit $f \in \mathcal{F}$, $d(f) : \mathcal{V}^{ar(f)} \to \mathcal{V}$ appartient à $\mathcal{G}$ (il n'est nullement nécessaire que d soit une bijection).

Théorème

Soient I, $\mathcal{V}$, $\mathcal{G}$ et d définis comme précédemment. Supposons en outre que I_ω soit inductivement libre. Pour chaque $h : \mathcal{B} \to \mathcal{V}$, il existe une unique application $\hat{h} : I_\omega \to \mathcal{V}$ telle que :

1. Pour tout $x \in \mathcal{B}$, $\hat{h}(x) = h(x)$;
2. Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ et chaque $x = (x_1, \ldots, x_{ar(f)}) \in I_\omega^{ar(f)}$,

$$\hat{h}(f(x_1, \ldots, x_{ar(f)})) = d(f)(\hat{h}(x_1), \ldots, \hat{h}(x_{ar(f)})) .$$

On dit que $\hat{h}$ est **définie par induction structurelle**.

Théorème

Soient I, $\mathcal{V}$, $\mathcal{G}$ et d définis comme précédemment. Supposons en outre que I_ω soit inductivement libre. Pour chaque $h : \mathcal{B} \to \mathcal{V}$, il existe une unique application $\hat{h} : I_\omega \to \mathcal{V}$ telle que :

1. Pour tout $x \in \mathcal{B}$, $\hat{h}(x) = h(x)$;
2. Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ et chaque $x = (x_1, \ldots, x_{ar(f)}) \in I_\omega^{ar(f)}$,
$$\hat{h}(f(x_1, \ldots, x_{ar(f)})) = d(f)(\hat{h}(x_1), \ldots, \hat{h}(x_{ar(f)})) .$$

On dit que $\hat{h}$ est **définie par induction structurelle**.

Théorème

Soient I, $\mathcal{V}$, $\mathcal{G}$ et d définis comme précédemment. Supposons en outre que I_ω soit inductivement libre. Pour chaque $h : \mathcal{B} \to \mathcal{V}$, il existe une unique application $\hat{h} : I_\omega \to \mathcal{V}$ telle que :

1. Pour tout $x \in \mathcal{B}$, $\hat{h}(x) = h(x)$;
2. Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ et chaque $x = (x_1, \ldots, x_{ar(f)}) \in I_\omega^{ar(f)}$,

$$\hat{h}(f(x_1, \ldots, x_{ar(f)})) = d(f)(\hat{h}(x_1), \ldots, \hat{h}(x_{ar(f)})) .$$

On dit que $\hat{h}$ est **définie par induction structurelle**.

Théorème

Soient I, $\mathcal{V}$, $\mathcal{G}$ et d définis comme précédemment. Supposons en outre que I_ω soit inductivement libre. Pour chaque $h : \mathcal{B} \to \mathcal{V}$, il existe une unique application $\hat{h} : I_\omega \to \mathcal{V}$ telle que :

1. Pour tout $x \in \mathcal{B}$, $\hat{h}(x) = h(x)$;
2. Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ et chaque $x = (x_1, \ldots, x_{ar(f)}) \in I_\omega^{ar(f)}$,

$$\hat{h}(f(x_1, \ldots, x_{ar(f)})) = d(f)(\hat{h}(x_1), \ldots, \hat{h}(x_{ar(f)})) .$$

On dit que $\hat{h}$ est **définie par induction structurelle**.

Théorème

Soient I, $\mathcal{V}$, $\mathcal{G}$ et d définis comme précédemment. Supposons en outre que I_ω soit inductivement libre. Pour chaque $h : \mathcal{B} \to \mathcal{V}$, il existe une unique application $\hat{h} : I_\omega \to \mathcal{V}$ telle que :

1. Pour tout $x \in \mathcal{B}$, $\hat{h}(x) = h(x)$;
2. Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ et chaque $x = (x_1, \ldots, x_{ar(f)}) \in I_\omega^{ar(f)}$,

$$\hat{h}(f(x_1, \ldots, x_{ar(f)})) = d(f)(\hat{h}(x_1), \ldots, \hat{h}(x_{ar(f)})) .$$

On dit que $\hat{h}$ est **définie par induction structurelle**.

Théorème

Soient I, $\mathcal{V}$, $\mathcal{G}$ et d définis comme précédemment. Supposons en outre que I_ω soit inductivement libre. Pour chaque $h : \mathcal{B} \to \mathcal{V}$, il existe une unique application $\hat{h} : I_\omega \to \mathcal{V}$ telle que :

1. Pour tout $x \in \mathcal{B}$, $\hat{h}(x) = h(x)$;
2. Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ et chaque $x = (x_1, \ldots, x_{ar(f)}) \in I_\omega^{ar(f)}$,
$$\hat{h}(f(x_1, \ldots, x_{ar(f)})) = d(f)(\hat{h}(x_1), \ldots, \hat{h}(x_{ar(f)}))\ .$$

On dit que $\hat{h}$ est **définie par induction structurelle**.

Théorème

Soient I, $\mathcal{V}$, $\mathcal{G}$ et d définis comme précédemment. Supposons en outre que I_ω soit inductivement libre. Pour chaque $h : \mathcal{B} \to \mathcal{V}$, il existe une unique application $\hat{h} : I_\omega \to \mathcal{V}$ telle que :

1. Pour tout $x \in \mathcal{B}$, $\hat{h}(x) = h(x)$;
2. Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ et chaque $x = (x_1, \ldots, x_{ar(f)}) \in I_\omega^{ar(f)}$,

$$\hat{h}(f(x_1, \ldots, x_{ar(f)})) = d(f)(\hat{h}(x_1), \ldots, \hat{h}(x_{ar(f)})) .$$

On dit que $\widehat{h}$ est **définie par induction structurelle**.

Théorème

Soient I, $\mathcal{V}$, $\mathcal{G}$ et d définis comme précédemment. Supposons en outre que I_ω soit inductivement libre. Pour chaque $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}$, il existe une unique application $\hat{h} : I_\omega \rightarrow \mathcal{V}$ telle que :

1. Pour tout $x \in \mathcal{B}$, $\hat{h}(x) = h(x)$;
2. Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ et chaque $x = (x_1, \ldots, x_{ar(f)}) \in I_\omega^{ar(f)}$,
$$\hat{h}(f(x_1, \ldots, x_{ar(f)})) = d(f)(\hat{h}(x_1), \ldots, \hat{h}(x_{ar(f)})) .$$

On dit que $\widehat{h}$ est **définie par induction structurelle**.

Théorème

Soient I, $\mathcal{V}$, $\mathcal{G}$ et d définis comme précédemment. Supposons en outre que I_ω soit inductivement libre. Pour chaque $h : \mathcal{B} \to \mathcal{V}$, il existe une unique application $\hat{h} : I_\omega \to \mathcal{V}$ telle que :

1. Pour tout $x \in \mathcal{B}$, $\hat{h}(x) = h(x)$;
2. Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ et chaque $x = (x_1, \ldots, x_{ar(f)}) \in I_\omega^{ar(f)}$,

$$\hat{h}(f(x_1, \ldots, x_{ar(f)})) = d(f)(\hat{h}(x_1), \ldots, \hat{h}(x_{ar(f)})) \ .$$

On dit que $\widehat{h}$ est **définie par induction structurelle**.

Nous introduisons un lemme technique utile à la preuve du théorème précédent.

On définit un ordre partiel $\subseteq$ sur les fonctions partielles de B^A comme suit : $f \subseteq g$ si, et seulement si, le graphe de f est inclus dans le graphe de g.

Lemme 2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions partielles $f_n : A \to B$ telles que $f_n \subseteq f_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. (On utilise ici de manière implicite l'axiome des choix dépendants : on peut en effet montrer que quelle que soit la fonction partielle f, il existe une fonction partielle g telle que $f \subseteq g$, puiqu'il suffit de prendre pour g la fonction f elle-même. On est donc en droit, en vertu de l'axiome des choix dépendants, de supposer l'existence d'une telle suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.) Alors $g := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est une fonction partielle. De plus, g est l'infimum de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nous introduisons un lemme technique utile à la preuve du théorème précédent.

On définit un ordre partiel $\subseteq$ sur les fonctions partielles de B^A comme suit : $f \subseteq g$ si, et seulement si, le graphe de f est inclus dans le graphe de g.

Lemme 2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions partielles $f_n : A \to B$ telles que $f_n \subseteq f_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. (On utilise ici de manière implicite l'axiome des choix dépendants : on peut en effet montrer que quelle que soit la fonction partielle f, il existe une fonction partielle g telle que $f \subseteq g$, puiqu'il suffit de prendre pour g la fonction f elle-même. On est donc en droit, en vertu de l'axiome des choix dépendants, de supposer l'existence d'une telle suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.) Alors $g := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est une fonction partielle. De plus, g est l'infimum de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nous introduisons un lemme technique utile à la preuve du théorème précédent.

On définit un ordre partiel $\subseteq$ sur les fonctions partielles de B^A comme suit : $f \subseteq g$ si, et seulement si, le graphe de f est inclus dans le graphe de g.

Lemme 2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions partielles $f_n : A \to B$ telles que $f_n \subseteq f_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. (On utilise ici de manière implicite l'axiome des choix dépendants : on peut en effet montrer que quelle que soit la fonction partielle f, il existe une fonction partielle g telle que $f \subseteq g$, puiqu'il suffit de prendre pour g la fonction f elle-même. On est donc en droit, en vertu de l'axiome des choix dépendants, de supposer l'existence d'une telle suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.) Alors $g := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est une fonction partielle. De plus, g est l'infimum de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nous introduisons un lemme technique utile à la preuve du théorème précédent.
On définit un ordre partiel $\subseteq$ sur les fonctions partielles de B^A comme suit : $f \subseteq g$ si, et seulement si, le graphe de f est inclus dans le graphe de g.
Lemme 2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions partielles $f_n : A \to B$ telles que $f_n \subseteq f_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. (On utilise ici de manière implicite l'axiome des choix dépendants : on peut en effet montrer que quelle que soit la fonction partielle f, il existe une fonction partielle g telle que $f \subseteq g$, puiqu'il suffit de prendre pour g la fonction f elle-même. On est donc en droit, en vertu de l'axiome des choix dépendants, de supposer l'existence d'une telle suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.) Alors $g := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est une fonction partielle. De plus, g est l'infimum de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nous introduisons un lemme technique utile à la preuve du théorème précédent.
On définit un ordre partiel $\subseteq$ sur les fonctions partielles de B^A comme suit : $f \subseteq g$ si, et seulement si, le graphe de f est inclus dans le graphe de g.
Lemme 2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions partielles $f_n : A \to B$ telles que $f_n \subseteq f_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. (On utilise ici de manière implicite l'axiome des choix dépendants : on peut en effet montrer que quelle que soit la fonction partielle f, il existe une fonction partielle g telle que $f \subseteq g$, puiqu'il suffit de prendre pour g la fonction f elle-même. On est donc en droit, en vertu de l'axiome des choix dépendants, de supposer l'existence d'une telle suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.) Alors $g := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est une fonction partielle. De plus, g est l'infimum de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nous introduisons un lemme technique utile à la preuve du théorème précédent.

On définit un ordre partiel $\subseteq$ sur les fonctions partielles de B^A comme suit : $f \subseteq g$ si, et seulement si, le graphe de f est inclus dans le graphe de g.

Lemme 2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions partielles $f_n : A \to B$ telles que $f_n \subseteq f_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. (On utilise ici de manière implicite l'axiome des choix dépendants : on peut en effet montrer que quelle que soit la fonction partielle f, il existe une fonction partielle g telle que $f \subseteq g$, puiqu'il suffit de prendre pour g la fonction f elle-même. On est donc en droit, en vertu de l'axiome des choix dépendants, de supposer l'existence d'une telle suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.) Alors $g := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est une fonction partielle. De plus, g est l'infimum de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nous introduisons un lemme technique utile à la preuve du théorème précédent.

On définit un ordre partiel $\subseteq$ sur les fonctions partielles de B^A comme suit : $f \subseteq g$ si, et seulement si, le graphe de f est inclus dans le graphe de g.

Lemme 2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions partielles $f_n : A \to B$ telles que $f_n \subseteq f_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. (On utilise ici de manière implicite l'axiome des choix dépendants : on peut en effet montrer que quelle que soit la fonction partielle f, il existe une fonction partielle g telle que $f \subseteq g$, puiqu'il suffit de prendre pour g la fonction f elle-même. On est donc en droit, en vertu de l'axiome des choix dépendants, de supposer l'existence d'une telle suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.) Alors $g := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est une fonction partielle. De plus, g est l'infimum de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nous introduisons un lemme technique utile à la preuve du théorème précédent.

On définit un ordre partiel $\subseteq$ sur les fonctions partielles de B^A comme suit : $f \subseteq g$ si, et seulement si, le graphe de f est inclus dans le graphe de g.

Lemme 2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions partielles $f_n : A \to B$ telles que $f_n \subseteq f_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. (On utilise ici de manière implicite l'axiome des choix dépendants : on peut en effet montrer que quelle que soit la fonction partielle f, il existe une fonction partielle g telle que $f \subseteq g$, puiqu'il suffit de prendre pour g la fonction f elle-même. On est donc en droit, en vertu de l'axiome des choix dépendants, de supposer l'existence d'une telle suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.) Alors $g := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est une fonction partielle. De plus, g est l'infimum de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nous introduisons un lemme technique utile à la preuve du théorème précédent.

On définit un ordre partiel $\subseteq$ sur les fonctions partielles de B^A comme suit : $f \subseteq g$ si, et seulement si, le graphe de f est inclus dans le graphe de g.

