

L'université n'entend donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans cette thèse : ces opinions doivent être considérées comme propres à leur auteur.

À Hubert

Sommaire

Remerciements	xi
Résumés	xv
1 Introduction	1
2 Préliminaires	7
2.1 Les problèmes	7
2.1.1 Qu'est-ce qu'un problème de <i>NPO</i> ?	7
2.1.2 Définitions indispensables	9
2.2 Leur résolution	10
2.2.1 La mission de l'approximation polynomiale	10
2.2.2 Son arme	10
2.3 Leur évaluation	11
2.3.1 Fer de lance de l'approximation polynomiale: le rapport classique	11
2.3.2 Une alternative: le rapport différentiel	12
2.3.3 L'erreur	12
2.4 Degrés d'approximation	13
2.4.1 Approximation à rapport constant r_0	13
2.4.2 Approximation à r , r aussi proche de 1 que l'on veut	14
2.5 Définition logique	14
2.5.1 <i>Max NP</i> ₀	14
2.5.2 <i>Max SNP</i> ₀	16
2.5.3 Logique et approximation	18
2.6 Effets de classe	20
2.6.1 Le principe de réduction	20

2.6.2	La notion de complétude	25
2.6.3	La fermeture	27
2.7	Affinité entre problèmes	27
2.7.1	Réductions continues	27
2.7.2	Réductions affines	29
I	Optima locaux	35
3	Optimum local garanti	37
3.1	Quelques concepts	37
3.1.1	Qu'est-ce qu'un algorithme de recherche locale?	37
3.1.2	Voisinages h -bornés	40
3.2	Les classes $GLO[R]$	43
3.3	Exemples simples pour voisinages 1-bornés	44
3.4	Limite des voisinages h -bornés	47
3.5	Réductions préservant l'approximation locale	48
3.5.1	Préserver le voisinage	49
3.5.2	La réduction dans $GLO[R]$	55
3.5.3	Exemples	56
3.6	Récapitulatif des résultats	58
4	Quelques résultats	59
4.1	Des voisinages 1-bornés	59
4.1.1	Problèmes de partitionnement héréditaire	59
4.1.2	Couverture d'ensembles	62
4.1.3	Ensemble minimum d'arêtes retour	66
4.1.4	Couplage maximum dans un hypergraphe	66
4.1.5	Les problèmes d'ordonnancement	66
4.2	Le voyageur de commerce et le voisinage 2 – <i>opt</i>	68
4.3	Résultats négatifs	70
4.3.1	Satisfaisabilité maximum	70
4.3.2	Ensemble minimum de sommets retour	71
4.3.3	Le sac-à-dos	73

4.4	Où les classes $GLO[R]$ se situent-elles?	74
4.4.1	$GLO[R]$ et les classes d'approximation	75
4.4.2	$GLO[R]$ et les classes logiques	78
4.4.3	Quelle unité dans tout ça?	79
4.5	Récapitulatif des résultats	80
5	Changeons l'angle de vue	83
5.1	La classe PLS des problèmes de recherche locale	83
5.1.1	De la difficulté de détermination des optima locaux	84
5.1.2	Approximation des optima locaux	88
5.2	Les problèmes radiaux	89
5.2.1	Qu'est-ce que radial?	90
5.2.2	Les problèmes τ -radiaux	93
5.2.3	Une sous-famille remarquable	97
5.3	Conclusion	101
6	Les problèmes de satisfaisabilité et leurs optima locaux	103
6.1	Les problèmes de satisfaisabilité entre eux	103
6.1.1	Présentation	103
6.1.2	Tous dans le même sac	106
6.2	GLO et associés	108
6.2.1	Voisinages miroirs et la classe $CGLO[R]$	108
6.2.2	Optima altérés et $GGLO[R]$	110
6.2.3	Mixage ou $CGGLO[R]$	112
6.3	Déclinaison des problèmes de satisfaisabilité maximum en GLO	113
6.3.1	Une opposition de plus entre rapports classique et différentiel	113
6.3.2	$Max Sat$ et $CGLO$	113
6.3.3	$Max k - Sat$ et GLO	113
6.3.4	$Max k - Sat$ et $CGLO$	115
6.3.5	$Max NAE k - Sat$ et GLO	116
6.3.6	$Max k - Sat$ et $GCGLO$	118
6.4	Les problèmes de satisfaction de contraintes conjonctives	119
6.4.1	Un problème difficile	119
6.4.2	Vers le 1/4 différentiel...	122

6.4.3	Approximation à $1/3$	125
6.5	Limites de l'approche <i>GLO</i>	127
6.5.1	$1/3$, le meilleur de <i>CGLO</i> pour <i>Max 2 – CCSP</i>	127
6.5.2	$1/5$, le meilleur espoir de <i>CGLO</i> [δ] pour <i>Max 2 – CCSP</i>	129
6.5.3	$1/2$, le meilleur de <i>GLO</i> pour <i>Max NAE 2 – Sat</i>	130
6.5.4	$1/3$, le meilleur espoir de <i>GLO</i> [δ] pour <i>Max NAE 2 – Sat</i>	131
6.6	Récapitulatif des résultats	131
7	Réductions dans <i>GLO</i>[δ] et <i>APX</i>[δ]	133
7.1	Dans les graphes	133
7.1.1	Régularisation pour la couverture d'ensembles	134
7.1.2	Dépondération pour la couverture d'ensemble	135
7.1.3	Dépondération pour la couverture de sommets	138
7.1.4	Autres problèmes simples dans les graphes	140
7.2	Les problèmes de logique	141
7.2.1	Autour de <i>Min EQ</i>	141
7.2.2	Autour de <i>Max NAE Sat</i>	145
7.2.3	Dense ou pas dense?	149
7.3	Conclusion	155
II	Le problème du voyageur de commerce	157
8	Le voyageur de commerce	159
8.1	Équivalences sous le rapport différentiel	159
8.1.1	Le cas métrique	160
8.1.2	Ses acolytes	160
8.1.3	Le cas bivalué	162
8.1.4	Le cas général	162
8.1.5	Du <i>TSP</i> classique au <i>TSP</i> différentiel	163
8.2	Résultats d'approximation	165
8.2.1	Approximation différentielle du cas général à $1/2$	165
8.2.2	Approximation des cas <i>stricte</i> et <i>relaxé métriques</i>	167
8.2.3	Le <i>TSP</i> aujourd'hui	168

8.3	Récapitulatif des principaux résultats	169
9	δ–approximation du TSP_{ab} à $3/4$	171
9.1	L’algorithme	171
9.1.1	Le 2-couplage initial	172
9.1.2	Préparation à la construction du tour	173
9.1.3	La solution approchée	175
9.1.4	Évaluation de la solution \tilde{T}	176
9.1.5	Évaluation de l’optimum	177
9.1.6	Évaluation d’une pire solution	177
9.2	Instance limite	182
10	Perspectives	185
A	Guide des problèmes rencontrés	193
B	Guide des définitions	205
B.1	Les fondements	205
B.2	Les classes	206
B.2.1	Classes d’approximation	206
B.2.2	Classes définies par la logique	207
B.2.3	Classes d’approximation locale	207
B.3	Réductions	208
B.3.1	Propriétés remarquables	208
B.3.2	Réductions remarquables	209
B.4	Les principes locaux	211
B.5	Problèmes particuliers	212
	Bibliographie	215

Remerciements

On a peu (on prend peu) l'occasion de remercier les gens qui pourtant sont là, partie prenante de votre vie, les gens à qui on "*maile*" tous les jours, ceux qu'on a au téléphone chaque semaine, ceux-là encore que l'on voit quelques soirs et ceux-là enfin à qui l'on pense souvent ; les gens que l'on croise tous les jours, les amis du quotidien, les proches de toujours bref ; aussi indépendant et parfois distant que l'on puisse être, on vit toujours à plusieurs et rarement, trop rarement, on prend le temps de témoigner à ces complices, ces amis, ces compagnons indispensables, notre attachement : c'est cette constante erreur que ces remerciements se veulent de réparer, pour une fois, ponctuellement mais sincèrement.

Cependant, revenons-en pour un temps aux réalités et à l'occasion qui m'est offerte d'exprimer ces remerciements : le travail de thèse. Je tiens à remercier, comme il se doit mais surtout comme *je le leur dois* car je vous suis redevable, vous qui m'avez accompagnée tout au long de ce travail, dans sa construction comme dans son évaluation. Tout d'abord Vangélis Paschos, avec qui j'ai eu grand plaisir à travailler par la décontraction et le soutien amical dont il sait faire preuve ; Vangélis, en chercheur sans concession qu'il est, tient aux doctorants qu'il encadre et leur travail, leur réussite, et je sais combien parfois il a dû maudire mon indépendance parfois mal placée, mal jugée ; son expérience a notamment permis de faire de ce travail un travail accompli. Encore à Vangélis cette fois-ci accompagné de Bernard Roy, pour m'avoir permis de décrocher l'allocation de recherche sans laquelle je n'aurais certainement pas pu poursuivre ce travail. Merci infiniment à Wenceslas de la Vega et Giorgio Ausiello d'avoir accepté de rapporter ce travail : de leur part à tous deux, c'est un formidable honneur que de l'avoir fait, et le plaisir est d'autant plus singulier concernant Giorgio Ausiello que ses travaux et ceux qu'ils ont su inspirer furent le point de départ et l'inspiration de cette thèse. Merci encore à François-Xavier Rampon qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider le jury.

Merci à Cristina qui est arrivée dans la phase finale de ce travail mais dont la contribution a été immédiate, efficace ; Cristina est une excellente chercheuse doublée d'un tempérament particulier parce qu'entier, avec qui il est très agréable de travailler et de partager.

Merci à Jérôme, celui que je connais le mieux et avec qui j'ai le plus échangé sur ce travail de thèse, qui est un chercheur hors pair par sa connaissance, son intuition, sa curiosité et sa vivacité, son imaginativité ; sa patience aussi envers moi, et son soutien permanent, malgré toutes les résistances que j'ai pu y opposer. Jérôme m'a suivie, conseillée, guidée, inspirée, et le fait d'avoir plus souvent qu'à notre tour confronté nos idées et autres intuitions n'a pas

seulement contribué à ce travail de thèse, mais permis de le construire. Doctorants, je vous conseille Jérôme pour ses idées mais aussi pour la précieuse rigueur de ses relectures !

Toujours d'un point de vue professionnel, merci à Pierluigi Crescenzi et Viggo Kann pour leur compendium si bien organisé et si bien informé auquel je me suis reporté (et continuerai de le faire, sans l'ombre d'un doute) maintes et maintes fois!!!

Venons-en à présent aux remerciements officiels qui viennent se placer là, comme ça, parce qu'après tout le travail et la vie, surtout en ce qui concerne un travail de longue haleine tel le travail de thèse, ne peuvent pas, honnêtement, être totalement dissociés.

Jérôme de nouveau, pour son enthousiasme, sa joie de vivre permanente et communicative, impressionnante; c'est un garçon hors du commun, un gars vraiment épatant à la curiosité parfois mal placée mais c'est pour ça qu'on l'aime, malgré (et ce n'est pourtant pas rien) sa façon toute personnelle d'interpréter "*Roxanne*". Toujours souriant il est pour beaucoup de la bonne humeur dans les bureaux, toujours disponible c'est celui vers qui tout doctorant se tourne quand il a un problème, une question. Quels que soient nos avenir respectifs, j'espère que nous continuerons, très longtemps, de collaborer en amitié.

Myriam qui a toujours raison et de fait, est d'excellent conseil; elle est la personne la plus équilibrée, dotée du plus d'assise, de recul sur la vie et de clairvoyance que je connaisse. Derrière ses airs péremptores (mais que voulez-vous, comme je le disais il y a de cela quelque ligne, elle a toujours raison), la brillante Myriam est une personne très agréable à discuter et toujours à l'aide efficace des gens qui l'entourent.

Laurent (même si cela dépend des fois, il faut avouer) avec qui nous avons réussi à partager profondément et qui m'a beaucoup appris, m'a certainement fait progresser en me révélant des choses sur moi-même, et que j'aime sans compter en tant que personne cultivée, intelligente, curieuse et ouverte bien qu'il s'attache trop souvent à se le cacher à lui-même.

Il y a aussi Larry qui n'oublie jamais ses clefs, Agnès qui, quand elle n'est pas en fin de thèse est quelqu'un de très fréquentable; -)), Jalal pour son amour sans pudeur, Xav et les précieuses discussions que nous avons eues en face-à-face (souvenir de Gargamelle), Alex dont l'esprit et l'aspiration (l'inspiration?) si riche vous plairait à s'imaginer à se retrouver au coin d'une table à philosopher jusqu'au bout de la nuit, Slim et son efficacité, son approche directe.

William qui est pour beaucoup dans mon éducation musicale, Cécile grâce à qui je sais tout ou presque sur les Maya, Pierre pour son tempérament toujours à apprendre, si curieux et vif malgré sa célèbre tendance à gaffer, la généreuse Élé pour sa façon d'aimer au quotidien et Stéphane pour sa façon de le faire discrètement, Paul pour les veillées du 15 août sur des accords de RADIOHEAD, Christine pour sa spontanéité, son naturel, son rire et son amour des autres.

Thomas, sous l'influence duquel j'ai grandi, et sait-on jamais si un jour on se retrouvera autour d'une composition musicale?

Céline ma cousine préférée, parce qu'elle est plutôt ma petite sœur.

La famille et mes parents, envers qui je ne suis pas toujours très juste je sais mais pourtant ils m'ont tant appris, l'air de rien, l'essentiel: le respect et l'amour des autres,

l'humilité, la simplicité. Ils ont toujours été là, le sont encore aujourd'hui et le seront toujours toujours, malgré mes sarcasmes : mes parents, merci pour tout d'être vous. Mes grands-parents Micheline, Mariette et Jean qui sont toujours si présents et qui en ont subi des coups. Grand-mère, ma référence, chez qui j'ai si souvent été trouver refuge, chez qui je remis tant de fois mes idées en place, chez qui je relativisai, j'appris tant d'histoires et qui est partie avant que cette thèse ne s'achève ; et bien grand-mère, je sais que je ne guéris rien mais quand même, sache que je suis docteur aujourd'hui !

Enfin, un hommage tout particulier à mon grand-père qui m'a tant apporté presque malgré lui vue sa grande discrétion ; il m'a notamment aidé à obtenir le bac et pourtant ce n'était pas gagné, mais cela n'est rien : j'aime sa curiosité de tout et de surtout de tous, cette intelligence d'esprit qui tient de son intelligence de cœur, la vraie, la seule.

Et il y a les autres : Cécile (sœur GATEWAY), Dominique et ses filles (pardon, DCB, mais comment fais-tu pour qu'on aie chacun cette impression d'être ton ami?) qui est la chaleur du LAMSADE, Naoufel et sa famille, Amine et Iftikhar qui sont venus apporter de la bonne humeur en P623, Nathalie pour les ramettes et son pétitement aussi, Begoña et son enthousiasme ; Éric parce qu'il est toujours content, Olivier s'il me prédit des bonnes choses, Virginie pour son impressionnante facilité à faire parler, Thomas, le futur écrivain, pour sa gentillesse et sa trop grande discrétion, Frèd (mais arrête donc de rire, Fred... non, tout compte fait, ne t'arrête pas !). Dominique (F), Dominique (V), Josette (Wagnawagnawagna), Floréal (pour les discussions de fin de soirée sur le thème "De la gestion des Universités aujourd'hui?"), Odile...

Bonne chance à la nouvelle génération Hélène, Olivier, Osman, vice-président...

Mais il y en a aussi tant d'autres, que je préfère m'arrêter là : il y a tant de personnes que l'on croise, tant de personnalités à découvrir, tant de gens à aimer... merci à tous ceux avec qui j'ai partagé quelque chose, ne serait-ce qu'une rencontre, et tous ceux encore que je croiserai... l'exhaustivité n'existe déjà pas au présent, pas même au passé, imaginez à l'avenir?

Résumés

Résumé

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de l'*approximation polynomiale au pire des cas* des problèmes difficiles d'optimisation combinatoire qui se donne pour double objectif de fournir en temps polynomial des solutions de qualité garantie au sens des mesures classique rapport à l'optimum ou différentielle chemin relatif parcouru depuis la pire solution vers l'optimum. Nos recherches se concentrent sur deux aspects : la mesure différentielle qui est un outil d'évaluation des solutions et l'optimalité locale qui désigne un type de solutions. S'il propose un algorithme à rapport différentiel constant pour *Min TSPab*, ce travail s'attache essentiellement, non pas à déterminer des solutions particulières remarquables (données *a posteriori* par un algorithme spécifique), mais à reconnaître les problèmes dont les optima locaux (définis *a priori* par le voisinage) sont tous de qualité. Les structures qui nous intéressent désignent comme voisinage d'une solution l'ensemble des solutions qui lui sont au plus h -distantes (voisinages h -bornés), éventuellement élargi aux solutions complémentaires (voisinages miroirs h -bornés), pour une constante h . L'optimalité locale peut ensuite être définie relativement à la fonction objectif ou à un autre critère alors appelé objectif altéré. Selon les modalités considérées, les problèmes *Max Sat* et *Min TSP(k)*, respectivement pour les rapports classique et différentiel, garantissent la qualité de leurs optima locaux ; en revanche, *Min FES* admet des optima locaux arbitrairement mauvais pour les deux rapports ; enfin, les optima locaux de *Max 2-CCSP* assurent un rapport classique de $1/3$ mais ne pourront jamais faire mieux. C'est ce type de résultats que nous proposons dans ce document, positifs, négatifs ou limites, accompagnés d'une réflexion sur la définition et l'accessibilité des optima locaux d'une part, sur la richesse et les difficultés de l'approximation différentielle d'autre part.

Abstract

In the field of *worst-case approximation* of *NP*-hard problems, one aims to devise *polynomial time* algorithms achieving a *good evaluation* of the solutions whose value is a constant times the value of the optimal one (*usual framework*), or, in the *differential approximation*, solutions for which their distance from the worst solution value is constant times the distance

between worst solution value and optimal value. This thesis focus on two main notions: the *differential ratio* which is a way of evaluating the solutions quality and the *local optimality* which refers to a special kind of solutions. The main purpose of this work is the evaluation of the ability of *NP*-hard problems to guarantee the quality of their local optima. We impose the neighbourhood of a given solution to be bounded (*h*-bounded neighbourhoods), or/and to contain the complementary solutions (relaxed *h*-bounded neighbourhoods), where *h* is a constant. Local optimality can be defined according to the objective value (oblivious optima) or according to another objective value (non oblivious optima). For instance, *Max Sat* and *Min TSP(k)* problems have guaranteed local optima, for the usual and the differential ratios, respectively; on the other hand, we show that there exist problems as *Min FNS* admitting arbitrarily bad local optima for any measure. Finally, the local optima of *Max 2-CCSP* for the relaxed 1-bounded neighbourhood are 1/3 to the optimum value, and this ratio cannot be improved by any relaxed *h*-bounded neighbourhood. This document contains also some thoughts on the definition and the tractability of the local optima as well as on the difficulties and the relevance of the use of differential measure.

Chapitre 1

Introduction

L'objet de ce travail est l'étude des problèmes de *NPO*, ou plutôt une tentative de résolution approchée de certains de ces problèmes. Ce sont des problèmes d'optimisation combinatoire difficiles que l'on ne sait résoudre efficacement en un temps raisonnable. Ils nous entourent pourtant, provenant de domaines fort divers : des problèmes tels le voyageur de commerce, la conception d'emplois du temps, l'ordonnancement de tâches... peuvent se poser sur la route de quiconque mène une activité, quelle qu'en soit la nature.

Dans le domaine de la recherche opérationnelle, certains cherchent à résoudre, malgré leur résistance, ces problèmes de façon exacte (*méthodes arborescentes*), ou approchée (*meta-heuristiques* de type tabou, recuit simulé, algorithmes génétiques). L'approximation polynomiale se donne pour objectif de trouver des algorithmes pour ces problèmes en s'imposant la double contrainte d'une exécution rapide et de l'assurance d'un seuil de qualité qui devra être vérifié par toute solution donnée par l'algorithme.

Nous axons nos recherches autour de deux thèmes. Le premier, l'optimalité locale, concerne le type de solutions que nous allons considérer ; le second, le rapport différentiel, se rapporte à l'évaluation des solutions proposées. Bien que ces deux thèmes soient les essentiels points d'encrage des réflexions menées ici, ce travail s'inscrit dans le cadre le plus général de l'approximation polynomiale.

Optimum local

L'intérêt essentiel de l'approche locale se situe du point de vue méthodologique, puisqu'il s'agit d'étudier la diversité de comportement des problèmes de *NPO* vis-à-vis d'un même type de résolution. La notion d'optimalité locale, tout à la fois conceptuellement simple,

d'une mise en œuvre aisée et d'utilisation rapide, a été longuement étudiée et exploitée tant par les chercheurs que par les opérationnels. Citons pour illustration une fameuse sous-famille d'optima locaux formée des solutions maximales et minimales : une solution maximale (*resp.* minimale) est un plus grand (*resp.* plus petit) ensemble vis-à-vis de l'inclusion respectant une certaine propriété.

Cependant, la notion de recherche locale est plus riche qu'il n'y paraît, puisqu'elle a donné lieu à différents types de résolutions (algorithmes approchés de type *meta-heuristique* avec le tabou, *polynomiaux* avec la classe *GLO* [11]) ainsi qu'à différentes définitions de ce que sont, d'une part un voisinage sur un ensemble de solutions (notion de *localité*), d'autre part la méthode d'évaluation de ces solutions (notion d'*optimalité*).

Nos travaux sur les optima locaux s'intéressent autant à la compréhension de NPO qu'à la résolution de ses problèmes puisque nous cherchons à déceler des situations dans lesquelles le plus petit des optima locaux serait déjà une bonne solution au sens de l'approximation. Il s'agit donc d'une approche structurelle dans le sens où il est dans la nature d'un problème de garantir ou non la qualité de ses optima locaux, indépendamment du comportement d'optima locaux remarquables : nous n'utilisons pas l'optimalité locale pour la construction de bons algorithmes approchés mais comme outil de caractérisation des problèmes de NPO.

Rapport différentiel

Pour évaluer la qualité des solutions déterminées par les algorithmes mis aux points, la communauté scientifique s'est unanimement ralliée autour du rapport classique, mesure simple qui consiste à comparer la valeur de la solution approchée à la celle de l'optimum. Ce rapport, à l'origine de l'approximation polynomiale, est l'outil qui a permis de construire la riche typologie de *NPO* que l'on connaît aujourd'hui.

Parallèlement, certains chercheurs se sont intéressés, [27], [1] et [9] dans les années 80, puis plus récemment [34], à un autre rapport, tout aussi simple mais parfois plus cohérent, qui prend en compte comme référence supplémentaire la valeur de la pire solution. Ce rapport traduit la volonté de savoir où l'on se trouve sur l'amplitude des valeurs possibles : *en différentiel, on ne cherche pas seulement à approcher la meilleure solution, mais aussi à s'éloigner de la pire solution.* Le *rapport classique* situe la valeur λ d'une solution relativement à la valeur β d'une solution optimale, le *rapport différentiel* situe la valeur λ d'une solution sur l'intervalle $[\omega, \beta]$ où ω est la valeur d'une pire solution et β celle d'une solution

	<i>problème de maximisation</i>	<i>problème de minimisation</i>
en classique	$\lambda \geq r\beta$ ($r \in [0, 1]$)	$\lambda \leq 1/r\beta$ ($1/r \in [1, +\infty]$)
en différentiel	$\lambda \geq (1-r)\omega + r\beta$ ($r \in [0, 1]$)	$\lambda \leq (1-r)\omega + r\beta$ ($r \in [0, 1]$)

TAB. 1.1: *mesure d'approximation* $R_\lambda \geq r$

optimale (*cf.* tableau 1.1). Il est certains problèmes pour lesquels la pertinence de ce rapport s'impose naturellement. Citons pour exemple le problème de couverture de sommets, *Min VC*, qui consiste dans un graphe simple à déterminer un sous-ensemble de sommets adjacent à toute arête du graphe qui soit de taille minimum. Le meilleur algorithme approché à rapport constant connu pour ce problème, en proposant comme couverture les sommets extrémités des arêtes d'un couplage maximal, assure de donner une solution au plus deux fois plus grande que l'optimum. Or, Bollobás montre dans [24] que *presque tout* graphe admet un couplage parfait, c'est-à-dire que la probabilité qu'un graphe à n sommets contienne un couplage de taille $\lfloor n/2 \rfloor$ tend presque sûrement vers 1 (un couplage parfait étant un ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes qui recouvre tous les sommets du graphe). En ce cas, prendre les sommets d'un couplage maximal, c'est, au pire, prendre un couplage maximum soit *presque sûrement* prendre une pire solution : ainsi pour la mesure classique, *même une pire solution* peut être considérée comme *une bonne solution*. Cet exemple illustre comment la précision supplémentaire intégrée dans le rapport différentiel peut, pour certains problèmes, rendre celui-ci plus sélectif dans le sens où l'approximation différentielle sera plus difficile à obtenir que l'approximation classique : le problème de couverture de sommets n'est pas même approximable à $|V|^{1/2-\varepsilon}$ pour tout ε strictement positif [50] pour le rapport différentiel, à moins que P ne coïncide avec NP . Mais ce n'est pas une règle puisqu'à l'inverse, des problèmes qui sont non approximables en classique peuvent le devenir en différentiel, toujours du fait de la référence à la pire solution : le problème de *Coloration Minimum (Min C)* fait partie de ceux-ci. Il s'agit de trouver une partition de taille minimum des sommets V d'un graphe $G(V, E)$, de sorte que les sommets de chacun des sous-ensembles de la partition soient deux-à-deux non adjacents : on dit qu'ils forment un *stable*. En différentiel, *Min C* est approximable à $1/2$ (naïvement, les couleurs répartissent les sommets en des stables de taille au moins 2 et d'éventuels singletons dont le nombre est un minorant de l'optimum), quand il n'est, en classique, pas approximable à mieux de $|V|^{1/7-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$ [19] ; il existe même un algorithme de coloration de rapport différentiel asymptotique 1 dans les graphes

3-colorables [32] quand la meilleure approximation classique connue à ce jour est un polynôme en le nombre $|V|$ des sommets du graphe $O(|V|^{3/14} \log^{O(1)} |V|)$ [23]. Cette apparente facilité relative provient du fait qu'en différentiel, il est tout aussi important de s'éloigner de la valeur ω d'une pire solution que de s'approcher de la valeur β d'une solution optimale; ainsi, dans le cadre particulier d'un problème de *minimisation*, on obtient un résultat d'approximation différentielle dès lors qu'il est possible de s'*éloigner* de la valeur ω d'une pire solution par un facteur constant $r \leq 1$, la valeur optimale étant toujours minorée par 0 :

$$\lambda \leq r\omega \text{ et } \beta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \leq r\omega + (1-r)\beta.$$

Toujours sur l'exemple du problème de coloration, *Min C* en différentiel est équivalent, du point de vue de l'approximation, au problème *Max UC* (*Max Unused Coloring graph*) en classique dont l'objectif est de déterminer une coloration qui *maximise* le nombre de couleurs inutilisées; cette version *maximisation* du problème de coloration est de fait approximable à rapport classique constant. L'apport de la mesure différentielle, c'est la disparition de l'asymétrie quelque peu artificielle souvent introduite en classique lors du passage d'un problème de maximisation à sa version minimisation, ou plus généralement entre deux versions fortement semblables d'un même problème. L'origine de ce rapport, formellement présenté et justifié dans [30], a justement été motivée par la stabilité sous transformation affine de la fonction à optimiser: en classique, une simple translation de la fonction objectif suffit parfois à transformer un problème approximable à rapport constant en un problème dont l'approximation elle-même est *NP-dure*! Citons pour exemple le problème de voyageur de commerce, *Min TSP*, dont le cas métrique (distances vérifiant l'inégalité triangulaire) admet un algorithme approché à $3/2$ alors que le cas général n'est pas approximable à $2^{p(n)}$ pour tout polynôme p si $P \neq NP$ (*cf.* chapitre 8.1.1). Citons encore les problèmes *Min VC* de couverture de sommets de taille minimum et *Max IS* d'ensemble stable de taille maximum, qui, bien que liés entre-eux par une transformation affine de leur fonction objectif (le complémentaire de tout *stable* est une *couverture* et vice-versa), ont un comportement antagoniste vis-à-vis de l'approximation puisque *Max IS* n'est pas approximable à rapport constant sous l'hypothèse $P \neq NP$. La mesure différentielle n'est cependant pas toujours pertinente et la coexistence des deux rapports est une source supplémentaire de richesse par la possibilité qu'elle offre d'observer la classe *NPO* sous deux angles différents.

Même si nous travaillons essentiellement avec la mesure différentielle, ce travail expose

alternativement des résultats relatifs à un rapport puis à l'autre; aussi attirons-nous l'attention du lecteur sur ce point, car il devra se montrer prudent quant à l'interprétation des résultats en fonction qu'ils soient énoncés pour une mesure ou pour l'autre.

Ce qui va être présenté

Après une brève mise en conditions par une présentation succincte du monde de l'approximation polynomiale, nous passons dans le vif du sujet en discutant tout d'abord des optima locaux puis en s'intéressant au problème de voyageur de commerce. Ce sont là deux attitudes bien différentes puisque dans le premier cas, il s'agit de pénétrer dans la nature du problème pour étudier sa réaction sous un traitement générique donné, tandis que dans le second, on fait subir au problème de voyageur de commerce un traitement bien particulier au travers d'un algorithme spécifique.

Nous avons déjà discuté de l'approche locale et de l'attachement à trouver des voisinages pour lesquels tout optimum local garantirait un certain niveau de performance; nous avons peu dit en revanche du voyageur de commerce, et nous nous contenterons d'ailleurs pour l'instant de rappeler à quel point c'est un problème central, très présent en tant que cas général, cas particulier ou encore problème proche au sens de la réduction des problèmes réels à traiter.

Chapitre 2

Préliminaires

2.1 Les problèmes

2.1.1 Qu'est-ce qu'un problème de *NPO* ?

Les problèmes d'optimisation que l'on s'attache à résoudre sont le pendant *optimisation* des problèmes de décision de *NP*. Un problème Π est caractérisé par l'ensemble I_Π de ses instances, l'union $Sol_\Pi = \cup_{I \in I_\Pi}$ des ensembles $Sol_\Pi(I)$ des solutions réalisables associées aux instances I , de la fonction à optimiser m_Π sur ces ensembles et du sens opt_Π de l'optimisation (*maximisation* ou *minimisation*). Par la suite, on notera $|I|$ la taille de l'instance I .

Définition 2.1. *NPO*

Un problème Π de *NPO* est un quadruplet $(I_\Pi, Sol_\Pi, m_\Pi, opt_\Pi)$ qui vérifie :

- (i) I_Π est reconnaissable en temps polynomial en $|I|$
- (ii) $\exists p_\Pi$ polynôme *t.q.* $\forall I \in I_\Pi, \forall s \in Sol_\Pi(I), |s| \leq p_\Pi(|I|)$
- (iii) $\forall I, \forall s$, on sait décider en temps polynomial en $|I|$ si s est réalisable pour I ;
- (iv) $m_\Pi : I_\Pi \times Sol_\Pi \rightarrow \mathbb{N}$ est calculable en temps polynomial en $|I|$;
- (v) $opt_\Pi \in \{\min, \max\}$.

Une instance d'un problème est caractérisée par des objets d'une certaine structure en relation entre eux et des valeurs numériques ; on notera X l'ensemble des objets, $\mathcal{R}(X)$ l'ensemble des relations sur ces objets et D l'ensemble des valeurs numériques. Prenons pour exemple le problème de stable maximum pondéré, *Max WIS*. Une instance $I = (G(V, E), d)$ de *Max WIS* a pour ensemble d'objets l'ensemble des sommets $X = V$, comme relation sur ces objets l'ensemble des arêtes $\mathcal{R}(X) = \{E\}$, et comme ensemble de valeurs numériques le vecteur d des valuations des sommets $D = \{d_u\}_{u \in V}$.

À la définition précédente nous apportons deux modifications couramment faites dans la littérature. D'une part, il est toujours possible de supposer qu'il existe un codage binaire des données du problème qui soit raisonnable et de fait, que les variables du problème soient à valeur dans $\{0, 1\}$; c'est ce que nous ferons, pour une plus grande clarté des concepts manipulés. La taille $|I|$ d'une instance I , qui n'est autre que l'espace mémoire nécessaire au stockage des données avec un ordinateur usuel, est ainsi donnée, à un coefficient constant près, par $|X| + \log(d_{max})$ où $d_{max} = \max_{|d| \in D} \{d\}$. Le codage de I nécessite effectivement $\mathcal{O}(|X|)$ espaces élémentaires pour les objets (toute structure est de taille finie) et $\mathcal{O}(\log(|d|))$ espaces pour chaque donnée numérique d en codage binaire par exemple. Toutefois, on omet souvent, et nous le ferons également dans ce document, de mentionner d_{max} lorsque l'on évoque la taille de l'instance; c'est que l'on fait alors l'hypothèse implicite que la complexité est donnée par le nombre d'objets, soit que le nombre d'objets est d'ordre supérieur au logarithme de la plus grande constante: $d_{max} = \mathcal{O}(\exp^{p(|X|)})$ où p est un polynôme.

D'autre part, on s'attache à résoudre des problèmes certes difficiles mais on se limitera tout de même aux problèmes pour lesquels on sait au moins déterminer une solution réalisable en temps polynomial! Cette solution sera appelée solution triviale et notée $triv_{\Pi}(I)$ pour toute instance I d'un problème Π .

Cela nous amène à la définition suivante de NPO , qui aura cours dorénavant dans ce document.

Définition 2.2. NPO , définition alternative ([42])

Un problème Π de NPO est un quadruplet $(I_{\Pi}, Sol_{\Pi}, m_{\Pi}, opt_{\Pi})$ qui vérifie:

- les conditions (i), (iii), (iv) et (v) de la définition 2.1
- (ii') $\exists p_{\Pi}$ polynôme $t.q. \forall I \in I_{\Pi}, Sol_{\Pi}(I) \subseteq \{0, 1\}^{p_{\Pi}(|I|)}$,
- (vi) $\forall I \in I_{\Pi}$, on sait déterminer une solution $triv_{\Pi}(I)$ en temps polynomial en $|I|$.

La condition (ii'), par la spécification qu'elle propose de la forme des solutions, permet une expression à la fois simple et claire des concepts à définir, des propriétés à mettre en évidence. L'exigence d'une solution en temps polynomial se justifie quant à elle par le fait que l'on s'intéresse à des problèmes potentiellement approximables, c'est-à-dire dont on ne peut affirmer a priori qu'ils ne le soient pas!

Reprenant l'exemple précédent et conformément à la définition 2.2, le problème $Max\ WIS$ revient à indiquer pour chaque sommet par un opérateur binaire s'il est ou non intégré à la solution ($Sol_{WIS}(I) = \{0, 1\}^{|V|}$) et une affection s est réalisable si deux sommets pris dans la solution ne sont pas adjacents, soit si le vecteur s vérifie " $s_i.s_j = 1 \Rightarrow s_i.s_j \notin E$ ", ce qui peut

se vérifier en temps $|V|^2$. Quant à la valeur d'une solution, donnée par $m_{WIS}(I, s) = d \cdot s$, elle se calcule en un temps au plus $\log(d_{max}) \times |V|$. Enfin, l'ensemble vide constitue une solution triviale pour toute instance du problème.

2.1.2 Définitions indispensables

Nous l'avons évoqué en introduction, étant donnée une instance I d'un problème, deux valeurs particulières nous intéressent pour la résolution de I : celles de la meilleure et de la pire solution.

Définition 2.3. Le meilleur et le pire

Soient Π un problème de NPO et I une instance de Π , on définit les valeurs $\beta_{\Pi}(I)$ et $\omega_{\Pi}(I)$ par

$$\beta_{\Pi}(I) = \underset{s \in Sol_{\Pi}(I)}{opt_{\Pi}} \{m_{\Pi}(I, s)\} \quad \text{et} \quad \omega_{\Pi}(I) = \overline{opt_{\Pi}} \{m_{\Pi}(I, s)\}^1.$$

Définissons encore deux notions fort utiles dans le cadre de l'approximation.

Définition 2.4. Support

Soit Π un problème de NPO , le support $\text{supp}_{\Pi}(I)$ d'une instance I de Π mesure le nombre de valeurs que peuvent prendre les solutions de I :

$$\text{supp}_{\Pi}(I) = |\{m_{\Pi}(I, s) : s \in Sol_{\Pi}(I)\}|.$$

Définition 2.5. Diamètre

Soit Π un problème de NPO , le diamètre $\text{diam}_{\Pi}(I)$ d'une instance I de Π mesure l'amplitude des valeurs possibles :

$$\text{diam}_{\Pi}(I) = |\omega_{\Pi}(I) - \beta_{\Pi}(I)|.$$

Enfin, nous introduisons la classe $NPO - PB$ des problèmes polynomialement bornés de NP , famille à laquelle il est fréquent de se restreindre : c'est notamment le cas des classes GLO (cf. paragraphe 3.2) et $Max NP_0$ (cf. paragraphe 2.5.1) dans lesquelles ce travail puise nombre des problèmes qu'il traite.

Définition 2.6.

$$\forall \Pi \in NPO, \Pi \in NPO - PB \Leftrightarrow \exists q_{\Pi} \text{ polynôme} / \forall I \in I_{\Pi}, \max\{\omega_{\Pi}(I), \beta_{\Pi}(I)\} \leq q_{\Pi}(|I|).$$

1. $\forall \Pi \in NPO, (opt_{\Pi} = \max \Rightarrow \overline{opt_{\Pi}} = \min) \wedge (opt_{\Pi} = \min \Rightarrow \overline{opt_{\Pi}} = \max)$

2.2 Leur résolution

L'idéal serait de savoir résoudre les problèmes de NPO en temps polynomial; malheureusement, la présomption est forte de penser que $P \neq NP$ ou encore $PO \neq NPO$ où PO , version optimisation de la classe P , désigne l'ensemble des problèmes de NPO que l'on sait résoudre en temps polynomial. C'est pourquoi on essaie d'approcher seulement, mais au mieux, ces problèmes difficiles.

2.2.1 La mission de l'approximation polynomiale

L'approximation polynomiale a pour mission de résoudre les problèmes selon les deux exigences :

- en terme de temps, de garantie d'une exécution rapide (complexité polynomiale des algorithmes),
- en terme de performance, de garantie d'un certain niveau d'approximation.

Car si on s'affranchit de la contrainte d'optimalité, on veut tout même être certain de la qualité des solutions offertes. Pour répondre à ces exigences, deux types d'actions sont menées :

- la conception d'algorithmes pertinents vis-à-vis de la mesure d'approximation pour obtenir de bonnes solutions approchées,
- l'analyse de tels algorithmes approchés.

Le travail se situe effectivement tant au niveau de la construction qu'à celui de l'analyse de ce que l'on construit et cette analyse réside essentiellement en l'étude des propriétés structurelles des problèmes que l'on traite : c'est là le cœur de notre discipline.

2.2.2 Son arme

Un algorithme approché n'est ni plus ni moins qu'un algorithme qui donne une solution réalisable au problème posé. Un tel algorithme est polynomial s'il se déroule pour toute instance en un temps polynomial en la taille de l'instance.

Définition 2.7. *PTAA (Polynomial Time Approximate Algorithm)* - Algorithme polynomial approché

Un algorithme \mathcal{A} est polynomial approché pour le problème Π s'il existe un polynôme $p_{\mathcal{A}}$ tel que \mathcal{A} produit pour toute instance I de Π une solution $\mathcal{A}(I)$ en un temps au plus $p_{\mathcal{A}}(|I|)$.

2.3 Leur évaluation

2.3.1 Fer de lance de l'approximation polynomiale : le rapport classique

L'estimation de la qualité d'un algorithme est faite à l'aide de rapports d'approximation. Le rapport classique, qui est celui sur lequel se fonde l'essentiel de la théorie de l'approximation polynomiale, est assez intuitif : il consiste à comparer la valeur de la solution donnée par l'algorithme à la valeur de l'optimum. Il s'agit bien d'une estimation de ce rapport, puisque l'optimum n'est pas connu a priori. Conformément à la philosophie de l'approximation polynomiale *au pire des cas*, qui se donne pour mission d'établir des *garanties absolues* sur la qualité des solutions fournies, l'algorithme sera jugé sur sa plus mauvaise performance.

Soit Π un problème de *NPO* et \mathcal{A} un algorithme approché pour Π , on notera respectivement pour une instance I de ce problème $\lambda_{\mathcal{A}}(I)$, $\beta_{\Pi}(I)$ et $\omega_{\Pi}(I)$ les valeurs de la solution donnée par l'algorithme \mathcal{A} , de l'optimum et de la pire solution sur I . La qualité d'une solution approchée, en approximation classique, serait donc donnée par l'estimation du rapport $\rho_{\Pi}^{\mathcal{A}}(I) = \lambda_{\mathcal{A}}(I)/\beta_{\Pi}(I)$. Pour un problème de minimisation, on a $\rho_{\Pi}^{\mathcal{A}}(I) \in [1, +\infty[$ ($\lambda_{\mathcal{A}}(I) \geq \beta_{\Pi}(I)$), tandis que pour un problème de maximisation, $\rho_{\Pi}^{\mathcal{A}}(I)$ est à valeur dans l'intervalle $[0, 1]$ ($\lambda_{\mathcal{A}}(I) \leq \beta_{\Pi}(I)$). Dans tous les cas, plus on se rapproche de l'optimum et plus le rapport se rapproche de 1. Il est cependant préférable par soucis d'homogénéité de ramener tous les rapports dans un intervalle $[0, 1]$: on prendra ainsi pour les problèmes de minimisation l'inverse de ce rapport.

Définition 2.8. Rapport classique

Soient Π un problème de *NPO* et \mathcal{A} un algorithme approché pour Π ,

la performance de \mathcal{A} sur une instance I est donnée par :

$$\begin{aligned} \rho_{\Pi}^{\mathcal{A}}(I) &= \lambda_{\mathcal{A}}(I)/\beta_{\Pi}(I) && \text{si } \Pi \text{ est un problème de maximisation,} \\ \rho_{\Pi}^{\mathcal{A}}(I) &= \beta_{\Pi}(I)/\lambda_{\mathcal{A}}(I) && \text{si } \Pi \text{ est un problème de minimisation ;} \end{aligned}$$

et la performance de \mathcal{A} pour Π par :

$$\rho_{\Pi}^{\mathcal{A}} = \inf_{I \in I_{\Pi}} \{\rho_{\Pi}^{\mathcal{A}}(I)\}.$$

Si $\rho_{\Pi}^{\mathcal{A}} \geq r$, on dira que l'algorithme \mathcal{A} est r -approché pour Π au sens de la mesure classique. La difficulté est de trouver, pour un algorithme donné, un majorant r le plus fin possible du rapport d'approximation : c'est le travail d'analyse des algorithmes proposés.

2.3.2 Une alternative : le rapport différentiel

Le rapport différentiel, moins communément usité mais qui a déjà donné lieu à des résultats convaincants, se réfère à deux points de repère : l'optimum, mais aussi la pire des solutions. La valeur λ de toute solution, comprise sur l'intervalle $[\beta_{\Pi}(I), \omega_{\Pi}(I)]$, est la combinaison convexe des deux valeurs $\omega_{\Pi}(I)$ et $\beta_{\Pi}(I)$: il y a toujours un réel $\delta \in [0, 1]$ tel que $\lambda = \delta\beta_{\Pi}(I) + (1 - \delta)\omega_{\Pi}(I)$. Le but de l'approximation différentielle, c'est naturellement de se rapprocher au maximum de $\beta_{\Pi}(I)$ ou de s'éloigner au maximum de $\omega_{\Pi}(I)$, avec un coefficient δ le plus proche de 1 possible. Ainsi, on ne compare pas la valeur de la solution à celle de l'optimum, mais le chemin déjà parcouru depuis la pire solution à l'étendue des valeurs possibles, donnée par le diamètre $diam_{\Pi}(I) = |\beta_{\Pi}(I) - \omega_{\Pi}(I)|$. La qualité d'une solution approchée $\mathcal{A}(I)$, en approximation différentielle, serait donc donnée par l'estimation du rapport $\delta_{\Pi}^{\mathcal{A}}(I) = (\omega_{\Pi}(I) - \lambda_{\mathcal{A}}(I)) / (\omega_{\Pi}(I) - \beta_{\Pi}(I))$.

Du point de vue méthodologique, ce rapport se justifie de lui-même : c'est, comme pour le rapport classique, une mesure assez intuitive. L'intérêt que les chercheurs ont porté à ce rapport n'est cependant pas innocent mais motivé puisqu'il répond, comme nous l'avons annoncé en introduction, à certaines exigences de stabilité du rapport de performance sous transformation affine de la fonction objectif : c'est ce que nous présentons au paragraphe 2.7.

Définition 2.9. Rapport différentiel

Soit Π un problème de *NPO* et \mathcal{A} un algorithme approché pour Π ,

la performance de \mathcal{A} sur une instance I est donnée par le rapport : $\delta_{\Pi}^{\mathcal{A}}(I) = \frac{\omega_{\Pi}(I) - \lambda_{\mathcal{A}}(I)}{\omega_{\Pi}(I) - \beta_{\Pi}(I)}$;

et la performance de \mathcal{A} pour Π par : $\delta_{\Pi}^{\mathcal{A}}(\Pi) = \inf_{I \in I_{\Pi}} \{\delta_{\Pi}^{\mathcal{A}}(I)\}$.

Si $\delta_{\Pi}^{\mathcal{A}} \geq r$, on dira que l'algorithme \mathcal{A} est r -approché pour Π au sens de la mesure différentielle.

2.3.3 L'erreur

Plutôt que les rapports d'approximation dont on vient de discourir, il peut parfois être intéressant de considérer l'erreur relative, qui rapporte la distance à l'optimum à la valeur optimale en théorie classique, la distance à l'optimum au diamètre dans le cadre différentiel : en classique comme en différentiel, le rapport et l'erreur sont deux façons différentes de mesurer la même chose. Le rapport traduit la volonté de maximiser le gain (*valeur de la*

solution ou distance à la pire solution) tandis que l'erreur fait référence à la minimisation de la perte (*distance à l'optimum*). Le but est donc de trouver des algorithmes garantissant un rapport le plus proche de 1, une erreur la plus proche de 0 possible.

Définition 2.10. Erreur relative

Soient Π un problème de *NPO* et \mathcal{A} un algorithme approché pour Π , l'erreur relative de \mathcal{A} sur une instance I , respectivement pour la mesure classique et la mesure différentielle, est donnée par les rapports :

$$\varepsilon_{\Pi}^{\mathcal{A}}(I) = 1 - \rho_{\Pi}^{\mathcal{A}}(I) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\beta_{\Pi}(I) - \lambda_{\mathcal{A}}(I)}{\beta_{\Pi}(I)} \text{ si } opt_{\Pi} = \max, \\ \frac{\lambda_{\mathcal{A}}(I) - \beta_{\Pi}(I)}{\lambda_{\mathcal{A}}(I)} \text{ sinon} \end{array} \right\}$$

$$\text{et } \eta_{\Pi}^{\mathcal{A}}(I) = 1 - \delta_{\Pi}^{\mathcal{A}}(I) = \frac{|\lambda_{\mathcal{A}}(I) - \beta_{\Pi}(I)|}{|\omega_{\Pi}(I) - \beta_{\Pi}(I)|}.$$

Pour les deux rapports, l'erreur est toujours à valeur dans l'intervalle $[0, 1]$.

Avec ces algorithmes approchés et l'évaluation de leur comportement sur différents problèmes ont naturellement émergé des classes d'approximation qui regroupent les problèmes de *NPO* selon leur degré d'approximabilité : c'est ce que nous proposons d'évoquer à présent.

2.4 Degrés d'approximation

Par la suite, R désignera un rapport d'approximation, classique ou différentiel. Notons cependant que la hiérarchie et le sens des classes définies ci-après sont indépendants de l'évaluation choisie, rapport ou toute autre mesure de la performance des algorithmes.

2.4.1 Approximation à rapport constant r_0

Définition 2.11. $APX[R]$: classe des problèmes approximables à rapport constant

Un problème Π est dans $APX[R]$ s'il existe un algorithme polynomial approché \mathcal{A} pour Π et une constante r_0 dans $]0, 1]$ tels que

$$R_{\mathcal{A}}(\Pi) \geq r_0.$$

Par convention, on note APX l'ensemble des problèmes approximables à rapport constant pour le rapport classique et $APX[\delta]$ l'ensemble des problèmes approximables à rapport constant pour le rapport différentiel. C'est à l'intérieur de ces deux classes que se situera l'essentiel de notre travail.

2.4.2 Approximation à r , r aussi proche de 1 que l'on veut

Définition 2.12. Schéma d'approximation

Un schéma d'approximation pour un problème Π est une famille de *PTAA* $(\mathcal{A}_r)_{0 \leq r < 1}$ qui vérifie

$$\forall r \in [0, 1[, R_{\mathcal{A}_r}(\Pi) \geq r.$$

Définition 2.13. *PTAS*[R] : schéma polynomial en la taille de l'instance

Un problème Π est dans *PTAS*[R] s'il admet un schéma d'approximation $(\mathcal{A}_r)_{0 \leq r < 1}$ dont la complexité C vérifie

$$\forall I, \forall r, C(\mathcal{A}_r(I)) = p_r(|I|) \quad (\text{le degré de } p_r \text{ dépend de } r).$$

La famille $(\mathcal{A}_r)_{0 \leq r < 1}$ constitue alors un schéma d'approximation polynomial. Les classes *PTAS* et *PTAS*[δ] regroupent respectivement les problèmes qui admettent un schéma d'approximation polynomial pour les rapports classique et différentiel.

Définition 2.14. *FPTAS*[R] : schéma polynomial en la qualité de l'approximation

Un problème Π est dans *FPTAS*[R] s'il admet un schéma d'approximation polynomial $(\mathcal{A}_r)_{0 \leq r < 1}$ de complexité C vérifiant

$$\forall I, \forall r, C(\mathcal{A}_r(I)) = p(|I|, \frac{1}{1-r}) \quad (p \text{ est polynomial en } |I| \text{ et en } \frac{1}{1-r}).$$

La famille $(\mathcal{A}_r)_{0 \leq r < 1}$ constitue alors un schéma d'approximation complètement polynomial. *FPTAS* et *FPTAS*[δ] désignent respectivement les classes des problèmes qui admettent un schéma d'approximation complètement polynomial pour les rapports classique et différentiel.

2.5 Définition logique

Dans [74], Papadimitriou et Yannakakis choisissent un nouvel angle, celui du formalisme logique, pour étudier les qualités d'approximation des problèmes de *NPO* : c'est la naissance des classes *Max NP* et *Max SNP*. Ce formalisme s'appuie sur la définition syntaxique de *NP* proposée par Fagin dans [37]. Nous donnons ici la définition de ces classes, sans vraiment approfondir les aspects logiques ; aussi conseillons-nous vivement au lecteur de se référer aux ouvrages précités.

2.5.1 *Max NP*₀

Définition 2.15. Type similaire fini

Un type similaire fini \mathcal{T} est la donnée d'un k -uplet $(n_1, \dots, n_i, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ pour k fini.

Définition 2.16. Structure finie

Une structure finie $S = (U; R)$ sur un type similaire fini $\mathcal{S} = (n_1, \dots, n_i, \dots, n_k)$ est la donnée d'un ensemble fini U appelé univers et d'un ensemble $R = (r_1, \dots, r_i, \dots, r_k)$ de k relations sur U vérifiant pour tout i : $r_i \subseteq U^{n_i}$. S est qualifiée de \mathcal{S} -structure finie.

Exemple 2.1. Un graphe $G(V, E)$ est une structure finie sur le type similaire fini $\mathcal{S} = (2)$, ayant pour univers l'ensemble V et pour seule relation l'ensemble E sur V^2 .

Définition 2.17. *Max NP₀*

Un problème Π de maximisation de NP est dans la classe *Max NP₀* s'il existe deux types similaires finis \mathcal{I} et \mathcal{S} , une formule ϕ du premier ordre sans quantificateur et deux constantes k et ℓ , tels que les optima de Π peuvent être exprimés sous la forme :

$$\beta_{\Pi}(I) = \max_S |\{x \in U^k / \exists y \in U^\ell, \phi(I, S, x, y)\}|$$

où I est une \mathcal{I} -structure finie d'univers U et S une \mathcal{S} -structure finie de même univers U .

La structure I décrit les instances du problème Π , la structure S les solutions sur I , la formule ϕ les conditions de réalisabilité des solutions du problème.

Exemple 2.2. Max Sat

Une instance $I = (X, C)$ du problème *Max Sat* est la donnée d'un ensemble $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de variables binaires et d'un ensemble $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ de clauses disjonctives construites sur l'ensemble $L = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cup \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$ des littéraux. Une solution est une affectation T des variables x_i à 0 ou à 1 et le problème consiste à déterminer une telle affectation qui satisfasse un nombre maximum de clauses :

$$\beta_{\Pi}(I) = \max_{T \in \{0,1\}^n} |\{i = 1, \dots, m / T \text{ valide } c_i\}|.$$

Associons aux ensembles X et C les ensembles de variables U_X et U_C et considérons l'univers fini $U = U_X \cup U_C$. Toute instance I peut être décrite de façon synthétique par les relations binaires p et n sur $U_X \times U_C$ définies par " $p(x, c) \Leftrightarrow x \in c$ " et " $n(x, c) \Leftrightarrow \bar{x} \in c$ " qui traduisent la présence des littéraux dans les clauses ; quant aux solutions T , elle ne sont rien de plus qu'une relation unaire sur U_X . Ainsi, pour les types similaires finis $\mathcal{I} = (2, 2)$ et $\mathcal{S} = (1)$, tout optimum de *Max Sat* peut s'écrire de la façon suivante :

$$\beta(U; p, n) = \max_T |\{c \in U / \exists x \in U, (p(x, c) \wedge T(x)) \vee (n(x, c) \wedge \neg T(x))\}|.$$

Remarque 2.1. Telle qu'elle est définie, la classe *Max NP₀* regroupe naturellement des problèmes polynomialement bornés de *NPO* :

$$\text{Max NP}_0 \subseteq \text{NPO} - \text{PB}.$$

2.5.2 *Max SNP₀*

Définition 2.18. *Max SNP₀*

Un problème Π de maximisation de *NPO* est dans la classe *Max SNP₀* s'il existe deux types similaires finis \mathcal{I} et \mathcal{S} , une formule ϕ du premier ordre sans quantificateur et une constante k , tels que les optima de Π peuvent être exprimés sous la forme :

$$\beta_{\Pi}(I) = \max_{\mathcal{S}} |\{x \in U^k / \phi(I, \mathcal{S}, x)\}|$$

où I et \mathcal{S} sont respectivement une \mathcal{I} et une \mathcal{S} -structures finies d'univers U .