Lemme 2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions partielles $f_n : A \to B$ telles que $f_n \subseteq f_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. (On utilise ici de manière implicite l'axiome des choix dépendants : on peut en effet montrer que quelle que soit la fonction partielle f, il existe une fonction partielle g telle que $f \subseteq g$, puiqu'il suffit de prendre pour g la fonction f elle-même. On est donc en droit, en vertu de l'axiome des choix dépendants, de supposer l'existence d'une telle suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.) Alors $g := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est une fonction partielle. De plus, g est l'infimum de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nous introduisons un lemme technique utile à la preuve du théorème précédent.
On définit un ordre partiel $\subseteq$ sur les fonctions partielles de B^A comme suit : $f \subseteq g$ si, et seulement si, le graphe de f est inclus dans le graphe de g.
Lemme 2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions partielles $f_n : A \to B$ telles que $f_n \subseteq f_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. (On utilise ici de manière implicite l'axiome des choix dépendants : on peut en effet montrer que quelle que soit la fonction partielle f, il existe une fonction partielle g telle que $f \subseteq g$, puiqu'il suffit de prendre pour g la fonction f elle-même. On est donc en droit, en vertu de l'axiome des choix dépendants, de supposer l'existence d'une telle suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.) Alors $g := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est une fonction partielle. De plus, g est l'infimum de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nous introduisons un lemme technique utile à la preuve du théorème précédent.

On définit un ordre partiel $\subseteq$ sur les fonctions partielles de B^A comme suit : $f \subseteq g$ si, et seulement si, le graphe de f est inclus dans le graphe de g.

Lemme 2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions partielles $f_n : A \to B$ telles que $f_n \subseteq f_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. (On utilise ici de manière implicite l'axiome des choix dépendants : on peut en effet montrer que quelle que soit la fonction partielle f, il existe une fonction partielle g telle que $f \subseteq g$, puiqu'il suffit de prendre pour g la fonction f elle-même. On est donc en droit, en vertu de l'axiome des choix dépendants, de supposer l'existence d'une telle suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.) Alors $g := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est une fonction partielle. De plus, g est l'infimum de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nous introduisons un lemme technique utile à la preuve du théorème précédent.

On définit un ordre partiel $\subseteq$ sur les fonctions partielles de B^A comme suit : $f \subseteq g$ si, et seulement si, le graphe de f est inclus dans le graphe de g.

Lemme 2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions partielles $f_n : A \to B$ telles que $f_n \subseteq f_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. (On utilise ici de manière implicite l'axiome des choix dépendants : on peut en effet montrer que quelle que soit la fonction partielle f, il existe une fonction partielle g telle que $f \subseteq g$, puiqu'il suffit de prendre pour g la fonction f elle-même. On est donc en droit, en vertu de l'axiome des choix dépendants, de supposer l'existence d'une telle suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.) Alors $g := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est une fonction partielle. De plus, g est l'infimum de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Preuve du lemme

Montrons tout d'abord que $g := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est un graphe fonctionnel (c'est-à-dire le graphe d'une fonction). Notons que pour chaque $(x,y)\in g$, il existe un entier n tel que $f_n(x)=y$. Si $(x,y)\in G$ et $(x,z)\in g$, alors il existe un entier m tel que $f_m(x)=y$ et un entier n tel que $f_n(x)=z$. Posons $k:=\max\{m,n\}$. Par hypothèse sur $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_k(x)=y$ et $f_k(x)=z$. Donc $y=z$. Ensuite, le fait que chaque f_n soit contenue dans g est évident puisque $g=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Si h est une fonction partielle telle que $f_n\subseteq h$ quel que soit $n\in\mathbb{N}$, par définition de la réunion, $g=\bigcup f_n\subseteq h$. Ainsi, g est bien la borne inférieure de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Preuve du lemme

Montrons tout d'abord que $g := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est un graphe fonctionnel (c'est-à-dire le graphe d'une fonction). Notons que pour chaque $(x, y) \in g$, il existe un entier n tel que $f_n(x) = y$. Si $(x, y) \in G$ et $(x, z) \in g$, alors il existe un entier m tel que $f_m(x) = y$ et un entier n tel que $f_n(x) = z$. Posons $k := \max\{m, n\}$. Par hypothèse sur $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_k(x) = y$ et $f_k(x) = z$. Donc $y = z$. Ensuite, le fait que chaque f_n soit contenue dans g est évident puisque $g = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Si h est une fonction partielle telle que $f_n \subseteq h$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, par définition de la réunion, $g = \bigcup f_n \subseteq h$. Ainsi, g est bien la borne inférieure de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Preuve du lemme

Montrons tout d'abord que $g := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est un graphe fonctionnel (c'est-à-dire le graphe d'une fonction). Notons que pour chaque $(x, y) \in g$, il existe un entier n tel que $f_n(x) = y$. Si $(x, y) \in G$ et $(x, z) \in g$, alors il existe un entier m tel que $f_m(x) = y$ et un entier n tel que $f_n(x) = z$. Posons $k := \max\{m, n\}$. Par hypothèse sur $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_k(x) = y$ et $f_k(x) = z$. Donc $y = z$. Ensuite, le fait que chaque f_n soit contenue dans g est évident puisque $g = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Si h est une fonction partielle telle que $f_n \subseteq h$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, par définition de la réunion, $g = \bigcup f_n \subseteq h$. Ainsi, g est bien la borne inférieure de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Preuve du lemme

Montrons tout d'abord que $g := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est un graphe fonctionnel (c'est-à-dire le graphe d'une fonction). Notons que pour chaque $(x, y) \in g$, il existe un entier n tel que $f_n(x) = y$. Si $(x, y) \in G$ et $(x, z) \in g$, alors il existe un entier m tel que $f_m(x) = y$ et un entier n tel que $f_n(x) = z$. Posons $k := \max\{m, n\}$. Par hypothèse sur $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_k(x) = y$ et $f_k(x) = z$. Donc $y = z$. Ensuite, le fait que chaque f_n soit contenue dans g est évident puisque $g = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Si h est une fonction partielle telle que $f_n \subseteq h$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, par définition de la réunion, $g = \bigcup f_n \subseteq h$. Ainsi, g est bien la borne inférieure de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Preuve du lemme

Montrons tout d'abord que $g := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est un graphe fonctionnel (c'est-à-dire le graphe d'une fonction). Notons que pour chaque $(x, y) \in g$, il existe un entier n tel que $f_n(x) = y$. Si $(x, y) \in G$ et $(x, z) \in g$, alors il existe un entier m tel que $f_m(x) = y$ et un entier n tel que $f_n(x) = z$. Posons $k := \max\{m, n\}$. Par hypothèse sur $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_k(x) = y$ et $f_k(x) = z$. Donc $y = z$. Ensuite, le fait que chaque f_n soit contenue dans g est évident puisque $g = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Si h est une fonction partielle telle que $f_n \subseteq h$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, par définition de la réunion, $g = \bigcup f_n \subseteq h$. Ainsi, g est bien la borne inférieure de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Preuve du lemme

Montrons tout d'abord que $g := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est un graphe fonctionnel (c'est-à-dire le graphe d'une fonction). Notons que pour chaque $(x, y) \in g$, il existe un entier n tel que $f_n(x) = y$. Si $(x, y) \in G$ et $(x, z) \in g$, alors il existe un entier m tel que $f_m(x) = y$ et un entier n tel que $f_n(x) = z$. Posons $k := \max\{m, n\}$. Par hypothèse sur $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_k(x) = y$ et $f_k(x) = z$. Donc $y = z$. Ensuite, le fait que chaque f_n soit contenue dans g est évident puisque $g = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Si h est une fonction partielle telle que $f_n \subseteq h$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, par définition de la réunion, $g = \bigcup f_n \subseteq h$. Ainsi, g est bien la borne inférieure de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Preuve du lemme

Montrons tout d'abord que $g := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est un graphe fonctionnel (c'est-à-dire le graphe d'une fonction). Notons que pour chaque $(x, y) \in g$, il existe un entier n tel que $f_n(x) = y$. Si $(x, y) \in G$ et $(x, z) \in g$, alors il existe un entier m tel que $f_m(x) = y$ et un entier n tel que $f_n(x) = z$. Posons $k := \max\{m, n\}$. Par hypothèse sur $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_k(x) = y$ et $f_k(x) = z$. Donc $y = z$. Ensuite, le fait que chaque f_n soit contenue dans g est évident puisque $g = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Si h est une fonction partielle telle que $f_n \subseteq h$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, par définition de la réunion, $g = \bigcup f_n \subseteq h$. Ainsi, g est bien la borne inférieure de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Preuve du lemme

Montrons tout d'abord que $g := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est un graphe fonctionnel (c'est-à-dire le graphe d'une fonction). Notons que pour chaque $(x, y) \in g$, il existe un entier n tel que $f_n(x) = y$. Si $(x, y) \in G$ et $(x, z) \in g$, alors il existe un entier m tel que $f_m(x) = y$ et un entier n tel que $f_n(x) = z$. Posons $k := \max\{m, n\}$. Par hypothèse sur $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_k(x) = y$ et $f_k(x) = z$. Donc $y = z$. Ensuite, le fait que chaque f_n soit contenue dans g est évident puisque $g = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Si h est une fonction partielle telle que $f_n \subseteq h$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, par définition de la réunion, $g = \bigcup f_n \subseteq h$. Ainsi, g est bien la borne inférieure de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Preuve du lemme

Montrons tout d'abord que $g := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ est un graphe fonctionnel (c'est-à-dire le graphe d'une fonction). Notons que pour chaque $(x, y) \in g$, il existe un entier n tel que $f_n(x) = y$. Si $(x, y) \in G$ et $(x, z) \in g$, alors il existe un entier m tel que $f_m(x) = y$ et un entier n tel que $f_n(x) = z$. Posons $k := \max\{m, n\}$. Par hypothèse sur $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_k(x) = y$ et $f_k(x) = z$. Donc $y = z$. Ensuite, le fait que chaque f_n soit contenue dans g est évident puisque $g = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n$. Si h est une fonction partielle telle que $f_n \subseteq h$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, par définition de la réunion, $g = \bigcup f_n \subseteq h$. Ainsi, g est bien la borne inférieure de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Preuve du lemme

Montrons tout d'abord que $g := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est un graphe fonctionnel (c'est-à-dire le graphe d'une fonction). Notons que pour chaque $(x, y) \in g$, il existe un entier n tel que $f_n(x) = y$. Si $(x, y) \in G$ et $(x, z) \in g$, alors il existe un entier m tel que $f_m(x) = y$ et un entier n tel que $f_n(x) = z$. Posons $k := \max\{m, n\}$. Par hypothèse sur $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_k(x) = y$ et $f_k(x) = z$. Donc $y = z$. Ensuite, le fait que chaque f_n soit contenue dans g est évident puisque $g = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Si h est une fonction partielle telle que $f_n \subseteq h$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, par définition de la réunion, $g = \bigcup f_n \subseteq h$. Ainsi, g est bien la borne inférieure de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Preuve du lemme

Montrons tout d'abord que $g := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est un graphe fonctionnel (c'est-à-dire le graphe d'une fonction). Notons que pour chaque $(x,y)\in g$, il existe un entier n tel que $f_n(x)=y$. Si $(x,y)\in G$ et $(x,z)\in g$, alors il existe un entier m tel que $f_m(x)=y$ et un entier n tel que $f_n(x)=z$. Posons $k:=\max\{m,n\}$. Par hypothèse sur $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_k(x)=y$ et $f_k(x)=z$. Donc $y=z$. Ensuite, le fait que chaque f_n soit contenue dans g est évident puisque $g=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Si h est une fonction partielle telle que $f_n\subseteq h$ quel que soit $n\in\mathbb{N}$, par définition de la réunion, $g=\bigcup f_n\subseteq h$. Ainsi, g est bien la borne inférieure de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Preuve du lemme

Montrons tout d'abord que $g := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est un graphe fonctionnel (c'est-à-dire le graphe d'une fonction). Notons que pour chaque $(x,y) \in g$, il existe un entier n tel que $f_n(x) = y$. Si $(x,y) \in G$ et $(x,z) \in g$, alors il existe un entier m tel que $f_m(x) = y$ et un entier n tel que $f_n(x) = z$. Posons $k := \max\{m,n\}$. Par hypothèse sur $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_k(x) = y$ et $f_k(x) = z$. Donc $y = z$. Ensuite, le fait que chaque f_n soit contenue dans g est évident puisque $g = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Si h est une fonction partielle telle que $f_n \subseteq h$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, par définition de la réunion, $g = \bigcup f_n \subseteq h$. Ainsi, g est bien la borne inférieure de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Preuve du lemme

Montrons tout d'abord que $g := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est un graphe fonctionnel (c'est-à-dire le graphe d'une fonction). Notons que pour chaque $(x, y) \in g$, il existe un entier n tel que $f_n(x) = y$. Si $(x, y) \in G$ et $(x, z) \in g$, alors il existe un entier m tel que $f_m(x) = y$ et un entier n tel que $f_n(x) = z$. Posons $k := \max\{m, n\}$. Par hypothèse sur $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_k(x) = y$ et $f_k(x) = z$. Donc $y = z$. Ensuite, le fait que chaque f_n soit contenue dans g est évident puisque $g = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Si h est une fonction partielle telle que $f_n \subseteq h$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, par définition de la réunion, $g = \bigcup f_n \subseteq h$. Ainsi, g est bien la borne inférieure de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Preuve du lemme

Montrons tout d'abord que $g := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est un graphe fonctionnel (c'est-à-dire le graphe d'une fonction). Notons que pour chaque $(x, y) \in g$, il existe un entier n tel que $f_n(x) = y$. Si $(x, y) \in G$ et $(x, z) \in g$, alors il existe un entier m tel que $f_m(x) = y$ et un entier n tel que $f_n(x) = z$. Posons $k := \max\{m, n\}$. Par hypothèse sur $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_k(x) = y$ et $f_k(x) = z$. Donc $y = z$. Ensuite, le fait que chaque f_n soit contenue dans g est évident puisque $g = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Si h est une fonction partielle telle que $f_n \subseteq h$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, par définition de la réunion, $g = \bigcup f_n \subseteq h$. Ainsi, g est bien la borne inférieure de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Preuve du théorème

On définit par récurrence une séquence d'applications $h_n : I_n \to \mathcal{V}$ satisfaisant les conditions (1) et (2) restreintes à I_n. On pose $h_0 = h$. Étant donné h_n, soit h_{n+1} ayant le graphe suivant

$$\{(f(x_1, \ldots, x_{ar(f)}), d(f)(h_n(x_1), \ldots, h_n(x_{ar(f)}))) : (x_1, \ldots, x_{ar(f)}) \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}, f \in \mathcal{F}\} \cup h_n \ .$$

Preuve du théorème

On définit par récurrence une séquence d'applications $h_n : I_n \to \mathcal{V}$ satisfaisant les conditions (1) et (2) restreintes à I_n. On pose $h_0 = h$. Étant donné h_n, soit h_{n+1} ayant le graphe suivant
$\{(f(x_1, \ldots, x_{ar(f)}), d(f)(h_n(x_1), \ldots, h_n(x_{ar(f)}))) : (x_1, \ldots, x_{ar(f)}) \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}, f \in \mathcal{F}\} \cup h_n$.

Preuve du théorème

On définit par récurrence une séquence d'applications $h_n : I_n \to \mathcal{V}$ satisfaisant les conditions (1) et (2) restreintes à I_n. On pose $h_0 = h$. Étant donné h_n, soit h_{n+1} ayant le graphe suivant $\{(f(x_1, \ldots, x_{ar(f)}), d(f)(h_n(x_1), \ldots, h_n(x_{ar(f)}))) : (x_1, \ldots, x_{ar(f)}) \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}, f \in \mathcal{F}\} \cup h_n$.

Preuve du théorème

On définit par récurrence une séquence d'applications $h_n : I_n \to \mathcal{V}$ satisfaisant les conditions (1) et (2) restreintes à I_n. On pose $h_0 = h$. Étant donné h_n, soit h_{n+1} ayant le graphe suivant
$\{(f(x_1, \ldots, x_{ar(f)}), d(f)(h_n(x_1), \ldots, h_n(x_{ar(f)}))) :$
$(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}, f \in \mathcal{F}\} \cup h_n$.

Preuve du théorème (suite)

Nous devons vérifier que ce graphe est bien fonctionnel. Puisque I_ω est inductivement libre, par le lemme 1, $f(x) \in I_{n+1} \setminus I_n$ dès que $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$ et nous devons seulement vérifier la fonctionnalité du premier membre de l'union. Puisque les éléments de $\mathcal{G}$ sont des applications, par le lemme 1, la seule possibilté d'avoir $(x_0, y) \in h_n$ et $(x_0, z) \in h_n$ pour un $x_0 \in I_{n+1} \setminus I_n$ est d'avoir $x_0 = f(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) = g(y_1, \ldots, y_{ar(f)})$ pour $(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, $(y_1, \ldots, y_{ar(f)}) \in I_n^{ar(g)} \setminus I_{n-1}^{ar(g)}$, et $f, g \in \mathcal{F}$.

Preuve du théorème (suite)

Nous devons vérifier que ce graphe est bien fonctionnel. Puisque I_ω est inductivement libre, par le lemme 1, $f(x) \in I_{n+1} \setminus I_n$ dès que $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$ et nous devons seulement vérifier la fonctionnalité du premier membre de l'union. Puisque les éléments de $\mathcal{G}$ sont des applications, par le lemme 1, la seule possibilté d'avoir $(x_0, y) \in h_n$ et $(x_0, z) \in h_n$ pour un $x_0 \in I_{n+1} \setminus I_n$ est d'avoir $x_0 = f(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) = g(y_1, \ldots, y_{ar(f)})$ pour $(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, $(y_1, \ldots, y_{ar(f)}) \in I_n^{ar(g)} \setminus I_{n-1}^{ar(g)}$, et $f, g \in \mathcal{F}$.

Preuve du théorème (suite)

Nous devons vérifier que ce graphe est bien fonctionnel. Puisque I_ω est inductivement libre, par le lemme 1, $f(x) \in I_{n+1} \setminus I_n$ dès que $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$ et nous devons seulement vérifier la fonctionnalité du premier membre de l'union. Puisque les éléments de $\mathcal{G}$ sont des applications, par le lemme 1, la seule possibilté d'avoir $(x_0, y) \in h_n$ et $(x_0, z) \in h_n$ pour un $x_0 \in I_{n+1} \setminus I_n$ est d'avoir $x_0 = f(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) = g(y_1, \ldots, y_{ar(f)})$ pour $(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, $(y_1, \ldots, y_{ar(f)}) \in I_n^{ar(g)} \setminus I_{n-1}^{ar(g)}$, et $f, g \in \mathcal{F}$.

Preuve du théorème (suite)

Nous devons vérifier que ce graphe est bien fonctionnel. Puisque I_ω est inductivement libre, par le lemme 1, $f(x) \in I_{n+1} \setminus I_n$ dès que $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$ et nous devons seulement vérifier la fonctionnalité du premier membre de l'union. Puisque les éléments de $\mathcal{G}$ sont des applications, par le lemme 1, la seule possibilté d'avoir $(x_0, y) \in h_n$ et $(x_0, z) \in h_n$ pour un $x_0 \in I_{n+1} \setminus I_n$ est d'avoir $x_0 = f(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) = g(y_1, \ldots, y_{ar(f)})$ pour $(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, $(y_1, \ldots, y_{ar(f)}) \in I_n^{ar(g)} \setminus I_{n-1}^{ar(g)}$, et $f, g \in \mathcal{F}$.

Preuve du théorème (suite)

Nous devons vérifier que ce graphe est bien fonctionnel. Puisque I_ω est inductivement libre, par le lemme 1, $f(x) \in I_{n+1} \setminus I_n$ dès que $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$ et nous devons seulement vérifier la fonctionnalité du premier membre de l'union. Puisque les éléments de $\mathcal{G}$ sont des applications, par le lemme 1, la seule possibilté d'avoir $(x_0, y) \in h_n$ et $(x_0, z) \in h_n$ pour un $x_0 \in I_{n+1} \setminus I_n$ est d'avoir $x_0 = f(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) = g(y_1, \ldots, y_{ar(f)})$ pour $(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, $(y_1, \ldots, y_{ar(f)}) \in I_n^{ar(g)} \setminus I_{n-1}^{ar(g)}$, et $f, g \in \mathcal{F}$.

Preuve du théorème (suite)

Nous devons vérifier que ce graphe est bien fonctionnel. Puisque I_ω est inductivement libre, par le lemme 1, $f(x) \in I_{n+1} \setminus I_n$ dès que $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$ et nous devons seulement vérifier la fonctionnalité du premier membre de l'union. Puisque les éléments de $\mathcal{G}$ sont des applications, par le lemme 1, la seule possibilté d'avoir $(x_0, y) \in h_n$ et $(x_0, z) \in h_n$ pour un $x_0 \in I_{n+1} \setminus I_n$ est d'avoir $x_0 = f(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) = g(y_1, \ldots, y_{ar(f)})$ pour $(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, $(y_1, \ldots, y_{ar(f)}) \in I_n^{ar(g)} \setminus I_{n-1}^{ar(g)}$, et $f, g \in \mathcal{F}$.

Preuve du théorème (suite)

Nous devons vérifier que ce graphe est bien fonctionnel. Puisque I_ω est inductivement libre, par le lemme 1, $f(x) \in I_{n+1} \setminus I_n$ dès que $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$ et nous devons seulement vérifier la fonctionnalité du premier membre de l'union. Puisque les éléments de $\mathcal{G}$ sont des applications, par le lemme 1, la seule possibilté d'avoir $(x_0, y) \in h_n$ et $(x_0, z) \in h_n$ pour un $x_0 \in I_{n+1} \setminus I_n$ est d'avoir $x_0 = f(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) = g(y_1, \ldots, y_{ar(f)})$ pour $(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, $(y_1, \ldots, y_{ar(f)}) \in I_n^{ar(g)} \setminus I_{n-1}^{ar(g)}$, et $f, g \in \mathcal{F}$.

Preuve du théorème (suite)

Nous devons vérifier que ce graphe est bien fonctionnel. Puisque I_ω est inductivement libre, par le lemme 1, $f(x) \in I_{n+1} \setminus I_n$ dès que $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$ et nous devons seulement vérifier la fonctionnalité du premier membre de l'union. Puisque les éléments de $\mathcal{G}$ sont des applications, par le lemme 1, la seule possibilté d'avoir $(x_0, y) \in h_n$ et $(x_0, z) \in h_n$ pour un $x_0 \in I_{n+1} \setminus I_n$ est d'avoir $x_0 = f(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) = g(y_1, \ldots, y_{ar(f)})$ pour $(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, $(y_1, \ldots, y_{ar(f)}) \in I_n^{ar(g)} \setminus I_{n-1}^{ar(g)}$, et $f, g \in \mathcal{F}$.

Preuve du théorème (suite)

Nous devons vérifier que ce graphe est bien fonctionnel. Puisque I_ω est inductivement libre, par le lemme 1, $f(x) \in I_{n+1} \setminus I_n$ dès que $x \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$ et nous devons seulement vérifier la fonctionnalité du premier membre de l'union. Puisque les éléments de $\mathcal{G}$ sont des applications, par le lemme 1, la seule possibilté d'avoir $(x_0, y) \in h_n$ et $(x_0, z) \in h_n$ pour un $x_0 \in I_{n+1} \setminus I_n$ est d'avoir $x_0 = f(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) = g(y_1, \ldots, y_{ar(f)})$ pour $(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) \in I_n^{ar(f)} \setminus I_{n-1}^{ar(f)}$, $(y_1, \ldots, y_{ar(f)}) \in I_n^{ar(g)} \setminus I_{n-1}^{ar(g)}$, et $f, g \in \mathcal{F}$.

Preuve du théorème (suite)

Puisque $f(I_\omega^{ar(f)})$ et $g(I_\omega^{ar(g)})$ sont disjoints dès que $f \neq g$, $f(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) = g(y_1, \ldots, y_{ar(f)})$ implique que $f = g$. Puisque chaque $f \in \mathcal{F}$ est injective sur $I_\omega^{ar(f)}$, nous devons avoir $x_l = y_l$ pour tout l, $1 \leq l \leq ar(f)$. Mais alors $y = z = d(f)(x_1, \ldots, x_{ar(f)})$, ce qui démontre la fonctionnalité. En utilisant le lemme 2, $\widehat{h} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n$ est une fonction partielle. Puisque le domaine de $\widehat{h}$ est égal à la réunion des domaines des h_n, elle-même égale à $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = I_\omega$, $\widehat{h}$ est une application sur I_ω. De plus, il est clair par définition de h_n que $\widehat{h}$ satisfait les conditions (1) et (2) du théorème. Reste à montrer que $\widehat{h}$ est unique : soit h' satisfaisant aussi (1) et (2). Alors on peut facilement démontrer par induction que $\widehat{h}$ et h' sont égales sur I_n quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Ce qui démontre le théorème.

Preuve du théorème (suite)

Puisque $f(I_\omega^{ar(f)})$ et $g(I_\omega^{ar(g)})$ sont disjoints dès que $f \neq g$, $f(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) = g(y_1, \ldots, y_{ar(f)})$ implique que $f = g$. Puisque chaque $f \in \mathcal{F}$ est injective sur $I_\omega^{ar(f)}$, nous devons avoir $x_l = y_l$ pour tout l, $1 \leq l \leq ar(f)$. Mais alors $y = z = d(f)(x_1, \ldots, x_{ar(f)})$, ce qui démontre la fonctionnalité. En utilisant le lemme 2, $\widehat{h} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} h_n$ est une fonction partielle. Puisque le domaine de $\widehat{h}$ est égal à la réunion des domaines des h_n, elle-même égale à $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = I_\omega$, $\widehat{h}$ est une application sur I_ω. De plus, il est clair par définition de h_n que $\widehat{h}$ satisfait les conditions (1) et (2) du théorème. Reste à montrer que $\widehat{h}$ est unique : soit h' satisfaisant aussi (1) et (2). Alors on peut facilement démontrer par induction que $\widehat{h}$ et h' sont égales sur I_n quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Ce qui démontre le théorème.

Preuve du théorème (suite)

Puisque $f(I_\omega^{ar(f)})$ et $g(I_\omega^{ar(g)})$ sont disjoints dès que $f \neq g$, $f(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) = g(y_1, \ldots, y_{ar(f)})$ implique que $f = g$. Puisque chaque $f \in \mathcal{F}$ est injective sur $I_\omega^{ar(f)}$, nous devons avoir $x_l = y_l$ pour tout l, $1 \leq l \leq ar(f)$. Mais alors $y = z = d(f)(x_1, \ldots, x_{ar(f)})$, ce qui démontre la fonctionnalité. En utilisant le lemme 2, $\widehat{h} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n$ est une fonction partielle. Puisque le domaine de $\widehat{h}$ est égal à la réunion des domaines des h_n, elle-même égale à $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = I_\omega$, $\widehat{h}$ est une application sur I_ω. De plus, il est clair par définition de h_n que $\widehat{h}$ satisfait les conditions (1) et (2) du théorème. Reste à montrer que $\widehat{h}$ est unique : soit h' satisfaisant aussi (1) et (2). Alors on peut facilement démontrer par induction que $\widehat{h}$ et h' sont égales sur I_n quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Ce qui démontre le théorème.

Preuve du théorème (suite)

Puisque $f(I_\omega^{ar(f)})$ et $g(I_\omega^{ar(g)})$ sont disjoints dès que $f \neq g$, $f(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) = g(y_1, \ldots, y_{ar(f)})$ implique que $f = g$. Puisque chaque $f \in \mathcal{F}$ est injective sur $I_\omega^{ar(f)}$, nous devons avoir $x_l = y_l$ pour tout l, $1 \leq l \leq ar(f)$. Mais alors $y = z = d(f)(x_1, \ldots, x_{ar(f)})$, ce qui démontre la fonctionnalité. En utilisant le lemme 2, $\widehat{h} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n$ est une fonction partielle. Puisque le domaine de $\widehat{h}$ est égal à la réunion des domaines des h_n, elle-même égale à $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = I_\omega$, $\widehat{h}$ est une application sur I_ω. De plus, il est clair par définition de h_n que $\widehat{h}$ satisfait les conditions (1) et (2) du théorème. Reste à montrer que $\widehat{h}$ est unique : soit h' satisfaisant aussi (1) et (2). Alors on peut facilement démontrer par induction que $\widehat{h}$ et h' sont égales sur I_n quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Ce qui démontre le théorème.