Exemple 2.3. Max IS – B

Le problème *Max IS – B* est la restriction du problème de stable maximum à des graphes de degré borné par B , c'est-à-dire que tout sommet aura au plus B voisins. Dans le cas général, décrivant un graphe G par son ensemble d'arêtes, la problème de stabilité maximum peut s'écrire :

$$\beta(V; E) = \max_{W \subseteq V} |\{w \in V / W(w) \wedge (\forall v \in V, E(v, w) \Rightarrow \neg W(v))\}|$$

où V désigne l'ensemble des sommets de G . Cette formulation faisant intervenir un quantificateur dans le prédicat, elle ne permet pas d'établir l'appartenance de *Max IS* à *Max SNP*, et d'ailleurs le problème de stabilité maximum n'appartient même pas à la classe *Max NP*. En revanche, dans le cas de degrés bornés par B , il devient possible d'observer G non plus par son ensemble d'arêtes, mais par l'ensemble des listes d'adjacence de ses sommets : soit le type similaire fini $\mathcal{I} = (B + 1)$, un graphe G n'est autre que la donnée d'un ensemble V de sommets (l'univers) et d'une relation $\Gamma : V^{B+1} \rightarrow \{0, 1\}$ (structure finie d'univers V sur \mathcal{I}) définie par $\Gamma(w, v_1, \dots, v_B) = 1$ si et seulement si $\{v_1, \dots, v_B\}$ est bien l'ensemble des sommets adjacents au sommet w (si v a moins de B sommets, on duplique l'un de ses voisins). Alors le problème s'écrit :

$$\beta(V; \Gamma) = \max_W |\{(w, v_1, \dots, v_B) \in V^{B+1} / W(w) \wedge (\neg W(v_1) \wedge \dots \wedge \neg W(v_B))\}|$$

où W est un sous-ensemble de sommets (\mathcal{S} -structure finie d'univers V pour le type fini $\mathcal{S}=(1)$). De toute solution W on déduit le sous-ensemble stable $W' \subseteq W$ des sommets w de W qui vérifient avec leur liste d'adjacence la formule ϕ associée

$$W(w) \wedge (\neg W(v_1) \wedge \dots \wedge \neg W(v_B)),$$

à tout stable correspond l'affectation qui met à 1 les sommets du stable, à 0 tout autre sommet : il y a bien coïncidence entre les valeurs de la cardinalité d'un ensemble stable et de son évaluation logique.

Exemple 2.4. Max E - k - Sat

Si le problème *Max Sat* est dans *Max NP*, sa restriction *Max E - k - Sat* à des clauses de taille précisément k est dans la classe *Max SNP* : la constance de la taille des clauses permet effectivement de décrire de façon exhaustive les formes des clauses selon l'alternance de littéraux positifs (x_i) et négatifs (\bar{x}_i) qu'elles contiennent, ainsi que les cas de satisfaction de chacune de ces formes. Parce qu'on est en mesure d'explicitier chaque forme de clause par une relation particulière, le quantificateur existentiel disparaît. Nous faisons la preuve pour $k = 2$, mais celle-ci est naturellement généralisable à toute constante k .

Soit X un ensemble de n variables booléennes, une clause de *Max E - 2 - Sat* sur X peut être de l'une des quatre formes suivantes :

$$(x_i, x_j), (x_i, \bar{x}_j), (\bar{x}_i, x_j) \text{ ou } (\bar{x}_i, \bar{x}_j), \forall (i < j) \in \{1, \dots, n\}.$$

Nous proposons alors la formulation logique suivante d'une instance $I = (X, C)$ du problème : sur l'univers $U = X \cup \{x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+4}\}$, l'ensemble C des clauses de I est décrit par les relations ternaires C_1, C_2, C_3 et C_4 définies par

$$\begin{aligned} C_1(x_i, x_j, x_h) &\Leftrightarrow (i < j) \wedge (h = n + 1) \wedge ((x_i, x_j) \in C) \\ C_2(x_i, x_j, x_h) &\Leftrightarrow (i < j) \wedge (h = n + 2) \wedge ((x_i, \bar{x}_j) \in C) \\ C_3(x_i, x_j, x_h) &\Leftrightarrow (i < j) \wedge (h = n + 3) \wedge ((\bar{x}_i, x_j) \in C) \\ C_4(x_i, x_j, x_h) &\Leftrightarrow (i < j) \wedge (h = n + 4) \wedge ((\bar{x}_i, \bar{x}_j) \in C). \end{aligned}$$

Ainsi, pour les types similaires finis $\mathcal{I} = (3, 3, 3, 3)$ et $\mathcal{S} = (1)$, tout optimum d'une instance de *Max 2 - E - Sat* peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\beta(U; C_1, C_2, C_3, C_4) = \max_T \left| \left\{ (x_i, x_j, x_h) \in U^3 / \begin{array}{l} (C_1(x_i, x_j, x_h) \wedge [T(x_i) \vee T(x_j)]) \\ \vee (C_2(x_i, x_j, x_h) \wedge [\neg T(x_i) \vee T(x_j)]) \\ \vee (C_3(x_i, x_j, x_h) \wedge [T(x_i) \vee \neg T(x_j)]) \\ \vee (C_4(x_i, x_j, x_h) \wedge [\neg T(x_i) \vee \neg T(x_j)]) \end{array} \right\} \right|.$$

Il est aisé de voir que chaque clause sera considérée une et une seule fois.

Pour un entier $k \geq 3$ quelconque, l'instance sera de façon similaire décrite par $\sum_{p=0}^k C_k^p = 2^k$ relations C_j où C_k^p compte pour p de 0 à k le nombre de possibilités pour le choix de p variables à mettre sous forme négative.

Les classes que nous venons d'évoquer sont exclusivement dédiées aux problèmes de maximisation, mais les définitions équivalentes existent naturellement pour les problèmes de minimisation, et même plus : il existe toute une hiérarchie de classes logiques en fonction du nombre de quantificateurs devant la formule du premier ordre ϕ et l'alternance de ceux-ci ; ces différentes classes, leurs liens et leur approximation sont notamment étudiées dans [63] et [64].

2.5.3 Logique et approximation

Ce ne sont pas exactement les classes $Max\ SNP_0$ et $Max\ NP_0$ qui sont étudiées en approximation mais des classes un peu plus grandes, $Max\ SNP$ et $Max\ NP$, qui contiennent en plus des problèmes de $Max\ SNP_0$ et $Max\ NP_0$ les problèmes de NPO qui se réduisent à un problème de la classe considérée par une certaine transformation qui préserve l'approximation, la L -réduction ; ainsi, $Max\ SNP$ et $Max\ NP$ sont des classes conjointement définies par la logique et le degré d'approximation. La L -réduction est une façon de transformer un problème Π en un problème Π' qui préserve les schémas d'approximation dont la définition est donnée au paragraphe 2.6.1. Notons que l'élargissement par réduction de la classe $Max\ SNP_0$ (*resp.* $Max\ NP_0$) à la classe $Max\ SNP$ (*resp.* $Max\ NP$) a notamment pour conséquence l'intégration de problèmes de minimisation :

Définition 2.19. $Max\ SNP$ et $Max\ NP$

$$\begin{aligned} \forall \Pi \in NPO, \quad \Pi \in Max\ NP &\Leftrightarrow (\Pi \in Max\ NP_0) \vee \left(\exists \Pi' \in Max\ NP_0 / \Pi \stackrel{L}{\propto} \Pi' \right) \\ \forall \Pi \in NPO, \quad \Pi \in Max\ SNP &\Leftrightarrow (\Pi \in Max\ SNP_0) \vee \left(\exists \Pi' \in Max\ SNP_0 / \Pi \stackrel{L}{\propto} \Pi' \right) . \end{aligned}$$

En fait, $Max\ SNP$ et $Max\ NP$ sont définies comme les fermetures $\overline{Max\ SNP_0^L}$ et $\overline{Max\ NP_0^L}$ des classes logiques $Max\ SNP_0$ et $Max\ NP_0$ sous la L -réduction. Par exemple, les problèmes $Min\ VC-B$, $Min\ DS-B$, ou encore $Max\ Cut$ sont des problèmes de $Max\ SNP$ [74].

Papadimitriou et Yannakakis, avec la classe logique $Max\ SNP$, ont en quelque sorte exhibé une classe médiane entre $PTAS$ et APX dans le sens où tout problème de $Max\ SNP_0$ est approximable à rapport constant et que certains de ses problèmes, s'ils admettent un schéma d'approximation, induisent un schéma d'approximation sur tout problème de la classe. Les auteurs démontrent l'inclusion de $Max\ SNP_0$ dans APX en proposant un algorithme approché générique pour la classe $Max\ SNP_0$, puis la complétude de $Max\ 3-Sat$ à l'aide d'une transformation générique d'une instance de tout problème de la classe en une

instance de *Max 3 – Sat*. Ils font également la preuve de la complétude d’autres problèmes tels *Max IS – B* (problème du stable à degré borné), *Max Cut* (problème de coupe maximum dans un graphe) ou encore *Max 2 – Sat*, par réduction simple à partir de *Max 3 – Sat*. Depuis, dans [60], les égalités ensemblistes

$$\overline{Max SNP_0}^E = APX - PB \text{ et } \overline{Max SNP_0}^P = APX$$

ont été établies (utilisant notamment le résultat $\overline{APX - PB}^P = APX$ de Crescenzi et Trevisan [29]) : cela nous apprend, entre autre, qu’il existe une P -réduction de tout problème approximable à rapport constant à un problème de la classe *Max SNP₀*.

Concernant *Max NP* et son approximabilité, on peut citer l’inclusion de *Max NP₀* dans *APX*, fait démontré dans [74] par le biais des mêmes arguments que pour l’inclusion de *Max SNP₀* dans *APX* ; du point de vue de la complétude, les auteurs ne parviennent pas à un résultat aussi fort que pour *Max SNP*, puisqu’ils réduisent la classe par L -réduction à toute une famille de sous-problèmes de satisfaisabilité, mais non pas un seul problème de la classe : tout problème de la *Max NP₀* est L -réductible à un problème *Max G Sat(B)* (*Generalized Satisfiability*) pour une certaine constante B , malheureusement dépendante du problème considéré ; cela induit cependant la complétude du problème général *Max Sat*. Nous citerons enfin le résultat de classe proposé par Crescenzi dans [29] et qui stipule que la fermeture sous la P -réduction coïncide également avec *APX* :

$$\overline{Max NP_0}^P = APX.$$

Cela induit notamment que tout problème de *Max NP₀* ou s’y réduisant par une P -réduction est approximable à rapport constant.

Après les résultats de complétude, d’une incontestable richesse quant à l’approximabilité (ou plutôt la non approximabilité) des problèmes, les classes *Max SNP* et *Max NP* auront donc également apporté une caractérisation syntaxique des classes d’approximation. Pour le lecteur non averti, ces résultats seront à nouveau évoqués à l’occasion du paragraphe suivant où les notions utiles à leur compréhension auront été présentées.

Notons pour conclure cet intermède logique la flagrante asymétrie entre les classes de *maximisation* et de *minimisation* : si *Min Σ₀* désigne le pendant *minimisation* de *Max SNP₀ = Max Σ₀*, le problème *Min 3 – CCSP* qui cherche à satisfaire un nombre maximum de clauses conjonctives de taille au plus 3 (*i.e.* de la forme ℓ_1 , $\ell_1 \wedge \ell_2$ ou $\ell_1 \wedge \ell_2 \wedge \ell_3$) est clairement élément de la classe, par une représentation similaire à celle proposée pour *Max E – k – Sat*.

Or, Kolaitis et Thakur montrent dans [63] que $Min\ 3 - CCSP$ est $Min\ \Sigma_0$ -complet pour la P -réduction (comme $Max\ 3 - Sat$ pour $Max\ \Sigma_0$), mais non approximable à rapport constant (tandis que $Max\ 3 - Sat$ est à ce jour approximé à $1/1.249 \geq 0,8$ [6]); en montrant dans [61] la $NPO - PB$ -complétude de $Min\ 3 - CCSP$ relativement aux E -réductions, Klauck fait la preuve de l'inclusion de tout $NPO - PB$ dans $\overline{Min\ \Sigma_0}^P$.

2.6 Effets de classe

2.6.1 Le principe de réduction

Dans une volonté d'unification des travaux proposés au sujet des réductions et d'homogénéisation des notations, nous utiliserons parfois des sigles non conventionnels pour désigner les réductions; nous n'avons cependant pas l'ambition de présenter quelque chose de nouveau. Le principe de réduction d'un problème Π à un problème Π' consiste à regarder, modulo une petite transformation, le problème Π comme un cas particulier de Π' . Si la transformation est polynomiale et que l'on sait résoudre ou approximer Π' en temps polynomial, on saura alors résoudre ou approcher Π à son tour, toujours en temps polynomial. La réduction est ainsi un moyen de transporter un résultat d'approximation ou de résolution exacte d'un problème à un autre; elle est de la même façon un outil de classement des problèmes selon le niveau de difficulté de leur résolution. Il y a eu, au cours du développement de la théorie de la complexité, grand nombre de définitions de réductions, selon ce qu'on voulait préserver, transporter, d'un problème à l'autre (décision ou optimisation, construction ou évaluation, rapport d'évaluation, structure du problème, ...). Mais on retrouve, à la base de toute réduction, les mêmes principes fondamentaux. Ce sont ces principes que nous désirons présenter, au travers l'étude des réductions polynomiales constructives.

Réduction polynomiale

Une réduction d'un problème Π à un problème Π' est la donnée d'une fonction f qui permet de construire à partir d'une instance I de Π une instance $f(I)$ de Π' et d'une fonction g qui détermine à partir d'une solution s' d'une instance $f(I)$ une solution $s = g(s')$ de l'instance initiale I . Dans le cadre de l'étude des problèmes de NPO , on demandera aux transformations f et g d'être de complexité polynomiale en la taille de l'instance.

Définition 2.20. Réduction

Une réduction d'un problème Π à un problème Π' de NPO est la donnée d'un couple

$\mathcal{R} = (f, g)$ défini par :

$$\begin{array}{ll} f : I_{\Pi} \rightarrow I_{\Pi'}, & g : Sol_{\Pi'}(f(I_{\Pi})) \rightarrow Sol_{\Pi}, \\ I \mapsto I' & s' \in Sol_{\Pi'}(f(I)) \mapsto s \in Sol_{\Pi}(I) \end{array}$$

et pour lequel il existe deux polynôme p_f et p_g qui vérifient pour toute instance I de I_{Π} les propriétés :

- (i) $f(I)$ se construit en temps $p_f(|I|)$
- (ii) $\forall s' \in Sol_{\Pi'}(f(I)), g(s')$ se construit en temps $p_g(|f(I)|)$.

Notons par soucis d'exhaustivité que cette définition reste valide pour toute exigence de complexité (langages décidables, algorithmes pseudo-polynomiaux...).

Une réduction permet donc de déterminer à l'aide de la fonction g des solutions pour I à partir de solutions sur $f(I)$. Selon l'espace de problèmes dans lequel on se situe et les niveaux de résolution que l'on veut pouvoir transporter d'un problème à un autre, certaines propriétés seront réclamées au couple de fonctions (f, g) . Dans l'espace NPO des problèmes d'optimisation, on doit préserver l'optimalité ou du moins un certain niveau de performance. Pour la résolution exacte, il faut pouvoir transporter une solution optimale de l'instance image à l'instance initiale.

Réduction préservant l'optimalité

Afin d'éviter d'avoir à préciser les sens d'optimisation des problèmes manipulés, nous utiliserons par la suite les signes \succeq (*resp.* \succ) pour signifier qu'une solution est au moins aussi bonne (*resp.* strictement meilleure) qu'une autre.²

Définition 2.21. *PO-réduction, réduction de Cook [26]*

Soient Π et Π' deux problèmes de NPO , on dit que Π se *PO-réduit* à Π' et on note $\Pi \overset{PO}{\propto} \Pi'$ s'il existe une réduction $\mathcal{R} = (f, g)$ de Π à Π' qui vérifie :

$$s'^* \text{ optimale pour } f(I) \Rightarrow g(s'^*) \text{ optimale pour } I.$$

Proposition 2.1.

$$\forall (\Pi, \Pi') \in NPO, (\Pi \overset{PO}{\propto} \Pi') \wedge (\Pi' \in PO) \Rightarrow \Pi \in PO$$

2. $opt_{\Pi} = \min \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{"} \succeq \text{"} = \text{"} \leq \text{"} \\ \text{"} \succ \text{"} = \text{"} < \text{"} \end{array} \right. \quad opt_{\Pi} = \max \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{"} \succeq \text{"} = \text{"} \geq \text{"} \\ \text{"} \succ \text{"} = \text{"} > \text{"} \end{array} \right. .$

Il existe différentes façons de construire une telle réduction et notamment celle consistant à imposer à la réduction \mathcal{R} d'être à la fois monotone et surjective.

Définition 2.22. Réduction monotone *pour préserver la valeur relative des solutions*
Une réduction $\mathcal{R} = (f, g)$ est monotone si elle vérifie :

$$\forall I \in I_{\Pi}, \forall (s'_1, s'_2) \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)), \\ v_{\Pi'}(f(I), s'_1) \succeq v_{\Pi'}(f(I), s'_2) \Rightarrow v_{\Pi}(I, g(s'_1)) \succeq v_{\Pi}(I, g(s'_2)).$$

Remarque 2.2. Si \mathcal{R} est monotone alors

$$s'^* \text{ optimum sur } \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)) \Rightarrow g(s'^*) \text{ optimum sur } g(\text{Sol}_{\Pi'}(f(I))).$$

Définition 2.23. Réduction surjective *pour couvrir les solutions de l'instance de départ*
Une réduction $\mathcal{R} = (f, g)$ est surjective si elle vérifie :

$$\forall I \in I_{\Pi}, \text{Sol}_{\Pi}(I) = g(\text{Sol}_{\Pi'}(f(I))).$$

Remarque 2.3. Si \mathcal{R} est monotone et surjective alors

$$s'^* \text{ optimum de } f(I) \Rightarrow g(s'^*) \text{ optimum de } I.$$

Ainsi, nous pouvons définir une *PO*-réduction particulière caractérisée par deux propriétés facilement identifiables :

Définition 2.24. *MS*-réduction

Soient Π et Π' deux problèmes de *NPO*, on dit que Π se *MS*-réduit à Π' et on note $\Pi \overset{MS}{\propto} \Pi'$ s'il existe une réduction $\mathcal{R} = (f, g)$ de Π à Π' qui vérifie :

$$(i) \quad \mathcal{R} \text{ monotone} \quad (ii) \quad \mathcal{R} \text{ surjective.}$$

Proposition 2.2. $\Pi \overset{MS}{\propto} \Pi' \Rightarrow \Pi \overset{PO}{\propto} \Pi'$

Preuve : cf. remarques 2.2 et 2.3 \diamond

Réduction préservant l'approximation

Malheureusement, nombreux sont les problèmes qui ont été montrés *NP*-durs (non solubles en temps polynomial à moins que *P* ne coïncide avec *NP*) à l'aide de telles réductions ; aussi, à défaut de pouvoir résoudre ces problèmes difficiles à l'optimum, les chercheurs se sont mis plus modestement à les résoudre de façon approchée, donnant du même coup naissance aux classes d'approximation. Comme nous l'avons vu, l'approximation fait intervenir une évaluation de la performance des solutions, généralement par les rapports d'approximation.

On introduit alors une fonction c permettant de transporter l'évaluation de solutions d'un problème à un autre. Nous présentons ainsi la A -réduction définie dans [72] qui préserve l'appartenance à APX :

Définition 2.25. A -réduction

Soient Π et Π' deux problèmes de NPO , on dit que Π se A -réduit à Π' et on note $\Pi \overset{A}{\propto} \Pi'$ s'il existe une réduction $\mathcal{R} = (f, g)$ de Π à Π' et une fonction $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ qui vérifient :

$$A1 \quad c(r) = 0 \Rightarrow r = 0$$

$$A2 \quad \forall I \in I_{\Pi}, \forall s' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)), \rho_{\Pi'}(f(I), s') \geq r \Rightarrow \rho_{\Pi}(I, g(s')) \geq c(r).$$

Proposition 2.3.

$$\forall (\Pi, \Pi') \in NPO, (\Pi \overset{A}{\propto} \Pi') \wedge (\Pi' \in APX) \Rightarrow \Pi \in APX$$

D'autres réductions ont été définies qui préservent l'approximation à rapport constant, notamment la réduction continue de Simon [79].

Remarque 2.4. Si la fonction c vérifie $c(1) = 1$, la A -réduction est un autre cas particulier de PO -réduction.

De par le développement de la discipline autour du seul rapport classique, la majeure partie des réductions ont été définies de façon à préserver un niveau d'approximation pour la mesure classique ; or, on l'a notamment vu avec le rapport différentiel, plusieurs estimations de la qualité d'une solution peuvent non seulement exister (*rapport différentiel et définition d'une réduction préservant l'appartenance à $APX[\delta]$*), mais aussi coexister (*transposition de résultats d'une mesure à l'autre*). Pour ces raisons, nous assouplissons les conditions sur la mesure considérée, généralisant ainsi, comme cela est fait dans [68], la notion de A -réduction, et plus tard de P - et F -réductions. Si les lettres ρ et δ symbolisent les rapports classique et différentiel, il faudra dorénavant prendre en compte pour la A -réduction cette nouvelle définition :

Définition 2.26. A -réduction

Soient Π et Π' deux problèmes de NPO , on dit que Π se A -réduit à Π' et on note $\Pi \overset{A[R1, R2]}{\propto} \Pi'$ s'il existe une réduction $\mathcal{R} = (f, g)$ et une fonction $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ qui vérifient pour deux mesures d'approximation $R1, R2 \in \{\rho, \delta\}$:

$$A1 \quad c(r) = 0 \Rightarrow r = 0$$

$$A2(R1, R2) \quad \forall I \in I_{\Pi}, \forall s' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)), R2_{\Pi'}(f(I), s') \geq r \Rightarrow R1_{\Pi}(I, g(s')) \geq c(r).$$

Proposition 2.4.

$$\forall (\Pi, \Pi') \in NPO, (\Pi \overset{A[R1, R2]}{\propto} \Pi') \wedge (\Pi' \in APX[R2]) \Rightarrow \Pi \in APX[R1]$$

Remarque 2.5. : le cas $R1 = R2 = \rho$ revient à la définition précédente, originelle, de la A -réduction.

En faisant varier les conditions sur les fonctions f , g et c , on parcourt l'essentiel des réductions utilisées en approximation polynomiale. Commençons par la P -réduction, également définie dans [72], et qui préserve les schémas d'approximation.

Définition 2.27. P -réduction

Soient Π et Π' deux problèmes de NPO , on dit que Π se P -réduit à Π' et on note $\Pi \overset{P[R1,R2]}{\propto} \Pi'$ s'il existe une réduction $\mathcal{R} = (f, g)$ et une fonction $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ qui vérifient pour deux mesures d'approximation $R1, R2 \in \{\rho, \delta\}$:

$$P1 \quad c(r) = 1 \Rightarrow r = 1$$

$$P2(R1, R2) \quad \forall I \in I_{\Pi}, \forall s' \in Sol_{\Pi'}(f(I)), R2_{\Pi'}(f(I), s') \geq c(r) \Rightarrow R1_{\Pi}(I, g(s')) \geq r.$$

Proposition 2.5.

$$\forall (\Pi, \Pi') \in NPO, (\Pi \overset{P[R1,R2]}{\propto} \Pi') \wedge (\Pi' \in PTAS[R2]) \Rightarrow \Pi \in PTAS[R1]$$

Évoquons à présent la F -réduction, introduite dans [28] pour préserver l'appartenance à la classe $FPTAS$.

Définition 2.28. F -réduction

Soient Π et Π' deux problèmes de NPO , on dit que Π se F -réduit à Π' et on note $\Pi \overset{F[R1,R2]}{\propto} \Pi'$ s'il existe une réduction $\mathcal{R} = (f, g)$ et une fonction $c : I_{\Pi} \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ qui vérifient pour deux mesures d'approximation $R1, R2 \in \{\rho, \delta\}$:

$$F1 \quad \forall I \in I_{\Pi}, c(I, r) = 1 \Rightarrow r = 1$$

$$F2 \quad \exists p_c \text{ polynôme } t.q. \forall I \in I_{\Pi}, \forall r \in [0, 1], c(I, r) \text{ calculable en temps } p_c(|I|, \frac{1}{1-r})$$

$$F3(R1, R2) \quad \forall I \in I_{\Pi}, \forall s' \in Sol_{\Pi'}(f(I)), R2_{\Pi'}(f(I), s') \geq c(I, r) \Rightarrow R1_{\Pi}(I, g(s)) \geq r.$$

Proposition 2.6.

$$\forall (\Pi, \Pi') \in NPO, (\Pi \overset{F[R1,R2]}{\propto} \Pi') \wedge (\Pi' \in FPTAS[R2]) \Rightarrow \Pi \in FPTAS[R1]$$

Remarque 2.6. Pour toutes ces réductions (A , P et F -réductions), la première condition ($A1$, $P1$ et $F1$) sur la fonction c n'apparaît pas dans leur définition originale mais ont été ajoutées dans [68]; elles traduisent simplement le fait qu'une réduction préservant une performance relative n'est exploitable qu'à condition que cette fonction c ne soit pas triviale. Pour préserver le rapport constant, il faut que tout rapport *strictement positif* sur l'instance image permette de déduire un rapport *strictement positif* sur l'instance initiale, soit " $r > 0 \Rightarrow c(r) > 0$ "; pour préserver les schémas d'approximation, il faut à partir d'un certain rang $r_0 \geq 0$ être en mesure de déduire *pour toute constante* $r \in [r_0, 1[$ un solution r -approchée de l'instance initiale à partir d'une solution r' -approchée de l'instance image pour une certaine constante $r' \in [0, 1[$ telle que $c(r') = r$ (P -réduction) ou $c(I, r') = r$ (F -réduction), soit " $r' < 1 \Rightarrow c(r') < 1$ " (P -réduction) ou " $r' < 1 \Rightarrow c(I, r') < 1$ " (F -réduction).

Avant de clore le chapitre des réductions classiques, nous présentons la L -réduction, introduite et exploitée dans le cadre des classes logiques $Max NP$ et $Max SNP$ et qui a donné lieu à des résultats essentiels de complétude. Conçue dans le but de pouvoir transporter les schémas d'approximation, la L -réduction, définie dans [74], préserve l'erreur relative.

Définition 2.29. L -réduction

Soient Π et Π' deux problèmes de NPO tels que $opt_{\Pi} = opt_{\Pi'}$, on dit pour les rapports classique et différentiel que Π se L -réduit (*resp.* se $L[\delta]$ -réduit) à Π' et on note $\Pi \stackrel{L}{\propto} \Pi'$ (*resp.* $\Pi \stackrel{L[\delta]}{\propto} \Pi'$) s'ils vérifient pour deux constantes $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$:

$$\begin{aligned} L1 \quad & \forall I \in I_{\Pi}, \quad \beta_{\Pi'}(f(I)) \leq \alpha_1 \beta_{\Pi}(I) && (\text{resp. } \text{diam}_{\Pi'}(f(I)) \leq \alpha_1 \text{diam}_{\Pi}(I)) \\ L2 \quad & \forall I \in I_{\Pi}, \quad \forall s' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)), \quad |m_{\Pi}(I, g(s')) - \beta_{\Pi}(I)| \leq \alpha_2 |m_{\Pi'}(f(I), s') - \beta_{\Pi'}(f(I))|. \end{aligned}$$

Proposition 2.7.

$$\forall (\Pi, \Pi') \in NPO, \quad \left\{ \begin{array}{l} (\Pi \stackrel{L}{\propto} \Pi') \quad \wedge \quad (\Pi' \in PTAS) \quad \Rightarrow \quad \Pi \in PTAS \\ (\Pi \stackrel{L[\delta]}{\propto} \Pi') \quad \wedge \quad (\Pi' \in PTAS[\delta]) \quad \Rightarrow \quad \Pi \in PTAS[\delta]. \end{array} \right.$$

Dans [59], Khanna, Motwani, Sudan et Vazirani relâchent la constance du facteur α_1 pour le remplacer par un polynôme p_1 : c'est la E -réduction. Ce nouvel outil, qui préserve (notamment) les $FPTAS$, leur a permis de montrer l'égalité de classes $\overline{Max SNP_0^E} = APX - PB$ que nous avons déjà évoquée au paragraphe 2.5.3 et que commenterons plus en détails au paragraphe 2.6.3.

2.6.2 La notion de complétude

La complétude est une notion essentielle en théorie de la complexité; rappelons-nous le théorème de Cook, central s'il en est, qui pose l'existence du premier problème NP -complet en démontrant à l'aide des machines de Turing que tout problème de NP se réduit par une réduction polynomiale au problème de satisfaisabilité. La *complétude* se réfère toujours à trois éléments: *un ensemble de problèmes* Y , une seconde classe X "*plus facile que* Y " (souvent X est un sous-ensemble de Y) et une *réduction* \mathcal{X} *préservant l'appartenance à* X . Un problème Π de Y est dit Y -complet si tout problème de Y se \mathcal{X} -réduit à Π : l'idée est que si on prouve pour seulement l'un de ces problèmes complets son appartenance à la classe X , alors on l'a prouvé pour tout problème de Y ; et si X est un sous-ensemble de Y alors X et Y coïncident.

Définition 2.30. Complétude

Soient X et Y deux classes de problèmes de NPO et \mathcal{X} une réduction préservant l'appartenance à X :

$$Y\text{-c} = \{\Pi \in Y / \forall \Pi' \in Y, \Pi' \overset{\mathcal{X}}{\propto} \Pi\}.$$

Parfois (généralement quand $X \subseteq Y$ et qu'il n'y a dès lors que peu d'ambiguïté), la référence à la réduction ou à l'ensemble X est omise.

On peut également aller chercher les frontières à *l'extérieur* des classes, c'est la notion de *problèmes difficiles*; un problème Π est *difficile* pour une classe d'approximation Y relativement à un certain niveau d'approximation si tout problème de Y se réduit à Π par une réduction préservant ce niveau d'approximation (mais Π n'est plus tenu d'appartenir à la classe Y). Naturellement, tout problème Y -complet est Y -difficile.

Définition 2.31. Problèmes difficiles

Soient X et Y deux classes de problèmes de NPO et \mathcal{X} une réduction préservant l'appartenance à X :

$$Y\text{-h} = \{\Pi / \forall \Pi' \in Y, \Pi' \overset{\mathcal{X}}{\propto} \Pi\}.$$

Quelques exemples

$MinTSP \in NPO - c$: le problème $MinTSP$ est NPO -complet pour la PO -réduction. Le problème de voyageur de commerce de coût minimum est un problème de NPO et si l'on sait le résoudre à l'optimum en temps polynomial, alors on sait résoudre à l'optimum tout problème d'optimisation de NP en temps polynomial.

$Max3-Sat \in MaxSNP_0 - c$: le problème $Max3-Sat$ est $MaxSNP_0$ -complet pour la L -réduction. Le problème de 3-satisfaisabilité maximum est dans $MaxSNP_0$ et s'il existe un schéma d'approximation polynomial pour $Max3-Sat$, alors il en existe pour tout problème de $MaxSNP_0$ (ainsi que pour tout problème de $MaxSNP$, de par sa définition).

$Min\Delta TSP \in APX - c$: le cas métrique du problème de voyageur de commerce est APX -complet pour la L -réduction. Un schéma d'approximation polynomial pour ce problème d' APX pourrait ainsi être transposé par L -réduction à tout autre problème de la classe.

$MinDFNS$ (*Minimum Directed Feedback Node Set*) $\in APX - h$ et $MinFNS$ (*Minimum Feedback Node Set*) $\in APX - c$: les cas orientés et non orientés du problème d'ensemble minimum de sommets retour sont APX -difficiles pour la P -réduction, mais le cas non orienté est approximable à rapport constant au contraire du cas orienté si $P \neq NP$. Un schéma d'approximation polynomial pour l'un de ces deux problèmes serait transportable par P -réduction à tout autre problème de la classe APX .

2.6.3 La fermeture

Soit Y une classe d'approximation et \mathcal{X} une réduction quelconque ; on appelle fermeture de Y pour \mathcal{X} l'ensemble $\overline{Y}^{\mathcal{X}}$ des problèmes qui se \mathcal{X} -réduisent à un problème de Y .

Définition 2.32. Fermeture

Soit Y une classe de problèmes de NPO et \mathcal{X} une réduction :

$$\overline{Y}^{\mathcal{X}} = \{\Pi \in NPO / \exists \Pi' \in Y, \Pi \overset{\mathcal{X}}{\propto} \Pi'\}.$$

Nous en avons déjà discuté au paragraphe 2.5.3, les fermetures $\overline{Max\ SNP_0}^P$ et $\overline{Max\ NP_0}^P$ des classes syntaxiques $Max\ SNP_0$ et $Max\ NP_0$ pour la P -réduction coïncident avec la classe d'approximation APX des problèmes approximables à rapport constant pour le rapport classique. Cette égalité de classes signifie notamment que si un seul problème de NPO qui soit $Max\ SNP$ -difficile pour la P , la L ou la E -réduction admet un schéma alors tout problème de la classe APX admet également un schéma, autrement dit : *un problème $Max\ SNP$ -difficile* pour toute réduction préservant les schéma d'approximation sera *APX -difficile*, toujours relativement à une telle réduction. Or, $PTAS$ est un sous-ensemble propre d' APX , à moins que P n'égalise NP : sous l'hypothèse contraire, on pourra dire de tout problème montré $Max\ SNP$ -difficile qu'il n'est pas schématable. Ces égalités ensemblistes, en mettant en regard des classes syntaxiques (*dont les problèmes peuvent se formuler sous une certaine expression*) et une classe d'approximation (*dont les problèmes ont été montrés approximables pour un niveau d'approximation donné*), sont d'une richesse incontestable.

2.7 Affinité entre problèmes

2.7.1 Réductions continues

Nous présentons ici les réductions de Simon, conçues pour préserver les rapports (éventuellement asymptotiques) d'approximation, car, d'une part, c'est un outil précieux qui nous sera fort utile au chapitre 7, mais surtout parce qu'elles constituent un premier pas vers la relation affine entre problèmes, relation qui nous intéressera tout particulièrement dans le cadre de l'approximation différentielle.

Définition 2.33. Réduction continue

Soient Π et Π' deux problèmes de NPO tels que $opt_{\Pi} = opt_{\Pi'}$, une réduction continue de Π à Π' est la donnée de trois fonctions f de I_{Π} dans $I'_{\Pi'}$, g de $Sol_{\Pi'}(f(I_{\Pi}))$ dans Sol_{Π} et g' de Sol_{Π} dans $Sol_{\Pi'}(f(I_{\Pi}))$, toutes trois polynomiales en $|I|$, et qui vérifient pour quatre constantes

$a > 0$, $b \geq 0$, $a' > 0$ et $b' \geq 0$ les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
C1 \quad & \forall I \in I_{\Pi}, \forall s \in \text{Sol}_{\Pi}(I), \\
& m_{\Pi'}(f(I), g'(s)) \begin{cases} \geq 1/a \times m_{\Pi}(I, s) - b & \text{si } \text{opt}_{\Pi} = \max \\ \leq 1/a \times m_{\Pi}(I, s) + b & \text{sinon} \end{cases} \\
C2 \quad & \forall I \in I_{\Pi}, \forall s' \in \text{Sol}_{\Pi}(f(I)), \\
& m_{\Pi}(I, g(s')) \begin{cases} \geq 1/a' \times m_{\Pi'}(f(I), s') - b' & \text{si } \text{opt}_{\Pi} = \max \\ \leq 1/a' \times m_{\Pi'}(f(I), s') + b' & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Le produit $a \times a'$ est appelé *expansion* de la réduction ; si $b = b' = 0$, la réduction est dite *absolument* continue.

Proposition 2.8. Soient Π et Π' deux problèmes de maximisation (*resp.* de minimisation) de *NPO*, s'il existe un *PTAA* $\mathcal{A}_{\Pi'}$ r -approché pour Π' et une réduction continue de Π à Π' d'expansion aa' , alors il existe un *PTAA* \mathcal{A}_{Π} pour Π r/aa' -approché (*resp.* $aa'r$ -approché), éventuellement asymptotique, pour Π .

Preuve : pour deux problèmes de maximisation

Soient I une instance de Π et s' la solution donnée par $\mathcal{A}_{\Pi'}$ sur $f(I)$; on a par hypothèse $m_{\Pi'}(f(I), s') \geq r \times \beta_{\Pi'}(f(I))$ et on note $s = g'(s')$. Par *C1*, on a la relation $\beta_{\Pi'}(f(I)) \geq 1/a \times \beta_{\Pi}(I) - b$ et par *C2*, $m_{\Pi}(I, s) \geq 1/a' \times m_{\Pi'}(f(I), s') - b'$; on conclut :

$$m_{\Pi}(I, s) \geq \frac{1}{a'} r \times \beta_{\Pi'}(f(I)) - b' \geq \frac{r}{aa'} \beta_{\Pi}(I) - \frac{r}{a'} b - b' \diamond$$

En différentiel, pour espérer transporter un rapport d'approximation de l'instance image à l'instance initiale, il faut être en mesure de comparer les valeurs des pires solutions sur ces deux instances ; c'est le sens de la propriété *C3* :

Propriété 2.9.

$$C3 \quad \forall I \in I_{\Pi}, \omega_{\Pi'}(f(I)) \geq 1/a \times \omega_{\Pi}(I) - b \text{ (resp. } \leq 1/a \times \omega_{\Pi}(I) + b).$$

Effectivement, définies selon Simon, les fonctions g et g' permettent de ne pas trop dégrader la valeur d'une solution lors du passage d'une instance à l'autre (de $f(I)$ à I et de I à $f(I)$), de sorte de pouvoir comparer la valeur d'une solution approchée sur I à celle d'une solution approchée sur $f(I)$ ainsi que la valeur optimale sur $f(I)$ à la valeur optimale sur I ; en revanche, cela n'offre pas a priori la possibilité de comparer les valeurs des pires solutions de $f(I)$ à I , manque que pallie la propriété *C3*.

Proposition 2.10. Soient Π et Π' deux problèmes de maximisation (*resp.* de minimisation) de *NPO* liés par une réduction continue $\mathcal{R} = (f, g, g')$ de Π à Π' ; si \mathcal{R} est d'expansion 1 et vérifie la propriété *C3*, alors tout *PTAA* $\mathcal{A}_{\Pi'}$ r -approché différentiel pour Π' induit un *PTAA* \mathcal{A}_{Π} pour Π r -approché différentiel, éventuellement asymptotique, pour Π .

Preuve : pour deux problèmes de maximisation

Reprenant les notations de la preuve précédente, on a par hypothèse

$$m_{\Pi'}(f(I), s') \geq r \times \beta_{\Pi'}(f(I)) + (1 - r) \times \omega_{\Pi'}(f(I)),$$

et il vient $\beta_{\Pi'}(f(I)) \geq \frac{1}{a} \beta_{\Pi}(I) - b$, $m_{\Pi}(I, s) \geq \frac{1}{a'} m_{\Pi'}(f(I), s') - b'$, $\omega_{\Pi'}(f(I)) \geq \frac{1}{a} \omega_{\Pi}(I) - b$

↓

$$m_{\Pi}(I, s) \geq \frac{1}{a'} \left[r \left(\frac{1}{a} \beta_{\Pi}(I) - b \right) + (1 - r) \left(\frac{1}{a} \omega_{\Pi}(I) - b \right) \right] - b' \geq r \beta_{\Pi}(I) + (1 - r) \omega_{\Pi}(I) - \frac{b}{a'} - b.$$

Remarquons qu'avec une expansion strictement inférieure à 1, on ne pourrait rien conclure a priori. Par la suite, on notera $\Pi \stackrel{C[\delta]}{\asymp}$ une réduction continue de Π à Π' d'expansion 1 qui vérifie la propriété C3, permettant ainsi de lier le degré d'approximation différentielle des problèmes Π et Π' \diamond

Les réductions continues n'apportent pas que la garantie du rapport d'approximation : leur intérêt supplémentaire par rapport aux autres réduction réside en la fonction g' . Pouvoir revenir du problème initial au problème image s'avérera indispensable pour la préservation des optima locaux, qui nécessite de relier les optima locaux de I aux optima locaux de $f(I)$. Souvent, nous omettrons d'explicitier g' , les réductions proposées étant présentées comme réductions affines, mais la transformation sous-jacente sera toujours utilisée pour établir la préservation des optima locaux.

2.7.2 Réductions affines

Nous l'avons déjà dit, la motivation principale de la définition du rapport différentiel dans [30] est la stabilité de la mesure d'approximation sous transformation affine de la fonction objectif : il peut effectivement sembler légitime d'espérer résoudre de façon équivalente, et même considérer comme équivalents, conformément à ce qui est fait en programmation mathématique, les problèmes

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.c.} & x \in X \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \min & kf(x) + K \\ \text{s.c.} & x \in X \end{array} \right. \quad k \in \mathbb{R}^*, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Aussi définissons-nous un cadre d'équivalence entre problèmes sous le rapport différentiel afin de pouvoir, quand deux problèmes sont identiques à une transformation affine de leur fonction objectif près, déduire des résultats d'approximation de l'un à l'autre. Notons que

ce que nous présentons est une restriction de la notion plus générale d'équivalence sous le rapport différentiel définie dans [34].

Définition 2.34. *AF-réduction ou réduction affine*

Soient Π et Π' deux problèmes de *NPO*, on dit que Π se *AF-réduit* à Π' et on note $\Pi \overset{AF}{\rightsquigarrow} \Pi'$ s'il existe de Π à Π' une réduction $\mathcal{R} = (f, g)$ qui vérifie :

AF1 \mathcal{R} surjective

AF2 $\forall I \in I_\Pi, \exists K_I \in \mathbb{R}, \exists k_I \in \mathbb{R}^* (k_I > 0 \text{ si } \text{opt}_\Pi = \text{opt}_{\Pi'}, k_I < 0 \text{ sinon}) \text{ t.q.}$
 $\forall s' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)), m_{\Pi'}(f(I), s') = k_I m_\Pi(I, g(s')) + K_I.$

S'il existe une réduction affine de Π à Π' et de Π' à Π , on notera $\Pi \overset{AF}{\leftrightarrow} \Pi'$.

Proposition 2.11. *Stabilité du rapport différentiel sous transformation affine*

$\forall \Pi, \Pi' \in \text{NPO}, \mathcal{R} = (f, g)$ est une *AF-réduction* de Π à Π'
 $\Rightarrow \forall I \in I_\Pi, \forall s' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)), \delta_\Pi(I, g(s')) = \delta_{\Pi'}(f(I), s').$

Preuve pour $k_I > 0$

Par définition, il existe deux réels $k_I > 0$ et K_I tels que les évaluations de tout couple de solutions $(s', g(s'))$ des instances $f(I)$ et I sont affinement liées par la relation :

$$m_{\Pi'}(f(I), s') = k_I m_\Pi(I, g(s')) + K_I.$$

Par la surjectivité de \mathcal{R} , les pires solutions et les solutions optimales des deux instances coïncident alors, modulo g :

$$\begin{aligned} & \forall t' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)), m_{\Pi'}(f(I), s') \geq (\text{resp. } \leq) m_{\Pi'}(f(I), t') \\ \Leftrightarrow & \forall t' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)), m_\Pi(I, g(s')) \geq (\text{resp. } \leq) m_\Pi(I, g(t')) \\ (\mathcal{R} \text{ surjective}) \Leftrightarrow & \forall t \in \text{Sol}_\Pi(I), m_\Pi(I, g(s')) \geq (\text{resp. } \leq) m_\Pi(I, t) \\ \Rightarrow & \beta_{\Pi'}(f(I)) = k_I \beta_\Pi(I) + K_I \quad \text{et} \quad \omega_{\Pi'}(f(I)) = k_I \omega_\Pi(I) + K_I. \end{aligned}$$

D'où les égalités pour tout couple de solutions $(s', s = g(s')) \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)) \times \text{Sol}_\Pi(I)$:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{\Pi'}(f(I)) - m_{\Pi'}(f(I), s')}{\omega_{\Pi'}(f(I)) - \beta_{\Pi'}(f(I))} &= \frac{k_I \omega_\Pi(I) + K_I - (k_I m_\Pi(I, s) + K_I)}{k_I \omega_\Pi(I) + K_I - (k_I \beta_\Pi(I) + K_I)} = \frac{\omega_\Pi(I) - m_\Pi(I, s)}{\omega_\Pi(I) - \beta_\Pi(I)} \\ &\Leftrightarrow \delta_{\Pi'}(f(I), s') = \delta_\Pi(I, s) \quad \diamond \end{aligned}$$

Proposition 2.12. Si deux problèmes Π et Π' vérifient $\Pi \overset{AF}{\leftrightarrow} \Pi'$, alors tout algorithme r -approché pour l'un est r -approché pour l'autre, au sens de la mesure différentielle.

Preuve : conséquence directe de la proposition 2.11 \diamond

Il existe des relations plus intimes encore entre problèmes, qui nous permettront plus tard de rapprocher, non plus seulement leur degré d'approximation, mais leur structure même; c'est ce qui motive les dernières définitions.

Définition 2.35. Réduction bijective

Une réduction $\mathcal{R} = (f, g)$ est bijective si et seulement si

$$\forall I \in I_{\Pi}, \quad g|_{\text{Sol}_{\Pi'}(f(I))} \text{ est une bijection de } \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)) \text{ sur } \text{Sol}_{\Pi}(I).$$

Définition 2.36. Réduction fortement affine

Une réduction *fortement affine* entre deux problèmes Π et Π' de NPO , notée $\Pi \xrightarrow{AF} \Pi'$, est une réduction $\mathcal{R} = (f, g)$ affine bijective. S'il existe deux réductions fortement affines, l'une de Π à Π' , l'autre de Π' à Π , on notera $\Pi \xleftrightarrow{AF} \Pi'$ et les problèmes Π à Π' seront dits *affinement équivalents*.

Lorsqu'une réduction affine est *fortement* affine, la résolution des problèmes $\Pi=(I_{\Pi}, \text{Sol}_{\Pi}, m_{\Pi}, \text{opt}_{\Pi})$ et $\tilde{\Pi}'=(f(I_{\Pi}), \text{Sol}_{\Pi}(f(I)), m_{\Pi}, \text{opt}_{\Pi})$ devient une et seule, pour tout degré d'approximation différentielle considéré; de plus, la bijection entre les ensembles de solutions des instances I et $f(I)$, pour peu que leur structure soit semblable (distante constante entre deux solutions ou densité des espaces de solutions), assure la préservation des optima h -locaux qui seront le sujet des prochains chapitres.

Exemple 2.5. Comme il sera montré par la suite, il existe des réductions fortement affines de *MinTSP* à *Min Δ TSP*, de *MinSC* à *MinRSSC*, de *Maxk - Sat* à *MaxE - k - Sat*; comme il s'agit toujours de réductions d'un problème à sa restriction, ces couples de problèmes sont tous affinement équivalents.

Pour illustration, nous montrons ici que les problèmes de *Minimisation* et de *Maximisation de programmes linéaires en variables bivalentes*, notés *MaxPL* $\{0, 1\}$ et *MinPL* $\{0, 1\}$, sont liés par une relation fortement affine. Une instance I de tels problèmes est la donnée, sur un ensemble X de n variables à valeur dans $\{0, 1\}$, d'un vecteur objectif c à coefficients dans \mathbb{N} , de m vecteurs de contraintes a_i de \mathbb{Z}^n , et d'un membre droit b vecteur de \mathbb{N}^m ; le but est naturellement d'optimiser le programme suivant :

$$\begin{array}{ll} (I) & \beta_{\text{MaxPL}}(I) = \max_x c \cdot x \\ \text{s.c.} & \left\{ \begin{array}{l} a_i \cdot x \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m \\ x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad \text{et} \\ & \text{pour un problème de maximisation} \end{array} \quad \begin{array}{ll} (I) & \beta_{\text{MinPL}}(I) = \min_x c \cdot x \\ \text{s.c.} & \left\{ \begin{array}{l} a_i \cdot x \geq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m \\ x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j = 1, \dots, n \end{array} \right. \\ & \text{pour un problème de minimisation.} \end{array}$$

Soit maintenant $I = (c, \{a_1, \dots, a_m\}, \{b_1, \dots, b_m\})$ une instance de *MaxPL* $\{0, 1\}$, on lui associe l'instance $I' = f(I)$ de *MaxPL* $\{0, 1\}$ de paramètres $c' = c$, $a'_i = a_i$ pour tout

$i = 1, \dots, m$ et $b'_i = \vec{1} \cdot a_i - b_i$ pour tout $i = 1, \dots, m$, où $\vec{1} = (1, \dots, 1)$ désigne le vecteur unitaire de \mathbb{R}^n :

$$(I) \quad \beta_{Max PL}(I) = \max_x c \cdot x \quad (I') \quad \beta_{Min PL}(I') = \min_x c \cdot x$$

$$s.c. \quad \begin{cases} a_i \cdot x \leq b_i & \forall i = 1, \dots, m \\ x_j \in \{0, 1\} & \forall j = 1, \dots, n \end{cases} \xrightarrow{f} s.c. \quad \begin{cases} a_i \cdot x \geq \vec{1} \cdot a_i - b_i & \forall i = 1, \dots, m \\ x_j \in \{0, 1\} & \forall j = 1, \dots, n \end{cases}$$

La construction se fait évidemment en temps polynomial en la taille de l'instance initiale, taille qui est donnée par la plus grande des quantités n , m et $\log(d_{max})$ où d_{max} désigne, en valeur absolue, la plus grande donnée numérique de I . Considérons à présent les ensembles de solutions des instances I et I' : ils sont tous deux constitués de vecteurs de $\{0, 1\}^n$, et on remarque que I' est construite de telle sorte qu'un tel vecteur x est solution réalisable de I' si et seulement si $\vec{1} - x$ est solution réalisable de I . Effectivement, la i ème contrainte $a_i \cdot x \leq \vec{1} \cdot a_i - b_i$ équivaut à la relation $b_i \geq \vec{1} \cdot a_i - a_i \cdot x$, or $\vec{1} \cdot a_i - a_i \cdot x = a_i \cdot (\vec{1} - x)$. Ainsi, la transformation g qui associe à tout vecteur x de $\{0, 1\}^n$ son opposé $\vec{1} - x$ transforme bien une solution de $Sol_{PL}(I')$ en une solution de $Sol_{PL}(I)$ et qui plus est, l'équivalence précédente nous assure que g est une bijection de $Sol_{PL}(I')$ sur $Sol_{PL}(I)$: nous avons bien exhibé une réduction (f, g) fortement affine de $Max PL\{0, 1\}$ à $Min PL\{0, 1\}$.

Définition 2.37. Problèmes affinement identiques

On dit que deux problèmes Π et Π' de NPO sont *affinement identiques* et on note $\Pi \stackrel{AF}{\equiv} \Pi'$ s'il existe une réduction $\mathcal{R} = (f, g)$ fortement affine de Π à Π' telle que la fonction f est *surjective* i.e. $f(I_\Pi) = I_{\Pi'}$.

Exemple 2.6. Les problèmes $Max IS$, $Max SP$, $Max Cl$ et $Min VC$, $Max Sat$ et $Min CCSP$ qui seront évoqués au cours de ce document sont autant de cas de problèmes affinement identiques. Pour $Max IS$ et $Max SP$ par exemple, le programme linéaire à résoudre est le même

$$\begin{cases} \max \vec{1} \cdot x \\ A \cdot x \leq \vec{1} \\ x \in \{0, 1\}^n, \end{cases}$$

la seule différence réside en l'interprétation que l'on en fait : la relation binaire représentée par A désigne-t-elle les arêtes d'un graphe ou l'intersection non vide de deux sous-ensembles. Ces deux problèmes sont également équivalents du point de vue de l'approximation classique ; pourtant, la même relation qui existe entre $Max IS$ et $Min VC$ (prendre $f = Id_{|IS=VC}$ et $g : s \mapsto \bar{s}$ de $Max IS$ à $Min VC$ comme de $Min VC$ à $Max IS$) n'a plus alors, en classique, les mêmes conséquences ($Max IS \notin APX$ quand $Min VC \in APX$).

Avec le rapport classique, une simple translation de la fonction objectif peut suffire à transformer un problème de la classe APX en un problème non approximable à rapport constant à moins que $P = NP$, comme en témoigne le passage du TSP métrique au TSP général (cf. chapitre 8.1.1). En différentiel, l'équivalence *min/max* fait parfois prendre le

$(opt_{\Pi} = \max)$	$m_{\Pi}(I, s) \geq r \times \beta_{\Pi}(I) + (1 - r) \times \omega_{\Pi}(I) \Rightarrow m_{\Pi}(I, s) \geq r \times \beta_{\Pi}(I)$
	$m_{\Pi}(I, s) \geq r \times \beta_{\Pi}(I) \Rightarrow ???$ <i>on ne peut rien dire a priori : cela dépend de r et du rapport $\omega_{\Pi}(I)/\beta_{\Pi}(I)$</i>
$(opt_{\Pi} = \min)$	$m_{\Pi}(I, s) \leq r \times \beta_{\Pi}(I) + (1 - r) \times \omega_{\Pi}(I) \Rightarrow ???$ <i>on ne peut rien dire a priori : cela dépend du rapport $\omega_{\Pi}(I)/\beta_{\Pi}(I)$</i>
	$m_{\Pi}(I, s) \leq r \times \beta_{\Pi}(I) (r \geq 1) \Rightarrow ???$ <i>on ne peut rien dire a priori : cela dépend de r et du rapport $\omega_{\Pi}(I)/\beta_{\Pi}(I)$</i>

TAB. 2.1: d'une mesure à l'autre

meilleur (*MaxTSP* et *MinTSP* sont $APX[\delta]$), et parfois le pire (*MaxIS* et *MinVC* ont les mêmes seuils d'inapproximation que *MaxIS* en classique). Un résultat négatif (*resp.* positif) sur un problème de *maximisation* se transporte du classique au différentiel (*resp.* du différentiel au classique), mais il n'est pas de telle règle pour les problèmes de *minimisation* (considérer justement *MinTSP* qui est $APX[\delta]$ mais non APX , *MinVC* qui est APX mais non $APX[\delta]$, si $P \neq NP$). La transposition d'un résultat différentiel vers un résultat classique sera de nouveau évoquée au paragraphe 8.1.5; l'essentiel est de retenir qu'il n'y a rien d'évident, et heureusement: après tout, il s'agit de rapports différents et l'évaluation conjointe des problèmes de *NPO* par ces deux mesures n'a d'intérêt que la diversité, voire la divergence des conclusions produites quant au degré d'approximation de ces problèmes. Remarquons avant de conclure que la possibilité de déduire un résultat différentiel d'un résultat classique est bien moins probable que son inverse. Une condition nécessaire à l'établissement d'une telle implication serait en effet que toute solution, même une pire solution, réalise un rapport contant, soit que toute solution puisse être déjà considérée comme une *bonne solution* au sens du rapport classique: $\omega_{\Pi}(I)/\beta_{\Pi}(I) \geq \varepsilon$ ($\varepsilon \leq 1$) pour un problème de *maximisation*, $\omega_{\Pi}(I)/\beta_{\Pi}(I) \leq \varepsilon$ ($\varepsilon \geq 1$) pour un problème de *minimisation*; et quand bien même une telle relation aurait lieu, on ne pourrait en déduire une approximation différentielle qu'à condition, naturellement, que l'algorithme qui assure le rapport classique r fournisse des solutions strictement meilleures que $\omega_{\Pi}(I)$, vérifiant $r > \varepsilon$ pour un problème de *maximisation*, $r < \varepsilon$ pour un problème de *minimisation*. Le rapport différentiel ainsi obtenu serait alors de $|r - \varepsilon|/|1 - \varepsilon|$. Le tableau 2.1 propose un récapitulatif de ces différentes situations.