Preuve du théorème (suite)

Puisque $f(I_\omega^{ar(f)})$ et $g(I_\omega^{ar(g)})$ sont disjoints dès que $f \neq g$, $f(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) = g(y_1, \ldots, y_{ar(f)})$ implique que $f = g$. Puisque chaque $f \in \mathcal{F}$ est injective sur $I_\omega^{ar(f)}$, nous devons avoir $x_l = y_l$ pour tout l, $1 \leq l \leq ar(f)$. Mais alors $y = z = d(f)(x_1, \ldots, x_{ar(f)})$, ce qui démontre la fonctionnalité. En utilisant le lemme 2, $\widehat{h} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n$ est une fonction partielle. Puisque le domaine de $\widehat{h}$ est égal à la réunion des domaines des h_n, elle-même égale à $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = I_\omega$, $\widehat{h}$ est une application sur I_ω. De plus, il est clair par définition de h_n que $\widehat{h}$ satisfait les conditions (1) et (2) du théorème. Reste à montrer que $\widehat{h}$ est unique : soit h' satisfaisant aussi (1) et (2). Alors on peut facilement démontrer par induction que $\widehat{h}$ et h' sont égales sur I_n quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Ce qui démontre le théorème.

Preuve du théorème (suite)

Puisque $f(I_\omega^{ar(f)})$ et $g(I_\omega^{ar(g)})$ sont disjoints dès que $f \neq g$, $f(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) = g(y_1, \ldots, y_{ar(f)})$ implique que $f = g$. Puisque chaque $f \in \mathcal{F}$ est injective sur $I_\omega^{ar(f)}$, nous devons avoir $x_l = y_l$ pour tout l, $1 \leq l \leq ar(f)$. Mais alors $y = z = d(f)(x_1, \ldots, x_{ar(f)})$, ce qui démontre la fonctionnalité. En utilisant le lemme 2, $\widehat{h} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n$ est une fonction partielle. Puisque le domaine de $\widehat{h}$ est égal à la réunion des domaines des h_n, elle-même égale à $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = I_\omega$, $\widehat{h}$ est une application sur I_ω. De plus, il est clair par définition de h_n que $\widehat{h}$ satisfait les conditions (1) et (2) du théorème. Reste à montrer que $\widehat{h}$ est unique : soit h' satisfaisant aussi (1) et (2). Alors on peut facilement démontrer par induction que $\widehat{h}$ et h' sont égales sur I_n quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Ce qui démontre le théorème.

Preuve du théorème (suite)

Puisque $f(I_\omega^{ar(f)})$ et $g(I_\omega^{ar(g)})$ sont disjoints dès que $f \neq g$, $f(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) = g(y_1, \ldots, y_{ar(f)})$ implique que $f = g$. Puisque chaque $f \in \mathcal{F}$ est injective sur $I_\omega^{ar(f)}$, nous devons avoir $x_l = y_l$ pour tout l, $1 \leq l \leq ar(f)$. Mais alors $y = z = d(f)(x_1, \ldots, x_{ar(f)})$, ce qui démontre la fonctionnalité. En utilisant le lemme 2, $\widehat{h} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n$ est une fonction partielle. Puisque le domaine de $\widehat{h}$ est égal à la réunion des domaines des h_n, elle-même égale à $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = I_\omega$, $\widehat{h}$ est une application sur I_ω. De plus, il est clair par définition de h_n que $\widehat{h}$ satisfait les conditions (1) et (2) du théorème. Reste à montrer que $\widehat{h}$ est unique : soit h' satisfaisant aussi (1) et (2). Alors on peut facilement démontrer par induction que $\widehat{h}$ et h' sont égales sur I_n quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Ce qui démontre le théorème.

Preuve du théorème (suite)

Puisque $f(I_\omega^{ar(f)})$ et $g(I_\omega^{ar(g)})$ sont disjoints dès que $f \neq g$, $f(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) = g(y_1, \ldots, y_{ar(f)})$ implique que $f = g$. Puisque chaque $f \in \mathcal{F}$ est injective sur $I_\omega^{ar(f)}$, nous devons avoir $x_l = y_l$ pour tout l, $1 \leq l \leq ar(f)$. Mais alors $y = z = d(f)(x_1, \ldots, x_{ar(f)})$, ce qui démontre la fonctionnalité. En utilisant le lemme 2, $\widehat{h} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n$ est une fonction partielle. Puisque le domaine de $\widehat{h}$ est égal à la réunion des domaines des h_n, elle-même égale à $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = I_\omega$, $\widehat{h}$ est une application sur I_ω. De plus, il est clair par définition de h_n que $\widehat{h}$ satisfait les conditions (1) et (2) du théorème. Reste à montrer que $\widehat{h}$ est unique : soit h' satisfaisant aussi (1) et (2). Alors on peut facilement démontrer par induction que $\widehat{h}$ et h' sont égales sur I_n quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Ce qui démontre le théorème.

Preuve du théorème (suite)

Puisque $f(I_\omega^{ar(f)})$ et $g(I_\omega^{ar(g)})$ sont disjoints dès que $f \neq g$, $f(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) = g(y_1, \ldots, y_{ar(f)})$ implique que $f = g$. Puisque chaque $f \in \mathcal{F}$ est injective sur $I_\omega^{ar(f)}$, nous devons avoir $x_l = y_l$ pour tout l, $1 \leq l \leq ar(f)$. Mais alors $y = z = d(f)(x_1, \ldots, x_{ar(f)})$, ce qui démontre la fonctionnalité. En utilisant le lemme 2, $\widehat{h} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n$ est une fonction partielle. Puisque le domaine de $\widehat{h}$ est égal à la réunion des domaines des h_n, elle-même égale à $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = I_\omega$, $\widehat{h}$ est une application sur I_ω. De plus, il est clair par définition de h_n que $\widehat{h}$ satisfait les conditions (1) et (2) du théorème. Reste à montrer que $\widehat{h}$ est unique : soit h' satisfaisant aussi (1) et (2). Alors on peut facilement démontrer par induction que $\widehat{h}$ et h' sont égales sur I_n quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Ce qui démontre le théorème.

Preuve du théorème (suite)

Puisque $f(I_\omega^{ar(f)})$ et $g(I_\omega^{ar(g)})$ sont disjoints dès que $f \neq g$, $f(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) = g(y_1, \ldots, y_{ar(f)})$ implique que $f = g$. Puisque chaque $f \in \mathcal{F}$ est injective sur $I_\omega^{ar(f)}$, nous devons avoir $x_l = y_l$ pour tout l, $1 \leq l \leq ar(f)$. Mais alors $y = z = d(f)(x_1, \ldots, x_{ar(f)})$, ce qui démontre la fonctionnalité. En utilisant le lemme 2, $\widehat{h} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n$ est une fonction partielle. Puisque le domaine de $\widehat{h}$ est égal à la réunion des domaines des h_n, elle-même égale à $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = I_\omega$, $\widehat{h}$ est une application sur I_ω. De plus, il est clair par définition de h_n que $\widehat{h}$ satisfait les conditions (1) et (2) du théorème. Reste à montrer que $\widehat{h}$ est unique : soit h' satisfaisant aussi (1) et (2). Alors on peut facilement démontrer par induction que $\widehat{h}$ et h' sont égales sur I_n quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Ce qui démontre le théorème.

Preuve du théorème (suite)

Puisque $f(I_\omega^{ar(f)})$ et $g(I_\omega^{ar(g)})$ sont disjoints dès que $f \neq g$, $f(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) = g(y_1, \ldots, y_{ar(f)})$ implique que $f = g$. Puisque chaque $f \in \mathcal{F}$ est injective sur $I_\omega^{ar(f)}$, nous devons avoir $x_l = y_l$ pour tout l, $1 \leq l \leq ar(f)$. Mais alors $y = z = d(f)(x_1, \ldots, x_{ar(f)})$, ce qui démontre la fonctionnalité. En utilisant le lemme 2, $\widehat{h} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n$ est une fonction partielle. Puisque le domaine de $\widehat{h}$ est égal à la réunion des domaines des h_n, elle-même égale à $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = I_\omega$, $\widehat{h}$ est une application sur I_ω. De plus, il est clair par définition de h_n que $\widehat{h}$ satisfait les conditions (1) et (2) du théorème. Reste à montrer que $\widehat{h}$ est unique : soit h' satisfaisant aussi (1) et (2). Alors on peut facilement démontrer par induction que $\widehat{h}$ et h' sont égales sur I_n quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Ce qui démontre le théorème.

Preuve du théorème (suite)

Puisque $f(I_\omega^{ar(f)})$ et $g(I_\omega^{ar(g)})$ sont disjoints dès que $f \neq g$, $f(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) = g(y_1, \ldots, y_{ar(f)})$ implique que $f = g$. Puisque chaque $f \in \mathcal{F}$ est injective sur $I_\omega^{ar(f)}$, nous devons avoir $x_l = y_l$ pour tout l, $1 \leq l \leq ar(f)$. Mais alors $y = z = d(f)(x_1, \ldots, x_{ar(f)})$, ce qui démontre la fonctionnalité. En utilisant le lemme 2, $\widehat{h} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} h_n$ est une fonction partielle. Puisque le domaine de $\widehat{h}$ est égal à la réunion des domaines des h_n, elle-même égale à $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = I_\omega$, $\widehat{h}$ est une application sur I_ω. De plus, il est clair par définition de h_n que $\widehat{h}$ satisfait les conditions (1) et (2) du théorème. Reste à montrer que $\widehat{h}$ est unique : soit h' satisfaisant aussi (1) et (2). Alors on peut facilement démontrer par induction que $\widehat{h}$ et h' sont égales sur I_n quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Ce qui démontre le théorème.

Preuve du théorème (suite)

Puisque $f(I_\omega^{ar(f)})$ et $g(I_\omega^{ar(g)})$ sont disjoints dès que $f \neq g$, $f(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) = g(y_1, \ldots, y_{ar(f)})$ implique que $f = g$. Puisque chaque $f \in \mathcal{F}$ est injective sur $I_\omega^{ar(f)}$, nous devons avoir $x_l = y_l$ pour tout l, $1 \leq l \leq ar(f)$. Mais alors $y = z = d(f)(x_1, \ldots, x_{ar(f)})$, ce qui démontre la fonctionnalité. En utilisant le lemme 2, $\widehat{h} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n$ est une fonction partielle. Puisque le domaine de $\widehat{h}$ est égal à la réunion des domaines des h_n, elle-même égale à $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = I_\omega$, $\widehat{h}$ est une application sur I_ω. De plus, il est clair par définition de h_n que $\widehat{h}$ satisfait les conditions (1) et (2) du théorème. Reste à montrer que $\widehat{h}$ est unique : soit h' satisfaisant aussi (1) et (2). Alors on peut facilement démontrer par induction que $\widehat{h}$ et h' sont égales sur I_n quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Ce qui démontre le théorème.

Preuve du théorème (suite)

Puisque $f(I_\omega^{ar(f)})$ et $g(I_\omega^{ar(g)})$ sont disjoints dès que $f \neq g$, $f(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) = g(y_1, \ldots, y_{ar(f)})$ implique que $f = g$. Puisque chaque $f \in \mathcal{F}$ est injective sur $I_\omega^{ar(f)}$, nous devons avoir $x_l = y_l$ pour tout l, $1 \leq l \leq ar(f)$. Mais alors $y = z = d(f)(x_1, \ldots, x_{ar(f)})$, ce qui démontre la fonctionnalité. En utilisant le lemme 2, $\widehat{h} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n$ est une fonction partielle. Puisque le domaine de $\widehat{h}$ est égal à la réunion des domaines des h_n, elle-même égale à $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = I_\omega$, $\widehat{h}$ est une application sur I_ω. De plus, il est clair par définition de h_n que $\widehat{h}$ satisfait les conditions (1) et (2) du théorème. Reste à montrer que $\widehat{h}$ est unique : soit h' satisfaisant aussi (1) et (2). Alors on peut facilement démontrer par induction que $\widehat{h}$ et h' sont égales sur I_n quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Ce qui démontre le théorème.

Preuve du théorème (suite)

Puisque $f(I_\omega^{ar(f)})$ et $g(I_\omega^{ar(g)})$ sont disjoints dès que $f \neq g$, $f(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) = g(y_1, \ldots, y_{ar(f)})$ implique que $f = g$. Puisque chaque $f \in \mathcal{F}$ est injective sur $I_\omega^{ar(f)}$, nous devons avoir $x_l = y_l$ pour tout l, $1 \leq l \leq ar(f)$. Mais alors $y = z = d(f)(x_1, \ldots, x_{ar(f)})$, ce qui démontre la fonctionnalité. En utilisant le lemme 2, $\widehat{h} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n$ est une fonction partielle. Puisque le domaine de $\widehat{h}$ est égal à la réunion des domaines des h_n, elle-même égale à $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = I_\omega$, $\widehat{h}$ est une application sur I_ω. De plus, il est clair par définition de h_n que $\widehat{h}$ satisfait les conditions (1) et (2) du théorème. Reste à montrer que $\widehat{h}$ est unique : soit h' satisfaisant aussi (1) et (2). Alors on peut facilement démontrer par induction que $\widehat{h}$ et h' sont égales sur I_n quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Ce qui démontre le théorème.

Preuve du théorème (suite)

Puisque $f(I_\omega^{ar(f)})$ et $g(I_\omega^{ar(g)})$ sont disjoints dès que $f \neq g$, $f(x_1, \ldots, x_{ar(f)}) = g(y_1, \ldots, y_{ar(f)})$ implique que $f = g$. Puisque chaque $f \in \mathcal{F}$ est injective sur $I_\omega^{ar(f)}$, nous devons avoir $x_l = y_l$ pour tout l, $1 \leq l \leq ar(f)$. Mais alors $y = z = d(f)(x_1, \ldots, x_{ar(f)})$, ce qui démontre la fonctionnalité. En utilisant le lemme 2, $\widehat{h} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n$ est une fonction partielle. Puisque le domaine de $\widehat{h}$ est égal à la réunion des domaines des h_n, elle-même égale à $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = I_\omega$, $\widehat{h}$ est une application sur I_ω. De plus, il est clair par définition de h_n que $\widehat{h}$ satisfait les conditions (1) et (2) du théorème. Reste à montrer que $\widehat{h}$ est unique : soit h' satisfaisant aussi (1) et (2). Alors on peut facilement démontrer par induction que $\widehat{h}$ et h' sont égales sur I_n quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Ce qui démontre le théorème.

En pratique

Dans la pratique, on se retrouve souvent dans le cas suivant : soit E un ensemble inductivement **libre** construit à partir d'une base $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ et d'un ensemble de règles $\mathcal{F} := \{f : \mathcal{U}^n \to \mathcal{U}\}$. Étant donné une application $h : \mathcal{B} \to S$, il est possible de **prolonger** h en une application $\widehat{h}$ définie sur E tout entier par induction structurelle. Tout d'abord, quel que soit $x \in \mathcal{B}$, $\widehat{h}(x) := h(x)$. Puis quelle que soit la règle $f : \mathcal{U}^n \to \mathcal{U}$ de $\mathcal{F}$, on pose

$$\widehat{h}(f(x_1, \ldots, x_n)) \quad := \quad g(\widehat{h}(x_1), \ldots, \widehat{h}(x_n))$$

où g est une certaine application de S^n dans S. Il s'agit de la définition de $\widehat{h}$ par induction structurelle. Il arrive souvent que, par abus de langage, l'on continue de noter "h" le prolongement à E tout entier de l'application h (définie sur $\mathcal{B}$).

En pratique

Dans la pratique, on se retrouve souvent dans le cas suivant : soit E un ensemble inductivement **libre** construit à partir d'une base $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ et d'un ensemble de règles $\mathcal{F} := \{f : \mathcal{U}^n \to \mathcal{U}\}$. Étant donné une application $h : \mathcal{B} \to S$, il est possible de **prolonger** h en une application $\widehat{h}$ définie sur E tout entier par induction structurelle. Tout d'abord, quel que soit $x \in \mathcal{B}$, $\widehat{h}(x) := h(x)$. Puis quelle que soit la règle $f : \mathcal{U}^n \to \mathcal{U}$ de $\mathcal{F}$, on pose

$$\widehat{h}(f(x_1, \ldots, x_n)) \quad := \quad g(\widehat{h}(x_1), \ldots, \widehat{h}(x_n))$$

où g est une certaine application de S^n dans S. Il s'agit de la définition de $\widehat{h}$ par induction structurelle. Il arrive souvent que, par abus de langage, l'on continue de noter "h" le prolongement à E tout entier de l'application h (définie sur $\mathcal{B}$).

En pratique

Dans la pratique, on se retrouve souvent dans le cas suivant : soit E un ensemble inductivement **libre** construit à partir d'une base $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ et d'un ensemble de règles $\mathcal{F} := \{f : \mathcal{U}^n \to \mathcal{U}\}$. Étant donné une application $h : \mathcal{B} \to S$, il est possible de **prolonger** h en une application $\widehat{h}$ définie sur E tout entier par induction structurelle. Tout d'abord, quel que soit $x \in \mathcal{B}$, $\widehat{h}(x) := h(x)$. Puis quelle que soit la règle $f : \mathcal{U}^n \to \mathcal{U}$ de $\mathcal{F}$, on pose

$$\widehat{h}(f(x_1, \ldots, x_n)) \quad := \quad g(\widehat{h}(x_1), \ldots, \widehat{h}(x_n))$$

où g est une certaine application de S^n dans S. Il s'agit de la définition de $\widehat{h}$ par induction structurelle. Il arrive souvent que, par abus de langage, l'on continue de noter "h" le prolongement à E tout entier de l'application h (définie sur $\mathcal{B}$).

En pratique

Dans la pratique, on se retrouve souvent dans le cas suivant : soit E un ensemble inductivement **libre** construit à partir d'une base $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ et d'un ensemble de règles $\mathcal{F} := \{f : \mathcal{U}^n \to \mathcal{U}\}$. Étant donné une application $h : \mathcal{B} \to S$, il est possible de **prolonger** h en une application $\widehat{h}$ définie sur E tout entier par induction structurelle. Tout d'abord, quel que soit $x \in \mathcal{B}$, $\widehat{h}(x) := h(x)$. Puis quelle que soit la règle $f : \mathcal{U}^n \to \mathcal{U}$ de $\mathcal{F}$, on pose

$$\widehat{h}(f(x_1, \ldots, x_n)) \quad := \quad g(\widehat{h}(x_1), \ldots, \widehat{h}(x_n))$$

où g est une certaine application de S^n dans S. Il s'agit de la définition de $\widehat{h}$ par induction structurelle. Il arrive souvent que, par abus de langage, l'on continue de noter "h" le prolongement à E tout entier de l'application h (définie sur $\mathcal{B}$).

En pratique

Dans la pratique, on se retrouve souvent dans le cas suivant : soit E un ensemble inductivement **libre** construit à partir d'une base $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ et d'un ensemble de règles $\mathcal{F} := \{f : \mathcal{U}^n \to \mathcal{U}\}$. Étant donné une application $h : \mathcal{B} \to S$, il est possible de **prolonger** h en une application $\widehat{h}$ définie sur E tout entier par induction structurelle. Tout d'abord, quel que soit $x \in \mathcal{B}$, $\widehat{h}(x) := h(x)$. Puis quelle que soit la règle $f : \mathcal{U}^n \to \mathcal{U}$ de $\mathcal{F}$, on pose

$$\widehat{h}(f(x_1, \ldots, x_n)) := g(\widehat{h}(x_1), \ldots, \widehat{h}(x_n))$$

où g est une certaine application de S^n dans S. Il s'agit de la définition de $\widehat{h}$ par induction structurelle. Il arrive souvent que, par abus de langage, l'on continue de noter "h" le prolongement à E tout entier de l'application h (définie sur $\mathcal{B}$).

En pratique

Dans la pratique, on se retrouve souvent dans le cas suivant : soit E un ensemble inductivement **libre** construit à partir d'une base $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ et d'un ensemble de règles $\mathcal{F} := \{f : \mathcal{U}^n \to \mathcal{U}\}$. Étant donné une application $h : \mathcal{B} \to S$, il est possible de **prolonger** h en une application $\widehat{h}$ définie sur E tout entier par induction structurelle. Tout d'abord, quel que soit $x \in \mathcal{B}$, $\widehat{h}(x) := h(x)$. Puis quelle que soit la règle $f : \mathcal{U}^n \to \mathcal{U}$ de $\mathcal{F}$, on pose

$$\widehat{h}(f(x_1, \ldots, x_n)) \quad := \quad g(\widehat{h}(x_1), \ldots, \widehat{h}(x_n))$$

où g est une certaine application de S^n dans S. Il s'agit de la définition de $\widehat{h}$ par induction structurelle. Il arrive souvent que, par abus de langage, l'on continue de noter "h" le prolongement à E tout entier de l'application h (définie sur $\mathcal{B}$).

En pratique

Dans la pratique, on se retrouve souvent dans le cas suivant : soit E un ensemble inductivement **libre** construit à partir d'une base $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ et d'un ensemble de règles $\mathcal{F} := \{f : \mathcal{U}^n \to \mathcal{U}\}$. Étant donné une application $h : \mathcal{B} \to S$, il est possible de **prolonger** h en une application $\widehat{h}$ définie sur E tout entier par induction structurelle. Tout d'abord, quel que soit $x \in \mathcal{B}$, $\widehat{h}(x) := h(x)$. Puis quelle que soit la règle $f : \mathcal{U}^n \to \mathcal{U}$ de $\mathcal{F}$, on pose

$$\widehat{h}(f(x_1, \ldots, x_n)) \quad := \quad g(\widehat{h}(x_1), \ldots, \widehat{h}(x_n))$$

où g est une certaine application de S^n dans S. Il s'agit de la définition de $\widehat{h}$ par induction structurelle. Il arrive souvent que, par abus de langage, l'on continue de noter "h" le prolongement à E tout entier de l'application h (définie sur $\mathcal{B}$).

En pratique

Dans la pratique, on se retrouve souvent dans le cas suivant : soit E un ensemble inductivement **libre** construit à partir d'une base $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ et d'un ensemble de règles $\mathcal{F} := \{f : \mathcal{U}^n \to \mathcal{U}\}$. Étant donné une application $h : \mathcal{B} \to S$, il est possible de **prolonger** h en une application $\widehat{h}$ définie sur E tout entier par induction structurelle. Tout d'abord, quel que soit $x \in \mathcal{B}$, $\widehat{h}(x) := h(x)$. Puis quelle que soit la règle $f : \mathcal{U}^n \to \mathcal{U}$ de $\mathcal{F}$, on pose

$$\widehat{h}(f(x_1, \ldots, x_n)) \quad := \quad g(\widehat{h}(x_1), \ldots, \widehat{h}(x_n))$$

où g est une certaine application de S^n dans S. Il s'agit de la définition de $\widehat{h}$ par induction structurelle. Il arrive souvent que, par abus de langage, l'on continue de noter "h" le prolongement à E tout entier de l'application h (définie sur $\mathcal{B}$).

En pratique

Dans la pratique, on se retrouve souvent dans le cas suivant : soit E un ensemble inductivement **libre** construit à partir d'une base $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ et d'un ensemble de règles $\mathcal{F} := \{f : \mathcal{U}^n \to \mathcal{U}\}$. Étant donné une application $h : \mathcal{B} \to S$, il est possible de **prolonger** h en une application $\widehat{h}$ définie sur E tout entier par induction structurelle. Tout d'abord, quel que soit $x \in \mathcal{B}$, $\widehat{h}(x) := h(x)$. Puis quelle que soit la règle $f : \mathcal{U}^n \to \mathcal{U}$ de $\mathcal{F}$, on pose

$$\widehat{h}(f(x_1, \ldots, x_n)) \quad := \quad g(\widehat{h}(x_1), \ldots, \widehat{h}(x_n))$$

où g est une certaine application de S^n dans S. Il s'agit de la définition de $\widehat{h}$ par induction structurelle. Il arrive souvent que, par abus de langage, l'on continue de noter "h" le prolongement à E tout entier de l'application h (définie sur $\mathcal{B}$).

Exemple 1

Soit T_Σ un ensemble de Σ-termes finis. On définit la **hauteur** d'un terme $t \in T_\Sigma$ par induction structurelle de T_Σ dans $\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{lcll} h(c) & = & 0 & \text{si } c \in \Sigma_0 \,, \\ h(ft_1 \dots t_n) & = & \max\{h(t_1), \dots, h(t_n)\} & \text{si } f \in \Sigma_n \text{ et } (t_1, \dots, t_n) \end{array}$$

Exemple 1

Soit T_Σ un ensemble de Σ-termes finis. On définit la **hauteur** d'un terme $t \in T_\Sigma$ par induction structurelle de T_Σ dans $\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{lcll} h(c) & = & 0 & \text{si } c \in \Sigma_0 \,, \\ h(ft_1 \ldots t_n) & = & \max\{h(t_1), \ldots, h(t_n)\} & \text{si } f \in \Sigma_n \text{ et } (t_1, \ldots, t_n) \end{array}$$

Exemple 1

Soit T_Σ un ensemble de Σ-termes finis. On définit la **hauteur** d'un terme $t \in T_\Sigma$ par induction structurelle de T_Σ dans $\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{lcll} h(c) & = & 0 & \text{si } c \in \Sigma_0 \ , \\ h(ft_1 \ldots t_n) & = & \max\{h(t_1), \ldots, h(t_n)\} & \text{si } f \in \Sigma_n \text{ et } (t_1, \ldots, t_n) \end{array}$$

Exemple 2

La fonction factorielle ! sur $\mathbb{N}$ se définit inductivement par

$$\begin{array}{rcl} 0! & = & 1\ , \\ (n+1)! & = & (n+1)(n!)\ . \end{array}$$

Exemple 2

La fonction factorielle ! sur $\mathbb{N}$ se définit inductivement par

$$\begin{array}{lcl} 0! & = & 1 \, , \\ (n+1)! & = & (n+1)(n!) \, . \end{array}$$

Exemple 3

Rappelons que V désigne un ensemble infini dénombrable dont les éléments sont appelés des variables. On appelle $v : V \cup \{0, 1\} \to \mathbb{N}$ une **évaluation des variables** si, et seulement, si $v(0) = 0$ et $v(1) = 1$. On étend v à *Arith_Expr* par induction structurelle :

$$\begin{array}{rcll} \hat{v}(x_n) & = & v(x_n) & \text{si } x_n \in V \,, \\ \hat{v}(b) & = & v(b) & \text{si } b \in \{0, 1\} \,, \\ \hat{v}(\text{p}x + y\text{q}) & = & \hat{v}(x) + \hat{v}(y) \,, & \\ \hat{v}(\text{p}x * y\text{q}) & = & \hat{v}(x)\hat{v}(y) \,. & \end{array}$$

$\hat{v}$ est alors une **évaluation des expressions arithmétiques**

Exemple 3

Rappelons que V désigne un ensemble infini dénombrable dont les éléments sont appelés des variables. On appelle $v : V \cup \{0, 1\} \to \mathbb{N}$ une **évaluation des variables** si, et seulement, si $v(0) = 0$ et $v(1) = 1$. On étend v à *Arith_Expr* par induction structurelle :

$$\begin{array}{lcll} \hat{v}(x_n) & = & v(x_n) & \text{si } x_n \in V \ , \\ \hat{v}(b) & = & v(b) & \text{si } b \in \{0, 1\} \ , \\ \hat{v}(px + yq) & = & \hat{v}(x) + \hat{v}(y) \ , & \\ \hat{v}(px * yq) & = & \hat{v}(x)\hat{v}(y) \ . & \end{array}$$

$\hat{v}$ est alors une **évaluation des expressions arithmétiques**

Exemple 3

Rappelons que V désigne un ensemble infini dénombrable dont les éléments sont appelés des variables. On appelle $v : V \cup \{0,1\} \to \mathbb{N}$ une **évaluation des variables** si, et seulement, si $v(0) = 0$ et $v(1) = 1$. On étend v à *Arith_Expr* par induction structurelle :

$$\begin{array}{rcll} \hat{v}(x_n) & = & v(x_n) & \text{si } x_n \in V\ , \\ \hat{v}(b) & = & v(b) & \text{si } b \in \{0,1\}\ , \\ \hat{v}(\mathrm{p}x + y\mathrm{q}) & = & \hat{v}(x) + \hat{v}(y)\ , & \\ \hat{v}(\mathrm{p}x * y\mathrm{q}) & = & \hat{v}(x)\hat{v}(y)\ . & \end{array}$$