Première partie
Optima locaux

Chapitre 3

Optimum local garanti

3.1 Quelques concepts

3.1.1 Qu'est-ce qu'un algorithme de recherche locale?

Avant de parler d'optima locaux, il faut avoir défini une notion de proximité : les fonctions voisinage nous permettent de le faire.

Définition 3.1. Voisinage

Soit Π un problème d'optimisation, un voisinage \mathcal{V} pour Π est une fonction qui à toute solution s de toute instance I de Π associe un sous-ensemble $\mathcal{V}(I, s)$ de solutions autour de s ; les éléments de $\mathcal{V}(I, s) \setminus \{s\}$ sont appelés solutions voisines de s .

Étant donné un voisinage \mathcal{V} sur Π , un optimum local d'une instance I n'est autre qu'une solution au moins aussi bonne que ses voisins. Attention, on ne cherche pas une solution optimale sur un sous-ensemble statique, mais une solution optimale sur un ensemble *de centre cette solution* : il s'agit donc d'un sous-ensemble évolutif en fonction de la solution courante et l'optimalité locale ne se définit pas à partir d'un sous-ensemble défini a priori mais à partir de la solution considérée et des voisins qu'elle désigne, pour une structure de voisinage considérée.

Définition 3.2. Optimum local

$$\tilde{s} \text{ optimum local de } I \text{ relativement à } \mathcal{V} \Leftrightarrow \forall s \in \mathcal{V}(I, \tilde{s}), m_{\Pi}(I, \tilde{s}) \succeq m_{\Pi}(I, s)$$

Disposant d'un problème et d'un voisinage, il est facile de déterminer un optimum local. Partant d'une solution, on explore son voisinage à la recherche d'une éventuelle meilleure solution, et ainsi de suite jusqu'à ce que la solution courante n'aie pas de meilleur voisin : c'est un optimum local. Cette recherche est formalisée sous le nom de *LSA (Local Search Algorithm)* : algorithme de recherche locale.

LSA - Algorithme de recherche locale

Étant donné un problème Π à résoudre, un voisinage \mathcal{V} pour Π et un algorithme polynomial approché \mathcal{A}_Π pour Π , un *algorithme de recherche locale* se déroule comme suit :

(LSA)

→ input I

begin

- (1) $s_1 = \mathcal{A}_\Pi(I)$, $s = s_1$;
- OK = *faux*;
- tant que (non OK)
 - (2) déterminer $\mathcal{V}(I, s)$;
 - (3) s'il existe $s' \in \mathcal{V}(I, s)$ telle que $m_\Pi(I, s') \succ m_\Pi(I, s)$
alors $s = s'$;
 - sinon OK = *vrai*;
- (4) fin tant que

end

← output s

Complexité d'un LSA

La solution initiale (1) est obtenue en temps $p(|I|)$. À l'intérieur de la boucle **répéter**, la première étape (2) qui consiste en la construction du voisinage nécessite un temps de l'ordre de $|\mathcal{V}(I, s)| \times t_\mathcal{V}(I)$ si $t_\mathcal{V}(I)$ représente le temps maximum de passage d'une solution à une solution voisine pour le voisinage \mathcal{V} sur l'instance I . L'évaluation des voisins demande un temps au plus $|\mathcal{V}(I, s)| \times t_m(I)$ si $t_m(I)$ est le temps d'évaluation d'une solution sur l'instance I , supposé polynomial par définition de *NPO*. Enfin, la boucle (4) est itérée au plus $\text{diam}_\Pi(I) = |\omega_\Pi(I) - \beta_\Pi(I)|$ fois : les coefficients de la fonction objectif ainsi que les variables étant à valeurs entières, la valeur de la solution augmente si $\text{opt}_\Pi = \max$, diminue sinon, d'au moins une unité à chaque itération.

Conditions nécessaires et conditions suffisantes de polynomialité

Il est nécessaire pour le parcours du voisinage de la solution courante que celui-ci soit de taille polynomiale; il faut de plus que la construction de tout voisin à partir de la solution courante soit elle-même polynomiale. On traduit ces exigences par les deux conditions

nécessaires :

$$CN1 : \exists p \text{ polynôme } t.q. \forall I, \forall s \in \text{Sol}_\Pi(I), |\mathcal{V}(I, s)| \leq p(|I|),$$

$$CN2 : \exists p \text{ polynôme } t.q. \forall I, t_\mathcal{V}(I) \leq p(|I|).$$

Quant au nombre d'itérations de la boucle **répéter**, on ne peut s'assurer de sa polynomialité qu'en bornant le nombre d'étapes que nécessiterait le passage d'une solution de valeur $m_\Pi(I, \mathcal{A}_\Pi(I))$ à un optimum de valeur $\beta_\Pi(I)$. Une condition suffisante pour que (4) soit polynomiale est de n'avoir qu'un nombre polynomial de valeurs possibles pour les solutions du problème entre les valeurs $m_\Pi(I, \mathcal{A}_\Pi(I))$ et β , soit

$$CS0 : \left. \begin{array}{l} \text{il existe un polynôme } p \text{ qui vérifie pour toute instance } I \\ \alpha_I = m_\Pi(I, s_1) \\ n(\alpha_I) = |\{m_\Pi(I, s) \succeq \alpha_I, s \in \text{Sol}_\Pi(I)\}| \end{array} \right\} \Rightarrow n(\alpha_I) \leq p(|I|).$$

Malheureusement, cette condition n'est pas vérifiable a priori en temps polynomial.

Nous distinguons deux façons de vérifier $CS0$: soit le problème lui-même n'admet qu'un nombre polynomial de valeurs distinctes pour toute instance (c'est notamment vrai si le problème est polynomialement borné), soit c'est à nous qu'il revient de se rapprocher de la valeur optimale en partant d'une bonne solution $\mathcal{A}_\Pi(I)$. Effectivement, si la valeur d'une solution optimale est bornée par un polynôme :

$$\beta_\Pi(I) \text{ polynomial} \Leftrightarrow \exists p_\beta \text{ polynôme } t.q. \forall I \in I_\Pi, |\beta_\Pi(I)| \leq p_\beta(|I|),$$

il suffirait alors pour rendre la recherche locale polynomiale de partir d'une solution initiale "*assez proche de l'optimum*", soit de disposer d'un algorithme \mathcal{A}_Π approché à rapport constant r pour le rapport classique :

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{A}_\Pi \geq r \beta_\Pi(I) \text{ si } \text{opt}_\Pi = \max \\ \mathcal{A}_\Pi \leq r \beta_\Pi(I) \text{ si } \text{opt}_\Pi = \min \end{array} \right\} \Rightarrow |\mathcal{A}_\Pi - \beta_\Pi(I)| \leq |1 - r| \beta_\Pi(I) \leq |1 - r| p_\beta(|I|).$$

Ces réflexions nous mènent aux conditions suivantes :

$$CS1 : \exists p \text{ polynôme } t.q. \forall I, \text{supp}_\Pi(I) \leq p(|I|) ;$$

$$CS2 : \Pi \in \text{APX} \text{ et } \beta_\Pi(I) \text{ polynomial.}$$

Cette discussion nous aura enseigné qu'on ne peut assurer a priori l'efficacité en temps d'un algorithme de recherche locale : cela dépend fortement du problème (ou de la restriction d'un problème général à une famille d'instances particulières) traité ainsi que de la définition de voisinage considérée. Ce point est un champ d'investigation à lui seul dont nous donnerons quelques clefs au chapitre 5, discutant les principaux travaux et résultats quant à la difficulté

d'obtention d'optima locaux dès lors que l'on s'éloigne du cadre polynomialement borné ([82], [66], [61]).

Remarque 3.1. raffinement du *LSA*

Dans l'idée d'améliorer le temps d'exécution d'un *LSA* ou la qualité de l'optimum local qu'il procure, des interventions peuvent être faites à différents niveaux : celui de *la solution initiale* (partir d'une *bonne* solution, d'une solution *facilement améliorable*, d'une solution à *rapport constant de l'optimum...*), ou encore celui *du choix du voisin améliorant* (*première* solution améliorante, *meilleure* solution améliorante, autres critères génériques ou spécifiques).

3.1.2 Voisinages h -bornés

Le voisinage est la notion centrale des préoccupations de ce chapitre puisque c'est elle qui définit la localité ; or, un voisinage n'est autre qu'un ensemble de points autour d'une solution donnée. Cependant, notre but étant de construire à partir de ces voisinages des algorithmes polynomiaux, nous ne nous intéresserons naturellement qu'à des voisinages polynomiaux, c'est-à-dire qu'une solution, quel que soit le problème traité, aura un *nombre polynomial de voisins*. Aussi faudra-t-il à l'avenir s'en tenir à cette nouvelle définition du voisinage.

Définition 3.3. Voisinage

Soit Π un problème de *NPO*, un voisinage sur Π est une fonction $\mathcal{V} : I_{\Pi} \times \text{Sol}_{\Pi} \rightarrow \mathcal{P}(\text{Sol}_{\Pi})$ qui à toute solution $s \in \text{Sol}_{\Pi}(I)$ de toute instance $I \in I_{\Pi}$ associe un sous-ensemble $\mathcal{V}(I, s) \subseteq \text{Sol}_{\Pi}(I)$ de solutions de I contenant s , de taille au plus $p_{\mathcal{V}}(|I|)$ où $p_{\mathcal{V}}$ est un polynôme.

Par ailleurs, nous souhaitons définir une famille de voisinages qui permette de reconnaître une classe de problèmes dont la spécificité serait d'avoir de bons optima locaux relativement à un rapport d'approximation donné. Reprenons alors la remarque faite en [11] concernant la définition fort générale de voisinage que nous venons de donner : si Π est dans la classe $APX[R]$ pour un certain algorithme \mathcal{A} , la fonction qui à toute instance I et toute solution s associe l'ensemble $V(I, s) = \{s, \mathcal{A}(I)\}$ est bien un voisinage, conformément à la définition que nous venons d'en donner ; or, tout optimum local pour ce voisinage faisant au moins aussi bien que la solution $\mathcal{A}(I)$, il garantit le même rapport constant d'approximation que \mathcal{A} et cela, quel que soit le rapport considéré. Une telle définition nous mènerait ainsi à considérer simplement les classes $APX[R]$ alors que l'on souhaiterait justement par l'étude des optima locaux révéler des propriétés structurelles de ces classes ! Il faut donc trouver une définition pertinente pour la *reconnaissance* de problèmes dont les optima locaux auraient un *bon* ou un *mauvais comportement* vis-à-vis des rapports d'approximation. Enfin, il faut également pour être en mesure de construire ces voisinages savoir quelle est, d'un point donné, la visibilité que

l'on s'offre de l'ensemble des solutions. Nous avons vu en 3.1.1 que la mise en œuvre d'un *LSA* polynomial était conditionnée par le nombre de voisins d'une solution mais aussi par le temps de construction d'un voisin à partir de toute solution. Les voisinages manipulés en recherche opérationnelle, quel que soit le cadre de recherche (*algorithme tabou comme approximation polynomiale*), suivent souvent le principe qui consiste à obtenir les voisins d'une solution en changeant un nombre constant de composantes de celle-ci (*ajout/suppression de sommets pour des problèmes de couverture, échange d'arêtes pour des problèmes de tournées...*). Ou dit autrement, à partir d'une solution donnée, on *borne la visibilité de l'ensemble des solutions à une distance d'un certain nombre, constant, de transformations de la solution courante*. Ces voisinages peuvent être regroupés sous le formalisme des *voisinages h-bornés* proposés dans [11], qui offrent une réponse à ces exigences et que nous définissons à présent. Mais avant de manipuler la notion de borne, il faut définir une *distance* entre les solutions des instances des problèmes de *NPO*.

Définition 3.4. distance d entre solutions

$$\forall \Pi \in NPO, \forall I \in I_{\Pi}, \forall s, t \in Sol_{\Pi}(I), d(s, t) = \|s - t\|_1 = \sum_{i=1}^{|I|} |s_i - t_i|.$$

Définition 3.5. Voisinage h -borné

Soient Π un problème de *NPO* et h une constante, le voisinage \mathcal{V}_{Π}^h h -borné pour Π est défini en toute solution s comme l'ensemble des solutions au plus h -distantes de s :

$$\forall h, \forall I \in I_{\Pi}, \forall s \in Sol_{\Pi}(I), \mathcal{V}_{\Pi}^h(I, s) = \{t \in Sol_{\Pi}(I) / d(s, t) \leq h\}.$$

Par abus de langage, on qualifiera de h -borné tout voisinage \mathcal{V} contenu dans un voisinage h -borné, soit toute fonction \mathcal{V} vérifiant :

$$\forall I \in I_{\Pi}, \forall s \in Sol_{\Pi}(I), \mathcal{V}(I, s) \subseteq \mathcal{V}_{\Pi}^h(I, s).$$

Lorsque l'on parlera, pour une constante h et un problème Π donnés, *du* voisinage h -borné sans autre précision, on se référera à tout \mathcal{V}_{Π}^h . Pour une constante universelle h et un problème Π de *NPO*, soit I une instance de Π , le nombre de solutions h -distantes d'une solution quelconque $s \in Sol_{\Pi}(I)$ est majoré par un polynôme en la taille de l'instance :

$$|\{t \in Sol_{\Pi}(I) / d(s, t) \leq h\}| \leq \sum_{i=1}^h \mathcal{C}_i^{p(|I|)} \leq p(|I|)^{h+1}$$

choix de i variables à inverser parmi $p(|I|)$, pour i de 1 à h^1 .

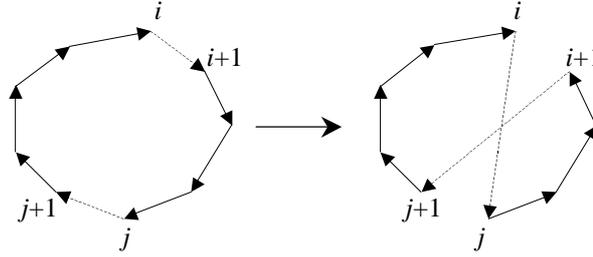


FIG. 3.1: le voisinage 2 – opt

Enfin, la construction d'une solution voisine à toute solution de toute instance demande un temps constant : les voisinages h -bornés remplissent les conditions nécessaires de déroulement polynomial d'un algorithme de recherche locale présentées dans la section précédente.

Exemple 3.1. Le problème du voyageur de commerce

Le problème du voyageur de commerce consiste à déterminer, sur un graphe complet $G(V, E)$ arêtes-valué à n sommets, un tour de moindre coût, le coût d'une solution étant donné par la somme des coûts des arêtes qui la constituent. Pour plus de clarté, on note ici $[i, j]$ l'arête d'extrémités i et j ; les variables du problème sont alors les $m = n(n - 1)/2$ variables booléennes s_ℓ associées aux arêtes $e_\ell = [u_\ell, v_\ell]$ du graphe G et définies par

$$\forall \ell = 1, \dots, m, \quad s_\ell = 1 \Leftrightarrow \text{l'arête } e_\ell \text{ est prise dans la solution.}$$

Une solution s du problème est donc un vecteur de $\{0, 1\}^m$ et une telle solution est réalisable si les arêtes correspondant aux composantes non nulles de s forment un tour.

Nous présentons pour ce problème le voisinage 2 – opt, notamment étudié du point de vue de l'approximation polynomiale dans [54], qui consiste à échanger deux arêtes d'un tour contre les arêtes croisées (cf. figure 3.1). Prenons pour illustration le tour $T = (1, 2, 3, \dots, n - 1, n, 1)$ qui correspond à l'affectation s définie par :

$$\forall \ell = 1, \dots, m, \quad s_\ell = 1 \Leftrightarrow [u_\ell, v_\ell] = [u_\ell, u_\ell + 1] \text{ ou } [u_\ell, v_\ell] = [n, 1].$$

Soient deux sommets i et $j > i$, ils ont comme sommets adjacents dans le tour T les sommets $i + 1$ et $j + 1$. En échangeant les arêtes $[i, i + 1]$ et $[j, j + 1]$ contre les arêtes $[i, j]$ et $[i + 1, j + 1]$, on obtient un nouveau tour

$$T' = (1, 2, \dots, i - 1, i, j, j - 1, \dots, i + 2, i + 1, j + 1, j + 2, \dots, n - 1, n, 1)$$

1.

$$\forall p, q \in \mathbb{N} / 0 \leq q \leq p, \quad C_q^p = \frac{p!}{q!(p - q)!}$$

voisin de T pour le voisinage $2 - opt$ et qui correspond à la solution s' définie par :

$$\forall \ell = 1, \dots, m, s'_\ell = \begin{cases} 1 - s_\ell & \text{si } [u_\ell, v_\ell] \in \{[i, i + 1], [i, j], [j, j + 1], [i + 1, j + 1]\}, \\ s_\ell & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce voisinage est 4-borné puisque que d'un voisin à l'autre ne change l'affectation que de quatre variables.

3.2 Les classes $GLO[R]$

Dans cette section, on s'intéresse exclusivement aux structures de voisinages h -bornés. Ausiello et Protasi ont présenté dans [11] la classe GLO des problèmes polynomialement bornés de NPO qui garantissent la qualité de leurs optima locaux ; cette étude s'est révélée fort enrichissante quant à la connaissance de la nature de NPO puisque les auteurs sont parvenus à établir des résultats de classes. Mais avant d'en venir à l'évocation de tels résultats, définissons déjà la notion d'optimum local garanti.

Définition 3.6. Problème à optima locaux garantis

Soit $R \in \{\rho, \delta\}$ une mesure d'approximation, un problème Π *garanti pour R la valeur de ses optima locaux* s'il existe pour une constante $r \in]0, 1]$ et un entier h un voisinage h -borné \mathcal{V} tel que tout optimum local \tilde{s} vis-à-vis de \mathcal{V} de toute instance I réalise un rapport d'approximation $R_\Pi(I, \tilde{s})$ d'au moins r .

Définition 3.7. $GLO[R]$ (*Guaranteed Local Optima*)

Soit $R \in \{\rho, \delta\}$ une mesure d'approximation, un problème Π est dans $GLO[R]$ s'il garantit la qualité de ses optima locaux et si on sait, pour le voisinage qui permet d'établir cette garantie, déterminer un optimum local en temps polynomial.

Comme à l'habitude, on note GLO pour le rapport classique et $GLO[\delta]$ pour le rapport différentiel. Plus précisément encore, on désigne pour tout entier h par $GLO(h)$ et $GLO[\delta](h)$ les problèmes garantissant la qualité de leurs optima locaux, respectivement pour les rapports classique et différentiel, vis-à-vis d'un voisinage h -borné.

Dans les classes $GLO[R]$, il faut distinguer deux choses : *les optima locaux de qualité garantie* (ce qu'on pourrait qualifier de "*Strict - GLO*") et la *garantie d'obtention d'un optimum local en temps polynomial* ; le but restant de trouver des solutions approchées en temps polynomial, nous nous restreindrons toujours pour les classes $GLO[R]$ aux instances des problèmes pour lesquelles on sait trouver un optimum local en temps polynomial. C'est dans cet esprit que les auteurs de [11] ont placé GLO dans $NPO - PB$, car cette restriction est suffisante à la déduction de $PTAA$ à rapport constant à partir du bon comportement

global des optima locaux du problème général considéré. La majeure partie des résultats obtenus sont ainsi donnés pour des problèmes polynomialement bornés (ou la restriction aux instances polynomialement bornées de problèmes) de *NPO* : c'est, le plus souvent, cette condition qui sera testée pour s'assurer qu'un problème ayant de bons optima locaux soit dans *GLO* ou *GLO*[δ]. Les recherches menées par d'autres auteurs en matière de complexité des *LSA* et qui seront abordées au chapitre 5 laissant peu d'espoir de déroulement polynomial hors de ce cadre, la restriction aux instances polynomialement bornées, bien que d'apparence grossière, ne semble pas, aux lumières de ces travaux, si restrictive que cela.

3.3 Exemples simples pour voisinages 1-bornés

Nous présentons ici des problèmes dont les optima locaux pour un voisinage 1-borné ont un rapport d'approximation constant, pour les mesures classique et différentielle. Pour beaucoup, ces solutions sont les solutions maximales ou minimales selon qu'il s'agisse de problèmes de maximisation ou de minimisation : une solution maximale (*resp.* minimale) vis-à-vis d'une certaine propriété P est un ensemble tel que tout ensemble qui le contient strictement (*resp.* tout sous-ensemble stricte) ne vérifie plus P ; il s'agit donc d'une solution réalisable telle que l'ajout (*resp.* le retrait) de tout élément rendrait la solution résultante non réalisable. Ces solutions, souvent discutées, sont assez naturelles puisqu'obtenues par des algorithmes gloutons particuliers qui incarnent les stratégies les plus basiques qu'il soit et que l'on pourrait exprimer ainsi : “prendre le vide et ajouter tant que possible” pour un problème de maximisation, “prendre le tout et enlever tant que possible” pour un problème de minimisation. Comme nous le disions en débutant ce paragraphe, ces algorithmes, bien que naïfs, sont déjà pour certains problèmes des algorithmes approchés à rapport constant.

Théorème 3.1.

$$\left. \begin{array}{l} i) \quad Max\ Cut \\ ii) \quad Min\ DS - B \\ iii) \quad Max\ IS - B \\ iv) \quad Min\ VC - B \end{array} \right\} \in GLO \cap GLO[\delta]$$

Tous ces problèmes se posent sur des graphes simples $G(V, E)$ supposés connexes et admettent comme solution des sous-ensembles U de sommets de V . Remarquons au préalable que les problèmes de maximisation pour lesquels la pire des solutions a une performance nulle ($\omega_{\Pi}(G) = 0 \forall G$) sont equi-approximables vis-à-vis des deux rapports d'approximation puisque les deux mesures coïncident alors ; or, c'est justement le cas des problèmes *Max Cut*

et $MaxIS - B$ avec $U = \emptyset$ comme pire solution de valeur nulle. Remarquons également que tous ces problèmes sont polynomialement bornés puisque la taille d'un sous-ensemble de sommets (*resp.* d'arêtes pour $MaxCut$) est bornée par la taille de l'ensemble de sommets (*resp.* des arêtes) : $\max\{\omega_{\Pi}(G), \beta_{\Pi}(G)\} \leq |V|$ (*resp.* $|E|$). De plus, on a pour $MaxIS$ et $MaxCut$ la solution triviale $U = \emptyset$ de valeur nulle, pour $MinVC$ et $MinDS$ la solution $U = V$ de valeur $|V|$.

Une solution est donc un sous-ensemble ou plutôt, un vecteur $s \in \{0, 1\}^{|V|}$ représentant ce sous-ensemble : $s_u = 1 \Leftrightarrow u \in U$. Sur ces solutions, le voisinage 1-borné considère comme solutions voisines d'une solution $s \in \{0, 1\}^{|V|}$ toutes les solutions dont l'affectation d'au plus une composante diffère de s . Autrement dit, ce voisinage considère comme solutions voisines d'un sous-ensemble $U \subseteq V$ tous les sous-ensembles de sommets obtenus à partir de U en ajoutant ou en retirant un sommet. Ce voisinage désigne comme optima locaux pour les problèmes $MaxIS$, $MinDS$ et $MinVC$ les solutions maximales et minimales.

Considérant donc pour voisinage \mathcal{V} le voisinage 1-borné, nous allons évaluer les performances des optima locaux de ces différents problèmes pour \mathcal{V} . L'appartenance de chacun de ces problèmes à GLO a été montrée dans [11] par l'entremise de ces mêmes optima locaux.

Lemme 3.2. $MaxCut \in GLO[\delta]$

Preuve : pour ce problème, les mesures classique et différentielle sont une seule et même mesure ; aussi reprenons-nous ici, dans un simple but illustratif, la démonstration de [11].

Soit $G(V, E)$ un graphe et soit U un sous-ensemble de sommets. On rappelle que le problème $MaxCut$ de coupe maximum consiste à déterminer un ensemble de sommets $U \subseteq V$ qui maximise le nombre d'arêtes entre les ensembles U et \bar{U} où \bar{U} désigne l'ensemble $V \setminus U$ complémentaire à U dans V . On note pour tout couple (U_1, U_2) de sous-ensembles de V $\langle U_1, U_2 \rangle$ l'ensemble des arêtes reliant un sommet de U_1 à un sommet de U_2 et $|\langle U_1, U_2 \rangle|$ la cardinalité de cet ensemble. U est un optimum local si et seulement si le changement d'affectation d'un sommet u de U à \bar{U} ou de \bar{U} à U n'améliore pas la solution, soit si U vérifie :

$$\left. \begin{array}{l} \forall u \in \bar{U}, |\langle \{u\}, \bar{U} \rangle| \leq |\langle \{u\}, U \rangle| \\ \forall u \in U, |\langle \{u\}, U \rangle| \leq |\langle \{u\}, \bar{U} \rangle| \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \sum_{u \in \bar{U}} |\langle \{u\}, \bar{U} \rangle| + \sum_{u \in U} |\langle \{u\}, U \rangle| \\ \sum_{u \in \bar{U}} |\langle \{u\}, U \rangle| + \sum_{u \in U} |\langle \{u\}, \bar{U} \rangle| \end{array}$$

$$\Rightarrow 2|\langle \bar{U}, \bar{U} \rangle| + 2|\langle U, U \rangle| \leq 2|\langle \bar{U}, U \rangle| \Leftrightarrow |E| - m_{Cut}(G, U) \leq m_{Cut}(G, U)$$

$$\Leftrightarrow m_{Cut}(G, U) \geq |E|/2.$$

Ce qui permet de conclure avec $\beta_{Cut}(G) \leq |E|$:

$$\delta_{Cut}(G, U) = \frac{m_{Cut}(G, U)}{\beta_{Cut}(G)} \geq \frac{1}{2} \diamond$$

Lemme 3.3. $Min DS - B \in GLO[\delta]$

Preuve: mêmes arguments que ceux proposés pour établir $Min DS - B \in GLO$ dans [11].

Le graphe G est à degré borné par B (tout sommet a au plus B voisins). Un ensemble dominant est un sous-ensemble de sommets $U \subseteq V$ qui vérifie la propriété :

$$\forall x \in \bar{U}, |\langle \{x\}, U \rangle| \geq 1 \quad (i).$$

L'objectif est de déterminer un ensemble dominant U de taille minimum.

Remarque 3.2. U dominant $\Rightarrow |U| \geq |V|/(B+1)$

$$\begin{aligned} \text{car} \quad (i) &\Rightarrow |\bar{U}| \leq |\langle U, \bar{U} \rangle| = \sum_{u \in U} |\langle \{u\}, \bar{U} \rangle| \leq B|U| \\ \text{et} \quad |U| \geq |\bar{U}|/B &\Leftrightarrow |U| \geq |V|/(B+1). \end{aligned}$$

Remarque 3.3. U dominant minimal $\Rightarrow \bar{U}$ dominant

Le graphe G étant supposé connexe, tout sommet $y \in U$ est relié à l'ensemble U ou son complémentaire \bar{U} ; or, si y n'est relié qu'à des sommets de U , $U \setminus \{y\}$ est toujours dominant, ce qui contredirait la minimalité de U : y est donc relié à au moins un sommet de \bar{U} , autrement dit " $\forall u \in U, |\langle \{u\}, \bar{U} \rangle| \geq 1$ ".

Remarque 3.4. U dominant minimal $\Rightarrow |U| \leq B|V|/(B+1)$

Par la remarque précédente, \bar{U} est dominant, et d'après la remarque 3.2 :

$$|\bar{U}| \geq \frac{|V|}{B+1} \Leftrightarrow |U| \leq \frac{B|V|}{B+1}.$$

Conclusion: avec $\beta_{DS} \geq |V|/(B+1)$ (*l'optimum est lui-même dominant*), $\omega_{DS} = |V|$ (*la pire solution consiste à prendre tous les sommets*) et $|U| \leq B|V|/(B+1)$, on obtient le rapport

$$\delta_{DS}(G, U) = \frac{\omega_{DS} - |U|}{\omega_{DS} - \beta_{DS}} = \frac{n - |U|}{n - \beta_{DS}} \geq \frac{1}{B} \diamond$$

Lemme 3.4. $Max IS - B, Min VC - B \in GLO[\delta]$

Preuve: d'après le résultat $Max IS - B \in GLO$ établi dans [11] et la similarité qui unit l'approximation différentielle des problèmes $Max IS$ et $Min VC$.

Le graphe G est toujours à degré borné par B . Un stable est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents, une couverture est un ensemble U de sommets tel que l'une au moins des deux extrémités de toute arête de E se trouve dans U . Pour $Max IS$, il s'agit de

déterminer un stable de taille maximum, pour $MinVC$, une couverture de taille minimum. Ces deux problèmes sont deux expressions d'un seul puisque le complémentaire de tout stable est une couverture et le complémentaire de toute couverture est un stable :

$$U \text{ stable} \Leftrightarrow \langle U, U \rangle = \emptyset \Leftrightarrow E = \langle \bar{U}, V \rangle \Leftrightarrow \bar{U} \text{ couverture.}$$

Encore une fois, ces deux problèmes étant liés par une transformation affine de leur fonction objectif, ils sont totalement équivalents sous le rapport différentiel :

$$MaxIS \stackrel{AF}{\Leftrightarrow} MinVC \quad \text{et} \quad MaxIS - B \stackrel{AF}{\Leftrightarrow} MinVC - B.$$

Or, l'appartenance de $MaxIS - B$ à la classe GLO a été montrée par dominance d'un stable maximal dans [11], avec un rapport d'approximation de $1/B$: on en déduit l'appartenance des deux problèmes $MaxIS - B$ et $MinVC - B$ à la classe $GLO[\delta]$, par les voisinages 1-bornés, pour un rapport différentiel de $1/B \diamond$

Remarque 3.5. Si B n'est plus seulement une borne mais le nombre exacte de sommets adjacents à tout sommet, soit dans le cas de graphes B -réguliers, le rapport d'approximation différentiel de tout optimum 1-local des problème de *Stable* et de *Couverture de sommets* est porté, pour des graphes connexes, à $2/(B + 1)$. Effectivement, on remarque alors que, pour la couverture de sommets, toute solution d'une instance I doit intégrer au moins m/B sommets pour couvrir tout E , chaque sommets permettant de couvrir au plus B arêtes ; or, dans le cadre de graphes B -réguliers, les nombres m et n d'arêtes et de sommets sont liés par la relation :

$$2 \times m = 2|E| = \sum_{j=1}^n d(v_j) = B \times n.$$

Ainsi, de $\beta_{VC}(I) \geq m/B$ on déduit $\beta_{VC}(I) \geq n/2$, et le rapport différentiel d'approximation d'une couverture minimale U , qui est toujours de taille au plus $n \times B/(B + 1)$ par la dominance de \bar{U} , réalise un rapport différentiel de :

$$\delta_{VC}(I, U) = \frac{n - |U|}{n - \beta_{VC}(I)} \geq \frac{1/(B + 1)}{1/2} = \frac{2}{B + 1} \diamond$$

3.4 Limite des voisinages h -bornés

Considérons le problème $MinDS$, sans borne sur le degré des sommets. Pour le voisinage 1-borné, les optima locaux de $MinDS$ ne garantissent aucun rapport puisque l'on peut construire une famille $(G_n)_{n \geq 1}$ de graphes en étoile de façon à exhiber sur cette famille une suite d'optima locaux U_n tels que

$$\rho_{DS}(G_n, U_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \delta_{DS}(G_n, U_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Effectivement, si pour tout $n \in \mathbb{N}$ le graphe G_n est défini par

$$\forall n \geq 1, \quad G_n = (\{r\} \cup V_n, E_n) \quad \text{avec} \quad V_n = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad \text{et} \quad E_n = \{r\} \times V_n,$$

et que l'on considère la solution approchée $U_n = V_n$ de valeur n , alors

$$\begin{aligned} \beta_{DS}(G) = 1 \text{ pour } U^* = \{r\} \quad \text{et} \quad \omega_{DS}(G) = n + 1 \text{ pour } U_W = \{r\} \cup V_n \\ \Rightarrow \quad \rho_{DS}(G_n, U_n) = \delta_{DS}(G_n, U_n) = 1/n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \diamond \end{aligned}$$

Pourtant, il suffit simplement d'élargir le voisinage 1-borné $\mathcal{V}(G, U)$ à une solution supplémentaire, la solution complémentaire $\bar{U} = V \setminus U$, pour obtenir un rapport différentiel de $1/2$: l'ensemble de voisins $\mathcal{V}'(G, U) = \mathcal{V}(G, U) \cup \{\bar{U}\}$ reste polynomial en taille et en temps de construction et tout optimum local U au sens de \mathcal{V}' nous assure toujours, en tant qu'optimum 1-local, la dominance de \bar{U} , mais aussi $|U| \leq |\bar{U}| \Rightarrow |U| \leq |V|/2 \diamond$

Cet exemple illustre l'intérêt que l'on pourrait avoir à considérer conjointement une solution s et sa solution complémentaire $\bar{I} - s$, à la fois proches étant le miroir l'une de l'autre, et éloignées puisqu'elles ne coïncident sur aucune composante. La famille des voisinages du type $\mathcal{V}(I, s) \cup \mathcal{V}(I, \bar{I} - s)$ ou $\mathcal{V}(I, s) \cup \{\bar{I} - s\}$ pour un voisinage h -borné \mathcal{V} est une extension du concept de voisinage h -borné qui intègre cette notion de complémentarité: on s'intéresse aux solutions distantes de h ou $p(|I|) - h$ au lieu des seules solutions h -distantes de la solution courante. De tels voisinages ont été définis et exploités dans [3] et semblent être une source d'inspiration prolifique pour la conception d'algorithmes approchés par la recherche locale. Une définition de tels voisinages et leur application aux problèmes de satisfaisabilité seront présentées au chapitre 6.

3.5 Réductions préservant l'approximation locale

Qui dit classe dit réduction: nous l'avons vu, la réduction est un outil puissant qui permet d'ordonner les problèmes à l'aide de classes en fonction de leur complexité de résolution mais aussi, de façon plus atomique, de déduire des résultats d'approximation d'un problème à un autre. Le but étant de préserver l'appartenance aux classes $GLO[R]$, il faut pouvoir transposer à la fois une structure de voisinage et un rapport de performance d'un problème à un autre. Soient Π et Π' deux problèmes de NPO , nous voulons une réduction de Π à Π' qui permet, si Π' garantit la qualité de ses optima locaux pour un voisinage \mathcal{V}' , de déduire un voisinage \mathcal{V} pour Π tel que tous les optima locaux définis par \mathcal{V} garantissent également un certain niveau d'approximation. Les besoins sont donc de deux ordres: il faut

d'une part préserver l'approximation à rapport constant (par exemple par une A -réduction), d'autre part pouvoir relier, afin d'être en mesure d'utiliser cette préservation du niveau d'approximation, tout optimum local du problème de départ à un optimum local du problème d'arrivée. On exigera donc du triplet (f, g, c) les deux conditions de performance et de localité suivantes :

Conditions 3.5.

performance : $R2_{\Pi'}(f(I), s') \geq r \Rightarrow R1_{\Pi}(I, g(s')) \geq c(r)$ pour $R1, R2 \in \{\rho, \delta\}$,

localité : \tilde{s} optimum local de $I \Rightarrow \exists \tilde{s}'$ optimum local sur $f(I) / m_{\Pi}(I, \tilde{s}) \succeq m_{\Pi}(I, g(\tilde{s}'))$.

Plusieurs moyens de préserver le niveau d'approximation ont déjà été présentés au cours du chapitre précédent à l'occasion du paragraphe 2.6.1 ; en revanche, nous n'avons pas encore évoqué la façon de préserver la localité : c'est l'objet de la section suivante. Puisqu'il s'agit de préserver l'optimalité locale par la transposition, d'un problème à un autre, d'une structure de voisinage, nous parlerons de *réduction de voisinage*.

3.5.1 Préserver le voisinage

Définition 3.8. Réduction de voisinage

Une réduction $\mathcal{R} = (f, g)$ entre deux problèmes Π et Π' de NPO est une *réduction de voisinage* si elle vérifie :

$\forall h' \in \mathbb{N}, \forall \mathcal{V}'$ voisinage h' -borné sur $f(I), \exists h \in \mathbb{N}, \exists \mathcal{V}$ voisinage h -borné sur I
t.q. $\forall I \in I_{\Pi}$, les solutions de I vérifient la condition de *localité* relativement à \mathcal{V} et \mathcal{V}'
i.e. $\forall \tilde{s}$ optimum sur $\mathcal{V}(I, \tilde{s}), \exists \tilde{s}'$ optimum sur $\mathcal{V}'(f(I), \tilde{s}')$ t.q. $m_{\Pi}(I, \tilde{s}) \succeq m_{\Pi}(I, g(\tilde{s}'))$.

La *LOC*-réduction

Nous présentons dans un premier temps la réduction de voisinage proposée par Ausiello et Protasi dans [11], que nous désignerons par le terme de *LOC*-réduction ("*LOC*" pour *LOCAL*, bien sûr). Les auteurs font la remarque que souvent, une réduction (f, g) met l'ensemble de solutions $Sol_{\Pi}(I)$ en rapport avec un ensemble bien plus important $Sol_{\Pi'}(f(I))$; si cela ne nuit pas à la préservation (*en classique tout du moins*) de qualités d'ordre global, il est en revanche préférable pour la préservation des optima locaux de se restreindre à un sous-ensemble $S_{\Pi'}(f(I))$ de $Sol_{\Pi'}(f(I))$, qui soit en quelque sorte "*une image combinatoire de $Sol_{\Pi}(I)$* ". Le rôle d'une *LOC*-réduction (f, g) est d'associer à tout voisinage h' -borné sur I un voisinage h -borné sur I , de sorte de pouvoir, si s et s' sont deux solutions de $Sol_{\Pi}(I)$ et de $S_{\Pi'}(f(I))$ reliées par la fonction g (*i.e.* $s = g(s')$), déduire de l'optimalité locale de s

sur $Sol_{\Pi}(I)$ l'optimalité locale de s' sur $S_{\Pi'}(I)$. Les solutions de $S_{\Pi'}(f(I))$ étant constitué des “bonnes” solutions de $Sol_{\Pi'}(f(I))$, il suffit que s' soit optimum local sur $S_{\Pi'}(f(I))$ pour l'être sur $Sol_{\Pi'}(f(I))$, permettant ainsi de vérifier comme il se doit la condition de *localité* demandée.

Pour répondre aux exigences d'une réduction de voisinage, la *LOC*-réduction s'appuie donc sur un sous-ensemble $S_{\Pi'}(f(I))$ de $Sol_{\Pi'}(f(I))$ et se munit de quatre propriétés. La *surjectivité* tout d'abord, qui permet de recouvrir $Sol_{\Pi}(I)$ par $g(S_{\Pi'}(f(I)))$, car si l'on se restreint à un sous-ensemble de solutions de l'instance image, on veut néanmoins que celui-ci permette de relier toute solution de l'instance initiale à une solution de l'ensemble $S_{\Pi'}(f(I))$ considéré :

$$g(S_{\Pi}(f(I))) = Sol_{\Pi}(f, g) \Leftrightarrow \forall \tilde{s} \in Sol_{\Pi}(I), \exists s' \in S_{\Pi'}(f(I)) / s = g(s').$$

La *monotonie partielle* ensuite, qui traduit la *stricte monotonie* réduite à l'ensemble $S_{\Pi'}(f(I))$: si sur cet ensemble une solution est strictement meilleure qu'une autre, il devra en être de même de leurs images par g sur $Sol_{\Pi}(I)$. Cela nous permettra de préserver l'optimalité locale des solutions de $Sol_{\Pi}(I)$ à $S_{\Pi'}(f(I))$, car alors, si une solution s est au moins aussi bonne qu'une autre solution t de I , on déduira des solutions $g^{-1}(s) \cap S_{\Pi'}(f(I))$ qu'elles sont également, sur $f(I)$, au moins aussi bonnes que les solutions de $g^{-1}(t) \cap S_{\Pi'}(f(I))$.

Remarque 3.6. Si la réduction (f, g) vérifie la propriété de *monotonie partielle* alors on a :

$$“\forall I \in I_{\Pi}, \forall S' \subseteq S_{\Pi'}(f(I)), \forall s' \in S', g(s') \text{ optimum sur } g(S') \Rightarrow s' \text{ optimum sur } S'”.$$

Une fois les solutions de $Sol_{\Pi}(I)$ et $S_{\Pi'}(f(I))$ reliées de la sorte par leur performances relatives, il faut à présent introduire des outils qui permettent de transporter, de $f(I)$ à I , des structures de voisinage. Considérons deux voisinages \mathcal{V}' et \mathcal{V} , respectivement pour Π' et Π ; nous rappelons que le but est de relier à tout optimum local s de I un optimum local s' de $f(I)$ tel que s est au moins aussi bonne solution que $g(s')$, dans l'idée de transporter l'éventuel bon comportement des optima locaux de Π' sur les optima locaux de Π . Pour ce, on définit dans un premier temps la propriété de *localité* qui n'est autre que la *surjectivité de voisinage* réduite à l'ensemble $S_{\Pi}(f(I))$: cette propriété exige que l'image $g(s')$ de toute solution t' voisine d'une solution s' de $S_{\Pi'}(f(I))$ sur $\mathcal{V}(I, s') \cap S_{\Pi'}(f(I))$ soit également voisine de $g(s')$ sur $Sol_{\Pi}(I)$. Ainsi, on sera en mesure de déduire de l'optimalité locale d'une solution s de $Sol_{\Pi}(I)$ l'optimalité locale des solutions $g^{-1}(s) \cap S_{\Pi}(f(I))$ sur $S_{\Pi}(f(I))$.

Remarque 3.7. Si (f, g) vérifie la propriété de *localité*, on déduit pour toute solution s' de

$S_{\Pi'}(f(I))$:

“ $g(s')$ optimum sur $\mathcal{V}(I, g(s')) \Rightarrow g(s')$ optimum sur $g(\mathcal{V}'(f(I), s') \cap S_{\Pi'}(f(I)))$ ”.

Il ne reste plus alors qu'à se ramener à tout $Sol_{\Pi'}(f(I))$, par la propriété de *dominance*, qui exige que tout optimum local sur $S_{\Pi'}(f(I))$ soit en réalité optimum local sur tout $Sol_{\Pi'}(f(I))$; ainsi, $S_{\Pi'}(f(I))$ suffit bien à relier les optima locaux de $Sol_{\Pi}(I)$ à ceux de $Sol_{\Pi'}(f(I))$.

Définition 3.9. *LOC-réduction*

Une réduction $\mathcal{R} = (f, g)$ entre deux problèmes Π et Π' de *NPO* est une *LOC-réduction* si elle vérifie les propriétés suivantes (*on note pour toute instance I de I_{Π} $I' = f(I)$*):

a) $\forall I \in I_{\Pi}, \exists S_{\Pi'}(I') \subseteq Sol_{\Pi'}(I')$ t.q.

i) *surjectivité*:

$$g(S_{\Pi'}(I')) = Sol_{\Pi}(I)$$

pour rapprocher une solution s de $Sol_{\Pi}(I)$ d'une solution $s' \in g^{-1}(s)$ de $S_{\Pi'}(I')$

ii) *monotonie partielle*:

$$\forall s', t' \in S_{\Pi'}(I'), m_{\Pi'}(I', s') \prec m_{\Pi'}(I', t') \Rightarrow m_{\Pi}(I, g(s')) \prec m_{\Pi}(I, g(t'))$$

pour la préservation de l'ordre relatif des solutions de $Sol_{\Pi}(I)$ à $S_{\Pi'}(I')$

b) $\forall h'$ constante, $\exists h$ constante t.q.

iii) *localité*:

$\forall \mathcal{V}'$ voisinage h' -borné pour Π' , $\exists \mathcal{V}$ h -borné pour Π vérifiant

$$\forall I \in I_{\Pi}, \forall s' \in S_{\Pi'}(I'), g(\mathcal{V}'(I', s') \cap S_{\Pi'}(I')) \subseteq \mathcal{V}(I, g(s'))$$

pour déduire de l'optimalité locale de s sur $Sol_{\Pi}(I)$ l'optimalité locale de s' sur $S_{\Pi'}(I')$

iv) *dominance*:

$$\forall t' \in S_{\Pi'}(I'), t' \text{ optimum sur } S_{\Pi'}(I') \cap \mathcal{V}'(I', t') \Rightarrow t' \text{ optimum sur } \mathcal{V}'(I', t')$$

pour déduire de l'optimalité locale de s' sur $S_{\Pi'}(I')$ l'optimalité locale de s' sur $Sol_{\Pi'}(I')$.

Proposition 3.6. Une *LOC-réduction* \mathcal{R} entre deux problèmes Π et Π' de *NPO* est une *réduction de voisinage*.

Preuve

Soient \mathcal{V} le voisinage h -borné induit sur Π par la propriété de *localité*, I une instance de I_{Π} et \tilde{s} un optimum local de I relativement à ce voisinage; on déduit successivement des

propriétés de la *LOC*-réduction :

$$\begin{aligned}
& \text{(surjectivité)} && \exists \tilde{s}' \in S_{\Pi'}(I') / \tilde{s} = g(\tilde{s}') \\
\Rightarrow & \text{(localité)} && g(V'(I', \tilde{s}') \cap S_{\Pi'}(I')) \subseteq V(I, \tilde{s}) \\
\Rightarrow & \text{(monotonie partielle)} && \tilde{s}' \text{ optimum sur } V'(I', \tilde{s}') \cap S_{\Pi'}(I') \\
\Rightarrow & \text{(dominance)} && \tilde{s}' \text{ optimum sur } V'(I', \tilde{s}') \quad \diamond
\end{aligned}$$

Exemple 3.2. : les problèmes *Min VC* et *Min DS*

Proposition 3.7.

$$\text{Min VC} - \Delta \stackrel{LOC}{\infty} \text{Min DS} - (2 \times \Delta)$$

Preuve : d'après [74]

Soit $I = G(V, E)$ une instance de *Min VC* - Δ où $|V| = n$ et $|E| = m$, on lui associe l'instance $I' = H(W, F)$ de *Min DS* - $(2 \times \Delta)$ suivante :

$$\begin{aligned}
W &= V \cup V^E, & V^E &= \{v^1, \dots, v^m\} && \Rightarrow |W| = m + n \\
F &= E \cup E^V, & E^V &= \{v_{i_1}v^i, v_{i_2}v^i \mid e_i = v_{i_1}v_{i_2} \in E\} && \Rightarrow |F| = 3m.
\end{aligned}$$

Si le degré de tout sommet $v \in V$ de l'instance initiale est borné par Δ , le degré de tout sommet $w \in W$ de l'instance image sera borné par $2 \times \Delta$: si $w = v \in V$, à chaque fois que v est adjacent à un sommet v' dans G , il sera dans H adjacent à ce même sommet v' , ainsi qu'au sommet e_i représentant dans V^E de l'arête vv' ; si $w = e_i \in V^E$, c'est qu'il correspond à une arête $v_{i_1}v_{i_2}$ de G et il sera alors seulement adjacent dans H aux deux extrémités v_{i_1} et v_{i_2} de l'arête du graphe initial.

Les couvertures U des arêtes de E sur G sont les ensembles dominants sur W contenus dans V , et les solutions comprenant des sommets de V^E sont toujours dominées par une telle solution : étant donnée une arête e_i , on peut toujours, pour couvrir les sommets v_{i_1} , v_{i_2} et v^i , remplacer v^i par l'une des extrémités v_{i_1} ou v_{i_2} . Nous allons donc considérer comme sous-ensemble de solutions réalisables du problème d'ensemble dominant I' les solutions correspondant à des solutions du problème initial, soit $S_{DS}(I') = \text{Sol}_{VC}(I)$. La première propriété (i) de surjectivité est donc bien vérifiée ; on vérifie aussi facilement les propriétés (ii) et (iii) en associant à tout ensemble dominant D de $S_{DS}(I')$ la couverture $g(D) = D$: la monotonie est clairement vérifiée et pour toute constante h , les voisins relativement à tout voisinage \mathcal{V} h -borné d'une solution $g(D) = D$ coïncident avec l'image par g des voisins de D pour ce même voisinage, soit $g(\mathcal{V}(I', D) \cap S_{DS}(I')) = \mathcal{V}(I, D) = \mathcal{V}(I, g(D))$. Enfin, la propriété (iv) de dominance est naturellement vérifiée, puisque c'est elle-même qui nous suggère le choix de $S_{DS}(I')$: un ensemble D optimum sur $\mathcal{V}(I', D) \cap S_{DS}(I')$ sera optimum sur tout $\mathcal{V}(I', D)$, la considération de sommets de V^E ne pouvant, au mieux, que ne pas dégrader la solution \diamond

Notons que cette réduction, conçue pour préserver le schéma d'approximation et prouver la complétude de *Min VC* - B dans *Max SNP*, préserve également le rapport constant classique ($\beta_{VC}(I) = \beta_{DS}(I')$) et de tout ensemble dominant D sur I' on sait déduire en temps

polynomial une couverture U de taille inférieure ou égale); en revanche, elle ne préserve pas l'approximation différentielle ($\omega_{DS}(I') = \omega_{VC}(I) + m$).

La LOC' -réduction

Souvent il est agréable de disposer de différents outils quant il s'agit de tenter de relier les problèmes entre-eux; le chapitre 7 consacré aux réductions dans les classes GLO l'illustre bien, les deux réductions LOC et LOC' étant utilisées tour à tour. Pour construire notre réduction de voisinage, nous imposons les trois propriétés de surjectivité, de stricte monotonie et de surjectivité relativement aux voisinages h -bornés. En réalité, la LOC' -réduction peut être vue comme une LOC -réduction qui considère non plus un sous-ensemble de solutions de l'instance image, mais l'ensemble entier $Sol_{\Pi'}(f(I))$. Ainsi, la *surjectivité* réduite à $S_{\Pi'}(f(I))$ redevient la *surjectivité* classique, la *monotonie partielle* une *stricte monotonie* des solutions de $Sol_{\Pi'}(f(I))$ à leur image par la fonction g dans $Sol_{\Pi}(I)$, la *localité* s'étend de la restriction du voisinage d'une solutions à $S_{\Pi'}(f(I))$ au voisinage entier devenant la *surjectivité de voisinage*, et la propriété de *dominance* disparaît. La motivation dans ce cas d'une telle définition de réduction, plus exigeante que la précédente, tient simplement en la simplicité relative qu'elle apporte et le lien plus intime qu'elle traduit entre les ensembles de solutions, lien qu'il est toujours intéressant de mettre à jour.

Définition 3.10. Réduction strictement monotone

Une réduction (f, g) est strictement monotone si elle vérifie :

$$\forall I \in I_{\Pi}, \forall (s', t') \in Sol_{\Pi'}(f(I)), \\ m_{\Pi'}(f(I), t') \succ m_{\Pi'}(f(I), s') \Rightarrow m_{\Pi}(I, g(t')) \succ m_{\Pi}(I, g(s')).$$

Remarque 3.8. Si (f, g) est strictement monotone alors on a la propriété

$$“\forall I \in I_{\Pi}, \forall S' \subseteq Sol_{\Pi'}(f(I)), \forall \tilde{s}' \in S', g(\tilde{s}') \text{ optimum sur } g(S') \Rightarrow \tilde{s}' \text{ optimum sur } S'”$$

Définition 3.11. Réduction voisinage-surjective

Une réduction (f, g) est voisinage-surjective si et seulement si

$$\forall \mathcal{V}' \text{ voisinage } h' \text{-borné pour } \Pi', \exists \mathcal{V} \text{ voisinage } h \text{-borné pour } \Pi \quad t.q. \\ \forall I \in I_{\Pi}, \forall s' \in Sol_{\Pi'}(f(I)), g(\mathcal{V}'(f(I), s')) \subseteq \mathcal{V}(I, g(s')).$$

Remarque 3.9. C'est notamment le cas si la fonction g préserve les distances de l'instance $f(I)$ à l'instance I en posant $\mathcal{V} = g(\mathcal{V}')$.

Remarque 3.10. Si (f, g) est voisinage-surjective alors les solutions des problèmes sont liées par la relation :

$$“\forall \tilde{s}' \in Sol_{\Pi'}(f(I)), g(\tilde{s}') \text{ optimum sur } \mathcal{V}(I, g(\tilde{s}')) \Rightarrow g(\tilde{s}') \text{ optimum sur } g(\mathcal{V}'(f(I), \tilde{s}'))”.$$

Définition 3.12. *LOC'* - Réduction préservant la structure locale

Une *LOC'*-réduction d'un problème Π à un problème Π' est une réduction \mathcal{R} qui vérifie :

- (i) \mathcal{R} surjective, (ii) \mathcal{R} strictement monotone, (iii) \mathcal{R} voisinage-surjective.

Proposition 3.8. Une *LOC'*-réduction \mathcal{R} entre deux problèmes Π et Π' de *NPO* est une réduction de voisinage.

Preuve

Soit \mathcal{V} le voisinage h -borné induit sur Π par la réduction $\mathcal{R} = (f, g)$ et un voisinage \mathcal{V}' h' -borné pour Π' , et soit \tilde{s} un optimum local de I au sens de \mathcal{V} ; on sait par surjectivité de \mathcal{R} : “ $\exists \tilde{s}' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)) / \tilde{s} = g(\tilde{s}')$ ”. Il vient alors :

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{s} \text{ optimum sur } \mathcal{V}(I, \tilde{s}) \\ \tilde{s} = g(\tilde{s}') \\ \text{remarque 3.10} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \tilde{s} \text{ optimum sur } \\ g(\mathcal{V}'(f(I), \tilde{s}')) \\ \text{remarque 3.8} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \tilde{s}' \text{ optimum sur } \mathcal{V}'(f(I), \tilde{s}') \\ \Leftrightarrow \tilde{s}' \text{ optimum local de } f(I) \quad \diamond \end{array}$$

Nous avons, dans la définition même des *LOC'*-réductions, cité explicitement la structure de voisinage h -borné, et cela dans l'unique but d'alléger la notation, étant donné que nous ne travaillons pour l'instant qu'avec cette seule structure de voisinage. Cependant, la *LOC*-réduction comme la *LOC'*-réduction aspirent à plus d'universalité que cela et on voit facilement que de telles transformations peuvent être définies pour toute structure de voisinage considérée. Nous utiliserons notamment au chapitre 7 des *LOC'*-réduction sur des structures de voisinages miroirs h -bornés, qui considèrent conjointement les solutions *au plus h -distantes* et *au moins $n - h$ -distantes* d'une solution donnée, si n désigne la taille de la solution, et cela pour comparer des problèmes du point de vue de leur appartenance aux classes *CGLO*[R], définies au chapitre 6, paragraphe 6.2.