$\hat{v}$ est alors une **évaluation des expressions arithmétiques**

Exemple 3

Rappelons que V désigne un ensemble infini dénombrable dont les éléments sont appelés des variables. On appelle $v : V \cup \{0,1\} \to \mathbb{N}$ une **évaluation des variables** si, et seulement, si $v(0) = 0$ et $v(1) = 1$. On étend v à *Arith_Expr* par induction structurelle :

$$
\begin{array}{lcll}
\hat{v}(x_n) & = & v(x_n) & \text{si } x_n \in V \,, \\
\hat{v}(b) & = & v(b) & \text{si } b \in \{0,1\} \,, \\
\hat{v}(px + yq) & = & \hat{v}(x) + \hat{v}(y) \,, & \\
\hat{v}(px * yq) & = & \hat{v}(x)\hat{v}(y) \,. &
\end{array}
$$

$\hat{v}$ est alors une **évaluation des expressions arithmétiques**

Exemple 3

Rappelons que V désigne un ensemble infini dénombrable dont les éléments sont appelés des variables. On appelle $v : V \cup \{0, 1\} \to \mathbb{N}$ une **évaluation des variables** si, et seulement, si $v(0) = 0$ et $v(1) = 1$. On étend v à *Arith_Expr* par induction structurelle :

$$\begin{array}{lcll} \hat{v}(x_n) & = & v(x_n) & \text{si } x_n \in V \ , \\ \hat{v}(b) & = & v(b) & \text{si } b \in \{0,1\} \ , \\ \hat{v}(\ulcorner x + y \urcorner) & = & \hat{v}(x) + \hat{v}(y) \ , & \\ \hat{v}(\ulcorner x * y \urcorner) & = & \hat{v}(x)\hat{v}(y) \ . & \end{array}$$

$\hat{v}$ est alors une **évaluation des expressions arithmétiques**

Exemple 3

Rappelons que V désigne un ensemble infini dénombrable dont les éléments sont appelés des variables. On appelle $v : V \cup \{0, 1\} \to \mathbb{N}$ une **évaluation des variables** si, et seulement, si $v(0) = 0$ et $v(1) = 1$. On étend v à *Arith_Expr* par induction structurelle :

$$
\begin{array}{lcll}
\hat{v}(x_n) & = & v(x_n) & \text{si } x_n \in V \, , \\
\hat{v}(b) & = & v(b) & \text{si } b \in \{0, 1\} \, , \\
\hat{v}(\ulcorner x + y \urcorner) & = & \hat{v}(x) + \hat{v}(y) \, , & \\
\hat{v}(\ulcorner x * y \urcorner) & = & \hat{v}(x)\hat{v}(y) \, . &
\end{array}
$$

$\hat{v}$ est alors une **évaluation des expressions arithmétiques**

Exemple 3

Rappelons que V désigne un ensemble infini dénombrable dont les éléments sont appelés des variables. On appelle $v : V \cup \{0, 1\} \to \mathbb{N}$ une **évaluation des variables** si, et seulement, si $v(0) = 0$ et $v(1) = 1$. On étend v à *Arith_Expr* par induction structurelle :

$$\begin{array}{lcll} \hat{v}(x_n) & = & v(x_n) & \text{si } x_n \in V \ , \\ \hat{v}(b) & = & v(b) & \text{si } b \in \{0, 1\} \ , \\ \hat{v}(\mathrm{p}x + y\mathrm{q}) & = & \hat{v}(x) + \hat{v}(y) \ , & \\ \hat{v}(\mathrm{p}x * y\mathrm{q}) & = & \hat{v}(x)\hat{v}(y) \ . & \end{array}$$

$\hat{v}$ est alors une **évaluation des expressions arithmétiques**

Exemple 3

Rappelons que V désigne un ensemble infini dénombrable dont les éléments sont appelés des variables. On appelle $v : V \cup \{0,1\} \to \mathbb{N}$ une **évaluation des variables** si, et seulement, si $v(0) = 0$ et $v(1) = 1$. On étend v à *Arith_Expr* par induction structurelle :

$$\begin{array}{rcll} \hat{v}(x_n) & = & v(x_n) & \text{si } x_n \in V \ , \\ \hat{v}(b) & = & v(b) & \text{si } b \in \{0,1\} \ , \\ \hat{v}(\ulcorner x + y \urcorner) & = & \hat{v}(x) + \hat{v}(y) \ , & \\ \hat{v}(\ulcorner x * y \urcorner) & = & \hat{v}(x)\hat{v}(y) \ . & \end{array}$$

$\hat{v}$ est alors une **évaluation des expressions arithmétiques**

Exemple 4

On définit l'ensemble des **valeurs de vérité** $BOOL = \{\mathbb{V}, \mathbb{F}\}$. Pour chaque connecteur $\# \in \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, on définit son **interprétation** comme suit : $I_\neg : BOOL \to BOOL$ et $I_\# : BOOL^2 \to BOOL$ pour $\# \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ tels que

P	Q	$I_\neg(P)$	$I_\wedge(P,Q)$	$I_\vee(P,Q)$	$I_\Rightarrow(P,Q)$	$I_\Leftrightarrow(P,Q)$
$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$
$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$

Exemple 4

On définit l'ensemble des **valeurs de vérité** $BOOL = \{\mathbb{V}, \mathbb{F}\}$. Pour chaque connecteur $\# \in \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, on définit son **interprétation** comme suit : $I_\neg : BOOL \to BOOL$ et $I_\# : BOOL^2 \to BOOL$ pour $\# \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ tels que

P	Q	$I_\neg(P)$	$I_\wedge(P,Q)$	$I_\vee(P,Q)$	$I_\Rightarrow(P,Q)$	$I_\Leftrightarrow(P,Q)$
$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$
$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$

Exemple 4

On définit l'ensemble des **valeurs de vérité** $BOOL = \{\mathbb{V}, \mathbb{F}\}$. Pour chaque connecteur $\# \in \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, on définit son **interprétation** comme suit : $I_{\neg} : BOOL \to BOOL$ et $I_{\#} : BOOL^2 \to BOOL$ pour $\# \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ tels que

P	Q	$I_{\neg}(P)$	$I_{\wedge}(P,Q)$	$I_{\vee}(P,Q)$	$I_{\Rightarrow}(P,Q)$	$I_{\Leftrightarrow}(P,Q)$
$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$
$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$

Exemple 4

On définit l'ensemble des **valeurs de vérité** $BOOL = \{\mathbb{V}, \mathbb{F}\}$. Pour chaque connecteur $\# \in \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, on définit son **interprétation** comme suit : $I_\neg : BOOL \to BOOL$ et $I_\# : BOOL^2 \to BOOL$ pour $\# \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ tels que

P	Q	$I_\neg(P)$	$I_\wedge(P,Q)$	$I_\vee(P,Q)$	$I_\Rightarrow(P,Q)$	$I_\Leftrightarrow(P,Q)$
$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$
$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$

Exemple 4

On définit l'ensemble des **valeurs de vérité** $BOOL = \{\mathbb{V}, \mathbb{F}\}$. Pour chaque connecteur $\# \in \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, on définit son **interprétation** comme suit : $I_{\neg} : BOOL \to BOOL$ et $I_{\#} : BOOL^2 \to BOOL$ pour $\# \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ tels que

P	Q	$I_{\neg}(P)$	$I_{\wedge}(P,Q)$	$I_{\vee}(P,Q)$	$I_{\Rightarrow}(P,Q)$	$I_{\Leftrightarrow}(P,Q)$
$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$
$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$

Exemple 4 (suite)

Une **valuation** est une application $v : \mathbb{PS} \cup \{\perp\} \to BOOL$ telle que $v(\perp) = \mathbb{F}$. On étend v par induction structurelle en $\hat{v} : PROP \to BOOL$ satisfaisant les clauses suivantes pour tous $A, B \in PROP$:

$$
\begin{array}{lcll}
\hat{v}(\perp) & = & \mathbb{F} \, , & \\
\hat{v}(P_n) & = & v(P_n) & \text{pour tout } P_n \in \mathbb{PS} \, , \\
\hat{v}(\neg A) & = & I_\neg(\hat{v}(A)) \, , & \\
\hat{v}(pA \wedge Bq) & = & I_\wedge(\hat{v}(A), \hat{v}(B)) \, , & \\
\hat{v}(pA \vee Bq) & = & I_\vee(\hat{v}(A), \hat{v}(B)) \, , & \\
\hat{v}(pA \Rightarrow Bq) & = & I_\Rightarrow(\hat{v}(A), \hat{v}(B)) \, , & \\
\hat{v}(pA \Leftrightarrow Bq) & = & I_\Leftrightarrow(\hat{v}(A), \hat{v}(B)) \, ; &
\end{array}
$$

Exemple 4 (suite)

Une **valuation** est une application $v : \mathbb{PS} \cup \{\bot\} \to BOOL$ telle que $v(\bot) = \mathbb{F}$. On étend v par induction structurelle en $\hat{v} : PROP \to BOOL$ satisfaisant les clauses suivantes pour tous $A, B \in PROP$:

$$
\begin{array}{lll}
\hat{v}(\bot) & = & \mathbb{F} \, , \\
\hat{v}(P_n) & = & v(P_n) \qquad \text{pour tout } P_n \in \mathbb{PS} \, , \\
\hat{v}(\neg A) & = & I_\neg(\hat{v}(A)) \, , \\
\hat{v}(\text{p}A \wedge B\text{q}) & = & I_\wedge(\hat{v}(A), \hat{v}(B)) \, , \\
\hat{v}(\text{p}A \vee B\text{q}) & = & I_\vee(\hat{v}(A), \hat{v}(B)) \, , \\
\hat{v}(\text{p}A \Rightarrow B\text{q}) & = & I_\Rightarrow(\hat{v}(A), \hat{v}(B)) \, , \\
\hat{v}(\text{p}A \Leftrightarrow B\text{q}) & = & I_\Leftrightarrow(\hat{v}(A), \hat{v}(B)) \, ;
\end{array}
$$

Exemple 4 (suite)

Une **valuation** est une application $v : \mathbb{PS} \cup \{\perp\} \to BOOL$ telle que $v(\perp) = \mathbb{F}$. On étend v par induction structurelle en $\hat{v} : PROP \to BOOL$ satisfaisant les clauses suivantes pour tous $A, B \in PROP$:

$$
\begin{array}{lcll}
\hat{v}(\perp) & = & \mathbb{F} \,, & \\
\hat{v}(\mathrm{P}_n) & = & v(\mathrm{P}_n) & \text{pour tout } \mathrm{P}_n \in \mathbb{PS} \,, \\
\hat{v}(\neg A) & = & I_{\neg}(\hat{v}(A)) \,, & \\
\hat{v}(\mathrm{p}A \wedge B\mathrm{q}) & = & I_{\wedge}(\hat{v}(A), \hat{v}(B)) \,, & \\
\hat{v}(\mathrm{p}A \vee B\mathrm{q}) & = & I_{\vee}(\hat{v}(A), \hat{v}(B)) \,, & \\
\hat{v}(\mathrm{p}A \Rightarrow B\mathrm{q}) & = & I_{\Rightarrow}(\hat{v}(A), \hat{v}(B)) \,, & \\
\hat{v}(\mathrm{p}A \Leftrightarrow B\mathrm{q}) & = & I_{\Leftrightarrow}(\hat{v}(A), \hat{v}(B)) \,; &
\end{array}
$$

Exercice 1

Soient l'ensemble $A = \{a, b, c\}$ et l'application $r : A \times A \to A$ définie par la table suivante.

r	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

1. Calculer la clôture inductive de $\{b\}$ sous r dans A (on la note C_b) ;
2. Donner trois façons de construire l'élément a à partir de b à l'aide d'applications de la règle r ;
3. C_b est-elle inductivement libre ? Si non, expliquer pourquoi.

Exercice 1

Soient l'ensemble $A = \{a, b, c\}$ et l'application $r : A \times A \to A$ définie par la table suivante.

r	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

1. Calculer la clôture inductive de $\{b\}$ sous r dans A (on la note C_b) ;
2. Donner trois façons de construire l'élément a à partir de b à l'aide d'applications de la règle r ;
3. C_b est-elle inductivement libre ? Si non, expliquer pourquoi.

Exercice 1

Soient l'ensemble $A = \{a, b, c\}$ et l'application $r : A \times A \rightarrow A$ définie par la table suivante.

r	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

1. Calculer la clôture inductive de $\{b\}$ sous r dans A (on la note C_b) ;
2. Donner trois façons de construire l'élément a à partir de b à l'aide d'applications de la règle r ;
3. C_b est-elle inductivement libre ? Si non, expliquer pourquoi.

Exercice 1

Soient l'ensemble $A = \{a, b, c\}$ et l'application $r : A \times A \to A$ définie par la table suivante.

r	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

1. Calculer la clôture inductive de $\{b\}$ sous r dans A (on la note C_b) ;
2. Donner trois façons de construire l'élément a à partir de b à l'aide d'applications de la règle r ;
3. C_b est-elle inductivement libre ? Si non, expliquer pourquoi.

Exercice 1

Soient l'ensemble $A = \{a, b, c\}$ et l'application $r : A \times A \to A$ définie par la table suivante.

r	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

1. Calculer la clôture inductive de $\{b\}$ sous r dans A (on la note C_b) ;
2. Donner trois façons de construire l'élément a à partir de b à l'aide d'applications de la règle r ;
3. C_b est-elle inductivement libre ? Si non, expliquer pourquoi.

Correction de l'exerice 1

1. Puisque $c = r(b, b)$ et $a = r(b, c) = r(b, r(b, b))$, il en résulte que $C_b = A$;
2. $a = r(b, r(b, b))$, $a = r(r(b, b), b)$ et $a = r(r(a, b), r(b, b)) = r(r(r(b, r(b, b)), b), r(b, b))$;
3. A n'est pas libre car on peut construire a de plusieurs façons à partir de b par applications de r.

Correction de l'exerice 1

1. Puisque $c = r(b, b)$ et $a = r(b, c) = r(b, r(b, b))$, il en résulte que $C_b = A$;
2. $a = r(b, r(b, b))$, $a = r(r(b, b), b)$ et $a = r(r(a, b), r(b, b)) = r(r(r(b, r(b, b)), b), r(b, b))$;
3. A n'est pas libre car on peut construire a de plusieurs façons à partir de b par applications de r.

Correction de l'exerice 1

1. Puisque $c = r(b, b)$ et $a = r(b, c) = r(b, r(b, b))$, il en résulte que $C_b = A$;
2. $a = r(b, r(b, b))$, $a = r(r(b, b), b)$ et $a = r(r(a, b), r(b, b)) = r(r(r(b, r(b, b)), b), r(b, b))$;
3. A n'est pas libre car on peut construire a de plusieurs façons à partir de b par applications de r.

Correction de l'exerice 1

1. Puisque $c = r(b, b)$ et $a = r(b, c) = r(b, r(b, b))$, il en résulte que $C_b = A$;
2. $a = r(b, r(b, b))$, $a = r(r(b, b), b)$ et $a = r(r(a, b), r(b, b)) = r(r(r(b, r(b, b)), b), r(b, b))$;
3. A n'est pas libre car on peut construire a de plusieurs façons à partir de b par applications de r.

Exercice 2

Soit l'application *symboles* : $PROP \to \mathcal{P}(\mathbb{PS})$ qui à une formule propositionnelle $F \in PROP$ associe l'ensemble des symboles de propositions qui figurent dans F. Par exemple, $symboles(\bot) = \emptyset$, $symboles(\text{pppP}_1 \Rightarrow \text{P}_2\text{q} \wedge \neg\text{P}_3\text{q} \vee \text{P}_1\text{q}) = \{\text{P}_1, \text{P}_2, \text{P}_3\}$. Donner la définition de *symboles* par induction structurelle.

Exercice 2

Soit l'application *symboles* : $PROP \to \mathcal{P}(\mathbb{PS})$ qui à une formule propositionnelle $F \in PROP$ associe l'ensemble des symboles de propositions qui figurent dans F. Par exemple, $symboles(\perp) = \emptyset$,
$symboles(\text{pppP}_1 \Rightarrow \text{P}_2\text{q} \wedge \neg\text{P}_3\text{q} \vee \text{P}_1\text{q}) = \{\text{P}_1, \text{P}_2, \text{P}_3\}$.
Donner la définition de *symboles* par induction structurelle.

Exercice 2

Soit l'application *symboles* : $PROP \to \mathcal{P}(\mathbb{PS})$ qui à une formule propositionnelle $F \in PROP$ associe l'ensemble des symboles de propositions qui figurent dans F. Par exemple, $symboles(\bot) = \emptyset$, $symboles(\mathrm{pppP_1} \Rightarrow \mathrm{P_2q} \wedge \neg \mathrm{P_3q} \vee \mathrm{P_1q}) = \{\mathrm{P_1}, \mathrm{P_2}, \mathrm{P_3}\}$. Donner la définition de *symboles* par induction structurelle.

Correction de l'exercice 2

On donne tout d'abord les valeurs de *symboles* sur la base $\mathbb{PS} \cup \{\bot\}$:

$$\begin{array}{rcl} symboles(\mathrm{P}_i) & = & \{\mathrm{P}_i\}\ , \\ symboles(\bot) & = & \emptyset\ . \end{array}$$

Puis l'on défini l'extension de *symboles* à *PROP* tout entier : soient A, B des éléments de *PROP*,

$$\begin{array}{rcl} symboles(\ulcorner A \# B \urcorner) & = & symboles(A) \cup symboles(B) \\ & & pour\ tout\ \# \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\} \\ symboles(\neg A) & = & symboles(A)\ . \end{array}$$

Correction de l'exercice 2

On donne tout d'abord les valeurs de *symboles* sur la base $\mathbb{PS} \cup \{\perp\}$:

$$\begin{array}{rcl} symboles(\mathrm{P}_i) & = & \{\mathrm{P}_i\}\ , \\ symboles(\perp) & = & \emptyset\ . \end{array}$$

Puis l'on défini l'extension de *symboles* à *PROP* tout entier : soient A, B des éléments de *PROP*,

$$\begin{array}{rcl} symboles(\mathrm{p}A\#B\mathrm{q}) & = & symboles(A) \cup symboles(B) \\ & & pour\ tout\ \# \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\} \\ symboles(\neg A) & = & symboles(A)\ . \end{array}$$

Correction de l'exercice 2

On donne tout d'abord les valeurs de *symboles* sur la base $\mathbb{PS} \cup \{\bot\}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathit{symboles}(\mathrm{P}_i) & = & \{\mathrm{P}_i\} \,, \\ \mathit{symboles}(\bot) & = & \emptyset \,. \end{array}$$

Puis l'on défini l'extension de *symboles* à *PROP* tout entier :
soient A, B des éléments de *PROP*,

$$\begin{array}{rcl} \mathit{symboles}(\ulcorner A \# B \urcorner) & = & \mathit{symboles}(A) \cup \mathit{symboles}(B) \\ & & \textit{pour tout } \# \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\} \\ \mathit{symboles}(\neg A) & = & \mathit{symboles}(A) \,. \end{array}$$

Correction de l'exercice 2

On donne tout d'abord les valeurs de *symboles* sur la base $\mathbb{PS} \cup \{\perp\}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathit{symboles}(\mathrm{P}_i) & = & \{\mathrm{P}_i\} \ , \\ \mathit{symboles}(\perp) & = & \emptyset \ . \end{array}$$

Puis l'on défini l'extension de *symboles* à *PROP* tout entier : soient A, B des éléments de *PROP*,

$$\begin{array}{rcl} \mathit{symboles}(\mathrm{p}A\#B\mathrm{q}) & = & \mathit{symboles}(A) \cup \mathit{symboles}(B) \\ & & \mathit{pour\ tout}\ \# \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\} \\ \mathit{symboles}(\neg A) & = & \mathit{symboles}(A) \ . \end{array}$$

Correction de l'exercice 2

On donne tout d'abord les valeurs de *symboles* sur la base $\mathbb{PS} \cup \{\bot\}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathit{symboles}(\mathrm{P}_i) & = & \{\mathrm{P}_i\} \ , \\ \mathit{symboles}(\bot) & = & \emptyset \ . \end{array}$$

Puis l'on défini l'extension de *symboles* à *PROP* tout entier : soient A, B des éléments de *PROP*,

$$\begin{array}{rcl} \mathit{symboles}(\ulcorner A \# B \urcorner) & = & \mathit{symboles}(A) \cup \mathit{symboles}(B) \\ & & \mathit{pour\ tout}\ \# \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\} \\ \mathit{symboles}(\neg A) & = & \mathit{symboles}(A) \ . \end{array}$$

Exercice 3

Rappelons que l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est construit par induction structurelle *libre* à partir de la base $\{0\}$ et la fonction *successeur* : $n \mapsto n+1$.

1. Donner les définitions par induction structurelle sur la seconde variable de l'addition et de la multiplication ;
2. Supposons que l'on ait démontré que l'addition est associative ($(m+n)+k = m+(n+k)$ quels que soient $m, n, k \in \mathbb{N}$) et que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n+1 = 1+n$. À l'aide du principe d'induction structurelle, démontrer que
   1. quel que soit $n \in \mathbb{N}$, alors $0+n = n$;
   2. l'addition est commutative.

Exercice 3

Rappelons que l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est construit par induction structurelle *libre* à partir de la base $\{0\}$ et la fonction *successeur* : $n \mapsto n+1$.

1. Donner les définitions par induction structurelle sur la seconde variable de l'addition et de la multiplication ;
2. Supposons que l'on ait démontré que l'addition est associative ($(m+n)+k = m+(n+k)$ quels que soient $m, n, k \in \mathbb{N}$) et que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n+1 = 1+n$. À l'aide du principe d'induction structurelle, démontrer que
   1. quel que soit $n \in \mathbb{N}$, alors $0+n = n$;
   2. l'addition est commutative.

Exercice 3

Rappelons que l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est construit par induction structurelle *libre* à partir de la base $\{0\}$ et la fonction *successeur* : $n \mapsto n + 1$.

1. Donner les définitions par induction structurelle sur la seconde variable de l'addition et de la multiplication ;
2. Supposons que l'on ait démontré que l'addition est associative ($(m + n) + k = m + (n + k)$ quels que soient $m, n, k \in \mathbb{N}$) et que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n + 1 = 1 + n$. À l'aide du principe d'induction structurelle, démontrer que
   1. quel que soit $n \in \mathbb{N}$, alors $0 + n = n$;
   2. l'addition est commutative.

Exercice 3

Rappelons que l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est construit par induction structurelle *libre* à partir de la base $\{0\}$ et la fonction *successeur* : $n \mapsto n+1$.

1. Donner les définitions par induction structurelle sur la seconde variable de l'addition et de la multiplication ;
2. Supposons que l'on ait démontré que l'addition est associative ($(m+n)+k = m+(n+k)$ quels que soient $m, n, k \in \mathbb{N}$) et que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n+1 = 1+n$. À l'aide du principe d'induction structurelle, démontrer que
   1. quel que soit $n \in \mathbb{N}$, alors $0+n = n$;
   2. l'addition est commutative.

Exercice 3

Rappelons que l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est construit par induction structurelle *libre* à partir de la base $\{0\}$ et la fonction *successeur* : $n \mapsto n+1$.

1. Donner les définitions par induction structurelle sur la seconde variable de l'addition et de la multiplication ;
2. Supposons que l'on ait démontré que l'addition est associative ($(m+n)+k = m+(n+k)$ quels que soient $m, n, k \in \mathbb{N}$) et que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n+1 = 1+n$. À l'aide du principe d'induction structurelle, démontrer que
    1. quel que soit $n \in \mathbb{N}$, alors $0+n = n$;
    2. l'addition est commutative.

Exercice 3

Rappelons que l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est construit par induction structurelle *libre* à partir de la base $\{0\}$ et la fonction *successeur* : $n \mapsto n+1$.

1. Donner les définitions par induction structurelle sur la seconde variable de l'addition et de la multiplication ;
2. Supposons que l'on ait démontré que l'addition est associative ($(m+n)+k = m+(n+k)$ quels que soient $m, n, k \in \mathbb{N}$) et que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n+1 = 1+n$. À l'aide du principe d'induction structurelle, démontrer que
    1. quel que soit $n \in \mathbb{N}$, alors $0+n = n$;
    2. l'addition est commutative.

Exercice 3

Rappelons que l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est construit par induction structurelle *libre* à partir de la base $\{0\}$ et la fonction *successeur* : $n \mapsto n + 1$.

1. Donner les définitions par induction structurelle sur la seconde variable de l'addition et de la multiplication ;
2. Supposons que l'on ait démontré que l'addition est associative ($(m + n) + k = m + (n + k)$ quels que soient $m, n, k \in \mathbb{N}$) et que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n + 1 = 1 + n$. À l'aide du principe d'induction structurelle, démontrer que
   1. quel que soit $n \in \mathbb{N}$, alors $0 + n = n$;
   2. l'addition est commutative.

Correction de l'exercice 3

Question 1 : On définit l'addition *add* par $add(m, 0) = m$ et $add(m, n+1) = add(m, n) + 1$ quels que soient $m, n \in \mathbb{N}$. À partir de maintenant on note $m + n := add(m, n)$. On définit la multiplication *mult* par $mult(m, 0) = 0$, $mult(m, n+1) = add(mult(m, n), m)$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}$;

Correction de l'exercice 3

Question 1 : On définit l'addition *add* par $add(m, 0) = m$ et $add(m, n+1) = add(m, n) + 1$ quels que soient $m, n \in \mathbb{N}$. À partir de maintenant on note $m + n := add(m, n)$. On définit la multiplication *mult* par $mult(m, 0) = 0$, $mult(m, n+1) = add(mult(m, n), m)$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}$;

Correction de l'exercice 3

Question 1 : On définit l'addition *add* par $add(m, 0) = m$ et $add(m, n+1) = add(m, n) + 1$ quels que soient $m, n \in \mathbb{N}$. À partir de maintenant on note $m + n := add(m, n)$. On définit la multiplication *mult* par $mult(m, 0) = 0$, $mult(m, n+1) = add(mult(m, n), m)$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}$;

Correction de l'exercice 3

Question 1 : On définit l'addition *add* par $add(m, 0) = m$ et $add(m, n+1) = add(m, n) + 1$ quels que soient $m, n \in \mathbb{N}$. À partir de maintenant on note $m + n := add(m, n)$. On définit la multiplication *mult* par $mult(m, 0) = 0$, $mult(m, n+1) = add(mult(m, n), m)$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}$;

Correction de l'exercice 3 (suite)

Question 2.1 : On définit $E := \{m \in \mathbb{N} : 0 + n = n\}$. Alors $0 \in E$ et si $n \in E$, alors $n + 1 \in E$ (en effet, $0 + (n + 1) = (0 + n) + 1 = n + 1$). Par le principe d'induction structurelle, $E = \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 3 (suite)

Question 2.1 : On définit $E := \{m \in \mathbb{N} : 0 + n = n\}$. Alors $0 \in E$ et si $n \in E$, alors $n + 1 \in E$ (en effet, $0 + (n + 1) = (0 + n) + 1 = n + 1$). Par le principe d'induction structurelle, $E = \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 3 (suite)

Question 2.1 : On définit $E := \{m \in \mathbb{N} : 0 + n = n\}$. Alors $0 \in E$ et si $n \in E$, alors $n + 1 \in E$ (en effet, $0 + (n + 1) = (0 + n) + 1 = n + 1$). Par le principe d'induction structurelle, $E = \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 3 (suite)

Question 2.1 : On définit $E := \{m \in \mathbb{N} : 0 + n = n\}$. Alors $0 \in E$ et si $n \in E$, alors $n + 1 \in E$ (en effet, $0 + (n + 1) = (0 + n) + 1 = n + 1$). Par le principe d'induction structurelle, $E = \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 3 (suite)

Question 2.1 : On définit $E := \{m \in \mathbb{N} : 0 + n = n\}$. Alors $0 \in E$ et si $n \in E$, alors $n + 1 \in E$ (en effet, $0 + (n + 1) = (0 + n) + 1 = n + 1$). Par le principe d'induction structurelle, $E = \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 3 (suite)

Question 2.1 : On définit $E := \{m \in \mathbb{N} : 0 + n = n\}$. Alors $0 \in E$ et si $n \in E$, alors $n + 1 \in E$ (en effet, $0 + (n + 1) = (0 + n) + 1 = n + 1$). Par le principe d'induction structurelle, $E = \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 3 (suite)

Question 2.1 : On définit $E := \{m \in \mathbb{N} : 0 + n = n\}$. Alors $0 \in E$ et si $n \in E$, alors $n + 1 \in E$ (en effet, $0 + (n + 1) = (0 + n) + 1 = n + 1$). Par le principe d'induction structurelle, $E = \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 3 (suite)

Question 2.2 : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On pose $E_n := \{m \in \mathbb{N} : m + n = n + m\}$. $0 \in E_n$ (par définition de l'addition, $n + 0 = n$ et d'après la question précédente, $0 + n = n$, donc $n + 0 = 0 + n$). Soit $m \in E_n$ et montrons que $m + 1 \in E_n$. On a $(m + 1) + n = m + (1 + n)$ (par associativité de $+$) $= m + (n + 1)$ (par l'hypothèse $k + 1 = 1 + k$) $= (m + n) + 1$ (par associativité) $= (n + m) + 1$ (puisque $m \in E_n$) $= n + (m + 1)$ (par associativité) et donc $m + 1 \in E_n$. Par le principe d'induction structurelle quel que soit $m \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$. Comme cela est vrai pour un $n \in \mathbb{N}$ arbitraire, on en déduit que quels que soient $m, n \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$.