Remarque 3.11. Toute *LOC'*-réduction est *LOC*-réduction.

Preuve : évident avec $S_{\Pi'}(I') = \text{Sol}_{\Pi'}(I')$ pour toute instance I du problème initial \diamond

Remarque 3.12. En revanche, toute *LOC*-réduction n'est pas une *LOC'*-réduction.

Effectivement, les propriétés de monotonie, de surjectivité et de localité sont demandées sur un sous-ensemble de l'ensemble des solutions de l'instance d'arrivée et non sur l'ensemble entier, d'où la propriété supplémentaire de dominance: on met en relation les ensembles $\text{Sol}_{\Pi}(I)$ et $S_{\Pi'}(I')$ au lieu des ensembles $\text{Sol}_{\Pi}(I)$ et $\text{Sol}_{\Pi'}(I')$. Cela permet de mettre de côté dans l'instance d'arrivée de mauvaises solutions qui pourraient mettre à défaut la stricte monotonie et qui sont non pertinentes pour l'établissement d'un rapport d'approximation. Notons que ce raffinement de la réduction par rapport à une réduction de type *LOC'* semble malheureusement peu exploitable en différentiel du fait de la prise en compte de la pire solution : les solutions évincées, justement parce qu'elles sont dominées, peuvent dégrader la

pire solution, de sorte que la réduction entre les deux instances, si elle est une A -réduction, ne sera que rarement une $A[\delta]$ -réduction.

Remarque 3.13. La *Stricte – PLS*-réduction définie par Jonhson, Papadimitriou et Yannakakis dans [55] pour transporter les algorithmes de recherche locale (*LSA*) d'un problème à un autre est très proche de la réduction de voisinage, avec toutefois la restriction que les voisinages \mathcal{V} et \mathcal{V}' sont fixés : on ne s'intéresse pas alors seulement aux problèmes mais aux couples (problèmes,voisinage); cette réduction et de façon plus globale les concepts manipulés dans [55] seront présentés au chapitre 5.1.

3.5.2 La réduction dans $GLO[R]$

Pour obtenir une réduction qui préserve l'appartenance à $GLO[R]$, il suffit maintenant de coupler les propriétés d'une réduction structurelle de voisinage avec celles d'une réduction de performance telle la A -réduction. Puisqu'il existe différentes façons de concevoir de telles réductions (réductions continue et affine pour la performance, *LOC*- et *LOC'*-réductions pour la localité), nous placerons ces différents outils sous le terme générique de G -réduction.

Définition 3.13. G -réduction

Soient Π et Π' deux problèmes de NPO , on dit que Π se G -réduit à Π' et on note $\Pi \stackrel{G[R1,R2]}{\propto} \Pi'$ s'il existe trois fonctions f, g et c qui vérifient pour deux mesures d'approximation $R1$ et $R2$:

- (i) (f, g, c) est une $A[R1, R2]$ -réduction,
- (ii) (f, g) est une réduction de voisinage.

Proposition 3.9.

$$\forall (\Pi, \Pi') \in NPO,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } \Pi \stackrel{G[R1,R2]}{\propto} \Pi' \text{ et } \Pi' \in GLO[R2] \Rightarrow \Pi \in GLO[R1] \\ \text{si } c \text{ fonction continue} \quad \text{(ii) } \Pi \stackrel{G[R1,R2]}{\propto} \Pi' \text{ et } \Pi \notin GLO[R1] \Rightarrow \Pi \notin GLO[R2] \end{array} \right.$$

Preuve

(i) Π' appartient à $GLO[R2]$ si, pour une certaine constante entière h' et un voisinage \mathcal{V}' , il existe une constante strictement positive r' telle que tout optimum local \tilde{s}' de toute instance I' de $I_{\Pi'}$ admet un rapport d'approximation $R2_{\Pi'}(I', \tilde{s}')$ d'au moins r' . Soit alors \mathcal{V} le voisinage h -borné induit sur Π par la réduction de voisinage (f, g) et le voisinage \mathcal{V}' , d'après les propriétés de la réduction de voisinage et de la A -réduction, on a :

$$\begin{aligned} & \forall I \in I_{\Pi}, \quad \forall \tilde{s} \in Sol_{\Pi}(I), \quad \tilde{s} \text{ optimum local de } I \text{ relativement à } \mathcal{V} \\ \Rightarrow & \text{ (réduction de voisinage) } \quad \exists \tilde{s}' \text{ optimum local de } f(I) \text{ pour } \mathcal{V}' / m_{\Pi}(I, \tilde{s}) \succeq m_{\Pi}(I, g(\tilde{s}')) \\ \Rightarrow & \text{ (A-réduction) } \quad R2_{\Pi'}(f(I), \tilde{s}') \geq r' \Rightarrow R1_{\Pi}(I, \tilde{s}) \geq R1_{\Pi}(I, g(\tilde{s}')) \geq c(r') > 0 \quad \diamond^2 \end{aligned}$$

(ii) Si Π n'est pas dans $GLO[R1]$, c'est que l'on peut extraire pour toute constante h une suite $(I_n)_{\mathbb{N}}$ d'instances de I_{Π} et une suite $(\tilde{s}_n)_{\mathbb{N}}$ d'optima h -locaux sur ces instances vérifiant :

$$R1_{\Pi}(I_n, \tilde{s}_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

La réduction de voisinage (f, g) associée à toute constante h' une constante h ; la suite $(\tilde{s}_n)_{\mathbb{N}}$ de “*mauvais*” optima locaux relativement au voisinage h -borné annoncée sur Π peut alors être transportée en une suite de “*mauvais*” optima locaux relativement au voisinage h' -borné sur Π' . Par la réduction de voisinage, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists \tilde{s}'_n \text{ optimum local de } f(I_n) \text{ relativement à } \mathcal{V}' \text{ t.q. } \tilde{s}_n = g(\tilde{s}'_n) ;$$

la A -réduction et la continuité de la fonction c permettent de conclure :

$$R1_{\Pi}(I_n, \tilde{s}_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow R2_{\Pi}(f(I_n), \tilde{s}'_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \diamond$$

Remarque 3.14. Attention, si pour un résultat positif d'appartenance aux classes $GLO[R]$, on peut s'intéresser à des voisinages qui sont des sous-ensembles du voisinage h -borné \mathcal{V}_{Π}^h , pour les résultats négatifs en revanche, et afin d'être certain de transporter les suites de *mauvais optima locaux de I relativement à \mathcal{V} sur $f(I)$ relativement à \mathcal{V}'* , il faut que par \mathcal{V}' , on entende toujours, et pour toute constante h' , le voisinage complet $(\mathcal{V}')_{\Pi'}^{h'}$.

3.5.3 Exemples

Proposition 3.10. D'un problème à un autre...

$$Max SP \stackrel{G}{\propto} Max IS$$

Preuve

Considérons les problèmes $Max SP$ et $Max IS$ et la structure de voisinages h -bornés ; le problème de couplage dans un hypergraphe consiste, étant donnée une collection \mathcal{C} de sous-ensembles C_1, C_2, \dots, C_n d'un ensemble D de taille m , à extraire un nombre maximum de sous-ensembles C_j d'intersection vide, soit à maximiser la quantité

$$p = |\mathcal{C}'|, \mathcal{C}' = \{C_{j_1}, C_{j_2}, \dots, C_{j_p}\} \subseteq \mathcal{C} / \forall k < l \in \{1, \dots, p\}, C_{j_k} \cap C_{j_l} = \emptyset.$$

La réduction naturelle de $Max SP$ à $Max IS$ consiste à construire à partir d'une instance $I = (D, \mathcal{C})$ du premier problème une instance $f(I) = G(V, E)$ du second en associant à

2. les mesures d'approximation étant toujours croissantes en la qualité de la solution !

Preuve

(i) : considérer simplement le fait que, pour un problème de maximisation, les rapports d'approximation vérifient la relation

$$\forall I \in I_{\Pi}, \rho_{\Pi}(I) = \delta_{\Pi}(I) + (1 - \delta_{\Pi}(I)) \frac{\omega_{\Pi}(I)}{\beta_{\Pi}(I)} ;$$

(ii) : considérer maintenant le fait que, pour un problème de minimisation, les rapports d'approximation vérifient la relation

$$\forall I \in I_{\Pi}, \frac{1}{\rho_{\Pi}(I)} = \delta_{\Pi}(I) + (1 - \delta_{\Pi}(I)) \frac{\omega_{\Pi}(I)}{\beta_{\Pi}(I)} \diamond$$

3.6 Récapitulatif des résultats

Pour clarifier la situation des problèmes parcourus au cours de ce chapitre, nous proposons un tableau synthétique traduisant la situation de ces problèmes face aux classes $GLO[R]$. Les signes d'appartenance en caractère gras désignent notre contribution à ces résultats, du moment que les preuves sont originales (l'établissement, par exemple, de l'appartenance des problèmes $MinVC - B$ et $MinDS - B$ à la classe $GLO[\delta]$ découle des arguments ou résultats proposés dans [11]).

Problème considéré	GLO	Rapport	Voisinage	$GLO[\delta]$	Rapport	Voisinage
$MinDS - B$	O	$1/B$	1 – borné	O	$1/B$	1 – borné
$MinVC - B$	O	$1/B$	1 – borné	O	$1/B$	1 – borné
$MaxIS - B$	O	$1/B$	1 – borné	O	$1/B$	1 – borné
$MaxCut$	O	$1/2$	1 – borné	O	$1/2$	1 – borné
$MinRVC - B^3$	O	$2/(B+1)$	1 – borné	O	$2/(B+1)$	1 – borné
$MaxRIS - B^3$	O	$2/(B+1)$	1 – borné	O	$2/(B+1)$	1 – borné

Problème considéré	$CGLO^4$	Rapport	Voisinage	$CGLO[\delta]^4$	Rapport	Voisinage
$MinDS$	N ($\neg APX$)	–	–	O	$1/2$	1 – borné

3. $MinRVC - B$ et $MinRIS - B$ désignent les restrictions de $MinVC$ et $MaxIS$ à des graphes réguliers de degré B

4. les classes $CGLO$ et $CGLO[\delta]$, extensions des classes $GLO[R]$ aux solutions complémentaires, sont définies au chapitre 6

Chapitre 4

Quelques résultats

Par la suite, on désigne par $GLO[R](h)$ l'ensemble des problèmes qui garantissent la qualité de leurs optima locaux pour la mesure d'approximation R relativement à une fonction voisinage h -bornée. Nous nous intéressons dans ce chapitre à des problèmes dont, à notre connaissance, l'appartenance aux classes $GLO[R]$ n'a pas encore fait l'objet d'étude, et nous focalisons plus particulièrement sur le rapport différentiel et la classe $GLO[\delta]$.

4.1 Des voisinages 1-bornés

4.1.1 Problèmes de partitionnement héréditaire

Définition 4.1. Propriété héréditaire

Une propriété P est héréditaire si elle vérifie

$$\forall X, \forall Y \subseteq X, P(X) \Rightarrow P(Y).$$

Exemples: stable, clique...

Définition 4.2. P -partition

Soit P une propriété et X un ensemble, une P -partition de X est un ensemble $\mathcal{S} = \{V_1, \dots, V_q\}$ de sous-ensembles de X qui vérifie les trois propriétés

$$(\cup_{i=1}^q V_i = X), \quad (\forall i, j = 1, \dots, q, i \neq j \Rightarrow V_i \cap V_j = \emptyset) \quad \text{et} \quad (\forall i = 1, \dots, q, P(V_i)).$$

Définition 4.3. Problème de partitionnement héréditaire

Soit Π un problème de NPO dont les instances sont la donnée d'un ensemble X et éventuellement d'une valuation $p : X \rightarrow \mathbb{N}$ des éléments de X ; Π est un problème de partitionnement héréditaire s'il existe une propriété héréditaire P telle que toute instance I de Π revient à résoudre un problème du type :

$$\beta_{\Pi}(I) = \min \left\{ \sum_{i=1}^q \alpha(V_i) \mid \mathcal{S} = \{V_1, \dots, V_q\} \text{ } P\text{-partition de } V \right\}$$

où α est une fonction d'évaluation des ensembles de type indicatrice notée $\|\cdot\|$, poids maximum, poids moyen...

Exemples: coloration (*Min C*), partition en cliques (*Max P - Cl*), bin-packing (*Min BP*)...

Le problème de coloration partage les sommets en un nombre minimum de stables, celui de partition en cliques en un nombre minimum de cliques, tandis que le problème de bin-packing relève du rangement d'éléments dans un nombre minimum de boîtes, de sorte que la somme des volumes des objets dans une boîte n'excède pas le volume de la boîte. La stabilité, la clique, la majoration, sont toutes trois des propriétés héréditaires.

Théorème 4.1. *Si Π est un problème de partitionnement héréditaire d'évaluation $\alpha = \|\cdot\|$ alors $\Pi \in GLO[\delta]$.*

Preuve: tout optimum local pour le voisinage 1-borné réalise un rapport différentiel de 1/2.

Soit Π un problème de partitionnement héréditaire et $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble à n éléments. Voyant une partition comme une répartition des éléments de X sur au plus n ensembles, on peut représenter toute solution V_1, V_2, \dots, V_q par un vecteur $s \in \{0, 1\}^{n^2}$ qu'il faut interpréter selon :

$$"s_j^i = 1 \iff \text{l'élément } x_i \text{ est dans le sous-ensemble } V_j"$$

et qui vérifie :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^n s_j^i = 1 & \quad s \text{ est une partition} \\ \forall j = q + 1, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^n s_j^i = 0 & \quad \text{seuls les } q \text{ premiers indices sont utilisés.} \end{aligned}$$

La valeur d'une solution pour $\alpha = \|\cdot\|$ est le nombre de sous-ensembles formant la partition et comme ce nombre ne peut excéder la cardinalité n de l'instance, il s'en suit que Π est évidemment polynomialement borné :

$$\forall X \in I_\Pi, \quad \omega_\Pi(X) = |X| = n.$$

Considérons le voisinage \mathcal{V} qui consiste à passer d'une solution à une solution voisine en ne changeant l'affectation que d'un élément et soit $\{V_1, \dots, V_q\}$ un optimum local relativement à ce voisinage. \mathcal{V} est par définition 1-borné et l'optimalité de la partition $\{V_1, \dots, V_q\}$ signifie qu'aucune affectation réalisable d'un élément à un autre sous-ensemble n'améliorerait la solution actuelle : en d'autres termes, il n'est pas dans $\{V_1, \dots, V_q\}$ de singleton que l'on puisse éliminer. Si la solution comporte k singletons, on suppose qu'il s'agit des k premiers

sous-ensembles $V_1 = \{v_1\}, \dots, V_k = \{v_k\}$ et l'on remarque :

$$\forall (i \neq j) \in \{1, \dots, k\}, \neg P(\{v_i, v_j\}) \Rightarrow \forall s \in \text{Sol}_\Pi(X), m_\Pi(X, s) \geq k \Rightarrow \beta_\Pi(X) \geq k$$

P étant héréditaire, les sommets v_1, \dots, v_k seront toujours dans k ensembles distincts.

Par ailleurs, les autres sous-ensembles V_{k+1}, \dots, V_q contenant chacun au moins deux éléments, ils vérifient

$$\sum_{i=k+1}^q |V_i| = n - k \geq 2(q - k) \Leftrightarrow q \leq (n + k)/2.$$

Et la conclusion s'impose

$$\delta_\Pi(X, \{V_1, \dots, V_q\}) = \frac{\omega_\Pi(X) - q}{\omega_\Pi(X) - \beta_\Pi(X)} \geq \frac{n - (n + k)/2}{n - k} = \frac{1}{2} \diamond$$

Ce résultat, par l'apparente naïveté de la solution approchée, n'est cependant pas si anodin puisqu'il égale le rapport obtenu pour le problème de coloration minimum dans [31] (monté à 3/4 depuis [46]) ; mais il laisse surtout augurer de meilleures approximations à l'aide d'une analyse un peu plus fine, avec des voisinages un peu plus grands.

Corollaire 4.2. *Les problèmes de partitionnement héréditaire à taille bornée sont dans GLO.*

Preuve

Soient B une constante et Π un problème de partitionnement héréditaire, la version B -bornée de Π est le problème Π' dont les instances consistent à résoudre le système

$$\beta_{\Pi'}(I) = \begin{cases} \min_{\mathcal{S}} m_\Pi(I, \mathcal{S}) \\ \mathcal{S} = \{V_1, \dots, V_q\} \text{ P-partition} \\ \forall i = 1, \dots, q, |V_i| \leq B. \end{cases}$$

Comme cas particulier du problème Π dont l'appartenance à la classe $GLO[\delta]$ vient d'être établie, Π' est également élément de la classe ; or, on remarque facilement que les valeurs d'une pire et d'une meilleure solutions de toute instance I de Π' sont liées par la relation " $\omega_{\Pi'}(I) \leq B\beta_{\Pi'}(I)$ " :

$$\forall I \in I_{\Pi'}, \beta_{\Pi'}(I) \geq \frac{|X|}{B} = \frac{\omega_{\Pi'}(I)}{B}.$$

Par application immédiate de la proposition 3.11 pour un problème de *minimisation*, on déduit de cette relation la $G[\rho, \delta]$ -réduction de Π' à lui-même, qui mène directement à la conclusion : les optima 1-locaux \tilde{s} de toute instance de Π' garantissent un rapport classique $\rho_{\Pi'}(I, \tilde{s})$ vérifiant :

$$1/\rho_{\Pi'}(I, \tilde{s}) \leq 1/2 + 1/2B \Leftrightarrow \rho_{\Pi'}(I, \tilde{s}) \geq \frac{2}{B+1} \diamond$$

4.1.2 Couverture d'ensembles

Une instance $I = (C, S)$ du problème de couverture d'ensembles minimum est la donnée de

$$\begin{aligned} C &: \{c_1, c_2, \dots, c_m\} && \text{ensemble d'éléments à couvrir} \\ S &: \{S_1, S_2, \dots, S_n\} \subseteq \mathcal{P}(C) && \text{famille de sous-ensembles d'éléments de } C \text{ d'union } C. \end{aligned}$$

Le but est de trouver un ensemble $\tilde{S} \subseteq S$ de cardinalité minimum qui recouvre C . On se restreint ici aux instances B -bornées, c'est-à-dire aux instances $I = (C, S)$ dont tous les sous-ensembles S_i de la famille S vérifient $|S_i| \leq B$.

Proposition 4.3. $Min SC - B \in GLO[\delta]$

Preuve : tout optimum local pour le voisinage 1-borné réalise un rapport différentiel de $1/(B+1)$.

La valeur d'une solution \tilde{S} est donnée par $m_{SC}(I, \tilde{S}) = |\tilde{S}|$. Il s'agit d'un problème polynomialement borné puisque la pire solution, consistant à sélectionner tout S , est de valeur n . Le voisinage 1-borné désigne ici comme voisine d'une solution \tilde{S} toute sélection \tilde{S}' dont au plus un sous-ensemble diffère de \tilde{S} ; les optima locaux pour ce voisinage sont simplement des solutions minimales.

Considérons une couverture $\tilde{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_p\}$ de taille p ; \tilde{S} est une couverture minimale si elle vérifie

$$\begin{aligned} (SC1) \quad & \forall i = 1, \dots, m, \quad \exists j \in \{1, \dots, p\} \quad / \quad c_j \in S_j \\ (SC2) \quad & \forall j = 1, \dots, p, \quad \exists i_j \in \{1, \dots, m\} \quad / \quad (c_{i_j} \in S_j) \wedge (\forall j' \neq j \in \{1, \dots, p\}, c_{i_j} \notin S_{j'}). \end{aligned}$$

(SC1) traduit la réalisabilité de la solution \tilde{S} , (SC2) sa minimalité. Par (SC2), on sait qu'on peut construire un ensemble $\tilde{C} = \{c_{i_1}, \dots, c_{i_p}\}$ de p éléments distincts (un élément par sous-ensemble S_j de la couverture) qui vérifient :

$$\forall c_{i'} \in \tilde{C}, \exists ! j \in \{1, \dots, p\} \quad / \quad c_{i'} \in S_j.$$

Si l'instance initiale est telle que tout élément $c_i \in C$ apparaît dans au moins deux sous-ensembles S_j , alors c'est en particulier vrai des éléments $c'_1, \dots, c'_{p'}$; ceux-ci ne pouvant, par construction, appartenir à un second sous-ensemble de \tilde{S} , ils apparaissent donc dans les sous-ensembles S_{p+1}, \dots, S_n , ce qui permet d'établir l'inclusion

$$\tilde{C} \subseteq \bigcup_{j=p+1}^n S_j.$$

Les sous-ensembles S_j de $S \setminus \tilde{S}$ étant de taille bornée par B , on en déduit sur p la relation :

$$p \leq B(n - p) \Leftrightarrow p \leq \frac{B}{B+1}n.$$

Ce qui nous amène au rapport de performance :

$$\delta_{SC}(I, \tilde{S}) = \frac{\omega_{SC}(I) - p}{\omega_{SC}(I) - \beta_{SC}(I)} \geq \frac{n - Bn/(B+1)}{n} = \frac{n/(B+1)}{n} = \frac{1}{B+1}.$$

Si un certain élément à couvrir c_i n'apparaît que dans un sous-ensemble S_j , ce sous-ensemble sera contenu dans toute solution. Aussi, pour se ramener au cas précédent, suffit-il d'appliquer préalablement à l'instance I un processus qui permette d'isoler de tels sous-ensembles et se ramener ainsi au cas précédent :

(PREPROCESS)

→ input $[I = (C, S)]$

begin

- $S_0 = \emptyset$, $C' = C$, $S' = S$;
- stop = *faux*;
- tant que (non stop) faire
 - s'il existe $c \in C'$ vérifiant $\exists! j / (S_j \in S') \wedge (c \in S_j)$, faire
 - $S_0 = S_0 \cup \{S_j\}$, $C' = C' \setminus S_j$, $S' = S' \setminus \{S_j\}$;
 - $\forall S_k \in S', S_k = S_k \setminus S_j$;
 - sinon stop = *vrai*;

end

← output $[I' = (C', S'), S_0]$

Le traitement (PREPROCESS) renvoie un ensemble S_0 de sous-ensembles compris dans toute solution réalisable et une instance I' de $Min SC - B$ pour laquelle tout élément c'_i est contenu dans au moins deux ensembles S'_j . Les instances I et I' sont étroitement liées par les relations suivantes qui suffisent à terminer la preuve :

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{S}' \in Sol_{SC}(I') \Leftrightarrow \tilde{S}' \cup S_0 \in Sol_{SC}(I) \\ \text{et } m_{SC}(I, \tilde{S}' \cup S_0) = m_{SC}(I', \tilde{S}') + |S_0| \end{array} \right\} \Rightarrow \delta_{SC}(I, \tilde{S}' \cup S_0) = \delta_{SC}(I', \tilde{S}') \diamond$$

Corollaire 4.4. *Si le nombre de sous-ensembles contenant un élément donné est borné par une constante Δ , alors le rapport différentiel d'approximation d'une solution minimale est porté à*

$$\frac{B\Delta}{(B+1)(B\Delta-1)}.$$

Preuve

La taille des sous-ensembles s_j étant bornée par B , une solution optimale devra prendre, pour couvrir les m éléments de C , au moins m/B sous-ensembles. Par ailleurs, si tout élément apparaît dans au plus Δ sous-ensembles, la famille S ne peut disposer de plus de $\Delta \times m$ sous-ensembles. En conséquence, la valeur $\beta_{SC}(I)$ d'une solution optimale sera d'au moins $m/B \geq n/(B\Delta)$, ce qui conduit pour tout optimal 1-local \tilde{S} au résultat annoncé :

$$\delta_{SC}(I, \tilde{S}) \geq \frac{n - Bn/(B+1)}{n - n/B\Delta} = \frac{1}{B+1} \times \frac{B\Delta}{B\Delta - 1} \diamond$$

Corollaire 4.5. *Si le nombre de sous-ensembles contenant un élément donné est borné par une constante Δ , alors le sous-problème de $Min SC$ correspondant, noté $Min SC - B - \Delta$, est élément de GLO , avec un rapport classique d'approximation de toute solution minimale de $(B+1)/(B^2\Delta)$.*

Preuve : d'après la proposition 3.11, puisque $\omega_{SC}(I) \leq B\Delta\beta_{SC}(I)$ pour toute instance I , il existe une $G[\rho, \delta]$ -réduction du problème à lui-même, garantissant pour tout optimum local \tilde{S} un rapport classique :

$$\frac{1}{\rho_{SC}(I, \tilde{S})} \leq \delta_{SC}(I, \tilde{S}) + (1 - \delta_{SC}(I, \tilde{S}))B\Delta.$$

Cela nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_{SC}(I, \tilde{S})} &\leq \frac{B\Delta}{(B+1)(B\Delta - 1)} + \frac{B\Delta[(B+1)(B\Delta - 1) - B\Delta]}{(B+1)(B\Delta - 1)} \\ &= \frac{B\Delta[(B+1)(B\Delta - 1) - (B\Delta - 1)]}{(B+1)(B\Delta - 1)} = \frac{B^2\Delta}{B+1} \diamond \end{aligned}$$

Considérons à présent les instances pondérées du problème, tout en se bornant à des poids d'ordre constant : on notera $Min W[K]SC$ les instances de $Min SC$ pour lesquelles les sous-ensembles s_j de la famille S sont pondérés par des entiers $p_j \leq K$, où K est une constante. Nous montrons que les preuves faites précédemment permettent en réalité d'établir la qualité des optima 1-locaux, même dans ce cas plus général : cela signifie qu'un optimum local du problème non pondéré est une bonne solution du problème pondéré, la minimalité des solutions qui désigne les optima 1-locaux étant indépendante d'une quelconque pondération.

Théorème 4.6. $Min W[K]SC - B \in GLO[\delta]$

Preuve

Le résultat vient des deux observations suivantes : la différence en valeur, dans le cas pondéré, entre une pire solution et un optimum local \tilde{S} , est donnée par la somme des poids

des sous-ensembles de $S \setminus \tilde{S}$ et les poids de ces sous-ensembles étant au moins de 1, on écrit naturellement

$$\omega_{WSC}(I) - m_{WSC}(I, \tilde{S}) \geq \omega_{SC}(I) - m_{SC}(I, \tilde{S}) ;$$

de même, la différence en valeur, toujours dans le cas pondéré, entre une pire solution et un optimum global S^* , est donnée par la somme des poids des sous-ensembles de $S \setminus S^*$ et les poids de ces sous-ensembles étant d'au plus K , on déduit simplement

$$\omega_{WSC}(I) - \beta_{WSC}(I) \leq K(\omega_{SC}(I) - \beta_{SC}(I)).$$

Ainsi vient la conclusion :

$$\delta_{WSC}(I, \tilde{S}) = \frac{\omega_{WSC}(I) - m_{WSC}(I, \tilde{S})}{\omega_{WSC}(I) - \beta_{WSC}(I)} \leq \frac{\omega_{SC}(I) - m_{SC}(I, \tilde{S})}{K(\omega_{SC}(I) - \beta_{SC}(I))} = \frac{1}{K} \delta_{SC}(I, \tilde{S}) \diamond$$

Remarque 4.1. Ce dernier résultat, on peut trivialement le généraliser en différentiel comme en classique à tout problème ensembliste Π dont la version non pondérée évalue ses solutions par leur cardinalité (*ex.* : *Max IS*, *Min VC*, *Min DS*, *Min FES*). Soit Π un tel problème, on note $W\Pi$ sa version pondérée ; si l'on introduit des poids compris dans un intervalle $[k, K]$, on a toujours

$$|\omega_{W\Pi}(I) - m_{W\Pi}(I, s)| \geq k|\omega_{\Pi}(I) - m_{\Pi}(I, s)|$$

pour toute solution réalisable s et

$$|\omega_{W\Pi}(I) - \beta_{W\Pi}(I)| \leq K|\omega_{\Pi}(I) - \beta_{\Pi}(I)|,$$

ce qui nous assure la préservation du rapport différentiel au facteur k/K près ; pour le rapport classique, il suffit de considérer $m_{K\Pi}(I, s) \leq K \times m_{\Pi}(I, s)$ et $\beta_{W\Pi}(I) \geq k \times \beta_{\Pi}(I)$ si Π est un problème de *minimisation*, $m_{K\Pi}(I, s) \geq k \times m_{\Pi}(I, s)$ et $\beta_{W\Pi}(I) \leq K \times \beta_{\Pi}(I)$ si Π est un problème de *maximisation*, pour s'assurer de préserver le rapport d'approximation, au même facteur k/K près.

Corollaire 4.7. *Min HS* – $B \in GLO[\delta]$

Preuve : par réduction immédiate à *Min SC* – B

Soient $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ un ensemble fini et $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ une famille de sous-ensembles de C tels que tout élément c_i apparaît dans au plus B sous-ensembles S_j , un ensemble transversal est une sélection \tilde{C} d'éléments de C qui parcourt tout S dans le sens où tout sous-ensemble $S_j \in S$ doit avoir au moins un élément dans \tilde{C} :

$$\forall j = 1, \dots, n, \quad S_j \cap \tilde{C} \neq \emptyset.$$

La réduction qui consiste à intervertir les rôles des éléments et des sous-ensembles est une G -réduction \diamond

4.1.3 Ensemble minimum d'arêtes retour

Théorème 4.8. $Min FES \in GLO[\delta]$

Preuve : tout optimum local pour le voisinage 1-borné réalise un rapport différentiel de $1/2$.

Soit $G(V, E)$ un graphe simple, le problème consiste à déterminer un sous-ensemble d'arêtes $F \subseteq E$ de taille minimum tel que tout cycle emprunte au moins une arête de F . De façon évidente, on a pour tout graphe $G(V, E)$ $\omega_{FES}(G) = |E|$ et $\beta_{FES}(G) \geq 0$: c'est un problème polynomialement borné. Considérons une fois de plus les solutions minimales, optima locaux pour le voisinage 1-borné qui consiste à accepter comme solutions voisines d'une solution F tous les ensembles d'arêtes obtenus par l'ajout ou le retrait d'une arête à l'ensemble F . Si $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$ désigne l'ensemble des cycles élémentaires sur G , un ensemble minimal $F = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ d'arêtes retour vérifie :

$$\begin{aligned} (FES1) \quad & \forall i = 1, \dots, r, \quad \exists j \in \{1, \dots, p\} \quad / \quad e_j \in \gamma_i \quad F \text{ ensemble d'arêtes retour} \\ (FES2) \quad & \forall j = 1, \dots, p, \quad \exists i_j \in \{1, \dots, r\} \quad / \quad \gamma_{i_j} \cap F = \{e_j\} \quad F \text{ minimal.} \end{aligned}$$

Considérons la famille $\{\gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_j}, \dots, \gamma_{i_p}\}$ des cycles qui, selon (FES2), passent chacun par une unique arête $e_j = u_j v_j$ de F ; tout cycle γ_{i_j} contenant au moins trois arêtes, il emprunte deux arêtes distinctes $t_j u_j$ et $v_j w_j$ (éventuellement $t_j = w_j$) de $E \setminus F$ incidentes à e_j . Soit $F' = \cup_{j=1}^p \{t_j u_j, v_j w_j\}$ l'ensemble de ces arêtes, comme l'ensemble $V(F) = \cup_{j=1}^p \{u_j, v_j\}$ des sommets engendrés par les arêtes de F est constitué d'au moins p sommets distincts, l'ensemble F' , en tant qu'ensemble d'arêtes d'extrémité les sommets de $V(F)$, contient également au moins p arêtes distinctes. D'où la série d'implications :

$$|F'| \geq p \text{ et } F' \subseteq E \setminus F \Rightarrow |E \setminus F| \geq p \Rightarrow |E| - p \geq p \Leftrightarrow p \leq |E|/2$$

dont le résultat nous permet de déduire et de conclure :

$$\delta_{FES}(G, F) = \frac{\omega_{FES}(G) - p}{\omega_{FES}(G) - \beta_{FES}(G)} \geq \frac{|E| - |E|/2}{|E|} = \frac{1}{2} \quad \diamond$$

4.1.4 Couplage maximum dans un hypergraphe

Corollaire 4.9. $Max SP - B \in GLO[\delta]$

Preuve : par réduction évidente à $Max IS - B$ (cf. paragraphe 3.10) \diamond

4.1.5 Les problèmes d'ordonnancement

Nous considérons les problèmes simples d'ordonnancement de tâches sur des multiprocesseurs, noté $Min MS$ (*Minimum Multiprocessor Scheduling*); il sera intéressant de remarquer

que sur ces problèmes simples, les simples optima 1-locaux garantissent un excellent rapport différentiel d'approximation.

Théorème 4.10. $Min MS(k) \in GLO[\delta]$

Preuve : tout optimum local pour le voisinage 1-borné réalise un rapport différentiel de $m/(m+1)$ si m désigne le nombre de machines.

Une instance I du problème d'ordonnancement de tâches sur des multiprocesseurs consiste en la donnée d'un nombre m de machine M_1, \dots, M_m et de n tâches J_1, \dots, J_n , de durées d'exécution respectives p_1, \dots, p_n (on suppose que la durée d'exécution d'une tâche est indépendante de la machine sur laquelle elle sera effectuée). Une solution consiste en la répartition des tâches sur les machines, de sorte à minimiser le temps d'exécution de la machine la plus sollicitée (il n'y a pas de contraintes de précédence). Une solution sera représentée par le vecteur $x \in \{0, 1\}^{nm}$ dont les composantes x_j^i non nulles correspondent à l'affectation de la tâche j à la machine i . On se restreint, encore une fois, pour assurer la convergence en temps raisonnable des algorithmes de recherche d'optima locaux, à des poids polynomialement bornés. La pire solution revient naturellement à placer toutes les tâches sur une même machine, de valeur $\omega_{MS}(I) = \sum_{j=1}^n p_j$, quand une meilleure solution ne pourra jamais faire moins que la durée moyenne d'exécution des tâches sur m machines (optimum du problème relaxé), soit $\beta_{MS}(I) \geq 1/m \times \sum_{j=1}^n p_j$. Ainsi, pour des durées bornées par n^k pour une constante universelle k , le diamètre $\text{diam}_{\Pi}(I)$ de l'instance est bien borné par un polynôme $(m-1)/m \times n^{k+1}$ en la taille n de l'instance. Considérons un optimum local x relativement au voisinage 1-borné qui accepte comme solution voisine d'une affectation des tâches aux machines toute répartition dont au plus l'affectation d'une tâche diffère, et supposons que la première machine est la plus chargée, soit qu'elle vérifie, si $p(M_i)$ désigne la charge de la machine M_i :

$$p(M_1) = \sum_{j=1}^n x_j^1 \times p_j = \max_{i=1}^m \{p(M_i) = \sum_{j=i}^n x_j^i \times p_j\}.$$

On note alors k l'indice de la tâche de plus longue durée placée dans M_1 , soit

$$k = \arg \max \{p_j : j / x_j^1 = 1\}.$$

Si l'affectation x est un optimum 1-local, alors elle vérifie :

$$\begin{aligned} \forall i = 2, \dots, m, & & p_k + p(M_i) & \geq & p(M_1) \\ (\sum_i) \Rightarrow & (m-1)p_k + \left(\sum_{j=1}^n p_j - p(M_1) \right) & \geq & (m-1)p(M_1) \\ \Leftrightarrow & & m \times p(M_1) & \leq & (m-1)p_k + \omega_{MS}(I). \end{aligned}$$

La meilleure solution étant nécessairement supérieure ou égale à la durée de chaque tâche, on conclut

$$m_{MS}(I, x) \leq \left(1 - \frac{1}{m}\right) \beta_{MS}(I) + \frac{1}{m} \omega_{MS}(I) \diamond$$

Corollaire 4.11. $MinMS(k) \in GLO$

Preuve

De la relation $\beta_{MS}(I) \geq 1/m \times \sum_{j=1}^n p_j$, on déduit $\omega_{MS}(I) \leq m \times \beta_{MS}(I)$, ce qui permet de conclure avec la preuve précédente :

$$m_{MS}(I, x) \leq \left(2 - \frac{1}{m}\right) \beta_{MS}(I) \diamond$$

La version du problème d'ordonnancement de tâches sur des multiprocesseurs que nous venons d'étudier est le premier problème de GLO , $GLO[\delta]$ dont nous savons qu'il admet un schéma d'approximation polynomial ([51]).

4.2 Le voyageur de commerce et le voisinage 2 – opt

Théorème 4.12. $MinTSP(k) \in GLO[\delta]$

Preuve : tout optimum local pour le voisinage 2 – opt réalise un rapport différentiel de 1/2.

Soit I une instance constituée d'un graphe complet $G(V, E)$ à n sommets et d'une valuation $d : E \rightarrow \mathbb{N}$ des arêtes de G . On cherche un tour sur V de coût minimum, le coût d'un tour étant donné par la somme des coûts des arêtes qui le constituent : $m_{TSP}(I, t) = \sum_{e \in t} d(e)$. On se limite aux instances pour lesquelles $d_{max} = \max_{e \in E} \{d(e)\} \leq n^k$ pour s'assurer de manipuler les instances d'un problème polynomialement borné et ainsi être en mesure de déterminer des optima locaux en temps polynomial : avec $\omega_{TSP} \leq n \cdot \max_{e \in E} \{d(e)\}$ et $\beta_{TSP} \geq n \cdot \min_{e \in E} \{d(e)\} \geq 0$, il vient $|\omega_{TSP} - \beta_{TSP}| \leq n^{k+1}$. Pour plus de clarté, on note comme en 3.1.2 $[u, v]$ l'arête d'extrémités u et v et $d(u, v)$ le coût associé.

Nous montrons que le problème $MinTSP(k)$ garantit la qualité de ses optima locaux pour le voisinage 2 – opt présenté en 3.1.2. Un tour n'étant autre qu'une permutation sur les sommets, nous nous permettons d'utiliser une notation fonctionnelle. Soient $t : i \mapsto t(i)$ un optimum local et $s : i \mapsto s(i)$ un optimum global ; pour deux entiers i et k de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, $t^k(i)$ désigne le k ième successeur du sommet i dans le tour t (ainsi $t^n(i) = i$), tandis que $t_{i,k}$ désigne le tour voisin de t obtenu en échangeant les arêtes $[i, t(i)]$ et $[t^k(i), t^{k+1}(i)]$

contre le couple d'arêtes $([i, t^k(i)], [t(i), t^{k+1}(i)])$:

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \\ t &= (i, \mathbf{t}(i), t^2(i), \dots, t^{k-1}(i), \mathbf{t}^k(i), \mathbf{t}^{k+1}(i), t^{k+2}(i), \dots, t^{n-1}(i), i) \\ t^{i,k} &= (i, \mathbf{t}^k(i), t^{k-1}(i), \dots, t^2(i), \mathbf{t}(i), \mathbf{t}^{k+1}(i), t^{k+2}(i), \dots, t^{n-1}(i), i). \end{aligned}$$

L'optimalité locale de t se traduit par les inégalités :

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \\ d(i, \mathbf{t}(i)) + d(\mathbf{t}^k(i), \mathbf{t}^{k+1}(i)) \leq d(i, t^k(i)) + d(t(i), t^{k+1}(i)), \end{aligned}$$

qui impliquent en particulier

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad d(i, t(i)) + d(s(i), t(s(i))) \leq d(i, s(i)) + d(t(i), t(s(i))) \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n d(i, t(i)) + \sum_{i=1}^n d(s(i), t(s(i))) \geq \sum_{i=1}^n d(i, s(i)) + \sum_{i=1}^n d(t(i), t(s(i))). \end{aligned}$$

Sachant

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n d(i, t(i)) &= \sum_{i=1}^n d(s(i), t(s(i))) = m_{TSP}(I, t), \\ \sum_{i=1}^n d(i, s(i)) &= m_{TSP}(I, S) = \beta_{TSP}(I), \\ \text{et } \sum_{i=1}^n d(t(i), t(s(i))) &= m_{TSP}(I, u) \text{ où } u \text{ est le tour } (i \mapsto t \circ s \circ t^{-1}(i)), \end{aligned}$$

il ne reste plus qu'à conclure

$$\begin{aligned} 2m_{TSP}(I, t) &\leq \beta_{TSP}(I) + m_{TSP}(I, u) \leq \beta_{TSP}(I) + \omega_{TSP}(I) \\ \Leftrightarrow m_{TSP}(I, t) &\leq 1/2\beta_{TSP}(I) + 1/2\omega_{TSP}(I) \Leftrightarrow \delta_{TSP}(I, t) \geq 1/2 \diamond \end{aligned}$$

Corollaire 4.13. $Max TSP(k) \in GLO[\delta]$

Preuve : la preuve tient en l'équivalence, sous le formalisme du rapport différentiel, des deux versions du problème (cf. chapitre 8) \diamond

Corollaire 4.14. *Pour toute constante k , pour tout intervalle discret $[a, b]$ tel que $b \leq k \times a$, $Min TSP[a, b] \in GLO$.*

Preuve

D'après les relations, établies au chapitre 8, qu'entretiennent les évaluations classique et différentielle des problèmes $TSP[a, b]$ (restriction à des arêtes valuées sur l'intervalle discret $[a, b]$), on déduit de l'approximation différentielle à 1/2 par les optima locaux de $Min TSP[a, b]$ un rapport classique ρ vérifiant :

$$\frac{1}{\rho} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{b}{a} \Leftrightarrow \rho \geq \frac{2a}{a+b} \diamond$$

4.3 Résultats négatifs

Nous proposons maintenant des cas de non appartenance aux classes $GLO[R]$; il faut cependant considérer ces résultats avec prudence, la notion de voisinage h -borné pouvant être fortement dépendante du codage choisi des solutions. Nous pensons notamment à l'intégration, dans le voisinage, des solutions complémentaires : par exemple, nous verrons au chapitre 6 que $Max2CCSP$ ne garantit pas la qualité de ses optima locaux pour les voisinages h -bornés au sens usuel de tels voisinage, alors que si l'on considère simplement l'affectation complémentaire, le voisinage 1-borné augmenté de cette solution garanti pour ses optima locaux un rapport classique de $1/3$. En terme de distances, pour le codage naturel qui considère sur une instance à n variables un vecteur binaire de taille n , deux affectations complémentaires T et \bar{T} sont effectivement n -distantes et ne peuvent ainsi être considérées comme voisines dans le cadre de voisinages h -bornés ; cependant, il suffit d'ajouter un bit supplémentaire seulement au vecteur T (ce qui demeure un codage raisonnable) pour rendre cela possible : il s'agit d'interpréter ce bit comme le sens de lecture des n bits suivants. Alors, le passage d'une solution à son complémentaire ne réclame plus n , mais un unique changement et les solutions T et \bar{T} se retrouvent voisines pour tout voisinage h -borné.

Pour lever l'ambiguïté afférente au codage des solutions, il faudra comprendre les résultats négatifs proposés comme étant édictés pour une interprétation "physique" et non plus mathématique des voisinages h -bornés.

4.3.1 Satisfaisabilité maximum

La preuve de l'appartenance du problème $Max Sat$ à la classe GLO a été faite dans [11], pour le voisinage 1-borné et un rapport $1/2$; nous montrons qu'il n'en est pas de même pour le rapport différentiel.

Théorème 4.15. $Max Sat \notin GLO[\delta]$

Preuve : on montre que pour tout h , $Max Sat \notin GLO[\delta](h)$.

Considérons la famille d'instances $(I_k)_{k \geq 1}$, $I_k = (X_k, C_k) \forall k$, définie par :

- (i) $X_k = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \Rightarrow L_k = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \cup \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k\}$
- (ii) $C_k = \mathcal{P}'_k(L_k) \setminus \{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k)\}$

où $\mathcal{P}'_k(L_k)$ désigne l'ensemble des parties de taille k de l'ensemble L_k des littéraux qui ne sont pas des tautologies.

Toutes les clauses de taille k , sauf la clause composée des k littéraux négatifs $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k)$, sont donc générées. Toute clause contenant au moins un littéral positif, l'affectation $(1, 1, \dots, 1)$ satisfait les $|C_k|$ clauses ; d'autre part, toute autre affectation satisfait $|C_k| - 1$ clauses. Effectivement, soit t une affectation, on note t^0 l'ensemble des indices des composantes nuls de t :

$$t^0 = \{i_1, \dots, i_p\} = \{i \in \{1, \dots, n\} / t_i = 0\} ;$$

t avère toutes les clauses, sauf la clause c^0 dans laquelle les variables d'indice dans t^0 apparaissent sous forme positive et les autres variables sous forme négative :

$$c^0 = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i_1-1}, x_{i_1}, \bar{x}_{i_1+1}, \dots, \bar{x}_{i_j-1}, x_{i_j}, \bar{x}_{i_j+1}, \dots, \bar{x}_{i_p-1}, x_{i_p}, \bar{x}_{i_p+1}, \dots, \bar{x}_n).$$

Or, c^0 existe toujours dans C_k si $t \neq (1, 1, \dots, 1)$. On a ainsi pour k quelconque $\omega(I_k) = |C_k| - 1$ et $\beta(I_k) = |C_k|$: quels que soient la constante h et le voisinage h -borné associé, il existe avec C_k pour $k > h$ une instance du problème *Max Sat* pour laquelle l'affectation $(0, 0, \dots, 0)$ est à la fois optimum local et pire solution (puisque'il faudrait changer k valeurs pour augmenter la performance, soit plus de h changements) et de fait, cette affectation constitue un optimum local de rapport différentiel nul. On en conclut la non appartenance de *Max Sat* à la classe $GLO[\delta]$ \diamond

Cette démonstration nous permet de déduire une information importante sur les fameuses sous-classes *Max k - Sat* des instances de satisfaisabilité formées de clauses d'au plus k littéraux :

Corollaire 4.16. $\forall k, \forall h < k, \text{Max } k - \text{Sat} \notin GLO[\delta](h)$.

4.3.2 Ensemble minimum de sommets retour

Soit $G(V, E)$ un graphe quelconque, il ne s'agit plus comme pour le problème *Min FES* de couvrir les cycles de G par les arêtes, mais par les sommets : une solution est un sous-ensemble $U \subseteq V$ de sommets tel que tout cycle de G emprunte au moins un sommet de U . Malgré leur grande similarité, ces deux problèmes ont un comportement fortement divergent quant à leur approximation par des optima locaux puisque *Min FNS*, contrairement à *Min FES*, n'assure pas dans le cas général la qualité de ses optima locaux relativement aux voisinages h -bornés.

Théorème 4.17. $\text{Min FNS} \notin GLO[\delta]$

Preuve : on montre pour tout h $MinFNS \notin GLO[\delta](h)$.

Considérons la famille des graphes bipartis complets $G_p(X_p \cup Y_p, E_p)$ définis pour tout entier $p \geq 1$ par :

$$X_p = \{x_1, \dots, x_p\}, \quad Y_p = \{y_1, \dots, y_{p^2}\} \quad \text{et} \quad E_p = X_p \times Y_p.$$

Les cycles élémentaires de G étant de la forme $(x_{i_1}, y_{i_1}, x_{i_2}, y_{i_2}, \dots, x_{i_j}, y_{i_j}, \dots, x_{i_s}, y_{i_s}, x_{i_1})$, une solution U sera réalisable si et seulement si elle contient à un sommet près tout X_p ou tout Y_p :

$$\begin{aligned} \forall U \subseteq X_p \cup Y_p, \quad U \text{ est solution} &\Leftrightarrow \min\{|X_p \setminus U|, |Y_p \setminus U|\} \leq 1 \\ \text{sinon} \exists \{x_{i_1} \neq x_{i_2}\} \in X_p \setminus U, \exists \{y_{j_1} \neq y_{j_2}\} \in Y_p \setminus U &/ (x_{i_1}, y_{j_1}, x_{i_2}, y_{j_2}, x_{i_1}) \cap U = \emptyset. \end{aligned}$$

Alors les solutions $X_p \setminus \{x_1\}$ et $U_p = Y_p \setminus \{y_1\}$ sont non seulement réalisables, mais aussi remarquables : la première est un optimum global de valeur $p - 1$, la seconde un optimum local de valeur $p^2 - 1$ pour tout voisinage h -borné, $h < 2p - 1$, puisqu'il faudrait intégrer à la solution $p - 1$ sommets de X_p puis retirer p sommets de $U_p \cap Y_p$ pour commencer à l'améliorer strictement. La pire solution consiste quant à elle à sélectionner tous les sommets $X_p \cup Y_p$.

La solution U_p , pour tout entier $p \geq 1$, constitue donc un optimum local réalisant le rapport différentiel :

$$\delta_{FNS}(G_p, U_p) = \frac{\omega_{FNS}(G_p) - |U_p|}{\omega_{FNS}(G_p) - \beta_{FNS}(G_p)} = \frac{p + p^2 - (p^2 - 1)}{p + p^2 - (p - 1)} = \frac{p + 1}{p^2 + 1} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, quelle que soit la constante h , on peut créer la famille d'instances $(G_p)_{p > h}$ pour lesquelles une suite d'optima locaux $(U_p)_{p \geq 1}$ relativement à tout voisinage h -borné réalise un rapport de performance asymptotiquement nul \diamond

Il faut se restreindre au cas de graphes à degré borné par une constante B pour assurer par les optima 1-locaux un rapport différentiel d'approximation constant.

Proposition 4.18. $MinFNS - B \in GLO[\delta]$

Preuve

La preuve est semblable à celle qui nous a permis d'établir l'appartenance de $MinFES$ à la classe. Considérons dans un graphe $G(V, E)$ un sous-ensemble U de sommets incident à tout cycle de G , de taille minimale ; cela signifie :

$$\forall x \in U, \exists \gamma \text{ cycle élémentaire} / \gamma \cap U = \{x\}.$$

Si U est constitué de p sommets u_1, \dots, u_p , alors on peut à chacun d'entre-eux associer un cycle élémentaire γ_i qui n'intersecte U qu'en le sommet u_i . Notons a_i et b_i les sommets adjacents à u_i dans γ_i , a_i et b_i sont bien distincts (tout cycle étant de taille au moins deux) et appartiennent (par minimalité) au complémentaire \bar{U} de U . Un sommet ne pouvant être adjacent à plus de B sommets, il y a parmi l'ensemble $\{a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p\}$ au moins $2p/B$ sommets distincts, et on conclut

$$|\bar{U}| \geq \frac{2|U|}{B} \Leftrightarrow |U| \left(\frac{2}{B} + 1 \right) \leq n \Leftrightarrow |U| \leq \frac{B}{B+2} \omega_{FNS}(I) \leq \frac{B}{B+2} \omega_{FNS}(I) + \frac{2}{B+2} \beta_{FNS}(I) \diamond$$

4.3.3 Le sac-à-dos

Le problème du sac-à-dos entier ou bivalent, pourtant fort bien résolu tant en classique qu'en différentiel puisqu'il admet des schémas complets, n'appartient pas à la classe GLO . Ses instances forment une sous-classe de problèmes de programmation linéaire en nombres entiers pour lesquels la matrice des contraintes se réduit à un seul vecteur. Pour considérer l'appartenance à $GLO[R]$, nous nous limiterons au sous-problème $Max\ KS(k)$ qui regroupe les instances pour lesquelles la plus grande valeur numérique en valeur absolue est bornée par la quantité n^k où n désigne la dimension de l'espace de l'instance ; le problème de sac-à-dos, limité à cette famille d'instances, est polynomial puisque le problème global admet un schéma d'approximation complet. Or, nous montrons qu'un cas particulier de cette famille de problèmes polynomiaux, celui du sac-à-dos bivalent qui consiste à considérer les variables à valeur dans $\{0, 1\}$ et que l'on note $Max\ KS(k)\{0, 1\}$, n'est même pas dans GLO .

Théorème 4.19. $Max\ KS(k)\{0, 1\} \notin GLO \cup GLO[\delta]$

Preuve : on montre pour tout h " $Max\ KS(k)\{0, 1\} \notin GLO[\delta](h)$ ".

Soit une instance du problème de sac-à-dos bivalent polynomialement borné :

$$I \quad \begin{cases} \max c \cdot x \\ a \cdot x \leq b \\ x \in \{0, 1\}^n \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} c \in (\mathbb{N}^*)^n \text{ et } \max\{c_i\} \leq n^k \\ a \in (\mathbb{N}^*)^n \text{ et } \max\{a_i\} \leq n^k \\ b \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Avec $\omega_{KS}(I) = 0$ pour $x = \vec{0}$ et $\beta_{KS}(I) \leq \sum_{i=1}^n c_i \leq n^{k+1}$ pour $x = \vec{1}$, la valeur de l'instance I est bornée par le polynôme n^{k+1} .

Considérons maintenant la famille d'instances $(I_{h,n})_{n \geq 0}$ définie par :

$$\forall n \geq 0, \quad I_{h,n} = \begin{cases} a = (n-1, 1, 1, \dots, 1) \\ c = (h-1, 1, 1, \dots, 1) \\ b = n-1 \end{cases}$$

Le vecteur optimal $x_n^* = (0, 1, \dots, 1)$ qui consiste à prendre tous les objets sauf le premier apporte une utilité de $n - 1$, quand la solution complémentaire $x_n = (1, 0, 0, \dots, 0)$ n'apporte qu'une utilité de $h - 1$; or, c'est un optimum local pour tout voisinage h' -borné, $h' \leq h$, puisqu'il faudrait pour améliorer la composition du sac-à-doc x_n ôter le premier objet d'utilité $h - 1$, puis ajouter au moins h objets d'utilité unitaire. Les optima locaux x_n des instances $I_{h,n}$ réalisent ainsi un rapport de performance asymptotiquement nul :

$$\forall n, \delta_{KS}(I_{h,n}, x_n) = \frac{h-1}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ces instances $I_{h,n}$ montrent que le problème général non borné ne garantit pas la qualité de ses optima locaux vis-à-vis de voisinages h -bornés, et ce quelle que soit la constante h \diamond

En fait, il faudrait borner les poids a_i comme les utilités c_i pour obtenir quelque chose : si pour tout i , $a_i \leq A$ et $c_i \leq C$, bêtement, un optimum ne fera jamais mieux que $b \times C$ (si tout élément est de poids 1 et d'utilité C) et un optimum local, une solution maximale simplement, jamais moins que $\lfloor b/A \rfloor \geq (b - A + 1)/A$ (si tout élément est de poids A et d'utilité 1), assurant un rapport d'approximation (en considérant $b \geq A$) :

$$\frac{b - A + 1}{AbC} = \frac{b}{AbC} - \frac{A - 1}{AbC} \geq \frac{1}{AC} - \frac{A - 1}{A^2C} = \frac{1}{A^2C}.$$

Ce résultat n'est cependant pas satisfaisant ; une autre piste serait de se reporter sur un sous-problème tel *Max S Sum* (*Maximum Subset Sum*) pour lequel les vecteurs a et c coïncident : il s'agit, étant donné un entier b et n entiers c_1, \dots, c_n de \mathbb{N}^n , de trouver le meilleur minorant de b possible par une combinaison d'éléments c_i . Il se trouve malheureusement que de nouveau sur ce problème, on peut exhiber pour toute constante h une famille $J_{h,n}$ d'instances qui mette à défaut la qualité des optima h -locaux : pour tout n , on définit $c = (n^2, n^2, 1, \dots, 1)$ vecteur de \mathbb{N}^n et $b = n^2$; la solution $x^* = (1, 0, \dots, 0)$ est optimum global de valeur n^2 et la solution $x = (0, 1, \dots, 1)$, de valeur $n - 2$, est optimum h -local pour tout $n/h \leq n - 2$ puisqu'il faudrait, pour l'améliorer, retirer tous les $n - 2$ éléments contenus dans x avant de pouvoir éventuellement mettre x_1 ou x_2 à 1. Or, le rapport réalisé par x , de $(n - 2)/n$, tend indubitablement vers 0 quand n tend vers l'infini.