Correction de l'exercice 3 (suite)

Question 2.2 : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On pose $E_n := \{m \in \mathbb{N} : m + n = n + m\}$. $0 \in E_n$ (par définition de l'addition, $n + 0 = n$ et d'après la question précédente, $0 + n = n$, donc $n + 0 = 0 + n$). Soit $m \in E_n$ et montrons que $m + 1 \in E_n$. On a $(m + 1) + n = m + (1 + n)$ (par associativité de $+$) $= m + (n + 1)$ (par l'hypothèse $k + 1 = 1 + k$) $= (m + n) + 1$ (par associativité) $= (n + m) + 1$ (puisque $m \in E_n$) $= n + (m + 1)$ (par associativité) et donc $m + 1 \in E_n$. Par le principe d'induction structurelle quel que soit $m \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$. Comme cela est vrai pour un $n \in \mathbb{N}$ arbitraire, on en déduit que quels que soient $m, n \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$.

Correction de l'exercice 3 (suite)

Question 2.2 : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On pose $E_n := \{m \in \mathbb{N} : m + n = n + m\}$. $0 \in E_n$ (par définition de l'addition, $n + 0 = n$ et d'après la question précédente, $0 + n = n$, donc $n + 0 = 0 + n$). Soit $m \in E_n$ et montrons que $m + 1 \in E_n$. On a $(m + 1) + n = m + (1 + n)$ (par associativité de $+$) $= m + (n + 1)$ (par l'hypothèse $k + 1 = 1 + k$) $= (m + n) + 1$ (par associativité) $= (n + m) + 1$ (puisque $m \in E_n$) $= n + (m + 1)$ (par associativité) et donc $m + 1 \in E_n$. Par le principe d'induction structurelle quel que soit $m \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$. Comme cela est vrai pour un $n \in \mathbb{N}$ arbitraire, on en déduit que quels que soient $m, n \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$.

Correction de l'exercice 3 (suite)

Question 2.2 : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On pose $E_n := \{m \in \mathbb{N} : m + n = n + m\}$. $0 \in E_n$ (par définition de l'addition, $n + 0 = n$ et d'après la question précédente, $0 + n = n$, donc $n + 0 = 0 + n$). Soit $m \in E_n$ et montrons que $m + 1 \in E_n$. On a $(m + 1) + n = m + (1 + n)$ (par associativité de $+$) $= m + (n + 1)$ (par l'hypothèse $k + 1 = 1 + k$) $= (m + n) + 1$ (par associativité) $= (n + m) + 1$ (puisque $m \in E_n$) $= n + (m + 1)$ (par associativité) et donc $m + 1 \in E_n$. Par le principe d'induction structurelle quel que soit $m \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$. Comme cela est vrai pour un $n \in \mathbb{N}$ arbitraire, on en déduit que quels que soient $m, n \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$.

Correction de l'exercice 3 (suite)

Question 2.2 : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On pose $E_n := \{m \in \mathbb{N} : m + n = n + m\}$. $0 \in E_n$ (par définition de l'addition, $n + 0 = n$ et d'après la question précédente, $0 + n = n$, donc $n + 0 = 0 + n$). Soit $m \in E_n$ et montrons que $m + 1 \in E_n$. On a $(m + 1) + n = m + (1 + n)$ (par associativité de $+$) $= m + (n + 1)$ (par l'hypothèse $k + 1 = 1 + k$) $= (m + n) + 1$ (par associativité) $= (n + m) + 1$ (puisque $m \in E_n$) $= n + (m + 1)$ (par associativité) et donc $m + 1 \in E_n$. Par le principe d'induction structurelle quel que soit $m \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$. Comme cela est vrai pour un $n \in \mathbb{N}$ arbitraire, on en déduit que quels que soient $m, n \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$.

Correction de l'exercice 3 (suite)

Question 2.2 : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On pose $E_n := \{m \in \mathbb{N} : m + n = n + m\}$. $0 \in E_n$ (par définition de l'addition, $n + 0 = n$ et d'après la question précédente, $0 + n = n$, donc $n + 0 = 0 + n$). Soit $m \in E_n$ et montrons que $m + 1 \in E_n$. On a $(m + 1) + n = m + (1 + n)$ (par associativité de $+$) $= m + (n + 1)$ (par l'hypothèse $k + 1 = 1 + k$) $= (m + n) + 1$ (par associativité) $= (n + m) + 1$ (puisque $m \in E_n$) $= n + (m + 1)$ (par associativité) et donc $m + 1 \in E_n$. Par le principe d'induction structurelle quel que soit $m \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$. Comme cela est vrai pour un $n \in \mathbb{N}$ arbitraire, on en déduit que quels que soient $m, n \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$.

Correction de l'exercice 3 (suite)

Question 2.2 : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On pose $E_n := \{m \in \mathbb{N} : m + n = n + m\}$. $0 \in E_n$ (par définition de l'addition, $n + 0 = n$ et d'après la question précédente, $0 + n = n$, donc $n + 0 = 0 + n$). Soit $m \in E_n$ et montrons que $m + 1 \in E_n$. On a $(m + 1) + n = m + (1 + n)$ (par associativité de $+$) $= m + (n + 1)$ (par l'hypothèse $k + 1 = 1 + k$) $= (m + n) + 1$ (par associativité) $= (n + m) + 1$ (puisque $m \in E_n$) $= n + (m + 1)$ (par associativité) et donc $m + 1 \in E_n$. Par le principe d'induction structurelle quel que soit $m \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$. Comme cela est vrai pour un $n \in \mathbb{N}$ arbitraire, on en déduit que quels que soient $m, n \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$.

Correction de l'exercice 3 (suite)

Question 2.2 : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On pose $E_n := \{m \in \mathbb{N} : m + n = n + m\}$. $0 \in E_n$ (par définition de l'addition, $n + 0 = n$ et d'après la question précédente, $0 + n = n$, donc $n + 0 = 0 + n$). Soit $m \in E_n$ et montrons que $m + 1 \in E_n$. On a $(m + 1) + n = m + (1 + n)$ (par associativité de $+$) $= m + (n + 1)$ (par l'hypothèse $k + 1 = 1 + k$) $= (m + n) + 1$ (par associativité) $= (n + m) + 1$ (puisque $m \in E_n$) $= n + (m + 1)$ (par associativité) et donc $m + 1 \in E_n$. Par le principe d'induction structurelle quel que soit $m \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$. Comme cela est vrai pour un $n \in \mathbb{N}$ arbitraire, on en déduit que quels que soient $m, n \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$.

Correction de l'exercice 3 (suite)

Question 2.2 : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On pose $E_n := \{m \in \mathbb{N} : m + n = n + m\}$. $0 \in E_n$ (par définition de l'addition, $n + 0 = n$ et d'après la question précédente, $0 + n = n$, donc $n + 0 = 0 + n$). Soit $m \in E_n$ et montrons que $m + 1 \in E_n$. On a $(m + 1) + n = m + (1 + n)$ (par associativité de $+$) $= m + (n + 1)$ (par l'hypothèse $k + 1 = 1 + k$) $= (m + n) + 1$ (par associativité) $= (n + m) + 1$ (puisque $m \in E_n$) $= n + (m + 1)$ (par associativité) et donc $m + 1 \in E_n$. Par le principe d'induction structurelle quel que soit $m \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$. Comme cela est vrai pour un $n \in \mathbb{N}$ arbitraire, on en déduit que quels que soient $m, n \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$.

Correction de l'exercice 3 (suite)

Question 2.2 : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On pose $E_n := \{m \in \mathbb{N} : m + n = n + m\}$. $0 \in E_n$ (par définition de l'addition, $n + 0 = n$ et d'après la question précédente, $0 + n = n$, donc $n + 0 = 0 + n$). Soit $m \in E_n$ et montrons que $m + 1 \in E_n$. On a $(m + 1) + n = m + (1 + n)$ (par associativité de $+$) $= m + (n + 1)$ (par l'hypothèse $k + 1 = 1 + k$) $= (m + n) + 1$ (par associativité) $= (n + m) + 1$ (puisque $m \in E_n$) $= n + (m + 1)$ (par associativité) et donc $m + 1 \in E_n$. Par le principe d'induction structurelle quel que soit $m \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$. Comme cela est vrai pour un $n \in \mathbb{N}$ arbitraire, on en déduit que quels que soient $m, n \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$.

Correction de l'exercice 3 (suite)

Question 2.2 : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On pose $E_n := \{m \in \mathbb{N} : m + n = n + m\}$. $0 \in E_n$ (par définition de l'addition, $n + 0 = n$ et d'après la question précédente, $0 + n = n$, donc $n + 0 = 0 + n$). Soit $m \in E_n$ et montrons que $m + 1 \in E_n$. On a $(m + 1) + n = m + (1 + n)$ (par associativité de $+$) $= m + (n + 1)$ (par l'hypothèse $k + 1 = 1 + k$) $= (m + n) + 1$ (par associativité) $= (n + m) + 1$ (puisque $m \in E_n$) $= n + (m + 1)$ (par associativité) et donc $m + 1 \in E_n$. Par le principe d'induction structurelle quel que soit $m \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$. Comme cela est vrai pour un $n \in \mathbb{N}$ arbitraire, on en déduit que quels que soient $m, n \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$.

Correction de l'exercice 3 (suite)

Question 2.2 : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On pose $E_n := \{m \in \mathbb{N} : m + n = n + m\}$. $0 \in E_n$ (par définition de l'addition, $n + 0 = n$ et d'après la question précédente, $0 + n = n$, donc $n + 0 = 0 + n$). Soit $m \in E_n$ et montrons que $m + 1 \in E_n$. On a $(m + 1) + n = m + (1 + n)$ (par associativité de $+$) $= m + (n + 1)$ (par l'hypothèse $k + 1 = 1 + k$) $= (m + n) + 1$ (par associativité) $= (n + m) + 1$ (puisque $m \in E_n$) $= n + (m + 1)$ (par associativité) et donc $m + 1 \in E_n$. Par le principe d'induction structurelle quel que soit $m \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$. Comme cela est vrai pour un $n \in \mathbb{N}$ arbitraire, on en déduit que quels que soient $m, n \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$.

Correction de l'exercice 3 (suite)

Question 2.2 : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On pose $E_n := \{m \in \mathbb{N} : m + n = n + m\}$. $0 \in E_n$ (par définition de l'addition, $n + 0 = n$ et d'après la question précédente, $0 + n = n$, donc $n + 0 = 0 + n$). Soit $m \in E_n$ et montrons que $m + 1 \in E_n$. On a $(m + 1) + n = m + (1 + n)$ (par associativité de $+$) $= m + (n + 1)$ (par l'hypothèse $k + 1 = 1 + k$) $= (m + n) + 1$ (par associativité) $= (n + m) + 1$ (puisque $m \in E_n$) $= n + (m + 1)$ (par associativité) et donc $m + 1 \in E_n$. Par le principe d'induction structurelle quel que soit $m \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$. Comme cela est vrai pour un $n \in \mathbb{N}$ arbitraire, on en déduit que quels que soient $m, n \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$.

Correction de l'exercice 3 (suite)

Question 2.2 : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On pose $E_n := \{m \in \mathbb{N} : m + n = n + m\}$. $0 \in E_n$ (par définition de l'addition, $n + 0 = n$ et d'après la question précédente, $0 + n = n$, donc $n + 0 = 0 + n$). Soit $m \in E_n$ et montrons que $m + 1 \in E_n$. On a $(m + 1) + n = m + (1 + n)$ (par associativité de $+$) $= m + (n + 1)$ (par l'hypothèse $k + 1 = 1 + k$) $= (m + n) + 1$ (par associativité) $= (n + m) + 1$ (puisque $m \in E_n$) $= n + (m + 1)$ (par associativité) et donc $m + 1 \in E_n$. Par le principe d'induction structurelle quel que soit $m \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$. Comme cela est vrai pour un $n \in \mathbb{N}$ arbitraire, on en déduit que quels que soient $m, n \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$.

Correction de l'exercice 3 (suite)

Question 2.2 : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On pose $E_n := \{m \in \mathbb{N} : m + n = n + m\}$. $0 \in E_n$ (par définition de l'addition, $n + 0 = n$ et d'après la question précédente, $0 + n = n$, donc $n + 0 = 0 + n$). Soit $m \in E_n$ et montrons que $m + 1 \in E_n$. On a $(m + 1) + n = m + (1 + n)$ (par associativité de $+$) $= m + (n + 1)$ (par l'hypothèse $k + 1 = 1 + k$) $= (m + n) + 1$ (par associativité) $= (n + m) + 1$ (puisque $m \in E_n$) $= n + (m + 1)$ (par associativité) et donc $m + 1 \in E_n$. Par le principe d'induction structurelle quel que soit $m \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$. Comme cela est vrai pour un $n \in \mathbb{N}$ arbitraire, on en déduit que quels que soient $m, n \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$.