4.4 Où les classes $GLO[R]$ se situent-elles ?

Autant on sait à peu près ce qui se passe pour GLO , autant les choses sont un peu plus floues concernant $GLO[\delta]$: de façon plus générale, on connaît mal encore les frontières des classes d'approximation sous le rapport différentiel.

4.4.1 $GLO[R]$ et les classes d'approximation

Comme nous venons de l'illustrer avec $Max\ KS(k)$, un problème peut être “facile” au sens de la résolution en temps polynomial et admettre de mauvais optima locaux :

$$P \not\subseteq GLO \text{ et } P \not\subseteq GLO[\delta].$$

Tout optimum local garantit un rapport constant et par définition, $GLO[R]$ renferme des problèmes sur lesquels les algorithmes de recherche locale obtiennent un optimum local en temps polynomial : ainsi les LSA sont, sur les problèmes des classes $GLO[R]$, des $PTAA$ particuliers. En revanche, puisque tout problème polynomial (qui est a fortiori $APX[R]$) n'est pas nécessairement $GLO[R]$, il s'agit d'une inclusion stricte :

$$GLO \subset APX \text{ et } GLO[\delta] \subset APX[\delta].$$

Par ailleurs, nous l'avons vu avec le problème d'ordonnancement multiprocesseur ou encore le problème de *Bin Packing*, les classes $GLO[R]$ intersectent la classe $PTAS$ des problèmes admettant un schéma d'approximation :

$$\exists \Pi \in GLO / \Pi \in PTAS \text{ et } \exists \Pi \in GLO[\delta] / \Pi \in PTAS[\delta].$$

La figure 4.1 offre une illustration des relations qu'entretiennent les classes $GLO[R]$ avec les classes d'approximation (*par exemple, pour $GLO[\delta]$, $Min\ PB \in GLO[\delta] \cap PTAS[\delta]$, $Min\ TSP(k) \in GLO[\delta] \setminus PTAS[\delta]$ et $Max\ KS(k)\{0, 1\} \in P \setminus GLO[\delta]$). Concernant GLO et APX , Ausiello et Protasi montrent dans [10] que la fermeture de GLO sous P -réductions coïncide avec APX :*

$$\overline{GLO}^P = APX.$$

Pour cela, ils font appel à des problèmes particuliers de satisfaisabilité variables-pondérés qui sont APX -complets pour la P -réduction. Une instance de *Max \mathcal{W} Sat* (*Problème de Satisfaisabilité maximum pondéré avec borne*) est la donnée d'une instance (X, C) de *Max Sat*, d'un jeu de poids p_1, \dots, p_n sur les variables x_1, \dots, x_n et d'un entier $B \in \mathbb{N}^*$ tels que la somme des poids p_i est comprise dans l'intervalle $[B, 2B]$:

$$B \leq \sum_{i=1}^n p_i \leq 2B \quad (B \text{ pouvant être arbitrairement grand}).$$

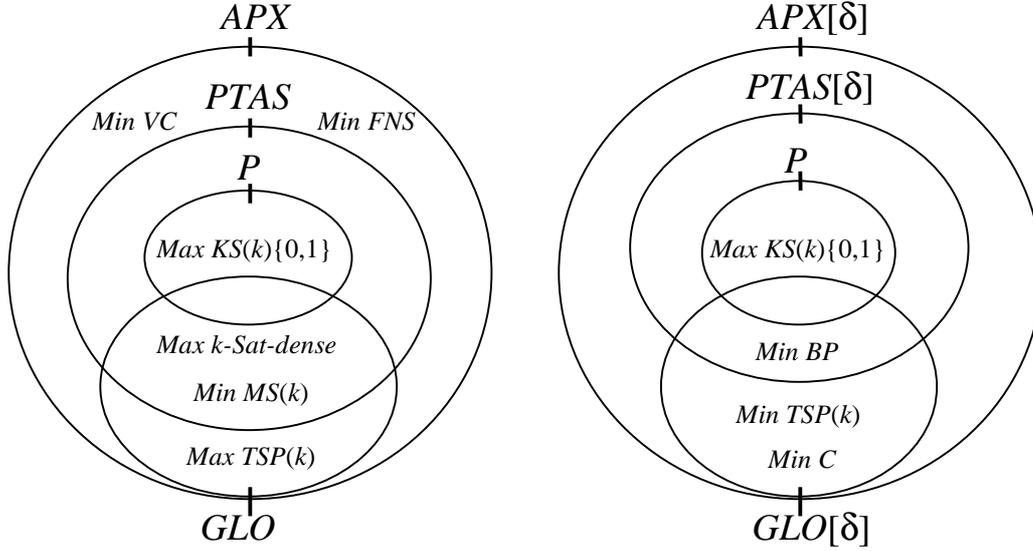


FIG. 4.1: Les classes $GLO[R]$ et les classes d'approximation

Une affectation T des valeurs de vérité, si elle satisfait toutes les clauses, sera évaluée par la somme des poids des variables mises à 1 par T ; sinon, T est évaluée à B :

$$\forall T \in \{0, 1\}^n, m_{\mathcal{W}Sat}(I, T) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n p_i \times T(x_i) & \text{si } T \text{ affectation valide,} \\ B & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce problème a été montré dans [28] 1/2-approximable (*une affectation non valide faisant B quand l'optimum ne pourra jamais excéder $2B$*) et APX -complet. Sur toute instance, on sait construire en temps polynomial une affectation T^0 non valide : il suffit de prendre la première clause c_1 et d'affecter les variables intervenant dans c_1 de sorte à ce que tous ses littéraux soient faux (on rappelle qu'on suppose toujours disposer d'instances qui ne comportent pas de tautologie). Alors il est équivalent du point de vue de l'approximation classique de considérer pour les affectations valides la fonction : $m_{\mathcal{W}Sat}(I, T) = \max\{B, \sum_{i=1}^n p_i \times T(x_i)\}$. Effectivement, la valeur optimale est inchangée ($\beta_{\mathcal{W}Sat}(I) \geq W$) et pour passer d'une évaluation à l'autre, il suffit de substituer à toute affectation valide T dont la somme des poids des variables mises à 1 est strictement inférieure à B la solution T^0 . Considérons donc le problème $Max \mathcal{W}Sat$ doté d'une telle fonction objectif, il est toujours 1/2-approximable (*par toute affectation des valeurs de vérité, toute solution faisant au moins B quand $\beta_{\mathcal{W}Sat}$ reste borné par $2B$*) et APX -complet ([28]). Pour démontrer l'égalité $\overline{GLO}^P = APX$, Ausiello et Protasi se ramènent au cadre polynomialement borné avec le problème $Max \mathcal{W}Sat - PB$

dont l'objectif est le suivant :

$$\forall T \in \{0, 1\}^n, m_{\mathcal{W}Sat-PB}(I, T) = n + \left\lfloor \frac{n(m_{\mathcal{W}Sat}(I, T) - B)}{B} \right\rfloor.$$

Avec cette fonction objectif, on s'assure que la valeur de toute solution sera comprise entre n et $2n$, la différence $m_{\mathcal{W}Sat}(I, T) - B$ étant toujours comprise entre 0 et B . Ainsi, le problème $Max \mathcal{W}Sat - PB$ est clairement dans GLO , étant polynomialement borné (*on est donc assuré de trouver par LSA un optimum local en temps polynomial*), et garantissant trivialement un rapport 1/2 pour tout optimum local (*comme c'est déjà le cas de toute solution*). Or, il est montré dans [29] que $Max \mathcal{W}Sat$ est P -réductible à sa restriction $Max \mathcal{W}Sat - PB$ et cela suffit à conclure :

$$\left. \begin{array}{l} APX \stackrel{P}{\asymp} Max \mathcal{W}Sat \stackrel{P}{\asymp} Max \mathcal{W}Sat - PB \in GLO \\ GLO \subset APX \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{GLO}^P = APX \diamond$$

Cette égalité induit notamment q'un problème APX qui n'est pas GLO (et nous avons vu que de tels problèmes existent) se réduit au moins par P -réduction à un problème de GLO . Notons au passage que ce problème, $Max \mathcal{W}Sat - PB$, n'est pas approximable en différentiel à moins que P n'égale NP : nous montrons par réduction à partir de Sat que toute approximation différentielle non nulle de ce problème permettrait de décider Sat .

Théorème 4.20. *Tout algorithme polynomial \mathcal{A} approché pour $Max \mathcal{W}Sat - PB$ établit un rapport différentiel de performance nul : 0*

$$\delta_{Max \mathcal{W}Sat-PB} = 0.$$

Preuve

Pour ce, considérons une instance $I = (X, C)$ de Sat constituée de n variables booléennes x_1, \dots, x_n et m clauses c_1, \dots, c_m ; on introduit un ensemble $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ de n variables booléennes et les deux ensembles C' et D de clauses suivants :

$$\begin{aligned} C' &= \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^n \{c'_{i,j}\} \text{ où } c'_{i,j} = c_i \vee \bar{y}_j \\ D &= \bigcup_{j_1=1}^{n-1} \bigcup_{j_2=j_1+1}^n \{(y_{j_1}, y_{j_2})\}. \end{aligned}$$

En associant alors par exemple à chaque variable x_i un poids $p_i^X = 1$, à chaque variable y_j un poids $p_j^Y = 3$, et en posant $B = 2n$, on obtient une instance I' de $Max \mathcal{W}Sat$ donnée par l'ensemble de variables $X \cup Y$, l'ensemble de clauses $C' \cup D$, les jeux de poids p^X et p^Y et la constante B . Effectivement, les poids vérifient bien comme il se doit :

$$\sum_{i=1}^n p_i^X + \sum_{j=1}^n p_j^Y = n + 3n = 4n \in [B = 2n, 2B = 4n].$$

Une affectation T' non satisfaisable réalisera une performance de B ; par ailleurs, pour satisfaire l'ensemble D de clauses, une affectation T' devra mettre au moins $n - 1$ variables y_j à 1 (sinon une clause (y_{j_1}, y_{j_2}) ne sera pas vérifiée) et ainsi, sera évaluée par la somme des poids des variables mises à 1, cette somme valant au moins $3(n - 1) \geq B$. Cela signifie aussi qu'une affectation T' , pour être satisfaisable sur I' , devra impérativement l'être tout autant pour I : pour une variable y_j affectée à 1 (et on vient de voir que c'était le cas d'au moins $n - 1$ variables), la clause $c'_{i,j} = c_i \vee \bar{y}_j$ ne sera avérée qu'à condition que la clause initiale c_i le soit elle-même. Ainsi, une affectation satisfaisable sera toujours à valeur dans $[3(n - 1), 4n]$ quand toute autre solution fera, nous l'avons dit, $B = 2n$. Si un algorithme approché pour $Max \mathcal{W} Sat$ assure un rapport différentiel non nul il permettra, sur I' , de renvoyer une solution satisfaisable s'il en existe, et donc de reconnaître si oui ou non I est satisfaisable. Il en est de même pour $Max \mathcal{W} Sat - PB$ où toute affectation non satisfaisable sera évaluée à n et toute solution satisfaisable à au moins $n + 1$ (on peut supposer $n \geq 5$ et ainsi, $n(m_{\mathcal{W} Sat}(I, T) - B)/B \geq n(3(n - 1) - 2n)/2n = (n - 3)/2 \geq 1$) \diamond

La construction que nous venons de proposer produit des clauses de taille 2 sur l'ensemble D constitué des couples (y_{j_1}, y_{j_2}) et des clauses de même taille que celle des clauses de l'instance initiale, à un littéral près; aussi, la réduction proposée peut très bien être vue pour transformer une instance de $k - Sat$ pour $k \geq 3$ en une instance de $Max \mathcal{W}(k + 1) - Sat$, induisant sur ce dernier problème les même résultat négatif d'approximabilité différentielle que sur le problème général.

Corollaire 4.21. *Tout algorithme polynomial \mathcal{A} approché pour $Max \mathcal{W} k - Sat - PB$ établit un rapport différentiel de performance nul, et ce quelle que soit la constante $k \geq 4$ considérée :*

$$\forall k \geq 4, \delta_{Max \mathcal{W} k - Sat - PB} = 0.$$

4.4.2 $GLO[R]$ et les classes logiques

$$GLO \cap GLO[\delta] \cap Max SNP \neq \emptyset$$

Par exemple, $Max IS - B \in GLO[R]$ pour $R = \rho, \delta$; par ailleurs, si on se restreint au cas classique, le problème $Max 3 - Sat$ semble jouer un rôle clef puisque non seulement il appartient à GLO mais en plus, tout problème de $Max SNP$ s'y réduit par LOP -réduction ([11]) :

$$\forall \Pi \in Max SNP, \Pi \stackrel{LOP}{\propto} Max 3 - Sat.$$

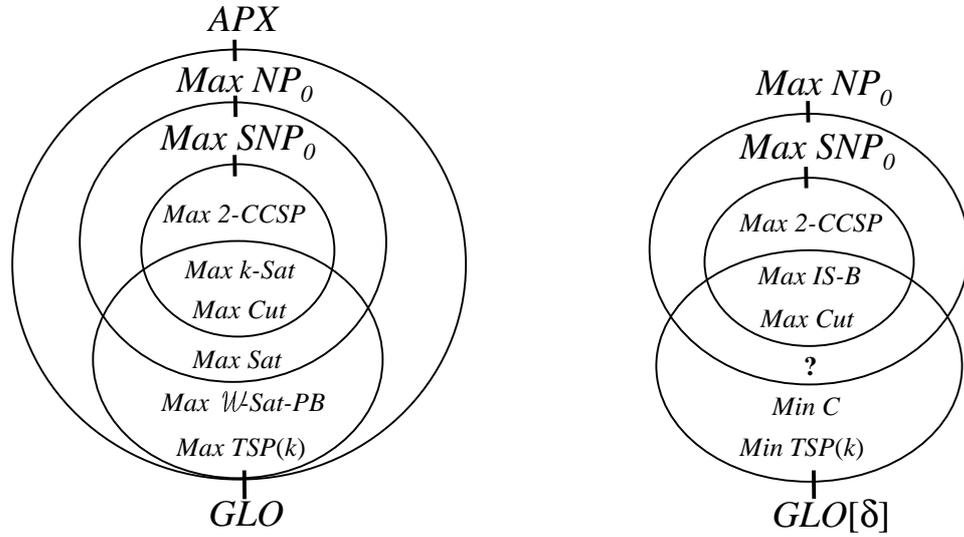


FIG. 4.2: Les classes $GLO[R]$ et les classes logiques

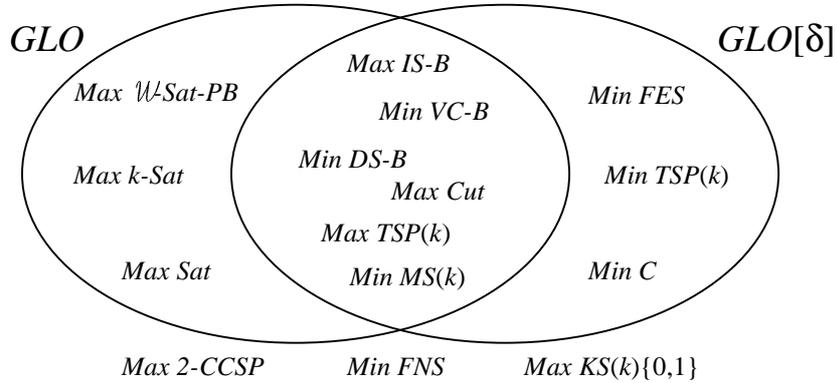
La LOP -réduction est une réduction définie dans [11] qui préserve pour l'approximation les schéma d'approximation par L -réduction, pour la structure les optima locaux par LOC -réduction.

$$\exists \Pi \in (GLO \cap GLO[\delta]) \setminus Max NP, \exists \Pi \in Max SNP \setminus (GLO \cup GLO[\delta])$$

Pour $R \in \{\rho, \delta\}$, la classe $GLO[R]$ et les classes $Max SNP$, $Max NP$ s'intersectent bien sûr, puisque $GLO[R]$ comporte des problèmes de $Max SNP$, mais il n'y a pas de relation d'inclusion : il est des problèmes de $Max SNP$ qui ne garantissent pas la qualité de leurs optima locaux ($Max k - CSP \forall k \geq 2$ [2], $Max 2 - CCSP$ [59] pour GLO , donc pour $GLO[\delta]$), des problèmes de $GLO[R]$ qui ne sont pas $Max NP$ ($Max TSP(k)$ pour GLO et $GLO[\delta]$, $Min C$ pour $GLO[\delta]$). Enfin, des égalités $\overline{Max NP}^P = APX$ et $\overline{GLO}^P = APX$, on déduit $\overline{Max NP}^P = \overline{GLO}^P$; en particulier, tout problème de GLO se P -réduit à un problème de $Max NP$, tout problème de $Max NP$ se P -réduit à un problème de GLO . Nous proposons au travers la figure 4.2 une représentation de ces résultats (*par exemple, pour GLO , $Max Cut \in GLO \cap Max SNP_0$, $Max Sat \in GLO \cap Max NP_0 \setminus Max SNP_0$, $Max TSP(k) \in GLO \setminus Max NP_0$ et $Max 2CCSP \in Max SNP_0 \setminus GLO$).*

4.4.3 Quelle unité dans tout ça ?

La diversité des problèmes se situant dans ou hors des classes GLO semble rendre peu plausible l'établissement d'une caractérisation unifiée des problèmes garantissant la qualité

FIG. 4.3: *GLO* et *GLO[δ]*

de leurs optima locaux. Par exemple, les problèmes *Min FES* et *Min FNS* sont si proches qu'il est délicat d'expliquer pourquoi leur expression induit-elle l'appartenance pour le premier, la non appartenance pour le second, à *GLO[δ]*. Nous n'avons pas, sur la syntaxe même des problèmes, mis à jour de moyen de décision d'appartenance à *GLO* ni *GLO[δ]*. Que l'on regarde sous l'angle de la formulation logique ou de la programmation linéaire pas exemple, rien ne vient d'évidence. C'est cependant une voie à explorer, mais de façon fine et précise, de même que la structure radiale des problèmes dont nous parlons au prochain chapitre. Une autre observation qui pourrait paraître surprenante, c'est que souvent, ce sont les solutions les plus simples, les optima 1-locaux, qui nous ont permis d'établir des rapports d'approximation ; le fait le plus remarquable est que parfois même, il est possible de montrer (ce sera notamment le cas à propos de certains problèmes de satisfaisabilité au chapitre 6) qu'ils sont aussi bons que les optima *h*-locaux pour tout entier *h*-bornés.

En guise de conclusion de cette section, nous proposons par la figure 4.3 l'observation relative des classes *GLO* et *GLO[δ]* par les problèmes que nous avons, jusqu'ici, été en mesure de situer relativement à ces classes (*par exemple*, $Max\ k - Sat \in GLO \setminus GLO[\delta]$, $Max\ TSP(k) \in GLO \cap GLO[\delta]$ et $Min\ TSP(k) \in GLO[\delta] \setminus GLO$).

4.5 Récapitulatif des résultats

De même qu'au chapitre précédent, nous parcourons les problèmes évoqués par l'entremise d'un tableau qui résume leur situation face aux classes *GLO[R]* ; une fois de plus, les résultats originaux sont mis en avant.

Problème considéré	<i>GLO</i>	Rapport	Voisinage	<i>GLO</i> [δ]	Rapport	Voisinage
Problèmes de partitionnement héréditaire						
cas général	N ($\neg APX$)	–	–	O	$\frac{1}{2}$	1 – borné
cas B -borné	O	$\frac{2}{B+1}$	1 – borné	O	$\frac{1}{2}$	1 – borné
Problème de couverture d'ensemble						
<i>Min SC</i> – B	?	?	?	O	$\frac{1}{B+1}$	1 – borné
<i>Min SC</i> – $B - \Delta$	O	$\frac{B+1}{B^2\Delta}$	1 – borné	O	$\frac{B\Delta}{(B+1)(B\Delta-1)}$	1 – borné
Problème d'ensemble transversal : <i>idem</i>						
<i>Min FES</i>	?	?	?	O	$\frac{1}{2}$	1 – borné
<i>Min MS</i> (k)	O	$\frac{2-1}{m}$	1 – borné	O	$1 - 1/m$	1 – borné
Problème du voyageur de commerce						
<i>Min TSP</i> (k)	N ($\neg APX$)	–	–	O	$\frac{1}{2}$	4 – borné
<i>Max TSP</i> (k)	O[41]	$\frac{1}{2}$	4 – borné	O	$\frac{1}{2}$	4 – borné
<i>Min TSP</i> [a, ka]	O	$\frac{2}{k+1}$	4 – borné	O	$\frac{1}{2}$	4 – borné
Problèmes de satisfaisabilité						
<i>Max Sat</i>	O	$\frac{1}{2}$ [11]	1 – borné	N	–	$\forall h \in \mathbb{N}$
<i>Max k – Sat</i>	O	$\frac{k}{k+1}$ [47]	1 – borné	N	–	$\forall h < k$
<i>Min FNS</i>	N	–	$\forall h \in \mathbb{N}$	N	–	$\forall h \in \mathbb{N}$
<i>Min FNS</i> – B	?	?	?	O	$\frac{2}{B+2}$	1 – borné
<i>Max S Sum</i>	N	–	$\forall h \in \mathbb{N}$	N	–	$\forall h \in \mathbb{N}$

Chapitre 5

Changeons l'angle de vue

Dans ce chapitre, nous oublions quelques temps la qualité des optima locaux pour revenir sur la détermination même de telles solutions. Nous nous sommes au paragraphe 3.1.1 contentés de donner quelques conditions triviales de déroulement polynomial d'un algorithme de recherche locale générique, survolant la question cruciale : sur quel problème, et pour quel type de voisinage, pourra être déterminé un optimum local relativement à ce voisinage en temps polynomial ? Évaluer la performance, comme nous l'avons fait jusqu'ici, est une chose ; être en mesure de déterminer une solution en est une autre, que nous abordons ici du point de vue de la classe *PLS* et des *problèmes radiaux* ; cette présentation a pour motivation de mieux cerner (sans se prétendre d'exhaustivité) le champ de recherches et de difficultés posées par les optima locaux en approximation polynomiale. Son rôle est purement informatif et n'a pas l'ambition d'exposer à proprement parler de résultat nouveau.

5.1 La classe *PLS* des problèmes de recherche locale

La question “*Sur quel problème vais-je être capable de déterminer des optima locaux*”, Jonhson, Papadimitriou et Yannakakis se la posent dans [55] en terme de la classe *PLS* (*Polynomial-time Local Search*) des problèmes de recherche d'optima locaux. Un tel problème est la donnée d'un problème $\Pi = (I_\Pi, Sol_\Pi, m_\Pi, opt_\Pi)$ de *NPO* et d'une fonction voisinage \mathcal{V} pour lequel on connaît un algorithme C_Π qui, pour tout couple (I, s) de $I_\Pi \times Sol_\Pi(I)$, sait déterminer en temps polynomial en $|I|$ si s est optimum local relativement à \mathcal{V} et le cas échéant, renvoie une solution $s' \in \mathcal{V}(I, s)$ strictement meilleure que s au sens de m_Π et de opt_Π . L'idée est de restreindre la notion d'optima locaux à des voisinages calculables en temps polynomial, condition nécessaire au déroulement polynomial des *LSA*. Une fois la

classe posée, tout reste à faire : savoir quels couples (*problème, voisinage*) permettront-ils de déterminer rapidement des optima locaux. C'est là toute la richesse apportée à la discipline par les travaux de Yannakakis et al. dans [55], [77], [82], montrant combien la question prend son sens par une profusion de résultats positifs et négatifs, de résultats cruciaux de complétude, connaissance à laquelle les contributions de Krentel dans [66] et Klauck dans [61] sont notamment à signaler.

5.1.1 De la difficulté de détermination des optima locaux

Quelques notions indispensables

Définition 5.1. *PLS*

Un couple (Π, \mathcal{V}) où Π est un problème de *NPO* et \mathcal{V} une fonction voisinage sur Π est un problème de *PLS* s'il existe un algorithme C_Π qui vérifie :

$$\begin{aligned}
 PLS1 \quad & \exists p_\ell \text{ polynôme} / C_\Pi(I, s) \text{ de complexité au pire des cas } p_\ell(|I|) ; \\
 PLS2 \quad & \forall I \in I_\Pi, \forall s \in \text{Sol}_\Pi(I), C_\Pi(I, s) = \begin{cases} s \text{ si } s \text{ optimum sur } \mathcal{V}(I, s), \\ t \in \mathcal{V}(I, s) / m_\Pi(I, t) \succ m_\Pi(I, s) \text{ sinon.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Pour comparer maintenant le déroulement de *LSA* entre problèmes de la classe, les auteurs définissent naturellement la *PLS-réduction*. Contrairement à la *réduction de voisinage*, la *PLS-réduction* cherche explicitement à *transporter par réduction les optima locaux de $f(I)$ vers I* , mais pas nécessairement à rattacher tout optimum local de I à un optimum local de $f(I)$; par ailleurs, dans la classe *PLS*, le *voisinage* est partie intégrante de la définition des problèmes, *faisant ainsi partie des objets à réduire*, tandis que la réduction de voisinage tente d'associer à tout voisinage d'une certaine structure sur Π' un voisinage de structure semblable sur Π . Les voisinages considérés sont au demeurant de toute sorte, éventuellement résultant d'algorithmes sophistiqués, même si les voisinages *h-bornés* ont toujours une grande part à jouer.

Définition 5.2. *PLS-réduction*

Soient (Π, \mathcal{V}) et (Π', \mathcal{V}') deux problèmes de *PLS*, une *PLS-réduction* $\mathcal{R} = (f, g)$ de (Π, \mathcal{V}) à (Π', \mathcal{V}') , notée $(\Pi, \mathcal{V}) \overset{PLS}{\propto} (\Pi', \mathcal{V}')$, est une réduction de Π à Π' qui vérifie :

$$\begin{aligned}
 PLS \quad & \forall I \in I_\Pi, \forall s' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)), \\
 & s' \text{ optimum sur } \mathcal{V}'(f(I), s') \Rightarrow g(s') \text{ optimum sur } \mathcal{V}(I, g(s')).
 \end{aligned}$$

Si $(\Pi, \mathcal{V}) \overset{PLS}{\propto} (\Pi', \mathcal{V}')$ et que l'on peut déterminer par *LSA*, en temps polynomial, un optimum local s' d'une instance $f(I)$ de Π' , alors on a directement par g , qui est également de complexité polynomiale en $|I|$, un optimum local $s = g(s')$ de I .

Max et *Min Circuit* pour le voisinage 1-borné ont été les premiers problèmes montrés *PLS*-complets; une instance du problème de *Circuit* est la donnée d'un circuit booléen (sans boucle) sur les portes “*et*” (\wedge), “*ou*” (\vee) et “*non*” (\neg) qui prend en entrée un mot binaire σ de longueur m ($\sigma \in \{0,1\}^m$) et renvoie en sortie un mot binaire τ de longueur n ($\tau \in \{0,1\}^n$); selon la version considérée, il s'agit de trouver un input σ dont la sortie τ *maximise* ou *minimise* le nombre $\sum_{i=0}^{n-1} \tau_i 2^i$ d'écriture binaire τ . D'autres problèmes ont ensuite été montrés *PLS*-complets (souvent par des constructions fastidieuses), citons notamment *Min TSP* pour le voisinage $k-opt$ où k est une certaine constante [66] (le voisinage $k-opt$ fait l'échange, d'un tour à un tour voisin, entre deux paquets de k arêtes), *Max WCut* [77], *Max W2-Sat* et *Max WPos NAE-3-Sat* ([66] et [77]) pour le voisinage 1-borné, où le dernier problème est la restriction du problème *Max WNAE-3-Sat* à des ensembles de clauses constituées uniquement de littéraux positifs.

Ces résultats, bien que précieux, ne sont qu'intermédiaires: nous ne sommes pas encore en mesure d'en déduire des résultats négatifs, ce que permettent généralement de faire des résultats de complétude. Les chercheurs se focalisent alors sur le déroulement des *LSA* ou plus exactement, leur navigation dans l'ensemble des solutions, pour définir une réduction qui établisse une relation plus forte encore entre les deux instances mises en rapport.

Le graphe de transition

La fonction objectif ordonne les solutions d'un problème, de sorte que l'on peut toujours représenter l'espace des solutions à l'aide d'un graphe orienté dont les sommets sont les solutions réalisables et les arcs les couples de solutions (x, y) tels que la solution y est meilleure que x . De façon plus fine et dans l'esprit de la recherche d'optima locaux, il serait intéressant de se limiter aux couples (x, y) de solutions voisines (au sens d'une certaine structure de voisinage) telles que y est strictement meilleure que x ; dans cette représentation de $Sol_{\Pi}(I)$, les sommets qui n'ont pas d'arc sortant, que nous qualifierons d'*absorbants*, sont les optima locaux du problème. Dans [77], il est question pour une problème (Π, \mathcal{V}) de *PLS* de *graphe de transition* et note $TG_{\Pi}(I) = (V_I, A_I)$ le graphe orienté défini par :

$$V_I = Sol_{\Pi}(I) \text{ et } A_I = \{(s, t) \in Sol_{\Pi}(I) / t \in \mathcal{V}(I, s) \wedge m_{\Pi}(I, t) \succ m_{\Pi}(I, s)\}.$$

La *hauteur* d'un sommet v est définie dans $TG_{\Pi}(I)$ par la longueur d'un plus court chemin de v vers un sommet *absorbant*, la *hauteur* de $TG_{\Pi}(I)$ est la hauteur du sommet de plus grande hauteur. Ces définitions sont sans ambiguïté, $TG_{\Pi}(I)$ étant clairement rendu sans

circuit par la nécessité d'améliorer strictement la valeur des solutions d'une extrémité à l'autre de chaque arc. Un chemin d'une solution s à une solution t , puisque qu'il améliore la fonction objectif à chaque passage d'une solution à une solution voisine, est appelé dans [39] *chemin améliorant*. Le déroulement d'un *LSA* se lit aisément sur ce graphe : partant d'une solution initiale (par exemple $triv_{\Pi}(I)$, au pire des cas une pire solution x_W), chaque itération consiste en le choix d'un sommet descendant par le parcours d'un arc, jusqu'à tomber sur un sommet *absorbant*, optimum local du problème désigné par \mathcal{V} . Ainsi, la complexité d'un *LSA* est minorée (au facteur polynomial près du choix du voisin à chaque itération) par la hauteur de $TG_{\Pi}(I)$. Pour rapprocher deux problèmes de *PLS* du point de vue de leur résolution locale, il faut donc définir une réduction qui rapproche leur *graphe de transition*. Un peu comme l'ont fait Ausiello et Protasi dans [11], Yannakakis s'intéresse à un sous-ensemble de solutions de l'instance image, solutions qu'il qualifie de *raisonnables* et qui, en quelque sorte, est la partie pertinente de $Sol_{\Pi'}(f(I))$ pour représenter $Sol_{\Pi}(I)$ du point de vue traité de la résolution locale. La *Stricte-PLS-réduction* a de *stricte* la proximité plus grande qu'elle met en évidence entre les deux instances comparées.

Définition 5.3. *stricte-PLS-réduction*

Une *PLS-réduction* $\mathcal{R} = (f, g)$ entre deux problèmes (Π, \mathcal{V}) et (Π', \mathcal{V}') de *PLS* est une *stricte-PLS-réduction*, notée $(\Pi, \mathcal{V}) \overset{s-PLS}{\propto} (\Pi', \mathcal{V}')$, s'il existe pour toute instance I de I_{Π} un sous-ensemble $S_{\Pi'}(f(I))$ de $Sol_{\Pi'}(f(I))$ et une fonction $g' : Sol_{\Pi}(I) \rightarrow S_{\Pi'}(f(I))$ polynomiale en $|I|$ tels que :

- s-PLS1* $S_{\Pi'}(f(I))$ contient tous les optima locaux de $f(I)$;
- s-PLS2* $\forall s \in Sol_{\Pi}(I), g \circ g'(s) = s$;
- s-PLS3* pour tout chemin $C_{s't'}$ de s' à t' dans $TG_{\Pi'}(f(I))$ dont les extrémités s' et t' sont dans $S_{\Pi'}(f(I))$ et tous ses sommets intermédiaires dans $Sol_{\Pi'}(f(I)) \setminus S_{\Pi'}(f(I))$, alors dans $Sol_{\Pi}(I)$, soit $g(s') = g(t')$, soit $(g(s'), g(t'))$ est un arc de $TG_{\Pi}(I)$.

On voit facilement que, si $(\Pi, \mathcal{V}) \overset{s-PLS}{\propto} (\Pi', \mathcal{V}')$ et qu'un *LSA* cherchant un optimum local relativement à \mathcal{V} sur I doit emprunter au moins k arcs dans $TG_{\Pi}(I)$, alors un *LSA* cherchant un optimum local relativement à \mathcal{V}' sur $f(I)$ devra emprunter également au moins k arcs dans $TG_{\Pi'}(f(I))$, un arc sur $Sol_{\Pi}(I)$ correspondant à un chemin dans $Sol_{\Pi'}(f(I))$: la hauteur de toute solution v de $S_{\Pi'}(f(I))$ dans $TG_{\Pi'}(f(I))$ est au moins aussi importante que la hauteur de la solution $g(v)$ dans $TG_{\Pi}(I)$. Le temps est alors venu d'énoncer les résultats négatifs : il ne *suffit* plus pour cela que de construire, artificiellement, un problème de *PLS* dont l'algorithme de recherche locale soit de complexité exponentielle (un problème dont

l'arbre de transition est un chemin unique sur un nombre exponentiel de solutions) et de reprendre les preuves de *PLS*-complétude sous l'angle de la *stricte* – *PLS*-réduction. Ainsi, notamment pour les problèmes suivants, le déroulement d'un *LSA* est exponentiel, *et ce indépendamment de la stratégie de choix du voisin à chaque itération*:

$$\left. \begin{array}{l} \textit{MinTSP} \text{ et le voisinage } k - \textit{opt} \text{ (pour une certaine constante } k), \\ \textit{Max} \text{ et } \textit{MinCircuit}, \\ \textit{MaxWCut}, \\ \textit{MaxW2 - Sat}, \\ \textit{MaxWPosNAE - 3 - Sat} \end{array} \right\} \text{ et le voisinage 1-borné.}$$

Ces résultats peuvent surprendre : pour le problème *MaxWCut* par exemple, cela signifie qu'un sommet au moins du graphe sera, au cours du déroulement du *LSA*, ajouté et retiré à la solution courante un nombre exponentiel de fois. Plus précisément encore, et plus éloquent sûrement quant à la difficulté de détermination d'optima locaux, pour tous ces couples (*problème, voisinage*), le *problème standard d'optimum local* associé (savoir, partant d'une solution initiale, déterminer la solution que retournerait l'heuristique de recherche locale considérée) est montré *PSPACE*-difficile [82]. La classe *PSPACE* regroupe l'ensemble des problèmes de décision que l'on sait résoudre dans en *encombrement mémoire* polynomial, et la conjecture est forte de penser que *NP* soit un sous-ensemble *propre* de *PSPACE*, ce qui fait des problèmes *PSPACE*-difficiles des problèmes *encore plus durs* que les problèmes *NP*-difficiles.

Heureusement cependant, il est des problèmes et des voisinages dont les optima locaux s'obtiennent en temps polynomial, mais il faut pour cela se contenter d'instances polynomialement bornées : la détermination d'optima 1-locaux pour les problèmes *MaxCut*, *Max2 - Sat* et *MaxPosNAE - 3 - Sat* a par exemple été montrée *P*-complète ; du coup, le *problème standard d'optimum local* associé à ces problèmes devient également *P*-complet.

Pour conclure sur ce point et illustrer combien la tâche peut être ardue que d'appréhender seulement la complexité de détermination d'un optimum local, notons les recherches de Fisher [40] qui, étant donnés un problème Π de *NPO*, une fonction voisinage \mathcal{V} , une solution initiale $s_0(I)$ et un entier z pose le problème de décision Π^* suivant : “*soit I une instance de I_Π , existe-t-il dans $TG_\Pi(I)$ un chemin améliorant de $s_0(I)$ à un optimum local au sens de \mathcal{V} de taille inférieure ou égale à z ?*” Fischer prouve par exemple que les problèmes *MaxWCut**, *MaxWE - 2 - Sat**, *MaxWPosNAE Sat** pour le voisinage 1-borné, *MinTSP** pour le voisinage 2 – *opt*, sont tous *NP*-complets.

5.1.2 Approximation des optima locaux

La recherche d'optima locaux semblant si difficile pour certains problèmes, Klauck se demande dans [61] s'il n'est pas au moins possible de les approcher *i.e.* de déterminer des solutions s qui soient au moins aussi bonnes que le pire des optima locaux, à un facteur multiplicatif $r \in]0, 1]$ près. Pour lier les problèmes entre-eux, Klauck définit un nouvel outil nommé *forte-PLS*-réduction qui ajoute à la *stricte-PLS*-réduction, dont le rôle est de préserver la structure, un aspect de performance dont le rôle est de préserver le niveau d'approximation relativement *au pire optimum local*. Notons qu'on se rapproche de plus en plus des G -réductions, toujours à la nuance près qu'ici les voisinages sont définis a priori. Il n'en demeure pas moins qu'il s'agit là d'un outil intéressant à regarder sous l'angle *GLO*, en exigeant toutefois comme préservation du niveau de performance, celle de la qualité globale des optima locaux. Les résultats négatifs seront de portée moindre, simplement plus précis (on ne dira plus que Π ne garantit pas la qualité de ses optima locaux pour tout voisinage h -borné, mais pour une fonction voisinage particulière). La complétude par *forte-PLS*-réduction dans *PLS* des problèmes suivants est établie dans [61] :

$Min W4 - CCSP - B$,	voisinage 1-borné,	pour une constante B ;
$Min WIDS - B$,	voisinage k -borné,	pour deux constantes B et k ;
Min et $Max PL\{0, 1\}$,	voisinage k -borné,	pour une constante k
et $Min TSP$,	voisinage $k - opt$,	pour une constante k .

Le problème *Min IDS* (*Independent Dominating Set*, *Min WIDS* pour sa version pondérée), consiste à déterminer un ensemble dominant qui soit stable et de plus petite taille possible. Cette nouvelle complétude apporte comme enseignement supplémentaire la difficulté *non plus simplement d'obtention* d'un optimum local mais *d'approximation* d'une telle solution : on ne peut approcher un problème Π *PLS*-difficile au sens de la *forte-PLS*-réduction à 2^{-n^ε} de l'optimum global à moins que P n'égale NP , *ni même de l'optimum local* pour $\varepsilon > 0$ à moins que P n'égale *PLS* [61].

La *forte-PLS*-réduction préservant les schémas d'approximation, et comme la classe *PLS* contient des problèmes *NPO*-difficiles au sens de la P -réduction (*Min TSP* par exemple), l'établissement de la difficulté d'un problème vis-à-vis de cette réduction dans la classe *PLS* permet de déduire la *NPO*-difficulté de ce problème ; par ailleurs, en regardant les réductions proposées sous l'angle de la E -réduction, Klauck démontre notamment le fait remarquable que le problème $Min 3 - CCSP - 3$ est complet pour la classe *NPO - PB*.

5.2 Les problèmes radiaux

On s'intéresse ici à des problèmes dont le *graphe de transition* est exploitable pour une certaine structure de voisinage, évoquant dans un premier temps les travaux effectués à ce propos dans le cadre du rapport différentiel, reprenant ces travaux dans un second temps à l'avantage de l'approche *GLO*. La représentation de l'ensemble des solutions sous forme d'un graphe n'a pas été l'unique inspiration des chevaliers de l'optimalité locale; dans [32], on exploite la possibilité qu'offrent certains problèmes de représenter leur ensemble de solution sous forme d'un arbre: c'est le cas des *problèmes radiaux*. La structure de tels problèmes permet de déployer l'ensemble de solutions de chacune de leurs instances sous forme d'un arbre de racine une pire solution, de sorte que toute solution et en particulier une solution optimale soit déductible de cette pire solution par une *succession unique de solutions* qui améliorent chacune strictement la valeur objective. Pour comprendre l'intérêt de la chose, il faut porter attention à la remarque suivante: selon la nature du problème traité, le *graphe de transition* n'est pas forcément *connexe*. Pour le problème de stable, toute solution est issue du même point de départ, *le vide*, par des ajouts successifs de sommets; pour d'autres problèmes cependant, il n'y a pas nécessairement de solution *mère de toutes* au sens des *chemins améliorants* dans le graphe de transition, et toute solution n'est pas nécessairement *dégradable* dans son voisinage: nous pensons notamment à *Min TSP* avec le voisinage 2 – *opt* et donnons un exemple pour *Max Sat* avec le voisinage 1-borné. Considérons l'ensemble de six clauses $\{(x_1, \bar{x}_2), (x_3, \bar{x}_4), (x_2, \bar{x}_3), (x_4, \bar{x}_1), (\bar{x}_1, \bar{x}_3), (\bar{x}_2, \bar{x}_4)\}$ et l'affectation $T = (1, 1, 1, 1)$ qui met toutes les variables à 1; T valide 4 clauses, ainsi que *toutes ses affectations voisines* $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 0, 1)$, $(1, 0, 1, 1)$ et $(0, 1, 1, 1)$. De sorte, T est un point isolé dans le graphe de transition, non déductible à partir d'une pire solution $(1, 0, 1, 0)$ ou $(0, 1, 0, 1)$ le long d'une chaîne améliorante. Dans le *graphe de transition* d'un couple (*problème, voisinage*), si toute solution mène par un chemin à un sommet *absorbant* optimum local, en revanche tout optimum local n'est pas nécessairement accessible à partir d'une solution de départ. Avec les *problèmes radiaux*, on se restreint aux problèmes dont les ensembles de solutions peuvent être représentés par un *arbre*, qui couvre *toutes les solutions*, et dont la fonction *père* correspond à une dégradation à définir de chaque solution. Il s'agit donc de problèmes dont le *graphe de transition* de toute instance est *connexe* et *descriptible a priori*, par la connaissance conjointe d'une *pire solution* et d'une *fonction de transition* de toute solution à une solution voisine dégradante. Nous étendrons ensuite la représentation sous forme d'arbre

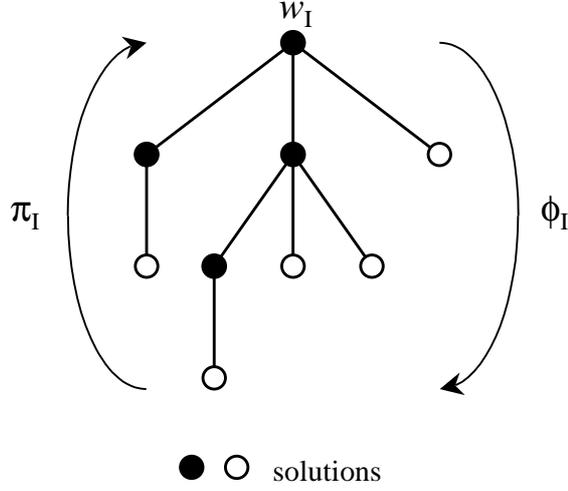


FIG. 5.1: *Arborescence de l'ensemble des solutions d'un problème radial*

au graphe de transition tel qu'il est défini dans [77], en essayant d'exploiter les propriétés mises en avant par la structure *radiale* du problème. Car la représentation de l'espace des solutions sous de telles formes, quand cela est possible, permet de décrire toujours les optima 1-locaux et parfois, des cas d'appartenance à $GLO[\delta]$.

5.2.1 Qu'est-ce que radial?

Les auteurs introduisent dans [32] une famille de problèmes qui admettent des espaces de solutions dans lesquels il est facile de naviguer, celle des *problèmes radiaux*.

Définition

Définition 5.4. Un problème Π de NPO est dit *radial* s'il vérifie pour deux polynômes p et q et deux familles $(\pi_I)_{I \in I_\Pi}$ et $(\phi_I)_{I \in I_\Pi}$ de fonctions polynomiales en $|I|$ les propriétés ¹:

$$\forall I \in I_\Pi, \left\{ \begin{array}{l} \pi_I : Sol_\Pi(I) \rightarrow Sol_\Pi(I) \text{ et } \phi_I : Sol_\Pi(I) \rightarrow \mathcal{P}(Sol_\Pi(I)) \\ (RAD1) \text{ la pire solution } w_I \text{ est unique et constructible en temps } p(|I|) \\ \forall s \in Sol_\Pi(I), \left\{ \begin{array}{l} (RAD2) \exists k \leq q(|I|) \in \mathbb{N} / \pi_I^k(s) = w_I \\ (RAD3) m_\Pi(I, s) \succ m_\Pi(I, \pi_I(s)) \\ (RAD4) \phi_I(s) = \pi_I^{-1}(s) = \{t \in Sol_\Pi(I) / \pi_I(t) = s\} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Pour un problème radial, l'ensemble des solutions d'une instance I peut ainsi se représenter sous forme d'un arbre $A_I = (w_I, \pi_I) = (w_I, \phi_I)$ de racine w_I , défini de façon équivalente

1. où $\mathcal{P}(X)$ désigne l'ensemble des parties de X

par les fonctions père et fils π_I et ϕ_I (cf. figure 5.1). De fils en père, d'après la propriété (RAD3), la solution se dégrade et toute solution réalisable qui ne soit pas de pire valeur trouve d'après (RAD2) sa place dans l'arborescence, sur un chemin d'une feuille à w_I ; de père en fils, la solution se bonifie, et toute solution peut être vue comme le fruit d'une suite d'améliorations infligées à la solution w_I . Ainsi les optima, locaux comme globaux, se situent sur les feuilles: s est une feuille s'il n'est pas de solution t dans $Sol_{\Pi}(I)$ telle que s se trouverait sur le chemin de t à w_I qui remonte la fonction père π_I . Dans un arbre, il est facile de circuler et plus précisément ici, on sait déterminer des solutions intéressantes en temps polynomial: l'entrée dans l'arbre par w_I est polynomiale par (RAD1) puis le suivi de la fonction ϕ_I de père en fils jusqu'à arriver en une feuille est également polynomial, la hauteur H_I de l'arbre (longueur d'un plus long chemin dans A_I) étant de l'ordre d'un polynôme en la taille de l'instance par la propriété (RAD2).

Remarque 5.1. Quite à fusionner les pires solutions en un sommet, on peut supposer sans perte de généralité que la pire solution est unique.

Remarque 5.2. Dans [32], w_I n'est pas nécessairement une pire solution mais une solution donnée; l'idée est de disposer d'une solution approchée accessible en temps polynomial à partir de laquelle on puisse développer l'arborescence des solutions réalisables de sorte de pouvoir déduire toute solution meilleure que w_I (dont les solutions optimales) à partir de w_I par une suite de transformations simples amenant à des améliorations successives de la fonction objectif. Cela sous-entend donc que les solutions éventuellement non représentées dans l'arborescence sont toutes dominées par w_I .

Si nous introduisons ce modèle, c'est que parmi les problèmes que nous abordons au cours de ce document, certains, à l'image de *Max IS*, *Min SC*, *Min C* ou encore *Max KS*, sont de tels problèmes; les considérer alors sous cet angle offre la possibilité de mieux cerner leur structure, celle-là même qui nous a permis d'établir le rapport différentiel constant garanti par les solutions maximales ou minimales de certaines instances de ces problèmes.

Illustration

Considérons par exemple le problème *Max IS* et l'une de ses instances $I = G(V, E)$ où $V = \{v_1, \dots, v_n\}$; pour tout sous-ensemble $U \subseteq V$ de taille q , on ordonne ses sommets par ordre d'indice croissant $\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(q)$. *Max IS* est radial avec pour pire solution constructible en temps polynomial la solution $w_I = \emptyset$ et pour fonctions père et fils

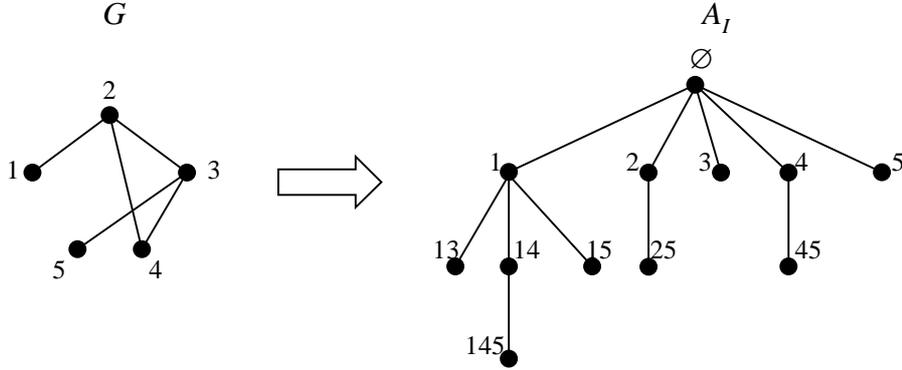


FIG. 5.2: Arborescence pour un problème de stable

les fonctions π_I et ϕ_I définies par :

$$\forall U \text{ stable dans } G, \begin{cases} \pi_I(U) = U \setminus \{v_{\sigma(q)}\} \\ \phi_I(U) = \bigcup_{j=\sigma(q)}^n \{W = U \cup \{v_j\} / W \text{ stable}\}. \end{cases}$$

La figure 5.2 offre une illustration du modèle que nous venons de proposer pour le problème de stable avec comme instance le graphe $G(V, E)$ défini par $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$.

Remarque 5.3. on a choisi, étant donné un stable $U = \{u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(q-1)}, u_{\sigma(q)}\}$, de donner paternité à l'ensemble $\{u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(q-1)}\}$ déduit de U en lui retirant le sommet de plus grand indice; cependant, toute fonction père déterministe formant un stable de cardinalité inférieure par le retrait d'un sommet à U est acceptable.

Soit maintenant $I = (C, S)$ une instance du problème de couverture d'ensemble de famille $S = \{S_1, \dots, S_n\}$; la pire solution consistant à prendre la famille entière, on a toujours $w_I = S$. Pour toute sous-famille $S' \subseteq S$ de taille q , on ordonne les sous-ensembles de $S \setminus S'$ par ordre d'indice croissant : $\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(n-q)$. On définit alors les fonctions père et fils

$$\forall S' \text{ couverture} : \begin{cases} \pi_I(S') = S' \cup \{S_{\sigma(n-q)}\} \\ \phi_I(S') = \bigcup_{j>\sigma(n-q)/S_j \in S'} \{T = S' \setminus \{S_j\} / T \text{ couverture}\}. \end{cases}$$

Dans les deux cas, il s'agit bien de problèmes radiaux puisque les fonctions ϕ_I et π_I proposées sont de complexité polynomiale : π_I construit en parcourant les sommets de V (*resp.* les sous-ensembles de S) au plus n pères, de taille au plus n ; de son côté, ϕ_I parcourt l'ensemble des sommets (*resp.* des sous-ensembles) et vérifie la réalisabilité d'au plus n solutions

constructibles à partir de U (*resp.* S'). Autrement, les propriétés (*RAD2*) et (*RAD3*) sont trivialement vérifiées : par l'ajout d'un sommet (*resp.* la suppression d'un sous-ensemble), on améliore strictement la valeur de la solution (*RAD3*) ; enfin, tout ensemble de sommets U peut être vu comme l'union de ses éléments, toute sous-famille S' comme la résultante de suppressions successives des éléments de la famille S (*RAD2*).

Motivation

La notion de problèmes radiaux a été introduite dans [32] pour deux choses : tout d'abord, établir l'équivalence entre l'approximation au sens usuel et l'approximation asymptotique de problèmes radiaux sous le rapport différentiel ; ensuite, on remarque que pour tout problème radial, si la profondeur de l'arbre qui borne la longueur du plus long chemin de w_I à une solution optimale est d'ordre constant, alors ce problème est polynomial ! Parallèlement à ces travaux, Monnot exploite la radialité dans [68] pour isoler une famille de problèmes Δ -simples à diamètre traitable : un problème Π est Δ -simple si pour toute constante k , on sait résoudre en temps polynomial les instances I de diamètre borné par k (*i.e.* telles que $|\beta_{\Pi}(I) - \omega_{\Pi}(I)| \leq k$) ; Π est à *diamètre traitable* si pour toute constante k , on sait décider en temps polynomial si, oui ou non, on a la relation $\text{diam}_{\Pi}(I) \leq k$. Cela est utile car si un problème est à la fois Δ -simple et à diamètre traitable, alors pour toute constante k et tout algorithme \mathcal{A} approché pour Π , le rapport de performance pour la mesure différentielle établi par \mathcal{A} sur I_{Π} est donné par la performance de \mathcal{A} sur la famille d'instances $I^k = \{I \in I_{\Pi} / \text{diam}_{\Pi}(I) > k\}$ (notion d'instances critiques définie par Monnot). C'est cependant dans un tout autre cadre d'étude que nous souhaitons exploiter la formulation radiale des problèmes, celui de la garantie de performance par les optima locaux.

5.2.2 Les problèmes τ -radiaux

L'idée du problème radial est l'exhibition d'une fonction qui permette à la fois de générer tout l'ensemble $Sol_{\pi}(I)$ à partir de w_I et d'ordonner ses solutions. Nous avons déjà remarqué que les optima d'une instance d'un problème radial se situaient sur les feuilles de l'arbre A_I , mais quelles feuilles ? Sur la figure 5.2, les ensembles stables $\{1, 3\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 5\}$, $\{3\}$, $\{4, 5\}$ et $\{5\}$ correspondant aux feuilles de l'arbre A_I sont de statuts bien contrastés : par exemple, $\{1, 3\}$ est un stable maximal, $\{1, 4, 5\}$ un stable maximum, tandis que $\{5\}$ n'est pas même maximal ! Ainsi, la structure d'arbre découlant des fonctions π_I et ϕ_I n'est pas si lisible qu'on pourrait le souhaiter si l'on s'intéresse en réalité à la description non

pas d'une façon de générer une solution quelconque à partir de la pire solution w_I , mais de toutes les façons de le faire. Pour cela, nous allons prendre explicitement en considération la transformation sous-jacente aux fonctions père et fils et considérer pour chaque solution non pas une dégradation possible, mais toutes les dégradations pouvant mener à une pire solution par cette transformation. Dans le graphe G , le stable $\{1, 4, 5\}$ est autant la résultante de l'ajout du sommet 1 au stable $\{4, 5\}$ que la conséquence de l'intégration du sommet 5 au stable $\{1, 4\}$. Déclarer la radialité d'un problème, c'est établir la possibilité de déduction de toute solution d'une pire solution par améliorations successives; une fois cette structure mise à jour commence son exploitation par la représentation exhaustive de la constitution des solutions.

Nous nous concentrons donc sur les propriétés sous-jacentes à la radialité: d'une part, la possibilité de construire en temps polynomial l'unique pire solution de toute instance, d'autre part, la possibilité de déduction de toute solution par une chaîne améliorante à partir de cette pire solution. Rares sont les problèmes dont le graphe de transition prend naturellement la forme d'un arbre et comme nous l'avons vu pour les quelques exemples proposés, la représentation sous la forme d'arbre force à restreindre arbitrairement la représentation des arcs entre solutions voisines (ce qui revient à faire des coupes dans le voisinage), engendrant éventuellement des feuilles non optimales: c'est ce que nous voulons éviter maintenant. Nous travaillerons donc sur le graphe de transition complet de problèmes radiaux particuliers dits τ -radiaux qui nous intéressent plus précisément pour l'approche GLO.

Définition

Définition 5.5. Un problème Π de NPO est dit τ -radial s'il existe deux polynômes p et q et une famille de fonctions multivoques $(\tau_I : Sol_\Pi(I) \rightarrow \mathcal{P}(Sol_\Pi(I)))_{I \in I_\Pi}$ polynomiale en $|I|$ telles que Π et $(\tau_I)_{I \in I_\Pi}$ vérifient pour toute instance I de I_Π les propriétés:

(τ - RAD1) la pire solution w_I est unique et constructible en temps $p(|I|)$

(τ - RAD2) $\forall s \in Sol_\Pi(I), \begin{cases} \exists k \leq q(|I|) \in \mathbb{N} / \tau_I^k(s) = \{w_I\} & (2.1) \\ \forall k \in \mathbb{N}, w_I \in \tau_I^k(s) \Rightarrow \tau_I^k(s) = \{w_I\} & (2.1) \end{cases}$

(τ - RAD3) $\forall s \neq w_I \in Sol_\Pi(I), \forall t \in \tau_I(s), m_\Pi(I, s) \succ m_\Pi(I, t)$

(τ - RAD4) la fonction $\theta_I : s \in Sol_\Pi(I) \mapsto \theta_I(s) = \{t \in Sol_\Pi(I) / s \in \tau_I(t)\}$ est polynomiale en $|I|$

Le graphe de transition d'un problème τ -radial permet de se déplacer facilement de solutions en solutions voisines à la recherche d'optima locaux: une solution s a par exemple pour voisins directs (ou 1-locaux vis-à-vis d'une certaine transformation) les ensembles $\tau_I(s)$

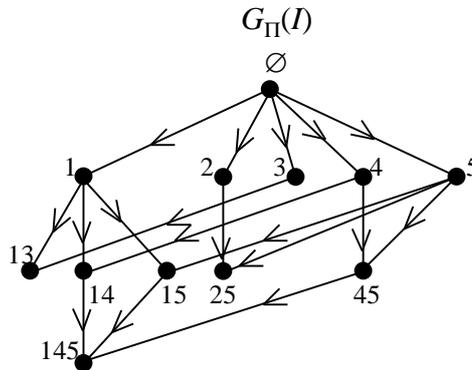


FIG. 5.3: *Le graphe de transition pour un problème de stable*

de solutions qui sont toutes strictement pires que s et $\theta_I(s)$ de solutions qui lui sont toutes strictement meilleures. Cette fois, *optima locaux* et *sommets absorbants* coïncident.

Exemple 5.1. Le problème de stable est bien τ -radial avec pour transformation élémentaire le retrait unitaire de sommet (*cf.* figure 5.3) :

$$\forall s \in \{0, 1\}^n, \tau_I(s) = \bigcup_{i / s_i=1} \{t \in \{0, 1\}^n / (\forall j \neq i, t_j = s_j) \wedge (t_i = 0)\}.$$

À l'évidence, il en est de même du problème de couverture d'ensemble, en considérant naturellement comme transformation élémentaire le retrait unitaire de sous-ensemble.

Nous avons déjà parlé de *hauteur* dans le *graphe de transition*, nous parlerons maintenant de *niveau* : si pour l'estimation de la complexité d'un *LSA*, on s'intéresse à la longueur d'une chaîne améliorante de toute solution à un *sommet absorbant*, pour l'estimation de la qualité des optima locaux en différentiel, on s'intéresse à la longueur d'une chaîne améliorante de *la pire solution* à toute solution, et en particulier à un *sommet absorbant*. La propriété ($\tau - RAD2.2$) permet, en imposant pour toute solution s que les chemins de w_I à s soient de longueur unique, de définir une telle notion de *niveau*. Effectivement, considérons une solution s et deux chemins C_1 et C_2 de w_I à s de longueur respective k_1 et k_2 ; cela signifie que $w_I \in \tau_I^{k_1}(s)$ et $w_I \in \tau_I^{k_2}(s)$, ce dont on déduit par ($\tau - RAD2.2$) $\tau_I^{k_1}(s) = \tau_I^{k_2}(s) = \{w_I\}$. Si jamais C_2 était plus long que C_1 , le k_1 ème sommet rencontré en remontant C_2 à partir de s serait une solution t différente de w_I , contredisant ainsi ($\tau - RAD2.2$). Appelons donc *niveau d'un sommet s* dans $TG_\Pi(I)$ et notons $n(s)$ la longueur d'un chemin de w_I à s ; de plus, nous désignerons par N_I la longueur d'un plus long chemin de la racine à un *sommet absorbant* et par L_I le plus grand demi-degré extérieur (le demi-degré extérieur d'un sommet

s compte le nombre de sommets t extrémité terminale d'un arc d'extrémité initiale s):

$$\forall s \in \text{Sol}_\Pi(I), \quad n(s) = \min\{k \in \mathbb{N} / \tau_I^k(s) = \{w_I\}\}$$

$$N_I = \max_{s \in \text{Sol}_\Pi(I)} \{n(s)\}, \quad L_I = \max_{s \in \text{Sol}_\Pi(I)} \{|\theta_I(s)|\}.$$

Notons que, par définition des problèmes τ -radiaux, les quantités N_I (τ -RAD2.1) et L_I (τ -RAD4) sont bornées par des polynômes en la taille de l'instance.

Problèmes τ -radiaux et optima locaux

Pour une transformation τ_I adéquate (*ex.* ajout/suppression unitaire d'éléments d'une structure considérée), les ensembles de solutions $\tau_I(s)$ et $\theta_I(s)$ forment les voisinages 1-bornés qui nous ont permis d'établir l'appartenance des problèmes à $GLO[R]$, et les solutions qui se situent sur les *sommets absorbants* de $TG_\Pi(I)$ ne sont autres que les optima 1-locaux relativement à ces voisinages. Le nombre de solutions de niveau k est borné par la quantité L_I^k ; ainsi, il y a dans $TG_\Pi(I)$ au pire $L_I^{N_I}$ *sommets absorbants*, optima 1-locaux relativement à la transformation τ_I : si s est *absorbant*, c'est qu'il n'est pas de solution t meilleure que s telle que $s = \tau_I(t)$; parmi ces solutions se trouvent des optima globaux. Combien de temps faut-il, partant de w_I , pour atteindre un *sommet absorbant*? Au plus $C(\theta_I) \times N_I$ si $C(\theta_I)$ désigne la complexité de θ_I , soit une quantité bornée par un polynôme en la taille de l'instance, $C(\theta_I)$ étant supposée polynomiale, N_I étant bornée par $q(|I|)$ (τ -RAD2.1). La pire solution w_I étant elle-même constructible en temps polynomial, elle permet de garantir l'obtention d'une solution τ -maximale ou τ -minimale, selon qu'il s'agisse d'un problème de maximisation ou de minimisation, en temps polynomial.

Propriété 5.1. *Si un problème Π de NPO est τ -radial, alors on sait déterminer des solutions τ -maximales si Π problème de maximisation, τ -minimales si Π problème de minimisation en temps polynomial.*

Au-delà des solutions maximales et minimales, saurait-t-on déterminer des optima locaux h -bornés sur le graphe $TG_\Pi(I)$? On définit comme voisins h -distants d'une solution s l'ensemble des solutions que l'on peut atteindre à partir de s en appliquant au plus h fois alternativement les fonctions τ_I et θ_I , désignant ainsi pour tout entier naturel h le voisinage h -borné \mathcal{V}^h suivant :

$$\forall h \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} h = 0 & \mathcal{V}^0(I, s) = \{s\} \\ \forall h \geq 1, & \mathcal{V}^h(I, s) = \mathcal{V}^{h-1}(I, s) \cup \tau(\mathcal{V}^{h-1}(I, s)) \cup \theta(\mathcal{V}^{h-1}(I, s)). \end{cases}$$

La détermination d'un optimum local relativement au voisinage \mathcal{V}^h n'est pas polynomiale dans le cas général pour $h \geq 2$: les retours en arrière (dégradation de la solution) étant autorisés par l'utilisation de la transformation τ_I , il est possible que la recherche d'un optimum local mène au parcours "en largeur" du graphe $TG_{\Pi}(I)$; or, le déroulement d'un tel parcours n'a aucune raison d'être polynomial puisque l'exploration de toutes les solutions de niveau k pourrait revenir à considérer de l'ordre de L_I^k solutions, k pouvant être une puissance de n . Par la suite, nous nous restreindrons à une famille de problèmes au support polynomialement borné, ce qui, nous l'avons vu en 3.1.1, assure le déroulement polynomial des algorithmes de recherche locale: il s'agit des problèmes τ -radiaux dont la transformation τ_I engendre entre une solution et l'une de ses images un saut constant de la fonction objectif. Cette classe renferme les familles remarquables des problèmes héréditaires (resp. anti-héréditaires) tels *Max IS* (resp. *Min SC*) et des problèmes de partitionnement héréditaires tels *Min C* et *Min BP*.

5.2.3 Une sous-famille remarquable

Les problèmes réguliers

Dans [9], les auteurs qualifient de *convexe* tout problème pour lequel, entre les performances $\omega_{\Pi}(I)$ et $\beta_{\Pi}(I)$ d'une pire et d'une meilleure solutions, toutes les valeurs sont atteintes par des solutions réalisables de l'instance considérée:

$$\forall I \in I_{\Pi}, \{m_{\Pi}(I, s), s \in \text{Sol}_{\Pi}(I)\} = [\beta_{\Pi}(I), \omega_{\Pi}(I)] \cap \mathbb{N}.$$

Cette notion a été élargie dans [32] au cas d'un saut constant (mais non plus nécessairement unitaire) entre deux valeurs consécutives:

$$\forall I \in I_{\Pi}, \exists K_I \in \mathbb{N}^* / \begin{cases} \forall s \in \text{Sol}_{\Pi}(s), m_{\Pi}(I, s) \equiv 0[K_I] \\ \text{et } \{m_{\Pi}(I, s), s \in \text{Sol}_{\Pi}(I)\} = [\beta_{\Pi}(I)/K_I, \omega_{\Pi}(I)/K_I] \cap \mathbb{N}. \end{cases}$$

Dans le cadre de la radialité, de tels problèmes seront qualifiés de réguliers.

Définition 5.6. Un problème Π τ -radial de *NPO* est dit *régulier* s'il vérifie pour toute instance I :

$$\exists K_I / \forall s \neq w_I \in \text{Sol}_{\Pi}(I), \forall t \in \tau_I(s), |m_{\Pi}(I, s) - m_{\Pi}(I, t)| = K_I.$$

Si Π est régulier, alors la valeur de ses solutions se lit aisément dans le graphe $TG_{\Pi}(I)$, chaque arc faisant évoluer de son extrémité initiale à son extrémité finale la fonction objectif

d'exactlyment K_I unités ; ainsi, la valeur de toute solution s sera donnée par :

$$\begin{cases} \text{opt}_{\Pi}(I) = \max & \Rightarrow m_{\Pi}(I, s) = \omega_{\Pi}(I) + (K_I \times n(s)), \\ \text{opt}_{\Pi}(I) = \min & \Rightarrow m_{\Pi}(I, s) = \omega_{\Pi}(I) - (K_I \times n(s)). \end{cases}$$

En particulier, on a

$$\begin{cases} \text{opt}_{\Pi}(I) = \max & \Rightarrow \beta_{\Pi}(I) = \omega_{\Pi}(I) + (K_I \times N_I) \\ \text{opt}_{\Pi}(I) = \min & \Rightarrow \beta_{\Pi}(I) = \omega_{\Pi}(I) - (K_I \times N_I). \end{cases}$$

On en déduit le rapport différentiel de performance donné par toute solution s par le rapport des niveaux :

$$\delta_{\Pi}(I, s) = \frac{n(s)}{N_I}.$$

Pour le théorème qui suit, h_I désigne la hauteur de w_I (longueur d'un plus court chemin de w_I à un *sommet absorbant*) dans le graphe $TG_{\Pi}(I)$.

Théorème 5.2. *Si Π problème de NPO est τ -radial et régulier alors on a l'implication :*

$$\frac{h_I}{N_I} \geq r \Rightarrow \Pi \in GLO[\delta].$$

Preuve : pour toute instance I , les optima 1-locaux sont les solutions s associées aux *sommet absorbants* de $TG_{\Pi}(I)$, dont la valeur réalise le rapport $n(s)/N_I \geq h_I/N_I \diamond$

Remarque 5.4. : plus précisément, quand un problème Π est τ -radial régulier, on a même l'équivalence

$$\Pi \in GLO[\delta](1) \Leftrightarrow \exists r / \forall I \in I_{\Pi}, h_I/N_I \geq r.$$

Les problèmes héréditaires et anti-héréditaires

Il est aisé de voir que, par exemple, *Max IS* et *Min SC* sont réguliers avec pour toute instance I $K_I = 1$, mais c'est en réalité le fait de la famille plus large formée des problèmes héréditaires et anti-héréditaires. Une propriété P sur un ensemble X est *héréditaire* si dès lors qu'elle est vraie pour un ensemble $Y \subseteq X$, alors elle l'est sur tout sous-ensemble Z de Y ; de façon symétrique, on dira d'une propriété qu'elle est *anti-héréditaire* si étant vérifiée pour un ensemble $Y \subseteq X$, elle le sera également pour tout ensemble Z vérifiant $Y \subseteq Z \subseteq X$. Remarquons qu'une propriété P héréditaire (*resp.* anti-héréditaire), pour être définie sur un ensemble X , devra nécessairement vérifier $P(\emptyset)$ (*resp.* $P(X)$) (sinon P ne sera vraie sur aucun sous-ensemble de X). Par exemple, la stabilité comme la clique sur l'ensemble V des sommets d'un graphe est une propriété héréditaire, tandis que la couverture de sommets comme la

dominance, toujours sur l'ensemble V des sommets d'un graphe, sont des propriétés anti-héréditaires. De ces propriétés découlent des problèmes naturels d'optimisation : on appelle *problème héréditaire* tout problème Π qui cherche à maximiser sur un ensemble X la taille d'un ensemble vérifiant une certaine propriété héréditaire P ($Max IS$, $Max Clique$); un problème Π sera qualifié de *problème anti-héréditaire* dès lors qu'il faudra pour le résoudre minimiser la taille d'un ensemble qui avère une propriété anti-héréditaire P sur un ensemble X (les problèmes de couverture $Min VC$ sur un ensemble d'arêtes, $Min SC$ sur un ensemble, $Min FNS$ et $Min FES$ sur les cycles d'un graphe). Bien entendu, le critère d'optimisation peut être étendu, dans le cas d'instances pondérées, à la somme des poids des éléments du sous-ensemble solution considéré ($Min WVC$, $Max KS$), au poids de l'élément le plus lourd ou au poids moyen pour des propriétés anti-héréditaires etc... Dans ce cadre, on retrouve notamment la classe des problèmes de sac-à-dos *Maximum Knapsack* qui est dans $FPTAS$ et dont on connaît, pour de nombreuses variantes, des conditions nécessaires et suffisantes d'admission de schémas standards et complets [44].

Définition 5.7. Problèmes héréditaire et anti-héréditaire

Soit Π un problème de NPO ; Π est un problème héréditaire (*resp.* anti-héréditaire) s'il existe une propriété héréditaire (*resp.* anti-héréditaire) P telle que toute instance I de Π revient à résoudre un problème du type :

$$\begin{aligned}\beta_{\Pi}(I) &= \max\{\alpha(Y), Y \subseteq X/P(Y)\} && \text{si } P \text{ héréditaire,} \\ \beta_{\Pi}(I) &= \min\{\alpha(Y), Y \subseteq X/P(Y)\} && \text{si } P \text{ anti-héréditaire.}\end{aligned}$$

où α est une fonction d'évaluation des ensembles de type cardinalité, somme des poids, poids maximum, poids moyen...

Exemple 5.2. Quels sont les problèmes τ -radiaux à rapport de niveaux constant? $Max IS - B$ est de ceux-là, à l'instar du problème général $Max IS$, garantissant ainsi la qualité de ses optima locaux. Nous démontrons de nouveau l'appartenance du problème $Max IS - B$ à la classe $GLO[\delta]$ par l'exploitation du graphe $TG_{\Pi}(I)$; ce résultat, déjà établi, n'a d'intérêt que dans l'aisance et le caractère constructif de sa démonstration : en se promenant dans le *graphe de transition*, pour évaluer le rapport des hauteurs d'un optimum local et d'optimum global, on explicite la façon dont se construit la solution optimale à partir de la solution optimum locale. Cela encourage à regarder, quand cela est possible, les problèmes de NPO au travers les *graphes de transition* quand ceux-là ont de bonnes propriétés.

Soit $I = G(V, E)$ un graphe à n sommets, situons-nous sur un *sommet absorbant* s du graphe $TG_{\Pi}(I)$ et soit s^* une solution optimale; on appelle a le vecteur correspondant à l'intersection de s et s^* , solution de plus grand niveau se trouvant à l'intersection d'un chemin de w_I à s et de w_I à s^* (*cf.* figure 5.4). La solution s est optimum local si on ne peut

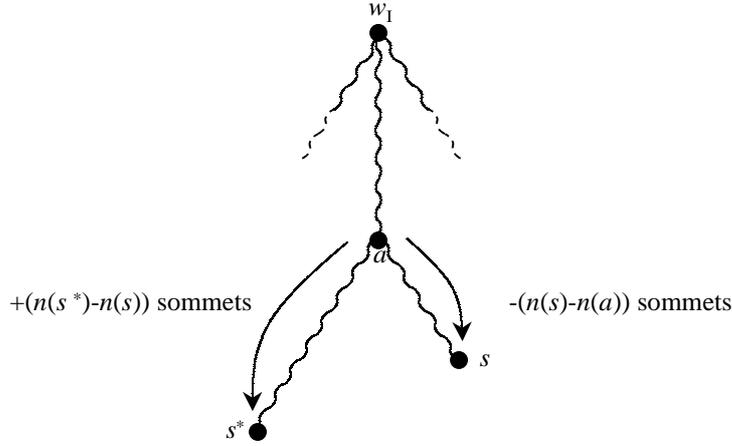


FIG. 5.4: Les hauteurs de Max IS - B

lui incorporer de sommet sans violer la stabilité: les $n - n(s)$ sommets restants sont donc interdits. Pour construire s^* à partir de s , il aura fallu enlever $n(s) - n(a)$ sommets à s puis en ajouter $n(s^*) - n(a)$. Si Δ est le degré maximum d'un sommet de G , alors en enlevant $n(s) - n(a)$ sommets à s , on a pu lever jusqu'en la solution a l'interdiction d'incorporation d'au plus $\Delta \times (n(s) - n(a))$ sommets; on en déduit $n(s^*) - n(a) \leq \Delta \times (n(s) - n(a))$ et ainsi :

$$n(s^*) \leq n(a) + \Delta \times (n(s) - n(a)) \Leftrightarrow \Delta n(s) \geq n(s^*) + (\Delta - 1) n(a) \Rightarrow \frac{n(s)}{n(s^*)} \geq \frac{1}{\Delta}.$$

Si Δ est borné par une constante B , on retrouve le résultat annoncé à l'occasion du théorème 3.1.

Les problèmes de partitionnement héréditaire

Les problèmes de partitionnement héréditaire consistent, étant donné un ensemble X et une propriété P , à partager X en un minimum de sous-ensembles vérifiant la propriété P (cf. paragraphe 4.1.1). Soit donc Π un tel problème et I une instance de Π ; la pire solution w_I consiste à isoler les éléments de X en $n = |X|$ sous-ensembles. Notant $\mathcal{S} = \{V_1, \dots, V_q\}$ les partitions de X , on définit la transformation τ_I qui consiste, d'une partition \mathcal{S} , à considérer toute partition obtenue à partir de \mathcal{S} en isolant un sommet de l'un de ses sous-ensembles :

pour toute instance I et tout partition $\mathcal{S} = \{V_1, \dots, V_q\}$ sur I :

$$\tau_I(\mathcal{S}) = \bigcup_{i \in \{1, \dots, q\}} \bigcup_{x \in V_i} \{\mathcal{S}' = \mathcal{S} \setminus \{V_i\} \cup \{\{x\}, V_i \setminus \{x\}\}\}.$$

La transformation τ_I désigne en réalité les mêmes optima 1-locaux que ceux qui ont permis au paragraphe 4.1.1 d'établir l'appartenance des problèmes de partitionnement héréditaire à $GLO[\delta]$.

5.3 Conclusion

Les optima locaux, leur recherche comme leur degré de performance, sont un vaste sujet d'étude dont nous avons présenté seulement quelques aspects, approfondis mais éloquents ; l'idée, le principe est si naïf, et pourtant déterminer un optimum local en temps raisonnable peut se trouver très ambitieux, et pourtant parfois ils suffisent à assurer un bon rapport d'approximation. Ce chapitre n'a pas proposé de résultat, seulement une ouverture sur une voie déjà empruntée et combien exploitée par d'autres, celle qui plonge à l'intérieur de la structure même du problème, l'organisation de son ensemble de solutions. Cela va dans le sens de l'ambition, toujours présente, d'une structuration de l'éclectique classe *NPO* et de la mise en regard de la *définissabilité* des problèmes et de leur *approximabilité*.

Chapitre 6

Les problèmes de satisfaisabilité et leurs optima locaux

Dans ce chapitre, nous nous concentrons exclusivement sur les problèmes de satisfaisabilité; d'abord parce qu'ils jouent un rôle clef dans le cadre de l'approximation classique, ensuite parce qu'ils permettent d'appréhender la richesse de la notion d'optima locaux à rapport garanti en envisageant différentes interprétations ou élargissement de ce concept: optimum local par rapport à quel voisinage, optimum local par rapport à quel critère d'optimalité? Les résultats proposés, qui permettent d'illustrer parfaitement les classes de problèmes sous-jacentes à la définition d'optimalité locale considérée, concernent essentiellement le rapport classique; nous verrons effectivement à quel point ces problèmes, même dans leurs versions les plus simples, semblent difficiles à approximer en différentiel.

6.1 Les problèmes de satisfaisabilité entre eux

6.1.1 Présentation

Soit $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble de variables booléennes, $L = \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ l'ensemble des littéraux issus de X et $C = \{c_1, \dots, c_m\} \subseteq \mathcal{P}'(L)$ un ensemble de clauses sur L où $\mathcal{P}'(L)$ désigne l'ensemble des parties de L qui ne sont pas des tautologies; une affectation des valeurs de vérité est un vecteur $T \in \{0, 1\}^n$ dont la signification est la suivante:

$$\forall i = 1, \dots, n, (T_i = 1 \Leftrightarrow x_i \text{ vrai}) \text{ et } (T_i = 0 \Leftrightarrow \bar{x}_i \text{ vraie}).$$

On appelle solution complémentaire d'une affectation T l'affectation notée \bar{T} constituée des valeurs opposées des composantes de T :

$$\forall T \in \{0, 1\}^n, \forall j = 1, \dots, n, \bar{T}_j = 1 - T_j.$$

Les problèmes de la famille *Max Sat* (*resp.* *Min Sat*) consistent à maximiser (*resp.* minimiser) le nombre de clauses contenant au moins un littéral vrai, tandis que les problèmes de la famille *Max CCSP* (*resp.* *Min CCSP*) consistent à maximiser (*resp.* minimiser) le nombre de clauses avérées par tous ses littéraux. Les problèmes *Max k - Sat*, *Min k - Sat*, *Max k - CCSP* et *Min k - CCSP* sont les restrictions de ces problèmes aux instances composées exclusivement de clauses de taille au plus k , tandis que *Max E - k - Sat*, *Min E - k - Sat*, *Max E - k - CCSP* et *Min E - k - CCSP* désignent les restrictions des ces derniers aux instances composées de clauses de taille exactement k , qualifiées de k -clauses.

Les tautologies qualifient les clauses qui sont toujours vraies, indépendantes de l'affectation des valeurs de vérité: une clause c est une tautologie si c contient simultanément les littéraux l et \bar{l} , pour un littéral l de L . Une telle clause sera toujours vraie pour *Sat*, toujours fausse pour *CCSP*; c'est pourquoi nous choisissons de travailler sur des instances qui n'en comportent pas. L'élimination de ces clauses n'ont pas d'incidence ni quant à la performance relative de solutions, ni quant à l'approximation: pour *CCSP*, c'est évident puisqu'une solution sur l'instance contenant des tautologies ou sur l'instances lavée de ses tautologies aura même valeur; pour *Max Sat* (*resp.* *Min Sat*), il suffit de remarquer qu'un rapport classique $m_{Sat}(I, T)/\beta(I) \geq r$ ou $\beta(I)/m_{Sat}(I, T) \geq r$ sur l'instance sans tautologie induit le même niveau d'approximation sur l'instance augmentée de k tautologies:

$$\frac{m_{Sat}(I, T) + k}{\beta(I) + k} \geq \frac{m_{Sat}(I, T)}{\beta(I)} \quad \text{et} \quad \frac{\beta(I) + k}{m_{Sat}(I, T) + k} \geq \frac{\beta(I)}{m_{Sat}(I, T)};$$

quant au rapport différentiel, on sait bien qu'il n'est pas à une constante près, quel que soit le problème Π , l'instance I , la solution T et l'entier relatif k considérés:

$$\frac{\omega(I) + k - (m_{\Pi}(I, T) + k)}{\omega(I) + k - (\beta_{\Pi}(I) + k)} = \frac{\omega(I) - m_{\Pi}(I, T)}{\omega(I) - \beta_{\Pi}(I)}.$$

Pour ces raisons, on se placera donc toujours dans le cadre de clauses constituées sur $\mathcal{P}'(L)$, ensemble des parties de L qui ne sont pas des tautologies.

Soit C un ensemble de m clauses sur un ensemble X de n variables; on note \bar{X} la négation des variables de X , $L = X \cup \bar{X}$ l'ensemble des littéraux et $\mathcal{CL} = \mathcal{P}'(L)$ l'ensemble des clauses que l'on peut former sur l'ensemble des littéraux de L . Dans le cas particulier

d'instances composées de k -clauses, $\mathcal{C}\mathcal{L}$ coïncide avec l'ensemble $\mathcal{P}'_k(L)$ des clauses de taille k que l'on peut construire sur L , et dans celui d'instances composées de clauses de taille au plus k , $\mathcal{C}\mathcal{L}$ coïncide avec l'ensemble $\cup_{h=0}^k \mathcal{P}'_h(L)$ de l'union des parties de taille au plus k de L ; dans un cas comme dans l'autre, la cardinalité $|\mathcal{C}\mathcal{L}|$ de l'ensemble $\mathcal{C}\mathcal{L}$ est toujours bornée par m^{k+1} . Enfin, soit $c = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k)$ une clause, \bar{c} désigne la clause $(\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2, \dots, \bar{\ell}_k)$ formée des littéraux opposés. Considérons alors les transformations \bar{f} et f^C qui, à partir d'une instance $I = (X, C)$ d'un problème de satisfaisabilité, construisent respectivement les instances \bar{I} et I^C définies comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{f} & : I_{Sat} \rightarrow I_{Sat} \quad / \quad I \mapsto \bar{I} = (X, \bar{C}) \quad \text{où} \quad \bar{C} = \bigcup_{c \in C} \{\bar{c}\}, \\ f^c & : I_{k-Sat} \rightarrow I_{k-Sat} \quad / \quad I \mapsto I^C = (X, \mathcal{C}\mathcal{L} \setminus C). \end{aligned}$$

Afin de pouvoir exploiter ces deux transformations dans le cadre de réductions, il nous faut vérifier qu'elles se déroulent bien en temps polynomial. La première, \bar{f} , consiste à recopier les paramètres de l'instance I en inversant seulement le sens des littéraux dans les clauses, ce qui demande $n + m$ opérations. La seconde, dans le cas de k -clauses uniquement, recopie l'ensemble des variables puis génère toutes les clauses possibles, le tout en $n + |\mathcal{C}\mathcal{L}|$ opérations; chaque clause ayant due être comparée aux clauses de l'instance initiale pour ne prendre que les clauses qui n'y figurent pas, il aura fallu procéder à, au pire, $|\mathcal{C}\mathcal{L}| \times m \times n^2$ comparaisons. Ces deux fonctions sur l'ensemble des instances des problèmes de satisfaisabilité, l'une dans le cas général, l'autre dans le cas de clauses de taille bornée par une constante, ont donc un déroulement en temps qui est polynomial en la taille $\max\{m, n\}$ de l'instance initiale.

Nous allons à présent mettre à jour les relations qu'entretient l'instance I avec les instances \bar{I} et I^C . Soit T une affectation des valeurs de vérité, on passe des problèmes Sat et $CCSP$ au travers des instances I et \bar{I} de la façon suivante :

$$\begin{aligned} c \text{ est satisfaite pour } CCSP & \Leftrightarrow \text{ tous les littéraux de } c \text{ sont vrais pour } T \\ \Updownarrow & \qquad \qquad \qquad \Updownarrow \\ \bar{c} \text{ non satisfaite pour } Sat & \Leftrightarrow \text{ tous les littéraux de } \bar{c} \text{ sont faux pour } T. \end{aligned}$$

Ce qui se traduit en terme de fonctions d'évaluation par la relation :

$$m_{Sat}(I, T) = m - m_{CCSP}(\bar{I}, T) \quad (i)$$

Bornons à présent le nombre de littéraux par k et notons ν le nombre de clauses que l'on peut construire sur n littéraux : selon que l'on se limite ou non à des clauses de taille exactement k , on aura $\nu = C_n^k$ ou $\nu = \sum_{h=0}^k C_n^h$. Toute affectation T des valeurs de vérité permet alors

d'avérer ν clauses de $\mathcal{C}\mathcal{L}$ pour $CCSP$ puisque c'est là le nombre de clauses que l'on peut construire sur les n littéraux avérés par T . De même pour le problème Sat , seules les ν clauses intégralement constitués de littéraux faux pour T ne seront pas avérées, autrement dit toute affectation des valeurs de vérité satisfera $|\mathcal{C}\mathcal{L}| - \nu$ clauses. Toute clause de $\mathcal{C}\mathcal{L}$ se trouvant soit dans C , soit dans $\mathcal{C}\mathcal{L} \setminus C$, on en déduit entre les instances I et I^C les relations :

$$\begin{aligned} m_{CCSP}(I, T) &= \nu - m_{CCSP}(I^C, T) & (ii) \\ (i) \wedge (ii) \Rightarrow m_{Sat}(I, T) &= (|\mathcal{C}\mathcal{L}| - \nu) - m_{Sat}(I^C, T) & (iii) \end{aligned}$$

6.1.2 Tous dans le même sac

Nous montrons simplement que les relations que l'on vient d'évoquer ne sont que l'expression de la forte équivalence qui lie les problèmes Sat et $CCSP$ dans leurs versions maximisation et minimisation puisqu'il s'agit là d'équivalence affine; nous rappelons que sous le formalisme du rapport différentiel, deux problèmes liés de telle sorte sont totalement équivalents du point de vue de leur approximation.

Théorème 6.1.

- (a) les problèmes $MaxCCSP$ et $Min Sat$ sont affinement équivalents
- (b) les problèmes $Max Sat$ et $MinCCSP$ sont affinement équivalents

Preuve

D'après (i) : la réduction (\bar{f}, Id) est bien une réduction affine de $Max Sat$ à $MinCCSP$ et de $MinCCSP$ à $Max Sat$, de $MaxCCSP$ à $Min Sat$ et de $Min Sat$ à $MaxCCSP$, avec $k_I = -1$ et $K_I = m \diamond$

Théorème 6.2. *Pour tout entier $k \geq 2$, les problèmes $Max k - Sat$, $Max E - k - Sat$, $Min k - Sat$, $Min E - k - Sat$, $Max k - CCSP$, $Max E - k - CCSP$, $Min k - CCSP$ et $Min E - k - CCSP$ admettent le même degré d'approximation différentielle.*

Pour montrer ce théorème, nous allons mettre à jour certaines équivalences affines entre ces problèmes.

Lemme 6.3.

$$\forall k \in \mathbb{N},$$

- (a) $Max k - Sat \stackrel{AF}{\Leftrightarrow} Min k - CCSP$ et $Max E - k - Sat \stackrel{AF}{\Leftrightarrow} Min E - k - CCSP$
- (b) $Max k - CCSP \stackrel{AF}{\Leftrightarrow} Min k - Sat$ et $Max E - k - CCSP \stackrel{AF}{\Leftrightarrow} Min E - k - Sat$
- (c) $Max k - Sat \stackrel{AF}{\Leftrightarrow} Min k - Sat$ et $Max E - k - Sat \stackrel{AF}{\Leftrightarrow} Min E - k - Sat$
- (d) $Max k - CCSP \stackrel{AF}{\Leftrightarrow} Min k - CCSP$ et $Max E - k - CCSP \stackrel{AF}{\Leftrightarrow} Min E - k - CCSP$

Preuve :

Pour (a) et (b), on utilise l'argument du théorème 6.1. Pour c , d'après (ii) : la réduction (f^C, Id) est bien une réduction fortement affine de $Max\ k - CCSP$ à $Min\ k - CCSP$ et de $Min\ k - CCSP$ à $Max\ k - CCSP$, de $Max\ E - k - CCSP$ à $Min\ E - k - CCSP$ et de $Min\ E - k - CCSP$ à $Max\ E - k - CCSP$ avec $k_I = -1$ et $K_I = \nu$. Pour (d), d'après (iii) : la réduction (f^C, Id) est une réduction fortement affine de $Max\ k - Sat$ à $Min\ k - Sat$ et de $Min\ k - Sat$ à $Max\ k - Sat$, de $Max\ E - k - Sat$ à $Min\ E - k - Sat$ et de $Min\ E - k - Sat$ à $Max\ E - k - Sat$ avec $k_I = -1$ et $K_I = |\mathcal{C}| - \nu \diamond$

Lemme 6.4.

$$\forall k \in \mathbb{N}, Max\ k - CCSP \stackrel{AF}{\leftrightarrow} Max\ E - k - CCSP$$

Preuve

Soient k une constante entière, on considère la transformation t qui à toute instance $I = (X, C)$ de $k - CCSP$ associe l'instance $I' = (X', C')$ du même problème définie par

$$\begin{aligned} D = \{c \in C \mid |c| < k\} &\Rightarrow X' = X \cup \{y\} \text{ et } C' = (C \setminus D) \cup D_P \cup D_N \\ \text{avec } D_P = \bigcup_{c \in D} \{c \cup \{y\}\} &\text{ et } D_N = \bigcup_{c \in D} \{c \cup \{\bar{y}\}\}. \end{aligned}$$

I' est bien une instance de $k - CCSP$ puisque son ensemble de clauses reprend celui de I pour l'ensemble $C \setminus D$ et construit deux ensembles D_P et D_N en ajoutant le littéral y ou \bar{y} à des clauses de taille au plus $k - 1$. Notant pour toute affectation T' des valeurs de vérité sur X' par $T'_{|X}$ la restriction de T' à l'ensemble X , on remarque entre les instances I et I' la relation :

$$\forall (T, T') \in \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^{n+1} \mid T'_{|X} = T, m_{CCSP}(I', T') = m_{CCSP}(I, T) \text{ (iv)}$$

puisque tous les littéraux d'une clause c sont vrais si et seulement si tous les littéraux de c et y ou tous les littéraux de c et \bar{y} sont vrais!

En appliquant itérativement $k - 1$ fois la transformation t , on obtient, en temps polynomial, une instance de $E - k - CCSP$: la plus petite clause de I contenant au moins un littéral, il faut au plus $k - 1$ itérations pour que toute clause soit transformée en une famille de k -clauses. Au pire, C contient m singletons et t^k aura construit $2^{k-1}m$ clauses. Si on note pour h de 0 à $k - 1$ X^h l'ensemble des variables de l'instance $t^h(I)$, alors la relation (iv) permet de déduire pour tout couple T et T' d'affectations sur X et X^{k-1} telles que

$T'_{|X} = T :$

$$\begin{aligned} \forall h = 1, \dots, k-1, \quad m_{CCSP}(t^h(I), T'_{|X^h}) &= m_{CCSP}(t^{h-1}(I), T'_{|X^{h-1}}) \\ \Rightarrow m_{CCSP}(I^{k-1}, T') &= m_{CCSP}(I, T). \end{aligned}$$

Ainsi, t^k constitue bien une réduction affine de $Max k - CCSP$ à $Max E - k - CCSP$ et de $Min k - CCSP$ à $Min E - k - CCSP$ avec $k_I = 1$ et $K_I = 0$, ce qui suffit, puisque le second problème est toujours un cas particulier du premier, à établir l'équivalence affine. Notons que, comme la relation obtenue sur la valeur des solutions entre les deux instances est linéaire, cette équivalence particulière vaut également pour le rapport classique. Ainsi, lorsque l'on traite en approximation les problèmes $Min k - CCSP$ (*resp.* $Max k - CCSP$) et $Min E - k - CCSP$ (*resp.* $Max E - k - CCSP$), que ce soit sous l'angle classique ou différentiel, tout résultat établi pour l'une de ces deux familles de problèmes le sera par réduction pour l'autre. Ceci achève la démonstration du théorème 6.2 \diamond

Plus généralement, ces réductions permettent de traiter comme un seul toutes ces variations autour de la satisfaisabilité de clauses, conjonctives ou disjonctives, version minimisation ou maximisation, quand on le fait sous l'angle du rapport différentiel, et ce non seulement du point de vue de leur degré d'approximabilité mais aussi selon leurs optima h -locaux : les réductions proposées établissent une bijection entre les ensembles de solutions, de sorte que l'on peut considérer tous ces problèmes comme structurellement équivalents. Avec la mesure classique cependant, ces problèmes apparaissent soudainement, de par leurs différents degrés d'approximation, comme bien différents ; c'est pourquoi nous présentons par la suite des résultats d'approximation locale pour les problèmes de la famille $Max Sat$ dans un premier temps, de la famille $Max CCSP$ dans un second temps. Pour ce faire, nous présentons au préalable un aperçu de la notion d'optimalité locale à taille bornée proposée par [3] et [59] qui enrichit considérablement les concepts fondateurs des classes $GLO[R]$. Grâce aux extensions des classes $GLO[R]$ suggérées par ces travaux, nous pourrions plus en dire quant aux relations qu'entretiennent les problèmes de la famille $Max E - k - Sat$ avec leurs optima locaux en terme de garantie d'approximation.

6.2 GLO et associés

6.2.1 Voisinages miroirs et la classe $CGLO[R]$

Quel que soit le problème traité et l'instance considérée, lorsque l'on se promène dans l'ensemble des solutions réalisables et que l'on se situe en une solution s , la vision que l'on a de

l'ensemble des solutions est locale et non globale: on ne peut déduire de s n'importe quelle solution. En réalité, seul nous est visible un nombre *polynomial* de solutions, déductibles de s à partir de transformations simples. C'est le cas notamment des voisins h -bornés qui s'obtiennent en changeant au plus h composantes du vecteur s pour une constante h . D'autres solutions cependant sont visibles à partir de s , tout en restant dans un voisinage de taille constante: par exemple, la solution complémentaire et ses voisins h -bornés. L'idée est que pour certains problèmes, comme nous l'avons vu pour *Min DS*, s ou \bar{s} est toujours une *bonne* solution au sens de l'approximation polynomiale. Ainsi, à partir d'une solution s , on se permet de changer au plus h ou au moins $n - h$ composantes. Si s est un vecteur de $\{0, 1\}^n$, cela revient à considérer simultanément $2(\sum_{l=0}^h C_n^l) \leq 2n^{h+2}$ solutions. L'extension de la notion d'optimalité locale aux classes *CGLO*[R] (*Complementary-GLO*) reste donc h -bornée, mais étendue aux solutions complémentaires: on regarde simultanément la solution s et sa solution complémentaire \bar{s} , ainsi que toute solution h -distante de s ou de \bar{s} .

Soit Π un problème de *NPO*, I une de ses instances et s une solution de I , on note \bar{s} la solution complémentaire de s définie par $\bar{s} = \vec{1} - s$ où $\vec{1}$ désigne le vecteur unitaire dans $\mathbb{R}^{|I|}$.

Définition 6.1. Un voisinage $\mathcal{V} : I_\Pi \times \text{Sol}_\Pi \rightarrow \text{Sol}_\Pi$ est un *voisinage miroir h -borné* s'il existe un voisinage h -borné \mathcal{W} tel que

$$\forall I \in I_\Pi, \forall s \in \text{Sol}_\Pi(I), \mathcal{V}(I, s) = \mathcal{W}(I, s) \cup \mathcal{W}(I, \bar{s}).$$

CGLO[R] désigne alors la classe des problèmes garantissant la qualité de leurs optima locaux relativement à des voisinages miroir h -bornés.

Définition 6.2. Soit R une mesure d'approximation, un problème Π de *NPO* est dans la classe *CGLO*[R] s'il existe une constante h , une constante $r \in]0, 1]$ et un voisinage \mathcal{V} miroir h -borné pour Π vérifiant :

$$\forall I \in I_\Pi, \forall \tilde{s} \in \text{Sol}_\Pi(I), \tilde{s} \text{ optimum local relativement à } \mathcal{V} \Rightarrow R_\Pi(I, \tilde{s}) \geq r.$$

Alimonti montre par exemple dans [3] que le problème *Max 2-CCSP* n'appartient pas à la classe *GLO* mais qu'en revanche, tout optimum local miroir 1-borné garantit un rapport classique de $1/4$. Souvent, c'est l'ajout de la solution complémentaire \bar{s} qui permet à lui seul l'amélioration d'un rapport, et non pas l'observation de toutes les solutions de $\mathcal{V}(I, \bar{s})$; pour désigner ces voisinages, Alimonti parle de voisinages *relaxés* (puisqu'on relaxe la contrainte

de limitation de la vision que l'on pourrait avoir de l'ensemble des solutions à une distance de h).

Remarque 6.1. Comme nous l'avons dit au paragraphe 4.3, la notion de voisinage h -borné est fortement dépendante du codage des solutions : pour un problème à n variables, si l'on code une affectation T non plus sur n mais sur $n+1$ variables binaires en indiquant dans le premier bit T_0 le sens de lecture des n suivants (si $T_0 = 1$ l'affectation considérée est T_1, \dots, T_n , si $T_0 = 0$ il faut considérer la solution $1 - T_1, \dots, 1 - T_n$), deux solutions complémentaires deviennent 1-distances puisqu'il suffit de modifier T_0 pour opérer le passage au complémentaire. Ainsi les classes $CGLO[R]$ ne sont autre que les classes $GLO[R]$ pour ce nouveau codage. C'est donc toujours avec prudence qu'il faut lire les résultats *négatifs* et *limites* que nous donnons car ils sous-entendent des voisinages h -bornés particuliers, disons "*naturels*" au sens de l'interprétation physique que l'on fait des solutions.

6.2.2 Optima altérés et $GGLO[R]$

Avec la classe $GGLO[R]$ (*Generalized-GLO*), on s'intéresse toujours aux optima locaux pour les voisinages h -bornés, mais vis-à-vis d'une fonction objectif autre que l'objectif du problème, que nous qualifierons d'*objectif altéré* : ce sont les optima locaux vis-à-vis de ce nouvel objectif qui devront garantir un rapport d'approximation constant pour le problème initial. Cette définition a notamment permis dans [3] de démontrer l'approximation de $Max\ k-CSP$ à 2^{-k} par des optima 1-locaux altérés après avoir établi le mauvais comportement des optima h -locaux pour toute constante h . Les instances de ce problème pour une certaine constante k sont la donnée d'un ensemble X de variables et d'un ensemble C de contraintes booléennes k -aires sur X , chaque contrainte c_i consistant en l'évaluation d'un prédicat P_i de $\{0, 1\}^k$ dans $\{0, 1\}$ sur un sous-ensemble X_i , $|X_i| = k$ de X . Une solution est une affectation des valeurs de vérité et l'objectif est de maximiser le nombre de contraintes conjointement satisfaisables. La preuve proposée montre tout d'abord pour le cas particulier $Max\ k-CCSP$ qu'avec cet objectif qui ne compte que les clauses avérées par k littéraux, les optima locaux pour des voisinages h -bornés ne garantissent aucun rapport d'approximation ; en revanche, si l'on pondère judicieusement les clauses selon le nombre de littéraux vrais qu'elles contiennent, alors les optima 1-locaux relativement à cet objectif altéré valident au moins $2^{-k}|C|$ clauses. Pour étendre ce résultat au problème $Max\ k-CSP$, il suffit de remplacer chaque contrainte c_i par la disjonction des k -clauses conjonctives correspondant aux différentes affectations des variables de X_i qui permettent de vérifier c_i (*par exemple, à la contrainte $c_i = (x \vee y)$ sera associée la disjonction $(x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)$*). La transformation est bien polynomiale puisqu'au plus 2^k clauses peuvent être associées à chaque contrainte et sur cette instance

$I' = (X, C')$ de *Max k - CCSP*, si un optimum local pour le problème altéré valide au moins $2^{-k}|C'|$ clauses, alors il vérifiera a fortiori au moins $2^{-k}|C|$ contraintes du problème initial.

Définition 6.3. Soient $\Pi = (opt_{\Pi}, I_{\Pi}, Sol_{\Pi}, m_{\Pi})$ un problème de *NPO* et $m'_{\Pi} : I_{\Pi} \times Sol_{\Pi}(I) \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction objectif altérée pour Π , on dénote par $\Pi' = (opt_{\Pi}, I_{\Pi}, Sol_{\Pi}, m'_{\Pi})$ le problème altéré associé à Π et m'_{Π} .

Soit R une mesure d'approximation, un problème Π de *NPO* est dans la classe *GGLO*[R] s'il existe une constante h , une constante $r \in]0, 1]$, un voisinage \mathcal{V} h -borné pour Π et une fonction m'_{Π} qui vérifient :

GGLO1 $\Pi' \in NPO$,

GGLO2 $\forall I \in I_{\Pi}$,

$\tilde{s} \in Sol_{\Pi}(I)$ optimum local relativement à \mathcal{V} du problème altéré $\Pi' \Rightarrow R_{\Pi}(I, \tilde{s}) \geq r$.

Indépendamment des travaux de Alimonti, Khanna, Motwani, Sudan et Vazirani ont eu dans [59] la même approche de résolution de problèmes altérés ; ils obtiennent des résultats plus qu'éloquents quant à la pertinence d'une telle stratégie de recherche locale, dont nous donnons quelques morceaux choisis dans le théorème suivant :

Théorème 6.5. [59]

1 - *Max 2 - CCSP* \notin *GLO* ;

2 - pour le problème *Max 2 - Sat*, le rapport (classique) de performance d'un LSA selon le critère objectif standard est de $2/3$ pour tout voisinage d -borné, $d = \Theta(n)$, tandis que celui d'un LSA selon un certain objectif altéré et relativement au voisinage 1-borné est de $3/4$;

3 - *Max SNP* \subseteq *GGLO*.

Indications

1 - Considérer la famille d'instances $I_{h,n}$ constituées de n variables $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$, des $n(n-1)/2$ clauses (\bar{x}_i, \bar{x}_j) pour $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ et des $n \times h - h(h+1)/2$ clauses (x_i, x_j) pour $i \neq j, i \in \{1, \dots, h\}, j \in \{1, \dots, n\}$; l'affectation $\vec{1}$ est un optimum local h -borné de valeur $h \times n - h(h+1)/2 \sim h \times n$ quand $\vec{0}$ est optimum global de valeur $n(n-1)/2 \sim n^2$!

2 - Pour la seconde partie du point 2 du théorème, prendre comme objectif altéré $m'_{Sat}(I, T) = 3m_2 + 4m_1$ (au lieu de $m_{Sat}(I, T) = m_2 + 4m_1$) (se référer aux notations introduites au paragraphe 6.3.3).

3 - Les auteurs montrent que *Max k - CSP*, qui est *GGLO*, est un problème de *Max SNP* ; or, les arguments de représentation de toute instance d'un problème de *Max SNP* sous forme d'une conjonction de contraintes k -aires sont donnés dans [74], l'idée étant de

déployer le prédicat k -aire ϕ sur les entrées plausibles (clauses pour un problème de satisfaisabilité, listes d'adjacence des sommets du graphe pour $MaxIS - B...$).

Corollaire 6.6. *Aucun des problèmes $Max2 - CCSP$ et $Min2 - CCSP$, $Max2 - Sat$ et $Min2 - Sat$ ne peut être dans $GLO[\delta]$.*

Preuve : s'il existe pour toute constante h une suite d'instances et de mauvais optima h -locaux de ces instances pour $Max2 - CCSP$ au sens du rapport classique, alors cette suite est a fortiori mauvaise au sens du rapport différentiel ; on en déduit $Max2 - CCSP \notin GLO[\delta]$ et par les équivalences qui lient les versions Min et Max des familles Sat et $CCSP$, on transporte ce résultat négatif de $Max2 - CCSP$ à l'ensemble de ces autres problèmes \diamond

6.2.3 Mixage ou $CGGLO[R]$

On déduit naturellement ce qui se cache derrière les classes $GCGLLO[R]$ (*Generalized-Complementary-GLO*) pour un rapport R d'approximation : la classe des problèmes garantissant la qualité de leurs optima locaux pour un voisinage *miroir* h -borné (s au moins aussi bonne que \bar{s} au sens de l'objectif m_{Π}) et un objectif *altéré* (s au moins aussi bonne que toute solution s' au plus h -distance de s au sens d'un objectif m'_{Π}). Effectivement, il peut parfois s'avérer intéressant de considérer conjointement un ensemble *étendu* de solutions voisines et une fonction objective *altérée*. C'est notamment le cas du problème $Max2 - CCSP$: le rapport d'approximation d'un optimum miroir 1-local pour ce problème n'est que de $1/4$ quand celui d'un optimum 1-local miroir relativement à une certaine fonction objective altérée monte à $2/5$.

Définition 6.4. Soit R une mesure d'approximation, un problème Π de NPO est dans la classe $GCGLLO[R]$ s'il existe une constante h , une constante $r \in]0, 1]$, un voisinage \mathcal{V} h -borné pour Π et une fonction m'_{Π} qui vérifient :

$$\Pi' \in NPO \quad \text{et} \quad \forall I \in I_{\Pi}, \quad \forall \bar{s} \in Sol_{\Pi}(I), \\ m_{\Pi}(I, \tilde{s}) \succeq m_{\Pi}(I, \bar{s}) \quad \text{et} \quad m'_{\Pi}(I, \tilde{s}) \succeq m'_{\Pi}(I, s') \quad \forall s' \in \mathcal{V}(I, s) \Rightarrow R_{\Pi}(I, \tilde{s}) \geq r.$$

La partie qui suit propose une illustration de ces différentes visions de l'optimalité locale à taille bornée par le biais de l'étude des problèmes des familles $MaxE - k - Sat$ et $MaxNAEk - Sat$. Nous parlerons d'optima *miroirs* h -locaux pour se référer au voisinage miroir h -borné et d'optima h -locaux *altérés* pour se référer à un voisinage h -borné relativement à un certain objectif altéré.

6.3 Déclinaison des problèmes de satisfaisabilité maximum en *GLO*

6.3.1 Une opposition de plus entre rapports classique et différentiel

C'est un état de fait : en classique, $Max E - k - Sat$ est *facile* dans le sens où tout optimum 1-local, comme nous le montrons dans ce chapitre, est une $k/(k+1)$ -approximation (cf. théorème 6.8). Plus éloquent peut-être encore, pour $Max Sat$, on peut trouver une $1/2$ -approximation en comparant seulement les performances des solutions $\vec{1}$ et $\vec{0}$ (cf. théorème 6.7) ! Du point de vue de l'approximation différentielle, les choses semblent beaucoup moins aisées : il faudrait par exemple considérer des voisinages h -bornés $h \geq k$ pour seulement espérer établir l'appartenance de $Max E - k - Sat$ à $GLO[\delta]$. Cette difficulté, pour un problème de maximisation, provient simplement du fait que le rapport classique situe la valeur d'une solution entre 0 et β quand le rapport différentiel la situe entre ω et β :

$$v(T) \geq \rho\beta + (1 - \rho)\omega \Rightarrow v(T) \geq \rho\beta.$$

Or, il n'y a, a priori, aucune raison pour que la pire solution soit de valeur nulle en général ; il n'y a, dans le cas particulier des problèmes de satisfaisabilité, aucune raison d'affirmer a priori l'existence d'une affectation des valeurs de vérité qui n'avère aucune clause.

6.3.2 $Max Sat$ et *CGLO*

Théorème 6.7.

$$Max Sat \in CGLO, 1/2$$

Preuve

$$\begin{aligned} \forall T \in \{0, 1\}^n, \quad m_{Sat}(I, T) + m_{Sat}(I, \bar{T}) &\geq m \\ \Rightarrow \max\{m_{Sat}(I, T), m_{Sat}(I, \bar{T})\} &\geq m/2 \quad \diamond \end{aligned}$$

6.3.3 $Max k - Sat$ et *GLO*

Dans [11], Ausiello et Protasi ont prouvé l'appartenance de tout problème de satisfaisabilité maximum à la classe *GLO* par le biais du problème général $Max Sat$ pour lequel tout optimum 1-local de toute instance garantit un rapport d'approximation classique de $1/2$. Pour les sous-problèmes $Max E - k - Sat$, nous montrons que de tels optima locaux garantissent en réalité un rapport $k/(k+1)$.

Soit $I = (X, C)$ une instance de $E - k - Sat$ et T une affectation des valeurs de vérité, on peut toujours supposer, quitte à échanger pour toute variable x_i telle que $T_i = 0$ les occurrences des littéraux x_i et \bar{x}_i , que $T = \vec{1}$. Étant donnée une telle affectation T , la quantité m_a désignera pour tout entier a entre 0 et k le nombre de clauses contenant exactement a littéraux vrais pour T , les quantités $m_a(i)$ et $m_a(\bar{i})$ désigneront quant à elles pour i de 1 à n le nombre de clauses, parmi les clauses avérées par a littéraux, qui contiennent respectivement les littéraux x_i et \bar{x}_i ; bien sûr $\sum_{a=0}^k m_a = m$. Nous associons ainsi à toute solution T et pour a de 0 à k les ensembles et quantités suivantes :

$$\begin{aligned} C_a &= \{c \in C / |c \cap X| = a\} \text{ et } m_a = |C_a|, \\ \forall i = 0, \dots, n, C_a(i) &= \{c \in C_a / x_i \in C\} \text{ et } m_a(i) = |C_a(i)|, \\ \forall i = 0, \dots, n, C_a(\bar{i}) &= \{c \in C_a / \bar{x}_i \in C\} \text{ et } m_a(\bar{i}) = |C_a(\bar{i})|. \end{aligned}$$

Les problèmes *Sat* (*resp.* *CCSP*) consistant à maximiser ou minimiser le nombre de clauses avérées par au moins un littéral (*resp.* tous ses littéraux), on a :

$$\begin{aligned} \forall I = (X, C), \forall T \in \{0, 1\}^{|X|}, \\ m_{Sat}(I, T) = \sum_{a=1}^k m_a = m - m_0, \quad m_{CCSP}(I, T) = m_k. \end{aligned}$$

Par ailleurs, si l'on considère l'affectation complémentaire \bar{T} , on remarque entre ces deux problèmes les relations :

$$m_{Sat}(I, \bar{T}) = \sum_{a=0}^{k-1} m_a = m - m_k = m - m_{CCSP}(I, T), \quad (1)$$

$$m_{CCSP}(I, \bar{T}) = m_0 = m - m_{Sat}(I, T) \quad (2)$$

Enfin, les quantités $m_a(i)$ et $m_a(\bar{i})$ vérifient les relations :

$$\forall a \in [0, k], \sum_{i=1}^n m_a(i) = a m_a \quad (3) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n m_a(\bar{i}) = (k - a) m_a \quad (4)$$

Nous pouvons à présent énoncer le résultat suivant :

Lemme 6.8.

$$\forall k \geq 2, \text{ Max } E - k - Sat \in GLO, \frac{k}{k+1}$$

Preuve

Soit T une affectation des valeurs de vérité, T est un optimum local relativement au voisinage 1-borné si elle satisfait au moins autant de clauses que toute solution obtenue à

partir de T en ne changeant la valeur que d'une composante. Pour i de 1 à n , on note T^i la solution voisine de T définie par

$$\forall j = 1, \dots, n, T_j^i = \begin{cases} 1 - T_j & \text{si } j = i, \\ T_j & \text{sinon.} \end{cases}$$

De T à T^i , lorsque seule change l'affectation de la variable x_i , les clauses non avérées par T qui contiennent le littéral \bar{x}_i deviennent vraies, les clauses avérées pour T par l'unique littéral x_i deviennent fausses :

$$\forall i = 1, \dots, n, m_{Sat}(I, T^i) = m_{Sat}(I, T) + m_0(\bar{i}) - m_1(i).$$

Notant pour tout i $\Delta^i = m_0(\bar{i}) - m_1(i)$ la différence de valeur entre les solutions T^i et T , l'optimalité locale de T s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, n, \Delta^i \leq 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^n m_1(i) \geq \sum_{i=1}^n m_0(\bar{i}) \Leftrightarrow m_1 \geq km_0 = k(m - m_{Sat}(I, T)) \\ &\Leftrightarrow km_{Sat}(I, T) + m_1 \geq km. \end{aligned}$$

Les relations $m_{Sat}(I, T) \geq m_1$ et $\beta_{Sat}(I) \leq m$ permettent alors de conclure :

$$(k+1)m_{Sat}(I, T) \geq km \Rightarrow \rho_{Sat}(I, T) \geq \frac{k}{k+1} \diamond$$

Notons que ce résultat a déjà été démontré dans [47], et ce pour le problème plus général $Max k^+ - Sat$ des problèmes de satisfaisabilité dont les clauses sont constituées non plus d'*exactement* k littéraux, mais d'*au moins* k littéraux :

Théorème 6.9. [47]

$$\forall k \geq 2, Max k^+ - Sat \in GLO, \frac{k}{k+1}$$

Preuve : résultat exposé dans [13]

Il faut juste remarquer que, dans le cas de clauses de taille *supérieure ou égale* à k , l'égalité $\sum_{i=1}^n m_0(\bar{i}) = km_0$ devient une inégalité $\sum_{i=1}^n m_0(\bar{i}) \geq km_0$, suffisante à l'établissement du résultat \diamond

6.3.4 $Max k - Sat$ et $CGLO$

Lemme 6.10.

$$\forall k \geq 2, Max E - k - Sat \in CGLO, \frac{k+1}{k+2}$$

Preuve

Soit $I = (X, C)$ une instance de $E - k - Sat$ à m clauses et n variables, on suppose disposer d'un optimum local pour le voisinage miroir 1-borné $T = \vec{1}$. L'optimalité locale de T amène les expressions suivantes :

$$\forall i = 1, \dots, n, \Delta^i \leq 0 \Rightarrow m_1 + km_{Sat}(I, T) \geq km \quad (5)$$

$$m_{Sat}(I, T) \geq m_{Sat}(I, \vec{T}) \Leftrightarrow m_k \geq m_0 \Rightarrow m_k + m_{Sat}(I, T) \geq m \quad (6)$$

Or, on a toujours $m_{Sat}(I, T) \geq m_1 + m_k$, ce qui permet de conclure en sommant les expressions (5) et (6) :

$$(k+2)m_{Sat}(I, T) \geq (m_1 + m_k) + (k+1)m_{Sat}(I, T) \geq (k+1)m \Rightarrow \rho_{Sat}(I, T) \geq \frac{k+1}{k+2} \diamond$$

Selon les mêmes arguments que dans *GLO*, on remarque que la portée de ce résultat s'étend aux instances constituées de clauses de taille *au moins* k :

Théorème 6.11.

$$\forall k \geq 2, \text{Max } k^+ - Sat \in CGLO, \frac{k+1}{k+2}.$$

Preuve

Les relations (5) et (6), ainsi que l'argument de conclusion $m_{Sat}(I, T) \geq m_1 + m_k$, sont toujours vrais en remplaçant la quantité m_k par la quantité m_{k+} , nombre des clauses dont *tous les littéraux sont vrais*: T est au moins aussi bonne que \vec{T} si $m_{k+} \geq m_0$ et les clauses vraies pour tous leurs littéraux comportant au moins k littéraux, $m_{Sat}(I, T) \geq m_1 + m_{k+} \diamond$

6.3.5 *Max NAE k - Sat et GLO*

Une instance de *Max Not All Equal Sat* (*resp.* *Max Not All Equal - k - Sat*) est la donnée d'un ensemble C de clauses (*resp.* de k -clauses) sur un ensemble X de variables et pour ce problème, une clause c est validée par une affectation T des valeurs de vérité si elle contient au moins un littéral rendu vrai et un littéral rendu faux par T . Ainsi, il s'agit de trouver une affectation T qui maximise le nombre des clauses conjointement avérées par T et son complémentaire \vec{T} :

$$m + m_{NAE}(I, T) = m_{Sat}(I, T) + m_{Sat}(I, \vec{T}).$$

Remarque 6.2. Pour *NAE Sat*, deux clauses $c = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p)$ et $\bar{c} = (\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2, \dots, \bar{\ell}_p)$ ont la même signification, sont une seule et même entrée; aussi supposons-nous ne jamais disposer dans une instance, et ce quel que soit l'ensemble c de littéraux considéré, conjointement des formules équivalentes c et \bar{c} , à moins de se placer dans le cas pondéré.

Lemme 6.12.

$$\forall k \geq 3 \text{ Max NAE } k - \text{Sat} \in \text{GLO}, \quad k/(k+1)$$

$$\text{Max NAE } 2 - \text{Sat} \in \text{GLO}, \quad 1/2$$

Preuve

Soit $I = (X, C)$ la donnée d'un ensemble C de m k -clauses sur un ensemble X de n variables; on cherche à trouver une affectation T des valeurs de vérité qui maximise la quantité $\sum_{a=1}^{k-1} m_a = m - (m_0 + m_k)$, nombre des clauses dont tous les littéraux ne sont pas affectés à même valeur. Remarquons que pour $\text{NAE } k - \text{Sat}$, les classes GLO et CGLO coïncident puisque deux affectations complémentaires T et \bar{T} vont valider exactement les mêmes clauses!

De T à T^i , les clauses ne comportant que des littéraux vrais ou que des littéraux faux peuvent être validées, tandis que les clauses avérées par un unique ou $k-1$ littéraux peuvent se trouver invalidées. Ainsi, T est un optimum 1-local s'il vérifie :

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad m_{\text{NAE}}(I, T) \geq m_{\text{NAE}}(I, T^i)$$

$$\Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n, \quad m_1(i) + m_{k-1}(\bar{i}) \geq m_0(\bar{i}) + m_k(i).$$

En sommant sur i :

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n m_1(i) + \sum_{i=1}^n m_{k-1}(\bar{i}) \geq \sum_{i=1}^n m_0(\bar{i}) + \sum_{i=1}^n m_k(i)$$

$$\Leftrightarrow m_1 + m_{k-1} \geq k(m_0 + m_k) = k(m - m_{\text{NAE}}(I, T)) \quad (7)$$

$$\text{pour } k \geq 3, \quad m_{\text{NAE}}(I, T) \geq m_1 + m_{k-1} :$$

$$(7) \Rightarrow (k+1)m_{\text{NAE}}(I, T) \geq km \quad \Rightarrow \rho_{\text{NAE}}(I, T) \geq k/(k+1)$$

$$\text{pour } k = 2, \quad m_{\text{NAE}}(I, T) = m_1 = m_{k-1} :$$

$$(7) \Leftrightarrow 2m_{\text{NAE}}(I, T) \geq 2(m - m_{\text{NAE}}(I, T)) \Leftrightarrow m_{\text{NAE}}(I, T) \geq m/2 \quad \diamond$$

Une fois encore, l'argumentation s'applique également aux instances constituées de clauses de taille *au moins* k :

Théorème 6.13.

$$\forall k \geq 3 \text{ Max NAE } k^+ - \text{Sat} \in \text{GLO}, \quad k/(k+1)$$

$$\text{Max NAE } 2^+ - \text{Sat} \in \text{GLO}, \quad 1/2$$

Preuve

Si on note m_{-1} le nombre des clauses constituées de littéraux "tous vrais, sauf un" et $m_{-1}(\bar{i})$ le nombre de ces clauses contenant le littéral \bar{x}_i , l'optimalité locale de T s'exprime alors par la relation : $\forall i = 1, \dots, n, m_1(i) + m_{-1}(\bar{i}) \geq m_0(\bar{i}) + m_{k+}(i)$; en sommant sur i ,

on obtient les nouvelles relations $\sum_i m_1(i) = m_1$ et $\sum_i m_{-1}(\bar{i}) = m_{-1}$, $\sum_i m_0(\bar{i}) \geq km_0$ et $\sum_i m_{k^+}(i) \geq km_{k^+}$. Il suffit alors pour conclure de remarquer $m_{NAE}(I, T) \geq m_1 + m_{-1}$ pour $k \geq 3$ et $m_{NAE}(I, T) \geq \max\{m_1, m_{-1}\}$ pour $k = 2$ \diamond

6.3.6 *Max k – Sat et GCGLO*

Lemme 6.14.

$$\forall k \geq 3, \text{Max } E - k - \text{Sat} \in \text{GCGLO}, \frac{2k}{2k+1}$$

Preuve : une solution T qui est optimum 1-local du problème *Max NAE Sat* et au moins aussi bonne, au sens de *Max Sat*, que son complémentaire \bar{T} assure un rapport classique $\rho_{Sat}(I, T) \geq 2k/(2k+1)$.

Effectivement, la preuve précédente nous donnait pour un optimum 1-local de *Max NAE Sat* l'expression (7) :

$$m_1 + m_{k-1} \geq k(m - m_{NAE}(I, T)) ;$$

or, les valeurs d'une affectation T aux sens de *Sat* et de *NAE Sat* sont liées par la relation :

$$m_{NAE}(I, T) = m_{Sat}(I, T) + m_{Sat}(I, \bar{T}) - m.$$

On déduit alors :

$$\begin{aligned} (7) &\Rightarrow m_1 + m_{k-1} \geq k(2m - m_{Sat}(I, T) - m_{Sat}(I, \bar{T})) \\ &\Leftrightarrow m_1 + m_{k-1} + k(m_{Sat}(I, T) + m_{Sat}(I, \bar{T})) \geq 2km. \end{aligned}$$

Ce qui mène, en remarquant $m_{Sat}(I, T) \geq m_1 + m_{k-1}$ et $m_{Sat}(I, T) \geq m_{Sat}(I, \bar{T})$, à la conclusion :

$$(2k+1)m_{Sat}(I, T) \geq m_1 + m_{k-1} + k(m_{Sat}(I, T) + m_{Sat}(I, \bar{T})) \geq 2km \quad \diamond$$

Dans le cadre plus général de *Max k⁺ – Sat* :

Théorème 6.15.

$$\forall k \geq 3, \text{Max } k^+ - \text{Sat} \in \text{GCGLO}, \frac{2k}{2k+1}$$

Preuve

En utilisant les mêmes notations qu'au cours du théorème précédent, on déduit le résultat des relations $m_1 + m_{-1} \geq k(m_0 + m_{k^+})$, $m_0 + m_{k^+} = 2m - (m_{Sat}(I, T) + m_{Sat}(I, \bar{T}))$ et $m_{Sat}(I, T) \geq m_1 + m_{-1}$ \diamond

6.4 Les problèmes de satisfaction de contraintes conjonctives

6.4.1 Un problème difficile

En classique, le problème général n'est pas approximable à rapport constant, il l'est donc encore moins en différentiel! Nous montrons ici que sa restriction, notée $Max\ CCSP(H)$, aux clauses contenant au plus un littéral positif (clauses de Horn dans le cas de clauses disjonctives), n'est toujours pas approximable à rapport différentiel constant, puisque le problème de stable maximum s'y réduit de façon assez naturelle.

Proposition 6.16.

$$Max\ CCSP(H) \notin APX[\delta]$$

Preuve : $Max\ IS \stackrel{AF}{\asymp} Max\ CCSP(H)$

Soit $G(V, E)$ un graphe à n sommets et m arêtes, $\Gamma(u)$ désigne pour tout sommet u de V sa liste d'adjacence :

$$\forall u \in V, \Gamma(u) = \bigcup_{v \in V} \{v / uv \in E\}.$$

On associe alors à chaque sommet u une variable binaire x_u et la clause c_u définie par

$$c_u = (x_u, \bigwedge_{v \in \Gamma(u)} \bar{x}_v).$$

L'instance I de $Max\ CCSP$ ainsi obtenue est bien construite en temps polynomial puisqu'il suffit pour ce faire de parcourir la matrice d'adjacence sommets-sommets de taille n^2 du graphe G , et chaque clause c_u contient l'unique littéral positif x_u . Soit maintenant une affectation T des valeurs de vérité, on lui associe l'ensemble U_T des sommets $u \in V$ pour lesquels la clause c_u est avérée par T ; alors T valide k clauses si et seulement si U_T est un stable de taille k . Or, il s'agit bien là d'une réduction surjective puisque tout ensemble stable U peut être déduit de l'affectation dans I qui met à 1 les variables x_u associées aux sommets u de U et à 0 les variables restantes qui correspondent aux sommets non sélectionnés par U : la transformation proposée est une réduction affine de $Max\ IS$ à $Max\ CCSP$ \diamond

Considérons à présent la restriction $Min\ Sat(H)$ de $Min\ Sat$ aux instances constituées de clauses de Horn, clauses disjonctives contenant au plus un littéral positif; la forte relation qui unit les problèmes $Max\ CCSP$ et $Min\ Sat$ en différentiel reste vraie pour les restrictions $Max\ CCSP(H)$ et $Min\ Sat(H)$ que nous venons d'évoquer et nous permet de déduire pour ce dernier problème le même résultat d'inapproximation différentielle :

Proposition 6.17.

$$Min\ Sat(H) \notin APX[\delta]$$

Preuve :

$$\left. \begin{array}{l} \forall I = (X, C) \in I_{CCSP(H)}, I \in I_{Sat(H)} \\ \forall T \in \{0, 1\}^{|X|}, m_{CCSP}(I, \bar{T}) = |C| - m_{Sat}(I, T) \end{array} \right\} \Rightarrow Max\ CCSP(H) \stackrel{AF}{\Leftrightarrow} Min\ Sat(H)$$

$$\left(Max\ IS \stackrel{AF}{\propto} Max\ CCSP(H) \stackrel{AF}{\Leftrightarrow} Min\ Sat(H) \right) \Rightarrow Max\ IS \stackrel{AF}{\propto} Min\ Sat(H) \diamond$$

Ce résultat est d'autant plus intéressant que la famille d'instances de $Min\ Sat(H)$ que l'on déduit du problème de stable semble regrouper les instances les plus "faciles" à approcher en différentiel, car elles sont de la forme $\cup_{i=1}^m \{(u_i \wedge \bar{u}_1^i, \dots, \bar{u}_{n_i}^i)\}$ où u_1, \dots, u_m sont les m variables deux-à-deux distinctes correspondant aux sommets du graphe initial : toutes ces formules sont satisfaisables par l'affectation $T = \bar{1}$. Ceci revient à dire que la valeur d'une pire solution, avec $\omega = m$, est le pire que l'on puisse espérer dans l'absolu, ce qui place l'évaluation différentielle dans le cas le plus favorable qu'il soit. La difficulté d'approcher ces instances "faciles" est exprimée par le corollaire suivant.

Corollaire 6.18. *Le problème de satisfaisabilité minimum avec des clauses de Horn, même restreint aux instances satisfaisables, est non approximable à rapport $n^{\varepsilon-1} \forall \varepsilon > 0$ pour le rapport différentiel.*

Tant que nous en sommes à l'observation de problèmes difficiles pour l'approximation constante différentielle, considérons, même s'il ne s'agit pas là d'un problème de satisfaisabilité, la programmation linéaire en nombre entiers et plus précisément, en variables bivalentes $Min\ PL\{0, 1\}$; nous en parlons ici car on sait montrer qu'il n'est pas possible, à moins que P ne coïncide avec NP , d'approcher ce problème à mieux que 0 à l'aide d'une réduction à partir de Sat . Notons que ce problème est également difficile en classique puisqu'il est NPO -complet (au sens d'une réduction préservant l'approximation à rapport constant), par réduction à partir d'une version variables-pondérée de $Min\ 3 - Sat$ ([72]).

Théorème 6.19. *Tout algorithme polynomial \mathcal{A} approché pour $Min\ PL\{0, 1\}$ établit un rapport différentiel de performance nul :*

$$\delta_{Min\ PL\{0,1\}} = 0.$$

Preuve : par réduction à partir de Sat .

Précisons au préalable qu'une instance de $Min\ PL\{0, 1\}$ est la donnée d'une matrice A $m \times n$ à coefficients dans \mathbb{Z} (matrice des contraintes), d'un vecteur b de \mathbb{Z}^m (membre droit) et d'un vecteur c de \mathbb{N}^n (fonction objectif) ; le but est de trouver, parmi les vecteurs $x \in \{0, 1\}^n$ qui vérifient les contraintes $Ax \geq b$, un qui minimise la fonction $c \cdot x$. La preuve

que nous proposons consiste à transformer une instance du problème de décision *Sat* en une instance de $Min PL\{0,1\}$ dont la valeur à l'optimum permet de décider l'instance de *Sat* initiale. Soit donc $I = (X, C)$ une instance de *Sat* à n variables et m clauses, il s'agit de savoir s'il existe ou non une affectation des valeurs de vérité qui satisfasse les m clauses de C . Pour i de 1 à m , on désigne par n_i le nombre de littéraux négatifs apparaissant dans c_i :

$$\forall i = 1, \dots, m, n_i = |c_i \cap \overline{X}|.$$

L'instance I' de $PL\{0,1\}$ que l'on construit a pour variables de décision deux vecteurs $y \in \{0,1\}^n$ et $z \in \{0,1\}^m$ associés respectivement aux ensembles X et C et s'exprime de la façon suivante :

$$(I') \quad \beta' = \min_{y,z} \overrightarrow{1}_m \cdot z$$

$$s.c. \quad \begin{cases} (1) & z_{i_1} + z_{i_2} \geq 1 & \forall (i_1 < i_2) \in \{1, \dots, m\} \\ (2) & \overrightarrow{1}_m \cdot z + \sum_{j/x_j \in c_i} y_j - \sum_{j/\bar{x}_j \in c_i} y_j \geq m - n_i & \forall i \in \{1, \dots, m\}. \end{cases}$$

I' contient $m(m-1)/2$ contraintes de type (1) et m contraintes de type (2) que l'on construit facilement, en temps polynomial en la taille $\max\{n, m\}$ de I . On remarque que toute solution qui affecte le vecteur z à $\overrightarrow{1}_m$ est réalisable : les contraintes de type 1 sont trivialement vérifiées et pour tout i , la i ème contrainte de type 2 s'écrit alors

$$\sum_{j/x_j \in c_i} y_j + (n_i - \sum_{j/\bar{x}_j \in c_i} y_j) \geq 0,$$

ce qui est tout aussi trivialement vrai. On remarque de plus que toute solution réalisable satisfait les contraintes de type 1 si et seulement si au moins $m-1$ composantes du vecteur z sont non nulles :

$$\exists i_1 \neq i_2 / z_{i_1} = z_{i_2} = 0 \Leftrightarrow \exists i_1 \neq i_2 / z_{i_1} + z_{i_2} = 0.$$

Ainsi, toute instance I' a pour pire valeur m et pour valeur optimale m ou $m-1$. Nous montrons pour achever la preuve que l'on a en fait l'équivalence :

$$C \text{ satisfaisable} \Leftrightarrow \beta' = m - 1.$$

Si C est satisfaisable, c'est qu'il existe une affectation $T \in \{0,1\}^n$ des valeurs de vérité qui satisfait chaque clause c_i de C ; posons alors $y = T$, c_i est vérifiée par T signifie que T affecte

au moins une variable positive de c_i à 1 ($\exists x_j \in c_i \wedge T_j = 1$) ou une variable négative de c_i à 0 ($\exists \bar{x}_j \in c_i \wedge T_j = 0$). Ceci se traduit en terme de variables y_j par la relation :

$$\mathcal{R}_i \iff \sum_{j/x_j \in c_i} y_j + \sum_{j/\bar{x}_j \in c_i} (1 - y_j) \geq 1.$$

Ainsi, en posant $y = T$ pour T satisfaisant C et pour n'importe quelle affectation du vecteur z à exactement $m - 1$ composantes non nulles, on obtient une solution de valeur $m - 1$ réalisable pour I' puisqu'elle vérifie bien chaque contrainte de type (2) :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_i &\Leftrightarrow \sum_{j/x_j \in c_i} y_j - \sum_{j/\bar{x}_j \in c_i} y_j \geq 1 - n_i \\ &\Leftrightarrow (m - 1) + \sum_{j/x_j \in c_i} y_j - \sum_{j/\bar{x}_j \in c_i} y_j \geq m - n_i. \end{aligned}$$

Réciproquement, si $\beta' = m - 1$, c'est qu'il suffit d'affecter $m - 1$ variables z_i à 1 pour satisfaire les contraintes de type 2, autrement dit pour tout i , la relation \mathcal{R}_i est vérifiée : on sait alors par l'affectation $T = y$ que l'ensemble C de clauses est satisfaisable.

Un algorithme approché pour $PL\{0, 1\}$, pour garantir un rapport différentiel r non nul (r dépendant éventuellement des paramètres de l'instance), devrait sur l'instance particulière I' toujours renvoyer la valeur optimale et ce faisant, permettre la décision polynomiale de I , quelqu'instance de Sat qu'elle soit \diamond

Revenons à présent à l'approximation du problème qui fait l'objet de cette section, $MaxCCSP$; nous nous cantonnerons à l'étude d'un des problèmes les plus simples de la classe, $Max2-CCSP$, qui n'en demeure par moins $APX-complet$ ([21]). Alimonti montre dans [3] que pour toute constante k et toute instance du problème $Maxk-CCSP$, tout optimum local pour un certain voisinage altéré 1-borné garantit un rapport $1/(2^k - 1)$. Dans le cas particulier $k = 2$, un optimum local miroir 1-borné garantit un rapport de $1/4$, qui monte à $2/5$ lorsque l'on considère le voisinage miroir altéré 1-borné. Nous proposons dans cette section une amélioration de l'estimation du rapport classique obtenu par un optimum miroir 1-local de $1/4$ à $1/3$.

6.4.2 Vers le 1/4 différentiel...

Malheureusement, nous n'avons pas encore de résultat établi pour le problème général en différentiel; aussi le rapport d'approximation que nous proposons ici n'est valable que si l'on s'intéresse uniquement à des instances "*faciles*" dans le sens où elles admettent une *mauvaise*

pire solution, dont il peut, en conséquence, être plus aisé de s'éloigner. Effectivement, nous nous limitons à la famille des problèmes $Max\ 2-CCSP-\ell$ qui désignent, pour une constante universelle ℓ donnée, la restriction de $Max\ 2-CCSP$ aux familles de 2-clauses pour lesquelles une pire affectation des valeurs de vérité réalise au plus ℓ clauses :

$$I_{2-CCSP-\ell} = \{I \in I_{2-CCSP} / \omega_{CCSP}(I) \leq \ell\}.$$

Avant toute chose, assurons-nous que ce nouveau problème est bien dans NPO : il faut pour cela pouvoir déterminer en temps polynomial s'il existe une affectation des valeurs de vérité qui valide au plus ℓ clauses pour $CCSP$, ce qui est équivalent à décider l'existence d'une affectation qui place un littéral faux dans au moins $m - \ell$ clauses. Transformant I en \bar{I} , puisque par (i) $\omega_{CCSP}(I) = m - \beta_{Sat}(\bar{I})$, il s'agit donc de savoir décider en temps polynomial si $\beta_{Sat}(\bar{I}) \geq m - \ell$. Pour cela, il suffit de générer toutes les sous-familles de \bar{I} de taille $m - \ell$ et de décider pour chacune d'entre-elles, puisque $2-Sat$ est polynomial, si la sous-famille est satisfaisable. Une pire solution valide au plus ℓ clauses du problème initial si et seulement s'il existe, parmi ces $C_\ell^{m-\ell}$ instances de $2-Sat$, au moins une formule satisfaisable et nous savons décider cela en temps polynomial !

Théorème 6.20.

$$\forall \ell \text{ constante, } Max\ 2-CCSP-\ell \in CGLO[\delta], 1/4$$

Preuve : voisinage miroir 1-borné

Soit ℓ une constante et I une instance de $Max\ 2-CCSP-\ell$; par définition, la valeur d'une pire solution satisfait la condition $\omega_{CCSP-\ell}(I) \leq \ell$. Nous étudions alors deux cas selon la valeur $\beta_{CCSP-\ell}(I)$ d'une solution optimale.

Cas $\beta_{CCSP-\ell}(I) \leq m - 3\ell$

On déduit alors la relation :

$$\beta_{CCSP-\ell}(I) + 3\omega_{CCSP-\ell}(I) \leq m \quad (8)$$

Exploitions la solution T ; si pour tout i de 1 à n , T^i désigne la solution qui ne diffère de T que sur la i ème variable et $\Delta^i = m_{CCSP}(I, T^i) - m_{CCSP}(I, T)$ la différence des performances réalisées par ces deux affectations, l'optimalité 1-locale de T se traduit alors de la sorte :

$$\begin{aligned} \forall i, \quad m_{CCSP}(I, T) \geq m_{CCSP}(I, T^i) &\Leftrightarrow \forall i, \quad \Delta^i = m_1(\bar{i}) - m_2(i) \leq 0 \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n (m_1(\bar{i}) - m_2(i)) \leq 0 &\Leftrightarrow m_1 \leq 2m_2 \quad (9) \end{aligned}$$

De plus, la considération de la solution complémentaire nous amène à

$$m_2 = m_{CCSP}(I, T) \geq m_{CCSP}(I, \bar{T}) = m_0 \Leftrightarrow m_0 \leq m_2 \quad (10)$$

Il reste à composer les expressions (8), (9) et (10) pour conclure :

$$m = m_0 + m_1 + m_2 \leq (1 + 2 + 1)m_2 \Leftrightarrow m_2 \geq m/4 \geq \frac{1}{4}\beta_{CCSP}(I) + \frac{3}{4}\omega_{CCSP}(I).$$

Cas $\beta_{CCSP-\ell}(I) \geq m - 3\ell$

Si la valeur optimale vérifie cette relation, alors on sait résoudre le problème à l'optimum ! Effectivement, soit $\bar{I}^C = (f^C \circ \bar{f}(I))$, on a $|\bar{I}^C| = 2^k \times C_n^k - m$ et d'après (i) et (ii) :

$$m_{CCSP}(I, T) = C_n^k - \left((2^k \times C_n^k - m) - m_{Sat}(\bar{I}^C, T) \right) = m - (2^k - 1)C_n^k + m_{Sat}(\bar{I}^C, T).$$

Pour le cas $k = 2$ qui nous intéresse, notons $K = (2^k - 1)C_n^2$, on déduit de l'équivalence affine unissant les deux instances :

$$\begin{aligned} \beta_{CCSP}(I) &= m - K + \beta_{Sat}(\bar{I}^C) \\ \Rightarrow \beta_{CCSP}(I) \geq m - 3\ell &\Leftrightarrow \beta_{Sat}(\bar{I}^C) \geq K - 3\ell. \end{aligned}$$

Ceci nous apprend qu'il est équivalent de savoir résoudre à l'optimum les instances \bar{I}^C et I des problèmes *Max Sat* et *Max CCSP*. Or, nous savons trouver une solution optimale de \bar{I}^C , parce que *Max 2-Sat* est décidable en temps polynomial et qu'une solution optimale de \bar{I}^C satisfait au moins $K - 3\ell$ clauses. Effectivement, on teste d'abord si \bar{I}^C est satisfaisable ; si oui, on a l'optimum, et sinon, on teste toute sous-famille de $K - 1$ clauses et ainsi de suite, jusqu'à trouver une sous-famille satisfaisable. Il aura fallu au pire tester toutes les sous-familles de $K - h$ clauses pour h de 0 à 3ℓ , soit un nombre μ d'instances à considérer d'au plus :

$$\mu = \sum_{j=0}^{j=3\ell} C_K^{K-j} \leq K^{3\ell+1}.$$

Ainsi, le cas $\beta_{CCSP-\ell}(I) \geq m - 3\ell$ est bien résolu à l'optimum en temps polynomial \diamond

Proposition 6.21.

$$Max 2 - CCSP \in CGLO, 1/4$$

Preuve : tout optimum local vérifie d'après la preuve précédente $m_2 \geq m/4$ \diamond

Remarque 6.3. En toute rigueur, nous aurions dû parler du problème *Max E - 2 - CCSP* puisque les instances considérées étaient composées exclusivement de 2-clauses, et non de

clauses de taille *au plus 2* ; cependant, on voit facilement que les arguments utilisés à l'établissement du précédent résultat sont également valides pour le cas plus général *Max 2-CCSP*. Si on note m_{-1} (*resp.* $m_{-1}(\bar{i})$) le nombre des clauses qui, pour l'affectation T , comportent exactement 1 littéral faux (*resp.* l'unique littéral faux \bar{x}_i) et m_{2-} (*resp.* $m_{2-}(i)$) le nombre des clauses dont tous les littéraux sont vrais pour T (*resp.* dont tous les littéraux sont vrais pour T et qui comportent le littéral x_i), l'optimalité locale de T induit alors pour tout i la relation $m_{2-}(i) \geq m_{-1}(\bar{i})$, et en sommant ces inégalités sur i :

$$2m_{2-} \geq \sum_{i=1}^n m_{2-}(i) \geq \sum_{i=1}^n m_{-1}(\bar{i}) = m_{-1} \quad (9').$$

Ainsi, avec $m_{CCSP}(I, T) = m_{2-}$, $m_{CCSP}(I, \bar{T}) = m_{-1}$ et $m_{CCSP}(I, T) \geq m_{CCSP}(I, \bar{T})$ on obtient bien :

$$\begin{aligned} 4m_{CCSP}(I, T) &\geq m_{CCSP}(I, T) + 2m_{CCSP}(I, T) + m_{CCSP}(I, \bar{T}) \\ &\geq m_{2-} + m_{-1} + m_0 = m. \end{aligned}$$

Les résultats obtenus par réductions, tant pour l'appartenance de la restriction *Max 2-CCSP-l* à *NPO* que pour la résolution polynomiale à l'optimum du cas $\beta_{CCSP-l}(I) \geq m - 3\ell$, restent tout aussi valables : la première ne fait aucunement mention de l'exactitude de la taille des clauses ; pour la seconde, si I est constituée de M_1 1-clauses et M_2 2-clauses, l'instance de *Max 2-Sat* construite fera apparaître un ensemble complémentaire de $(2n - M_1) + (2n(n - 1) - M_2) = 2n^2 - m$ clauses, quantité toujours polynomiale de même ordre $\mathcal{O}(n^2)$, et la constante K qui relie les valeurs optimales des deux instances ne sera plus $2^k \times C_n^2 - C_n^2$ mais $2n^2 - (n + C_n^2)$ (la différence entre le nombre de 2-clauses et de 1-clauses, hors tautologies, que l'on peut construire sur n variables, et le nombre de ces clauses qui sont fausses pour une affectation donnée des valeurs de vérité).

Cette qualité, à moins d'un quart de l'optimum, des optima locaux de *Max 2-CCSP* a déjà été montrée dans [3] ; cependant, nous allons voir que les optima 1-locaux sont encore meilleurs que cela, puisqu'ils garantissent, toujours en classique, un rapport de 1/3.

6.4.3 Approximation à 1/3

Théorème 6.22.

$$\text{Max 2-CCSP} \in \text{CGLO}, \quad 1/3$$

Preuve

On montre que les optima locaux pour le voisinage miroir 1-borné garantissent en réalité un rapport d'approximation classique de 1/3. Soit $I = (X, C)$ une instance du problème *Max 2-CCSP* à $m = |C|$ clauses et $n = |X|$ variables ; on considère deux solutions $T = \vec{1}$ optimum local pour le voisinage miroir 1-borné et T^* optimum global. Soient $P = \{i =$

$1, \dots, n / T_i = T_i^*$ l'ensemble des indices des variables dont l'affectation coïncide sur T et T^* , de cardinalité p ; on peut toujours supposer $P = \{1, \dots, p\}$ et on note $Q = \{p+1, \dots, n\}$ son complémentaire. Considérons alors les notations suivantes pour deux ensembles d'indices $I \in \{P, Q\}$ et $J \in \{P, Q\}$:

$$\begin{aligned}
IJ &= \{(x_i, x_j) \in C_2 / (i, j) \in I \times J\} & \text{et} & \quad m_{IJ} = |IJ| \\
I\bar{J} &= \{(x_i, \bar{x}_j) \in C_1 / (i, j) \in I \times J\} & \text{et} & \quad m_{I\bar{J}} = |I\bar{J}| \\
\bar{I}J &= \{(\bar{x}_i, x_j) \in C_1 / (i, j) \in I \times J\} & \text{et} & \quad m_{\bar{I}J} = |\bar{I}J| \\
\bar{I}\bar{J} &= \{(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \in C_0 / (i, j) \in I \times J\} & \text{et} & \quad m_{\bar{I}\bar{J}} = |\bar{I}\bar{J}| \\
I &= \{(x_i) \in C_1 / i \in I\} & \text{et} & \quad m_I = |I| \\
\bar{I} &= \{(\bar{x}_i) \in C_0 / i \in I\} & \text{et} & \quad m_{\bar{I}} = |\bar{I}|
\end{aligned}$$

Nous reprenons par ailleurs les notations de la remarque 6.3; les quantités m_{PP} , m_{PQ} , m_{QQ} , $m_{P\bar{P}}$, $m_{\bar{P}Q}$, $m_{P\bar{Q}}$, $m_{Q\bar{Q}}$, $m_{\bar{P}\bar{P}}$, $m_{\bar{P}\bar{Q}}$, $m_{\bar{Q}\bar{Q}}$, m_P , m_Q , $m_{\bar{P}}$ et $m_{\bar{Q}}$ ainsi définies vérifient naturellement :

$$\begin{aligned}
m_{2-} &= m_P + m_Q + m_{PP} + m_{PQ} + m_{QQ} \\
&\quad \text{nombre des clauses dont } \textit{tous les littéraux sont vrais} \\
m_{-1} &= m_{\bar{P}} + m_{\bar{Q}} + m_{P\bar{P}} + m_{\bar{P}Q} + m_{P\bar{Q}} + m_{Q\bar{Q}} \\
&\quad \text{nombre des clauses dont } \textit{un littéral exactement est faux} \\
m_0 &= m_{\bar{P}} + m_{\bar{Q}} + m_{\bar{P}\bar{P}} + m_{\bar{P}\bar{Q}} + m_{\bar{Q}\bar{Q}} \\
&\quad \text{nombre des clauses dont } \textit{tous les littéraux sont faux};
\end{aligned}$$

et les valeurs des solutions T , T^* et \bar{T} sont données par :

$$m_{CCSP}(I, T) = m_{2-}, \quad m_{CCSP}(I, T^*) = m_P + m_{\bar{Q}} + m_{PP} + m_{P\bar{Q}} + m_{\bar{Q}\bar{Q}} \quad \text{et} \quad m_{CCSP}(I, \bar{T}) = m_0.$$

L'optimalité locale de T nous indique notamment les relations :

$$\begin{aligned}
(1\text{-local}) \quad \forall i \in Q, \Delta^i \leq 0 &\Leftrightarrow \forall i \in Q \quad m_{-1}(\bar{i}) - m_{2-}(i) \leq 0 \\
&\quad \left(\sum_{i \in Q} \right) \implies m_{\bar{Q}} + m_{P\bar{Q}} + m_{Q\bar{Q}} \leq m_Q + m_{PQ} + 2m_{QQ} \\
(\text{miroir}) \quad m_{2-} \geq m_0 &\Leftrightarrow \\
&\quad m_P + m_Q + m_{PP} + m_{PQ} + m_{QQ} \geq m_{\bar{P}} + m_{\bar{Q}} + m_{\bar{P}\bar{P}} + m_{\bar{P}\bar{Q}} + m_{\bar{Q}\bar{Q}},
\end{aligned}$$

qui nous permettent de conclure :

$$\begin{aligned}
&3m_{CCSP}(I, T) \\
&= m_{CCSP}(I, T) + (m_Q + m_{PQ} + 2m_{QQ}) + (2m_P + m_Q + 2m_{PP} + m_{PQ}) \\
&\geq m_{\bar{P}\bar{P}} + m_{\bar{P}\bar{Q}} + m_{\bar{Q}\bar{Q}} + m_{P\bar{Q}} + m_{Q\bar{Q}} + m_P + m_{PP} \\
&\geq m_{CCSP}(I, T^*) \quad \diamond
\end{aligned}$$

6.5 Limites de l'approche GLO

6.5.1 1/3, le meilleur de CGLO pour Max 2 – CCSP

Le rapport précédent, relativement facile à obtenir, présente le fait surprenant d'être aussi bon que celui réalisé par tout optimum local d'un voisinage miroir h -borné pour toute constante h : 1/3 est donc non seulement une borne pour les optima 1-locaux mais aussi pour le voisinage miroir h -borné ; nous montrons maintenant que cette borne est asymptotiquement atteinte.

Théorème 6.23. *Pour toute constante $h \in \mathbb{N}$ et tout voisinage \mathcal{V} miroir h -borné pour CCSP, il existe une suite $(I_n)_{n \geq 0}$ d'instances de Max E – 2 – CCSP et une suite $(\tilde{s}_n)_{n \geq 0}$ d'optima locaux relativement à \mathcal{V} de ces instances qui vérifient*

$$\rho_{CCSP}(I_n, \tilde{s}_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1/3.$$

Preuve

Tout optimum miroir h -local est a fortiori optimum miroir 1-local et garantit donc d'après le théorème 6.22 un rapport classique de 1/3. Sur la base des notations de la démonstration du théorème précédent, on note $X_P = \{x_1, \dots, x_p\}$ l'ensemble des variables d'indice dans P et $X_Q = \{x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{p+q}\}$ l'ensemble des variables d'indice dans Q ($n = p + q$ et $X = X_P \sqcup X_Q$). Soient $h \geq 2$ une constante entière et q un entier suffisamment grand ($q \geq h^2$), on pose $p = q(q - h)$ et on construit l'instance $I = (X_P \cup X_Q, QQ \cup P\overline{Q} \cup \overline{Q}\overline{Q})$ suivante :

$$X_P = \bigcup_{i=1}^q X_{P_i} / |X_{P_i}| = q - h \text{ pour tout } i \text{ et } X_{P_i} \cap X_{P_j} \neq \emptyset \Rightarrow i = j$$

X_P partition de q ensembles de variables X_{P_i} de même taille $q - h$

$$QQ = \mathcal{P}_2(X_Q) \Rightarrow m_{QQ} = q(q - 1)/2$$

$$\overline{Q}\overline{Q} = \mathcal{P}_2(\overline{X}_Q) - E, |E| = h \Rightarrow m_{\overline{Q}\overline{Q}} = q(q - 1)/2 - h$$

où E ensemble quelconque de h clauses composées de littéraux de \overline{X}_Q

$$P\overline{Q} = \bigcup_{i=1}^q X_{P_i} \times \{\bar{x}_{p+i}\} \Rightarrow m_{P\overline{Q}} = q(q - h)$$

Considérons la solution T qui consiste à prendre pour vrais les littéraux de X_P et X_Q ; l'optimum est quant à lui atteint en affectant à un les littéraux de X_P et \overline{X}_Q . Ces deux solutions sont respectivement de valeur $m_{CCSP}(I, T) = m_{QQ} = q(q - 1)/2$ et $\beta_{CCSP}(I) = m_{P\overline{Q}} + m_{\overline{Q}\overline{Q}} = q(q - h) + q(q - 1)/2 - h$. La solution T réalise donc un rapport classique de

$$\frac{q(q - 1)/2}{q(q - h) + q(q - 1)/2 - h} \underset{q \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{q^2/2}{3q^2/2} = 1/3.$$

Il nous reste à prouver que T est un optimum miroir h -borné pour tout $q \geq h^2$ pour démontrer le théorème.

T est au moins aussi bonne que son complémentaire

$$m_{CCSP}(I, \bar{T}) = m_{\overline{QQ}} = q(q-1)/2 - h = m_{CCSP}(I, T) - h < m_{CCSP}(I, T)$$

T est au moins aussi bonne que toute solution obtenue à partir de T en changeant au plus l'affectation de h variables

Si on change l'affectation des variables d'un sous-ensemble L_Q de X_Q de taille $\ell_Q \leq h$: on avère $\ell_Q \times (q-h)$ clauses de $P\bar{Q}$ et au plus $\ell_Q(\ell_Q-1)/2$ clauses de \overline{QQ} ; en revanche, $\ell_Q(q-\ell_Q) + \ell_Q(\ell_Q-1)/2$ clauses de QQ deviennent fausses ($\ell_Q(q-\ell_Q)$ clauses constituées d'un littéral de L_Q et d'un littéral de $X_Q \setminus L_Q$, $\ell_Q(\ell_Q-1)/2$ clauses constituées de deux littéraux de L_Q). Ainsi, la valeur de la solution voisine T' considérée est d'au plus

$$\begin{aligned} m_{CCSP}(I, T') &\leq m_{CCSP}(I, T) + (\ell_Q(q-h) + \ell_Q(\ell_Q-1)/2) - (\ell_Q(q-\ell_Q) + \ell_Q(\ell_Q-1)/2) \\ &= m_{CCSP}(I, T) + \ell_Q(q-h-q+\ell_Q) = m_{CCSP}(I, T) + \ell_Q(\ell_Q-h) \\ &\leq m_{CCSP}(I, T), \quad \forall \ell_Q / 0 \leq \ell_Q \leq h. \end{aligned}$$

T est au moins aussi bonne que toute solution obtenue à partir de \bar{T} en changeant au plus l'affectation de h variables

Soient $L_P \subseteq X_P$ et $L_Q \subseteq X_Q$ deux sous-ensembles de variables dont les cardinalités $\ell_P = |L_P|$ et $\ell_Q = |L_Q|$ vérifient $\ell_P + \ell_Q \leq h$; on considère alors la solution T' obtenue à partir de l'affectation $\bar{T} = \vec{0}$ en mettant à 1 toutes les variables contenues dans les ensembles L_P et L_Q . Parmi les clauses de l'ensemble $P\bar{Q}$, au plus ℓ_P vont être avérées (une par littéral de L_P) et parmi les clauses de l'ensemble QQ , exactement $\ell_Q(\ell_Q-1)/2$ vont être avérées. En revanche, peuvent devenir fausses $\max\{(\ell_Q(q-\ell_Q) + \ell_Q(\ell_Q-1)/2) - h, 0\}$ clauses de \overline{QQ} . Ainsi, la valeur de T' vérifie

$$\begin{aligned} m_{CCSP}(I, T') &\leq m_{CCSP}(I, \bar{T}) + (\ell_P + \ell_Q(\ell_Q-1)/2) \\ &\quad - \max\{(\ell_Q(q-\ell_Q) + \ell_Q(\ell_Q-1)/2) - h, 0\} \\ &= m_{CCSP}(I, T) - h + (\ell_P + \ell_Q(\ell_Q-1)/2) \\ &\quad - \max\{(\ell_Q(q-\ell_Q) + \ell_Q(\ell_Q-1)/2) - h, 0\} \end{aligned}$$

Si $\ell_Q = 0$, on déduit directement de l'inégalité précédente

$$m_{CCSP}(I, T') \leq m_{CCSP}(I, T) + (\ell_P - h) \leq m_{CCSP}(I, T) ;$$

sinon, $\ell_Q \geq 1$, et on déduit des hypothèses $q \geq h^2$, $h \geq 2$ et $\ell_P \leq h$ les relations

$$\ell_Q(q - \ell_Q) \geq (q - 1) \Rightarrow \{\ell_Q(q - \ell_Q) + \ell_Q(\ell_Q - 1)/2 \geq h \text{ et } \ell_Q(q - \ell_Q) \geq \ell_P\}$$

qui permettent de conclure :

$$\begin{aligned} m_{CCSP}(I, T') &\leq m_{CCSP}(I, T) - h + \ell_P + \ell_Q(\ell_Q - 1)/2 - \ell_Q(q - \ell_Q) - \ell_Q(\ell_Q - 1)/2 + h \\ &= m_{CCSP}(I, T) + (\ell_P - \ell_Q(q - \ell_Q)) \leq m_{CCSP}(I, T) \diamond \end{aligned}$$

6.5.2 1/5, le meilleur espoir de $CGLO[\delta]$ pour $Max 2 - CCSP$

Effectivement, par le biais d'optima locaux miroirs h -bornés, on ne peut espérer mieux que $1/5$, limite du rapport différentiel obtenu par la suite des optima locaux de la famille d'instances que nous venons de construire. Prenons cependant garde à relativiser la portée de ce résultat en se rappelant que nous ne savons toujours pas pour l'instant s'il existe une approximation à rapport différentiel constant pour ce problème !

Corollaire 6.24. *Pour toute constante $h \in \mathbb{N}$ et tout voisinage \mathcal{V} miroir h -borné pour $CCSP$, il existe une suite $(I_n)_{n \geq 0}$ d'instances de $Max E - 2 - CCSP$ et une suite $(\tilde{s}_n)_{n \geq 0}$ d'optima locaux relativement à \mathcal{V} de ces instances qui vérifient*

$$\delta_{CCSP}(I_n, \tilde{s}_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1/5.$$

Preuve

Reprenons la famille d'instances précédente et tentons d'évaluer la valeur d'une pire solution ; tout d'abord, une telle solution, pour ne satisfaire aucune clause de $P\overline{Q}$, affectera nécessairement les variables de l'ensemble X_P à 0. Quant à X_Q , une affectation T des valeurs de vérité qui affecte k variables x'_1, \dots, x'_k de X_Q à 1 vérifie toujours dans QQ les C_k^2 clauses de l'ensemble $\mathcal{P}_2(\{x'_1, \dots, x'_k\})$, dans $\overline{Q}\overline{Q}$ au moins $C_{q-k}^2 - h$ clauses de l'ensemble $\mathcal{P}_2(\{\bar{x}'_{k+1}, \dots, \bar{x}'_q\}) \setminus E$; la somme, $k(k-1)/2 + (q-k)(q-k-1)/2 - h = 1/2(q^2 + 2k^2 - q(2k+1)) - h$, est minimum pour $k = q/2$. Ainsi, même une pire solution vérifiera au moins $\lceil 2C_{q/2}^2 \rceil - h = \lceil q/2(q/2 - 1) \rceil - h$ clauses :

$$\omega_{CCSP}(I) \geq q/2(q/2 - 1) - h,$$

et le rapport différentiel de l'optimum miroir 1-local T est bien borné supérieurement par $1/5$:

$$\delta(I, T) \leq \frac{q/2(q-1) - \lceil q/2(q/2 - 1) \rceil - h}{q(q-h) + q/2(q-1) - \lceil q/2(q/2 - 1) \rceil - h} = \frac{q^2/2 + h}{5q^2/2 - qh + h} \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} 1/5 \diamond$$

6.5.3 1/2, le meilleur de GLO pour $Max\ NAE\ 2 - Sat$

Nous montrons que pour le problème $Max\ NAE\ 2 - Sat$, le rapport classique de 1/2 obtenu par les optima 1-locaux de façon assez naïve est pourtant le meilleur rapport que l'on puisse espérer garantir par des optima locaux pour des voisinages h -bornés.

Théorème 6.25. *Pour toute constante $h \in \mathbb{N}$ et tout voisinage \mathcal{V} h -borné pour $NAE\ Sat$, il existe une suite $(I_n)_{n \geq 0}$ d'instances de $Max\ NAE\ E - 2 - Sat$ et une suite $(\tilde{s}_n)_{n \geq 0}$ d'optima locaux relativement à \mathcal{V} de ces instances qui vérifient*

$$\rho_{NAE}(I_n, \tilde{s}_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1/2.$$

Preuve

Toujours avec les notations précédentes, on propose pour une constante h donnée et tout entier n l'instance $I = (X_P \cup X_Q, P\bar{P} \cup Q\bar{Q} \cup PQ)$ suivante de $NAE\ 2 - Sat$:

$$\begin{aligned} X_P &= \{x_1, \dots, x_n\} & \text{et} & & X_Q &= \{x^1, \dots, x^n\} \\ P\bar{P} &= \bigcup_{i=1}^{n-1} \bigcup_{j=i+1}^n \{(x_i, \bar{x}_j)\} & \text{et} & & Q\bar{Q} &= \bigcup_{i=1}^{n-1} \bigcup_{j=i+1}^n \{(x^i, \bar{x}^j)\} \\ & & & & & \Rightarrow m_{P\bar{P}} = m_{Q\bar{Q}} = n(n-1)/2 \\ PQ &= \bigcup_{i=1}^{n-h} \bigcup_{j=1}^{n-h} \{(x_i, x^j)\} \end{aligned}$$

L'affectation $T = \vec{1}$ satisfait les $n(n-1)$ clauses de $P\bar{P}$ et $Q\bar{Q}$ tandis que la solution optimale T^* qui met respectivement à 1 et 0 les variables des ensembles X_P et X_Q satisfait toutes les clauses, soit $n(n-1) + (n-h)^2$ clauses. Ainsi, T réalise un rapport d'approximation classique

$$\rho_{NAE}(I, T) = \frac{n(n-1)}{n(n-1) + (n-h)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^2}{2n^2} = 1/2.$$

Or, nous allons montrer que la solution T est bien un optimum h -borné pour tout $n > h$ qui satisfait au moins autant de clauses que toute affectation déduite de T en changeant la valeur d'au plus h variables. Soient $L_P \subseteq X_P$ et $L_Q \subseteq X_Q$ deux sous-ensembles de variables de cardinalités respectives ℓ_P et ℓ_Q vérifiant $\ell_P + \ell_Q \leq h$, on note T' la solution qui coïncide avec T sur $(X_P \setminus L_P) \cup (X_Q \setminus L_Q)$, avec \bar{T} sur $L_P \cup L_Q$. T' ne vérifie plus alors dans $P\bar{P}$ les $\ell_P(n - \ell_P)$ clauses dont une variable est issue de L_P et l'autre de $X_P \setminus L_P$; de même, $\ell_Q(n - \ell_Q)$ clauses de $Q\bar{Q}$ vérifiées par T ne le sont plus par T' . En revanche, T' satisfait peut-être des clauses de PQ construites sur les ensembles $L_P \times (X_Q \setminus L_Q)$ et $(X_P \setminus L_P) \times L_Q$, qui sont au plus au nombre de $(\ell_P + \ell_Q)(n - h)$. La valeur de T' vérifie ainsi

$$\begin{aligned} m_{NAE}(I, T') - m_{NAE}(I, T) &\leq (\ell_P + \ell_Q)(n - h) - \ell_P(n - \ell_P) - \ell_Q(n - \ell_Q) \\ &= \ell_P(\ell_P - h) + \ell_Q(\ell_Q - h) \leq 0 \quad \diamond \end{aligned}$$

6.5.4 1/3, le meilleur espoir de $GLO[\delta]$ pour $Max\ NAE\ 2 - Sat$

Regardons la famille d'instances que nous venons de construire et tentons d'évaluer le rapport différentiel réalisé par la solution $T = \overrightarrow{1}$; nous obtiendrons alors une borne pour le meilleur rapport que l'on pourrait espérer être en mesure de garantir par des optima locaux relativement aux voisinages h -bornés.

Corollaire 6.26. *Pour toute constante $h \in \mathbb{N}$ et tout voisinage \mathcal{V} h -borné pour $NAE\ Sat$, il existe une suite $(I_n)_{n \geq 0}$ d'instances de $Max\ NAE\ E - 2 - Sat$ et une suite $(\tilde{s}_n)_{n \geq 0}$ d'optima locaux relativement à \mathcal{V} de ces instances qui vérifient*

$$\delta_{NAE}(I_n, \tilde{s}_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1/3.$$

Preuve

Il s'agit bien ici d'estimer la valeur $\omega_{NAE}(I)$ d'une pire solution, du moins d'en donner un minorant, puisque le rapport différentiel est, pour un problème de maximisation, fonction décroissante de la valeur $\omega_{NAE}(I)$. On note toujours L_P et L_Q les ensembles de variables de X_P et X_Q mises à 0 par la solution T' considérée. T' satisfait

$$n(n-1) - \ell_P(n - \ell_P) - \ell_Q(n - \ell_Q)$$

clauses de $P\overline{P}$ et $Q\overline{Q}$, soit un minimum de $n(n/2 - 1)$ clauses quand $\ell_P = \ell_Q = n/2$. Par ailleurs, sur PQ , toute solution vérifie au moins... 0 clause! Le minimum de la somme étant minorée par la somme des minima, on en déduit $\omega_{NAE}(I) \geq n(n/2 - 1)$, et la conclusion

$$\delta_{NAE}(I, T) \leq \frac{n(n-1) - n(n/2 - 1)}{n(n-1) + (n-h)^2 - n(n/2 - 1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^2/2}{3n^2/2} = 1/3 \diamond$$

6.6 Récapitulatif des résultats

Une fois de plus, nous listons à l'aide d'un tableau les différents résultats évoqués à l'occasion de ce chapitre.

Problème considéré	Classe	Rapport	Voisinage
Résultats antérieurs			
$Max Sat^+ Sat$ [47]	<i>GLO</i>	$k/(k+1)$	1 – borné
$Max 2^- - CCSP$ [3]	<i>CGLO</i>	1/4	1 – borné
Notre contribution			
$Max Sat$	<i>CGLO</i>	1/2	1 – borné
$Max k^+ - Sat, k \geq 2$	<i>CGLO</i>	$(k+1)/(k+2)$	1 – borné
$Max NAE k^+ - Sat, k \geq 3$	<i>CGLO</i>	$k/(k+1)$	1 – borné
$Max NAE 2^+ - Sat$	<i>CGLO</i>	1/2	$\forall h \in \mathbb{N} : \text{valeur limite}$
$Max k^+ - Sat, k \geq 2$	<i>GCGLO</i>	$2k/(2k+1)$	1 – borné
			(objectif altéré $Max NAE Sat$)
$Max 2 - CCSP$	<i>CGLO</i>	1/3	$\forall h \in \mathbb{N} : \text{valeur limite}$
$Max 2 - CCSP_\ell$	<i>CGLO</i> [δ]	1/4	1 – borné

Chapitre 7

Réductions dans $GLO[\delta]$ et $APX[\delta]$

Nous proposons dans ce chapitre de comparer le degré d'approximation différentiel d'une part, la garantie de qualité des optima locaux d'autre part, de problèmes en les confrontant par réductions. Les réductions impliquées pour l'appartenance aux classes $GLO[R]$ sont de différents types (*réductions affines, fortement affines, continues, LOC' ou LOC-réductions*) ; aussi, pour plus de lisibilité, introduisons-nous au préalable quelques notations. Une réduction préservant l'appartenance à GLO (*resp.* $CGLO$) d'un problème Π à un problème Π' sera notée $\Pi \stackrel{G[\delta](\tau, \sigma(h))}{\sim} \Pi'$ (*resp.* $\Pi \stackrel{CG[\delta](\tau, \sigma)}{\sim} \Pi'$) quand, pour toute constante h , si les optima h -locaux (*resp.* h -locaux miroirs) de Π' garantissent un rapport différentiel r d'approximation alors tout optimum $\sigma(h)$ -local (*resp.* $\sigma(h)$ -local miroir) de Π garantit un rapport différentiel $\tau \times r$ d'approximation.

Les preuves de ce chapitre s'appuieront le plus souvent sur des réductions affines, qui la plupart du temps, sont aussi et bien que nous ne l'explicitons pas, des réductions continues ; or, c'est souvent ce dernier aspect qui permet, en reliant les optima locaux du problème initial aux solutions du problème image, d'établir la préservation de l'appartenance aux classes GLO .

7.1 Dans les graphes

Les réductions considérées dans cette section ne sont pas nouvelles ; simplement, en les revisitant, nous exhibons une richesse non exploitée à jour : toutes sont des réductions continues proposées pour préserver le rapport classique d'approximation, nous montrons qu'elles préservent, modulo quelques arrangements parfois, non seulement aussi le rapport différentiel d'approximation, mais également les structures de voisinage. Ces réductions concernent

notamment les problèmes *Min VC*, *Max IS* et *Min SC* que nous avons déjà eu l'occasion d'aborder du point de vue des classes $GLO[R]$ aux chapitres 3 et 4, ainsi qu'un nouveau problème, *Max CB*.

7.1.1 Régularisation pour la couverture d'ensembles

Min RSSC (pour *Regular Set-size Set Cover*) désigne la restriction du problème de couverture d'ensemble à des instances (C, S) dont les sous-ensembles s_j de la famille S sont tous de même taille.

Proposition 7.1.

$$Min SC \stackrel{G[\delta]^{(1,h)}}{\leftrightarrow} Min RSSC$$

Preuve: s'inspirant de la réduction continue proposée dans [76], on conçoit une nouvelle réduction qui est à la fois *fortement affine* et *LOC'*-réduction.

Soit $I = (C, S)$ une instance de *Min SC*, on note γ (*resp.* Γ) la taille du plus petit (*resp.* du plus grand) sous-ensemble de S ; on associe alors à I l'instance $\tilde{I} = (\tilde{C}, \tilde{S})$ suivante de *Min RSSC*:

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= C \cup D \cup E \quad \text{avec} \quad D = \{d_1, \dots, d_{\Gamma-\gamma}\} \text{ et } E = \{e_1, \dots, e_\gamma\} \\ \tilde{S} &= \hat{S} \cup \{\hat{s}_0\} \quad \text{avec} \quad \hat{S} = \{\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_n\} : \forall j = 1, \dots, n, \hat{s}_j = s_j \cup \{d_1, \dots, d_{\Gamma-|s_j|}\} \\ &\quad \text{et} \quad \hat{s}_0 = D \cup E. \end{aligned}$$

Avant toute chose, notons que la construction de l'instance I' se fait en temps polynomial en la taille $\max\{n, m\}$ de l'instance initiale, puisqu'elle consiste essentiellement en le parcours, le dénombrement puis la complétion des m sous-ensembles de I . Nous établissons à présent la forte affinité de cette réduction en prenant pour transformation (également polynomiale en $|I|$) d'une couverture \tilde{S}' de \tilde{C} en une couverture de C la construction $g(\tilde{S}')$ suivante:

$$\forall \tilde{S}' \in Sol_{RSSC}(I'), \quad g(\tilde{S}') = \bigcup_{j \neq 0 / \hat{s}_j \in \tilde{S}'} \{s_j\}.$$

Le sous-ensemble \hat{s}_0 étant nécessaire à la couverture des éléments de E et suffisant à celle des éléments de D , la transformation proposée entre les ensembles de solutions des instances I et I' est clairement bijective, d'inverse la transformation inverse g^{-1} définie par :

$$\forall S' \in Sol_{SC}(I), \quad g^{-1}(S') = \bigcup_{j / s_j \in S'} \{\hat{s}_j\} \cup \{\hat{s}_0\}.$$

De plus, g lie les valeurs des solutions par une relation affine de paramètres $K_I = -1$ et $k_I = 1$:

$$\forall \tilde{S}' \in \text{Sol}_{RSSC}(I'), |g(\tilde{S}')| = |\tilde{S}'| - 1.$$

La réduction fortement affine assure toujours les propriétés de surjectivité et de stricte monotonie, et dans ce cas particulier, la surjectivité de voisinage, puisque les distances sont préservées d'une instance à l'autre, si la distance entre deux couvertures est mesurée sur I comme sur I' par leur différence symétrique :

$$\forall \tilde{S}', \tilde{T}' \in \text{Sol}_{RSSC}(I'), d(\tilde{S}', \tilde{T}') = d(g(\tilde{S}'), g(\tilde{T}')).$$

Cette préservation des distances nous assure pour toute constante h et tout voisinage h -borné \mathcal{V} sur I' de vérifier, en prenant sur I le même voisinage :

$$\forall \tilde{S}' \in \text{Sol}_{RSSC}(I'), g(\mathcal{V}(I', \tilde{S}')) = \mathcal{V}(I, g(\tilde{S}')).$$

La réduction combinant les vertus d'une $A[\delta]$ - et d'une LOC' -réduction, elle est une G -réduction \diamond

7.1.2 Dépondération pour la couverture d'ensemble

Derrière $MinWSC$ (pour *Weighted Set Cover*) se cachent les instances (C, S, p) du problème de couverture d'ensemble dont les sous-ensembles s_j de la famille S sont pondérés par $p : S \rightarrow \mathbb{N}^*$; il ne s'agit plus alors de recouvrir C par un nombre minimum de sous-ensembles (équipondération), mais par une famille de sous-ensembles dont la somme des poids est minimum. On note $MinWSC(k)$ la restriction à des poids au plus n^k et $MinWSC - \Delta$ la restriction à instances telles que chaque élément c_i apparaît dans au plus Δ sous-ensembles ; enfin, pour une instance donnée contenant n sous-ensembles s_j , p_{min} désigne le plus petit des poids p_1, \dots, p_n .

Proposition 7.2.

$$MinWSC(k) - \Delta \stackrel{G[\delta](1, \lfloor h/p_{min} \rfloor)}{\propto} MinSC - \Delta$$

Preuve : on montre que la réduction continue proposée dans [76] préserve le rapport différentiel et la localité par LOC -réduction.

Soit $I = (C, S, p)$ ($|C| = m$ et $|S| = n$), une instance de $MinWSC(k) - \Delta$; pour tout élément à couvrir c_i ($i = 1, \dots, m$), on note $d_i = |\{j = 1, \dots, n / c_i \in s_j\}|$ le nombre des

sous-ensembles le contenant et $\Gamma(c_i) = \{s_{j_1}, \dots, s_{j_\ell}, \dots, s_{j_{d_i}}\}$ la liste de ces sous-ensembles. On associe à chaque sous-ensemble s_j pour j de 1 à n p_j sous-ensembles $s_j^1, \dots, s_j^k, \dots, s_j^{p_j}$ et à chaque élément c_i un ensemble \tilde{C}_i de $\prod_{l=1}^{d_i} p_{j_l}$ éléments $c_i(x_1, \dots, x_\ell, \dots, x_{d_i})$ indexés par d_i indices $x_1, \dots, x_\ell, \dots, x_{d_i}$; l'indice x_ℓ , qui représente le ℓ ème sous-ensemble s_{j_ℓ} contenant c_i , est à valeur dans $[1, p_{j_\ell}]$. On note \tilde{C}_i l'ensemble des copies de l'élément c_i .

Les caractéristiques de l'instance $\tilde{I} = (\tilde{C}, \tilde{S})$ ainsi construite sont donc les suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= \bigcup_{i=1}^m \tilde{C}_i, \quad \tilde{C}_i = \bigcup_{l=1}^{d_i} \bigcup_{x_\ell=1}^{p_{j_\ell}} \{c_i(x_1, \dots, x_\ell, \dots, x_{d_i})\} \Rightarrow |\tilde{C}| = \sum_{i=1}^m \prod_{l=1}^{d_i} p_{j_l} \leq m \times n^{k \times \Delta} \\ \tilde{S} &= \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{k=1}^{p_j} \{s_j^k\} \Rightarrow |\tilde{S}| = \sum_{j=1}^n p_j \leq n \times n^k. \end{aligned}$$

Pour achever la construction, il reste à déterminer, étant donné un couple (c_i, s_{j_ℓ}) , comment sont répartis les éléments de \tilde{C}_i parmi les p_{j_ℓ} copies $s_{j_\ell}^1, \dots, s_{j_\ell}^k, \dots, s_{j_\ell}^{p_{j_\ell}}$ de l'ensemble s_{j_ℓ} ; cela est fait de sorte que les sous-ensembles $s_{j_\ell}^1, \dots, s_{j_\ell}^k, \dots, s_{j_\ell}^{p_{j_\ell}}$ induisent une partition de \tilde{C}_i (*i.e.* de sorte que chaque copie $c_i(x_1, \dots, x_\ell, \dots, x_{d_i})$ de c_i soit contenue dans une unique copie $s_{j_\ell}^k$ de s_{j_ℓ}):

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, m, \quad \forall l = 1, \dots, d_i, \quad \forall k = 1, \dots, p_{j_\ell}, \\ \tilde{C}_i \cap s_{j_\ell}^k = \bigcup_{h \neq \ell} \bigcup_{x_h=1}^{p_{j_h}} \{c_i(x_1, \dots, x_{l-1}, k, x_{l+1}, \dots, x_{d_i})\}. \end{aligned}$$

Chaque copie $s_{j_\ell}^k$ de s_{j_ℓ} contient donc autant de copies de c_i que le produit des poids dans l'instance initiale des autres sous-ensembles contenant c_i . Comme chaque élément c_i de s_{j_ℓ} induisant ainsi $p_{j_1} \times \dots \times p_{j_{l-1}} \times p_{j_{l+1}} \times \dots \times p_{j_{d_i}}$ éléments $c_i(x_1, \dots, x_{l-1}, k, x_{l+1}, \dots, x_{d_i})$ dans $s_{j_\ell}^k$, la taille de tout sous-ensemble $s_{j_\ell}^k$ est donnée par :

$$|s_{j_\ell}^k| = \sum_{c_i \in s_j} \prod_{s_h \neq s_j \in \Gamma(c_i)} p_h \leq m \times n^{k \times (\Delta-1)}.$$

Enfin, le nombre de sous-ensembles contenant un élément $c_i(x_1, \dots, x_{l-1}, x_\ell, x_{l+1}, \dots, x_{d_i})$ est le même que le nombre d_i de sous-ensembles contenant l'élément originel c_i puisque chaque famille $s_j^1, \dots, s_j^{p_j}$ induit une partition des $c_i(x_1, \dots, x_l, \dots, x_{d_i})$:

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad \forall l = 1, \dots, d_i, \quad \forall x_l \in [1, p_{j_l}], \quad d(c_i(x_1, \dots, x_l, \dots, x_{d_i})) = d_i \leq \Delta.$$

Ainsi, pour des poids bornés par n^k et des degrés (*nombre de sous-ensembles contenant un même sommet*) bornés par une constante Δ , la construction proposée se fait bien en temps polynomial en la taille $\max\{m, n\}$ de l'instance initiale. D'une solution $S' = \{s_{j_1}, \dots, s_{j_p}\}$ de

valeur $\sum_{h=1}^p p_{j_h}$ sur I , on peut déduire la solution $g'(S') = \{s_{j_1}^1, \dots, s_{j_1}^{p_{j_1}}\} \cup \dots \cup \{s_{j_p}^1, \dots, s_{j_p}^{p_{j_p}}\}$ de même valeur sur \tilde{I} ; réciproquement, nous allons montrer que toute solution *minimale* sur \tilde{I} contient, pour toute famille $\{s_j^1, \dots, s_j^{p_j}\}$, soit tout soit aucun élément de la famille : alors de toute solution \tilde{S}' sur \tilde{I} de valeur $m_{SC}(\tilde{I}, \tilde{S}')$ on saurait déduire une solution $g(\tilde{S}')$ de valeur inférieure ou égale sur I , en plaçant simplement dans $g(\tilde{S}')$ tous les sous-ensembles s_j dont la famille associée $\{s_j^1, \dots, s_j^{p_j}\}$ est totalement incorporée à la solution \tilde{S}' . En effet, la répartition des $c_i(x_1, \dots, x_{d_i})$ entre les sous-ensembles $s_{j_\ell}^k$ d'une famille nous assure que toute solution réalisable sur \tilde{I} doit prendre *au moins* une famille complète par élément. Supposons, par exemple, que c_1 ne soit couvert que par des familles incomplètes; supposons, par exemple, qu'il manque le premier élément de chaque famille, soit que la solution \tilde{S} ne contient aucun des sous-ensembles $s_{j_1}^1, \dots, s_{j_\ell}^1, \dots, s_{j_{d_1}}^1$ pour couvrir les éléments de \tilde{I} associés à c_1 ; mais alors, nul ne couvrirait l'élément $c_1(1, \dots, 1, \dots, 1)$! Toute solution réalisable devant associer à chaque élément une famille complète, et cela suffisant à l'obtention d'une solution réalisable, toute famille incomplète serait superflue. On vérifie aisément les relations :

$$\left. \begin{array}{l} \forall \tilde{S}' \in Sol_{SC}(\tilde{I}), m_{WSC}(I, g(\tilde{S}')) \leq m_{SC}(\tilde{I}, \tilde{S}') \\ \forall S' \in Sol_{SC}(I), m_{SC}(\tilde{I}, g'(S')) = m_{WSC}(I, S') \end{array} \right\} \Rightarrow \beta_{SC}(\tilde{I}) = \beta_{WSC}(I)$$

$$\text{et } \left. \begin{array}{l} \beta_{SC}(\tilde{I}) = \beta_{WSC}(I) \\ \omega_{SC}(\tilde{I}) = \omega_{WSC}(I) \end{array} \right\} \Rightarrow \forall \tilde{S}' \in Sol_{SC}(\tilde{I}), \delta_{WSC}(I, g(\tilde{S}')) \geq \delta_{SC}(\tilde{I}, \tilde{S}').$$

Le rapport d'approximation est préservé par réduction continue, qu'en est-il des optima locaux? Nous montrons qu'il s'agit bien là d'une *LOC*-réduction, en posant $S_{SC}(\tilde{I}) = g'(Sol_{WS}(I))$ (*pour se limiter sur \tilde{I} aux solutions constituées de familles complètes*), avec une "expansion" de voisinage de l'ordre de $p_{min} = \min_{j=1}^n \{p_j\}$, puisque changer l'appartenance d'un seul sous-ensemble s_j à la solution sur I revient à considérer l'appartenance des p_j sous-ensembles $s_j^1, \dots, s_j^{p_j}$ à la solution sur I' . La fonction $g \circ g'$ étant l'identité sur $Sol_{WS}(I)$, la condition (i) de *surjectivité* est vérifiée; encore sur $S_{SC}(\tilde{I})$, toute solution \tilde{S}' est liée à sa projection par g sur $Sol_{WS}(I)$ par la relation affine " $m_{SC}(\tilde{I}, \tilde{S}') = m_{WSC}(I, g(\tilde{S}'))$ ", qui mène directement à la vérification de (ii) de *monotonie partielle*. Soit h une constante, on considère respectivement sur \tilde{I} et I les voisinages h - et $\lfloor h/p_{min} \rfloor$ -bornés; si deux solutions \tilde{S}' et \tilde{T}' de $S_{SC}(\tilde{I})$ sont au plus h -distantes (moins de $(h+1)$ sous-ensembles les séparent), alors les solutions $g(\tilde{S}')$ et $g(\tilde{T}')$ sont au plus h/p_{min} -distantes sur I , le retrait ou l'ajout d'un sous-ensemble sur I correspondant au retrait ou à l'ajout d'au moins p_{min} sous-ensembles constitutifs d'une famille sur \tilde{I} : c'est la *localité* (iii); reste à vérifier la condition (iv) de *dominance*, mais nous l'avons déjà dit, les solutions minimales ne comportent pas de famille

partielle et ainsi, un optimum h -local sur $S_{SC}(\tilde{I})$ est a fortiori optimum h -local sur $Sol_{SC}(\tilde{I})$. Nous avons prouvé que la réduction continue proposée dans [76] préservait simultanément le rapport d'approximation différentiel et l'optimalité locale, elle est une $G[\delta]$ -réduction \diamond

Remarque 7.1. Cete réduction permet de déduire du rapport garanti par les optima 1-locaux de $Min SC$ sur I' un rapport constant des optima 1-locaux de $Min WSC$ sur I , pour autant que la taille des sous-ensembles s_j de l'instance initiale et leur poids p_i soient bornés par deux constantes B et K ; toutefois, ce rapport obtenu par réduction est dominé par celui donné par le théorème 4.6: les solutions minimales de I' garantissent alors d'après le même théorème un rapport différentiel de

$$\frac{BK^{\Delta-1}}{(BK^{\Delta-1} + 1)(BK^{\Delta-1}\Delta - 1)}$$

quand ceux de I nous assurent déjà un rapport de

$$\frac{B\Delta}{K(B + 1)(B\Delta - 1)}.$$

7.1.3 Dépondération pour la couverture de sommets

Les versions pondérée et non pondérée de la couverture de sommets ont le même comportement vis-à-vis de leur appartenance à $GLO[\delta]$, à une constante de voisinage près. Connaissant cependant la difficulté d'approximation différentielle de ce problème, nous exploitons la transformation dans la limite d'instances dont le degré des sommets comme la pondération sont respectivement bornés par les quantités Δ et K (Δ et K éventuellement dépendantes de la taille de l'instance). Par ailleurs, pour transporter les structures de voisinage il faudra prendre comme repère supplémentaire la valeur du poids minimum, notée p_{min} .

Proposition 7.3.

$$Min W[\Delta]VC - K \underset{\infty}{G[\delta](1, \lfloor h/p_{min} \rfloor)} Min VC - (\Delta \times K)$$

Preuve: la réduction continue proposée par Simon [79] préserve l'approximation différentielle et la localité par LOC -réduction.

Soit $I = (G(V, E), p)$ une instance de $W[K]VC$, on lui associe l'instance $G'(V', E')$ de VC en dupliquant dans V' chaque sommet de V en autant de copies que son poids, en répétant chaque arête de E entre tout couple de copies de ses extrémités :

$$\begin{aligned} V' &= \bigcup_{j=1}^n V_j / \forall j = 1, \dots, n, V_j = \{v_j^1, \dots, v_j^h, \dots, v_j^{p_j}\} & \Rightarrow |V'| &= \sum_{j=1}^n p_j \leq n \times K \\ E' &= \bigcup_{i=1}^m E_i / \forall i = 1, \dots, m, e_i = v_{i_1} v_{i_2} \Rightarrow E_i = V_{i_1} \times V_{i_2} & \Rightarrow |E'| &= \sum_{i=1}^m p_{j_1} \times p_{j_2} \leq n^2 \times K^2. \end{aligned}$$

Si $K = \Theta(n^k)$ (poids bornés par un polynôme en n d'ordre k), la construction est polynomiale et permet d'associer à toute couverture U des arêtes de E la couverture $g'(U) = \cup_{v_j \in U} V_j$ des arêtes de E' , de valeur

$$m_{VC}(I', g(U)) = \sum_{v_j \in U} |V_j| = \sum_{v_j \in U} p_j = m_{WVC}(I, U).$$

Inversement, à toute solution U' sur I' , on peut associer la solution $g(U') = \cup_{V_j \subseteq U'} \{v_j\}$ sur I , de valeur inférieure ou égale à la valeur de U' : effectivement, pour toute arête $e_i = v_{i_1} v_{i_2}$, U' doit contenir au moins tout V_{i_1} ou tout V_{i_2} pour être réalisable (*sinon l'arête $v^1 i_1 v^1 i_2$ par exemple n'est pas couverte*); on peut donc évincer de toute solution les sous-ensembles de sommets qui n'y sont pas complètement, tout en restant réalisable. Les pires solutions, sur I comme sur I' , consistent à prendre tous les sommets, et leur valeur coïncide; à l'aide des fonctions g et g' on déduit alors les relations :

$$\left. \begin{array}{l} \beta_{WVC}(I) = \beta_{VC}(I'), \quad \omega_{WVC}(I) = \omega_{VC}(I') \\ \forall U' \in \text{Sol}_{VC}(I'), \quad m_{WVC}(I, g(U')) \leq m_{VC}(I', U') \end{array} \right\} \Rightarrow \delta_{WVC}(I, g(U')) \geq \delta_{VC}(I', U').$$

Le lien mis en évidence entre les solutions des deux instances nous suggère de considérer un voisinage $[h/p_{min}]$ -borné sur I quand un voisinage h -borné est envisagé sur I' : quand sur I on fait évoluer une solution courante en bougeant un seul sommet v_j , sur I' c'est tout un sous-ensemble V_j de sommets qu'il faut déplacer. La *LOC*-réduction s'établit avec mes mêmes arguments que la *LOC*-réduction précédente (*poser cette fois $S_{VC}(I') = g'(\text{Sol}_{WVC}(I))$*). Sur la foi de cette dernière allégation, la réduction de Simon [79] est bien une $G[\delta]$ -réduction \diamond

Les problèmes de stable et de couverture de sommets étant affinement identiques, il vient naturellement du résultat précédent le corollaire suivant :

Corollaire 7.4.

$$\text{Max } W[\Delta]IS - K \stackrel{G[\delta](1, [h/p_{min}])}{\infty} \text{Max } IS - (\Delta \times K).$$

Remarque 7.2. Si les bornes K et Δ des poids et des degrés des sommets sont des constantes, alors le degré des sommets de l'instance I' est également borné, par la constante $\Delta \times K$; un optimum 1-local assurant un rapport $1/(\Delta \times K)$ sur I' , il en est de même de tout optimum p_{min} -local et on en déduit un rapport différentiel de $1/(\Delta \times K)$ pour tout optimum 1-local sur I . Ce résultat égale celui que l'on pouvait déduire du rapport $1/\Delta$ garanti par toute couverture minimale pour le problème non pondéré et de la remarque 4.1 faite au chapitre 4 qui indique que l'on peut déduire sur de tels problèmes d'un rapport (classique comme différentiel) d'approximation r sur l'instance non pondérée un rapport r/K sur l'instance non pondérée.

7.1.4 Autres problèmes simples dans les graphes

Nous allons aborder deux nouveaux problèmes : l'un, noté *Max CB* (*Maximum Complete Bipartite-graph*), a pour but de déterminer dans un graphe un sous-graphe biparti complet K_{n_1, n_2} le plus grand possible, la taille d'un tel graphe étant mesurée par la somme $n_1 + n_2$ (K_{n_1, n_2} désigne un graphe constitué de deux ensembles de sommets, l'un de taille n_1 l'autre de taille n_2 , et de toute arête reliant deux sommets de chacun de ces ensembles); le second, *Max RIS* (*Maximum Regular Independent Set*), désigne simplement une restriction du problème de stable à des graphes réguliers (*dont tous les sommets ont même degré*).

Proposition 7.5.

$$\text{Max CB} \stackrel{G[\delta](1,h)}{\infty} \text{Max RIS}$$

Preuve: la réduction continue proposée dans [79] est non seulement *fortement affine*, mais aussi *LOC'*-réduction.

Soit $I = G(V, E)$ ($|V| = n$ et $|E| = m$) une instance de *Max CB*, on lui associe pour instance de *Max RIS* le graphe $I' = G'(V', E')$ obtenu à partir de G en dupliquant G en deux copies $G^1(V^1, E^1)$ et $G^2(V^2, E^2)$, puis en reliant un sommet v_j^1 de G^1 à un sommet v_h^2 de G^2 à chaque fois que les sommets v_j et v_h ne sont pas reliés par une arête dans le graphe initial G (*en particulier, pour j de 1 à n , $v_j^1 v_j^2 \in E'$*). De façon plus rigoureuse, le graphe G' peut être décrit de la sorte :

$$\begin{aligned} V' &= V^1 \cup V^2, & V^1 &= \{v_1^1, \dots, v_n^1\}, & V^2 &= \{v_1^2, \dots, v_n^2\}, \\ E' &= E^1 \cup E^2 \cup E^3, & E^1 &= \{v_j^1 v_h^1 \mid v_j v_h \in E\}, & E^2 &= \{v_j^2 v_h^2 \mid v_j v_h \in E\}, \\ & & \text{et } E^3 &= \{v_j^1 v_h^2, v_h^1 v_j^2, \mid 1 \leq j \leq h \leq n, v_j v_h \notin E\} . \end{aligned}$$

Dans G' , tout sommet est de degré n , tout sommet v_j^1 (*resp.* v_j^2) étant relié à $d(v_j)$ sommets dans E^1 (*resp.* E^2) et $n - d(v_j)$ sommets dans E^3 : le graphe construit est régulier, de degré n . Soit $U = U^1 \cup U^2$ un stable de G' , on note $V_1 = \{v_j \mid v_j^1 \in U^1\}$ et $V_2 = \{v_j \mid v_j^2 \in U^2\}$ les ensembles de sommets correspondants sur G ; par construction de G' , si U est un stable, alors $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, V_1 et V_2 sont stables, et toute arête d'un sommet de V_1 à un sommet de V_2 existe dans G : $g(U) = (V_1, V_2, V_1 \times V_2)$ forme un graphe biparti complet sur $|V_1| + |V_2| = |U|$ sommets. Réciproquement, tout graphe biparti complet $(V_1, V_2, V_1 \times V_2)$ sur G correspond à un stable $U = g^{-1}(V_1, V_2, V_1 \times V_2)$ sur G' en posant $U^1 = \{v_j^1 \mid v_j \in V_1\}$, $U^2 = \{v_j^2 \mid v_j \in V_2\}$ et $U = U^1 \cup U^2$. La transformation g est une bijection qui relie les deux ensembles de solutions $\text{Sol}_{CB}(I)$ et $\text{Sol}_{RIS}(I')$ par la relation :

$$\forall U \in \text{Sol}_{RIS}(I'), m_{CB}(I, g(U)) = m_{RIS}(I', U),$$

assurant une réduction fortement affine de paramètres $K_I = 0$ et $k_I = 1$. Il suffit maintenant pour vérifier la préservation des optima locaux de remarquer que, d'une instance à l'autre, la mesure des distances est la même, consistant en le comptage du nombre de sommets que l'on va ajouter ou retirer aux ensembles U^1 et U^2 (*resp.* V_1 et V_2): il n'en faut pas plus pour assurer la coïncidence par g et g^{-1} des optima h -locaux sur les ensembles de solutions $Sol_{CB}(I)$ et $Sol_{RIS}(I')$, et ce quels que soient la constante h et le voisinage h -borné considérés. La LOC' -réduction est vérifiée, permettant d'affirmer la $G[\delta]$ -réduction \diamond

7.2 Les problèmes de logique

Nous abordons à présent les problèmes de logique, certains tels $Max\ k-Sat$, $Max\ CCSP$ ou encore $Max\ NAE\ k-Sat$ déjà largement étudiés à l'occasion du chapitre 6 et d'autres, tels $Min\ EQ$ et $Min\ E-k-LIN2$, qui n'ont pas encore subi l'épreuve de $GLO[R]$. Il sera particulièrement intéressant de voir comment, au contraire du cas classique, l'approximation différentiel est neutre vis-à-vis de la *densité* des instances des problèmes considérées.

7.2.1 Autour de $Min\ EQ$

Nous introduisons ici le problème $Min\ EQ$ dont les instances sont la donnée d'un ensemble E d'équivalences $x \equiv y$ sur un ensemble X de variables binaires, et l'objectif, étant donné une instance (X, E) , de trouver une affectation des valeurs de vérité sur X qui minimise le nombre d'équivalences de E satisfaites. Pour la version pondérée, les instances sont munies d'un système de poids $p \in \mathbb{N}^{|E|}$ et il s'agit alors de minimiser la somme des poids des équivalences satisfaites. Pour relier étroitement les structures de voisinage des deux problèmes, on se place dans $CGLO[R]$ et non plus dans $GLO[R]$. Notons que pour $Min\ EQ$, deux affectations complémentaires T et \bar{T} sont toujours équivalentes, et de fait considérer l'appartenance à $CGLO[R]$ ou $\overline{CGLO[R]}$ est une seule et même chose. Conventionnellement, la version pondérée du problème d'équivalences par des poids bornés par $o(n)$ où n désigne le nombre de variables seront notés $Min\ W(1)\ EQ$, la restriction à des poids au plus 2 (*resp.* Δ) par $Min\ W[2]\ EQ$ (*resp.* $Min\ W[\Delta]\ EQ$).

Proposition 7.6.

$$Min\ E-2-Sat \stackrel{CG[\delta]_{\infty}(1,h+1)}{\sim} Min\ W(1)\ EQ$$

Preuve : nous exploitons la réduction proposée dans [14] entre $Min\ E-2-Sat$ et $Min\ EQ$ pour montrer qu'elle est aussi une réduction *affine* et LOC' -réduction de $Min\ E-2-Sat$

à $Min W(1) EQ$.

Nombre des notations utilisées ici ont été introduites en section 6.1.1 ; aussi invitons-nous le lecteur à s'y référer sans retenue.

Soit $I = (X, C)$ une instance de $Min E - 2 - Sat$ à m clauses sur n variables, on lui associe l'instance $I' = (X', E, p)$ de $Min W(1) EQ$ suivante :

$$\begin{aligned}
 X' &= X \cup \{y\} \\
 E &= \bigcup_{(\ell_1, \ell_2) \in C} \{\ell_1 \equiv \neg \ell_2, \ell_1 \equiv \neg y, \ell_2 \equiv \neg y\} \\
 p &: \begin{cases} \forall l \in X \cup \bar{X}, p(l \equiv \neg y) = |\{c \in C / l \in c\}| \\ \forall \ell_1 \neq \ell_2 \in X \cup \bar{X}, p(\ell_1 \equiv \neg \ell_2) = \begin{cases} 1 \text{ si } (\ell_1, \ell_2) \text{ ou } (\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2) \in c \\ 2 \text{ si } (\ell_1, \ell_2) \text{ et } (\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2) \in c \end{cases} \end{cases}^1.
 \end{aligned}$$

Il s'agit bien d'une instance de $Min W(1) EQ$, chaque littéral pouvant apparaître dans au plus $2(n-1) \leq 2|X'| = o(n)$ clauses de l'instance initiale. Pour toute affectation S des valeurs de vérité sur X , $(S|0)$ (*resp.* $(S|1)$) désigne l'extension de S à $\{y\}$ qui affecte y à 0 (*resp.* 1). Considérons deux affectations T et $T' = (T|0)$ sur les ensembles de variables X et X' , on montre que les valeurs de ces deux solutions sur I et I' sont liées par la relation :

$$m_{EQ}(I', T') = 2m_{Sat}(I, T).$$

Effectivement, soit (ℓ_1, ℓ_2) une clause de C : elle peut être vérifiée avec $\ell_1 = \ell_2 = 1$, alors $\ell_1 \equiv \neg \ell_2$ sera fausse tandis que $\ell_1 \equiv \neg y$ et $\ell_2 \equiv \neg y$ seront vraies ; elle peut encore être vérifiée avec $\ell_1 = 1$ et $\ell_2 = 0$ (*resp.* $\ell_1 = 0$ et $\ell_2 = 1$), alors $\ell_1 \equiv \neg \ell_2$ et $\ell_2 \equiv \neg y$ (*resp.* $\ell_1 \equiv \neg y$) seront vérifiées au contraire de $\ell_1 \equiv \neg y$ (*resp.* $\ell_2 \equiv \neg y$) ; elle peut enfin ne pas être satisfaite si $\ell_1 = \ell_2 = 0$: comme alors les valeurs des trois littéraux ℓ_1 , ℓ_2 et y coïncident, aucune des équivalences $\ell_1 \equiv \neg \ell_2$, $\ell_1 \equiv \neg y$ et $\ell_2 \equiv \neg y$ ne saurait être vérifiée. Ainsi, à toute affectation T sur X on peut associer une affectation T' sur X' de valeur $2m_{Sat}(I, T)$, en posant simplement $y = 0$; réciproquement, à toute affectation T' sur X' on peut associer une affectation $g(T')$ sur X de valeur $m_{EQ}(I', T')/2$ sur I en posant $g(T') = T'_{|X}$ si T' affecte y à 0, $g(T') = \bar{T}'_{|X}$ sinon : comme nous l'avons déjà remarqué, deux affectations complémentaires valident les mêmes équivalences.

Toute solution T pouvant être obtenue par g à partir par exemple de la solution $(T|0)$, g est surjective ; le fait que de surcroît les valeurs de deux solutions T' et $g(T')$ soient toujours

1. les équivalences $\ell_1 \equiv \neg \ell_2$ et $\neg \ell_1 \equiv \ell_2$ étant bien entendu considérées comme une seule sur I'

liées par la relation $m_{Sat}(I, g(T')) = m_{EQ}(I', T')/2$ nous assure l'affinité de la réduction, dont on déduit la propriété de stricte monotonie. Il nous reste une fois de plus, pour établir la LOC' -réduction, à vérifier la propriété de surjectivité de voisinage pour les voisinages miroirs h -bornés, qui consistent, sur I comme sur I' à considérer comme voisines deux affectations qui diffèrent sur au plus h , ou au moins $n - h$, variables. Pour ce faire, considérons une constante h et une solution T' de I' : il s'agit alors de vérifier que pour tout couple de solutions S' et T' de I' voisines au sens du voisinage miroir h -borné, les solutions de I $g(S')$ et $g(T')$ sont également voisines, au sens du même voisinage miroir $(h + 1)$ -borné. Si S' et T' affectent identiquement y , alors $g(S') = S'_{|X}$ et $g(T') = T'_{|X}$ ou $g(S') = \overline{S'}_{|X}$ et $g(T') = \overline{T'}_{|X}$; dans les deux cas les distances vérifient :

$$\begin{aligned} d(S', T') &= d(S'_{|X}, T'_{|X}) = d(\overline{S'}_{|X}, \overline{T'}_{|X}) \\ \Rightarrow \begin{cases} d(S', T') \leq h & \Leftrightarrow d(g(S'), g(T')) \leq h \\ d(S', T') \geq n - h & \Leftrightarrow d(g(S'), g(T')) \geq n - h. \end{cases} \end{aligned}$$

Sinon, supposons par exemple $g(S') = S'_{|X}$ et $g(T') = \overline{T'}_{|X}$, et alors :

$$\begin{aligned} d(S', \overline{T'}) &= (n + 1) - d(S', T') = n - d(S'_{|X}, T'_{|X}) = d(S'_{|X}, \overline{T'}_{|X}) \\ \Rightarrow \begin{cases} d(S', T') \leq h & \Leftrightarrow d(g(S'), g(T')) \geq n - h + 1 \\ d(S', T') \geq n - h & \Leftrightarrow d(g(S'), g(T')) \leq h + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

La réduction proposée de $Min E - 2 - Sat$ à $Min W(1) EQ$, à la fois affine et LOC' -réduction pour les voisinages h -bornés complémentaires, préserve donc bien la garantie de qualité des optima locaux pour ces voisinages \diamond

Notons que si le nombre d'occurrences d'une variable est bornée par une quantité Δ éventuellement dépendante de la taille de l'instance), les poids associés aux équivalences seront également bornés par Δ ; c'est ce qu'exprime le corollaire suivant :

Corollaire 7.7.

$$Min E - 2 - Sat - \Delta \stackrel{CG[\delta](1, h+1)}{\propto} Min W[\Delta] EQ$$

Nous envisageons à présent le problème $Min Paired Bisection$ (noté $Min PB$) de coupe défini comme suit : une instance I est la donnée d'un graphe $G(U \cup V, E)$ composé de deux ensembles de sommets $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ et $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ de même cardinalité ; une bisection est un partage de $U \cup V$ en deux sous-ensembles W et \overline{W} de même taille ; une bisection W sera réalisable si elle sépare les couples $\{u_j, v_j\}$ *i.e.* si elle vérifie :

$$\forall j = 1, \dots, n, u_j \in W \Leftrightarrow v_j \in \overline{W}.$$

(On rappelle qu'étant donné deux ensembles V_1 et V_2 de sommets sur un graphe $G(V, E)$, $\langle V_1, V_2 \rangle$ désigne l'ensemble des arêtes de E ayant une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2). Le but est de trouver une bisection W réalisable qui minimise la cardinalité de la coupe $\langle W, \overline{W} \rangle$.

Proposition 7.8.

$$\text{Min EQ} \stackrel{G[\delta](1,h)}{\propto} \text{Min PB}$$

Preuve: nous montrons que la L -réduction proposée dans [14] entre les deux problèmes possède également les qualités d'une réduction *fortement affine* et d'une LOC' -réduction.

Soit $I = (X, E)$ une instance de $Min EQ$ à n variables, nous associons à chacune de ses variables x_j les sommets u_j (représentant x_j dans I) et v_j (représentant \bar{x}_j dans I); l'instance $I' = G(U \cup V, F)$ que l'on construit pour le problème $Min PB$ est ainsi munie des ensembles de sommets $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ et $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ et de l'ensemble d'arêtes F défini comme suit :

$$"x_i \equiv \bar{x}_j" \in E \Rightarrow \{u_i u_j, v_i v_j\} \subseteq F, \quad "x_i \equiv x_j" \in E \Rightarrow \{u_i v_j, v_i u_j\} \subseteq F.$$

Soit W une bisection réalisable sur I' , on lui fait correspondre l'affectation $g(W)$ des variables de X qui place à 1 les variables x_j dont le représentant u_j est élément de W , à 0 les autres (*variables x_j dont le représentant u_j est élément de \overline{W}*); la réalisabilité de W assure la cohérence de l'affectation $g(W)$. Cette affectation valide une équivalence " $x_i \equiv x_j$ " (*x_i et x_j ont même valeur*) si et seulement si les sommets u_i et u_j sont tous deux dans W ou tous deux dans \overline{W} , soit quand les arêtes $u_i v_j$ et $v_i u_j$ sont dans la coupe; elle valide une équivalence " $x_i \equiv \bar{x}_j$ " (*x_i et x_j ont valeurs opposées*) si et seulement si les sommets u_i et u_j se situent, l'un dans W , l'autre dans \overline{W} , soit quand les arêtes $u_i u_j$ et $v_i v_j$ sont dans la coupe. Ainsi, $g(W)$ vérifie $m_{EQ}(I, g(W)) = m_{PB}(I', W)/2$ équivalences. Inversement, soit T une affectation des valeurs de vérité sur I , la bisection $g^{-1}(T)$ constituée des variables mises à 1 par T est non seulement réalisable, mais aussi de valeur $m_{PB}(I', g^{-1}(T)) = 2m_{EQ}(I, T)$. Ainsi, il s'agit bien là d'une réduction fortement affine (donc surjective et strictement monotone) de paramètres $k_I = 1/2$ et $K_I = 0$. Cette réduction préserve clairement les optima h -locaux par LOC' -réduction, les distances étant les mêmes sur les deux instances: deux solutions W et W' sont au plus h -distantes sur I' (*différant d'au plus h sommets*) si et seulement si les affectations $g(W)$ et $g(W')$ le sont également sur I (*différant d'au plus h composantes*). L'affinité et la localité maintenant établies nous assurent qu'elle est une G -réduction \diamond

Proposition 7.9.

$$\text{Min PB} \stackrel{G[\delta]^{(1,h)}}{\propto} \text{Min W[2] EQ}$$

Preuve : une fois de plus, en étudiant sous l'angle qui nous intéresse la L -réduction proposée dans [14] de Min PB à Min EQ , nous montrons qu'elle est une réduction simultanément *fortement affine* et LOC' -réduction de Min PB à Min W[2] EQ .

Soit $I = G(V, E)$ une instance de Min PB sur un graphe à $2n$ sommets et considérons l'instance I' de Min W[2] EQ constituée d'un ensemble $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ de n variables, d'un ensemble F d'équivalences " $x_i \equiv x_j$ " (*resp.* " $x_i \equiv \bar{x}_j$ ") pour toute arête $u_i v_j$ ou $u_j v_i$ (*resp.* $u_i u_j$ ou $v_i v_j$) de E , et d'une pondération p de ces équivalences qui place un poids 2 sur une équivalence " $x_i \equiv x_j$ " (*resp.* " $x_i \equiv \bar{x}_j$ ") quand les arêtes $u_i v_j$ et $u_j v_i$ (*resp.* $u_i u_j$ et $v_i v_j$) sont toutes deux élément de E , un poids 1 sur toute autre équivalence. Les mêmes transformations que celles proposées lors de la précédente preuve, par les mêmes arguments, assurent la forte affinité et la localité de la réduction \diamond

7.2.2 Autour de Max NAE Sat

Nous avons déjà considéré au paragraphe 6.1.1 les liens qui pouvaient unir, du point de vue de l'approximation différentiel d'une part et de la conservation des optima locaux d'autre part, différentes versions du problème de satisfaisabilité de clauses conjonctives et disjonctives ; nous en faisons de même ici avec le problème Max NAE Sat , tentant par la même occasion de situer le degré d'approximabilité de ses variantes par rapport à ces derniers.

Proposition 7.10.

$$\forall k \geq 2, \text{Max NAE } k - \text{Sat} \stackrel{G[\delta]^{(1,h)}}{\leftrightarrow} \text{Max NAE } E - k - \text{Sat}$$

Preuve : nous construisons une réduction de $\text{Max NAE } k - \text{Sat}$ à $\text{Max NAE } E - k - \text{Sat}$ qui possède les propriétés d'une réduction *affine* et d'une LOC' -réduction.

La construction est la même que celle proposée à l'occasion du lemme 6.4 pour les versions de CCSP : si les clauses d'une instance I ne sont pas toutes de taille k , on introduit une nouvelle variable y et l'on remplace chaque clause $c = (\ell_1, \dots, \ell_p)$ de taille p strictement inférieure à k par les deux clauses $(\ell_1, \dots, \ell_p, y)$ et $(\ell_1, \dots, \ell_p, \bar{y})$ (transformation t) ; s'il reste encore des clauses de moins de k littéraux, on recommence et ainsi de suite (au plus $k-1$ fois), jusqu'à ce que l'instance obtenue $I' = t^\kappa(I)$ ($\kappa \leq k-1$) soit une instance de $\text{Max NAE } E - k - \text{Sat}$.

$k-Sat$. Nous avons déjà argumenté quant à la complexité d'une telle transformation, il nous reste ici à comparer les valeurs des solutions de l'instance initiale I et de l'instance image I' . Pour ce faire, on montre que deux instances I et $t(I)$ sont toujours intimement liées en observant simplement qu'une clause $c = (\ell_1, \dots, \ell_p)$ est validée (*resp.* rejetée) pour $NAE Sat$ par une affectation des valeurs de vérité si et seulement si les deux clauses (*resp.* exactement l'une des deux clauses) $(\ell_1, \dots, \ell_p, y)$ et $(\ell_1, \dots, \ell_p, \bar{y})$ le sont (*resp.* l'est) également, et cela quelle que soit l'extension faite à y de l'affectation des valeurs de vérité. On voit aisément que la relation entre deux instances I et $t(I)$ de $NAE Sat$ est si étroite qu'elle permet de préserver les optima locaux : T optimum h -local sur I si et seulement si $(T|0)$ et $(T|1)$ ² optima h -locaux sur $t(I)$. La relation des instances I et $t(I)$ se transporte alors aisément par récurrence aux instances I et $t^\kappa(I)$ \diamond

Proposition 7.11.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \text{Max } NAE k - Sat \stackrel{G[\delta]_{\infty}^{(1,h)}}{\sim} \text{Max } k - Sat$$

Preuve : nous exhibons une réduction de $Max NAE k - Sat$ à $Max k - Sat$ dont les qualités sont conjointement celles d'une réduction *fortement affine* et d'une LOC' -réduction.

Une clause est validée (*resp.* rejetée) pour $NAE Sat$ si tous ses littéraux ne sont pas identiquement affectés ; ainsi, une affectation T des valeurs vérité valide une clause c si et seulement si les deux clauses (*resp.* exactement l'une des deux clauses) c et \bar{c} le sont pour Sat . Associons donc à une instance $I = (X, C)$ de $NAE Sat$ l'instance $I' = (X, C \cup \bar{C})$ de $Max k - Sat$; toute affectation $T \in \{0, 1\}^n$ des valeurs de vérité vérifie :

$$m_{Sat}(I', T) = m + m_{NAE}(I, T).$$

Attention : pour $NAE Sat$, les clauses c et \bar{c} ont la même signification, aussi supposons-nous ne jamais disposer dans une instance, et ce quel que soit l'ensemble $c = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p)$ de littéraux considéré, conjointement des ensembles c et \bar{c} (*sinon on aurait seulement* $m_{Sat}(I', T) \leq m + m_{NAE}(I, T)$, *il faudrait pondérer* I' *pour retrouver une équivalence entre les mesures sur* I *et* I'). Sous cette hypothèse, la transformation proposée est une réduction fortement affine de coefficients $K_I = |m|$ et $k_I = 1$. Cette réduction fortement affine vérifie allègrement les exigences d'une LOC' -réduction : les ensembles de solutions de I et I' étant les mêmes,

2. On rappelle que si T désigne une affectation des valeurs de vérité sur X , $(T|0)$ (*resp.* $(T|1)$) désigne l'extension de T à $X \cup \{y\}$ qui affecte y à 0 (*resp.* 1).

les voisins au plus h -distants coïncident également \diamond

Proposition 7.12.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \text{Max } k - \text{Sat} \stackrel{CG[\delta](1, h+1)}{\underset{\infty}{\sim}} \text{Max } NAE(k+1) - \text{Sat}$$

Preuve : de $\text{Max } k - \text{Sat}$ à $\text{Max } NAE(k+1) - \text{Sat}$, il existe une réduction bien connue que nous présentons ici comme réduction à la fois *affine* et *LOC'*-réduction.

Soit $I = (X, C)$ une instance de $k - \text{Sat}$ à m clauses sur n variables, on construit l'instance $I' = (X \cup \{y\}, C \times \{y\})$ de $NAE(k+1) - \text{Sat}$. Pour toute affectation T des variables de X , la solution $(T|0)$ de I' satisfait au sens de *NAE Sat* exactement les mêmes clauses que T^3 : seules ne seront pas vérifiées dans I' les clauses contenant des littéraux (dont y) tous nuls. Soit T' une affectation des variables $X \cap \{y\}$, on peut lui associer une solution $g(T')$ de I de valeur $m_{\text{Sat}}(I, g(T')) = m_{NAE}(I', T')$ en posant $g(T') = T'|_X$ si T' affecte y à 0, $g(T') = \overline{T'}|_X$ sinon. g est évidemment surjective, toute affectation T sur X pouvant être déduite, notamment, de l'affectation $(T|0)$ sur $X \cup \{y\}$; de plus, les couples de solutions $(T', g(T'))$ sont toujours liés en valeur par une relation affine de paramètres $k_I = 1$ et $K_I = 0$: la réduction proposée est bien une réduction affine de $\text{Max } k - \text{Sat}$ à $\text{Max } NAE(k+1) - \text{Sat}$. Possède-t-elle également les propriétés d'une *LOC'*-réduction pour la structure de voisinage miroir h -borné? Soient S' et T' deux affectations au plus h -, au moins $n - h$ -distantes sur $X \cup \{y\}$, nous voulons vérifier pour assurer la surjectivité de voisinage que les solutions $g(S')$ et $g(T')$ sont au plus $(h+1)$ -, au moins $[n - (h+1)]$ -distantes sur I . Si S' et T' coïncident sur y , alors les distances $d(g(S'), g(T'))$ et $d(S', T')$ sont identiques; sinon, supposons que T' affecte y à 1, alors les distances vérifient

$$d(g(S'), g(T')) = |X| - d(g(S'), \overline{g(T')}) \text{ et } d(S', T') = d(g(S'), \overline{g(T')}) + 1,$$

ce dont on déduit :

$$d(S', T') \leq h \Rightarrow d(g(S'), g(T')) \geq n - h + 1, d(S', T') \geq n - h \Rightarrow d(g(S'), g(T')) \leq h + 1.$$

Une fois de plus, la combinaison des avantages d'une réduction affine et d'une *LOC'*-réductions mènent à la *CG*-réduction \diamond

Lemme 7.13.

$$\text{Max } \text{Cut} \stackrel{G[\delta](1, h)}{\underset{\infty}{\sim}} \text{Max } NAE E 2 - \text{Sat}$$

3. $(T|0), (T|1) \in \{0, 1\}^{n+1}$ définis par $(T|0)|_X = (T|1)|_X = T$ et $(T|0)|_{\{y\}} = 0, (T|1)|_{\{y\}} = 1$

Preuve : on montre que la relation qui lie ces deux problèmes est simultanément *fortement affine* et *LOC'*-réduction, entre les deux problèmes.

Soit $G(V, E)$ une instance de *Max Cut*, on peut très bien l'interpréter comme une instance de *Max NAE E 2 – Sat* en considérant les sommets comme des variables et les arêtes comme des clauses : une arête (*resp.* une clause) est dans la coupe (*resp.* valide au sens de *NAE – Sat*) si l'une de ses extrémités (*resp.* l'un de ses littéraux) est dans la coupe (*resp.* vrai) et l'autre dans le complémentaire (*resp.* faux). Il ne s'agit ici que de la façon de le regarder, la réalité que l'on préfère prêter au modèle mathématique formulé. On remarquera que les instances de *Max NAE E 2 – Sat* que l'on obtient sont tout de même fort spéciales, puisqu'elles sont un cas particulier de pire solution nulle. La restriction de *NAE – Sat* à des clauses composées exclusivement de littéraux positifs est notée *Pos NAE – Sat* ; si l'on considère cette restriction, les problèmes *Max Cut* et *Max Pos NAE 2 – Sat* sont affinement identiques. Cette forme particulière des instances images ne permet pas, a priori, de revenir en arrière et d'interpréter une instance quelconque du problème *Max NAE E 2 – Sat* comme une instance de *Max Cut* ; cependant, il est possible de l'exprimer comme une instance d'un problème de coupe plus sophistiqué, *Max PB*. Effectivement, la transformation proposée il y a de cela quelques propositions de *Min EQ* à *Min PB* permet tout aussi bien de transformer des instances de *Max NAE E 2 – Sat* en des instances affinement liées de *Max PB* : il suffit d'associer à chaque variable x_i un couple de sommets (u_i, v_j) qui devront être séparés par une bisection valide, et à chaque clause $c_i = (x_j, x_k)$ (*resp.* $(x_j, \bar{x}_k), (\bar{x}_j, \bar{x}_k)$) l'arête $e_i = u_j u_k$ (*resp.* $u_j v_k, v_j v_k$) ; une affectation T des valeurs de vérité sur I est une bisection sur I' , et chaque clause validée par T au sens de *NAE Sat* est une arête de la coupe. Dans l'autre sens, pour se ramener facilement d'une instance de *Max PB* à *Max NAE E – 2 – Sat* de façon similaire à celle opérée pour les versions *minimisation* de *2 – EQ* et *PB*, il faut pondérer les clauses associées aux arêtes du graphe initial, *NAE Sat* ne différenciant pas deux clauses (ℓ_1, ℓ_2) et $(\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2) \diamond$

Proposition 7.14.

$$\begin{array}{c} \text{Max Cut} \xrightarrow{G[\delta](1,h)} \text{Max Pos NAE E 2 – Sat} \\ \text{Max Cut} \xrightarrow[\infty]{G[\delta](1,h)} \text{Max NAE E 2 – Sat} \xrightarrow[\infty]{G[\delta](1,h)} \text{Max PB} \xrightarrow[\infty]{G[\delta](1,h)} \text{Max NAE W[2] 2 – Sat} \end{array}$$

7.2.3 Dense ou pas dense ?

Ce paragraphe s'intéresse aux instances *denses* des problèmes de *Satisfaisabilité* (*Max* et *Min k-Sat*, *Max* et *Min k-CCSP*, *Max* et *Min E-k-Sat*, *Max* et *Min E-k-CCSP*), d'*Équivalences* (*Max* et *Min EQ*) et d'*Équations binaires* (*Max* et *Min k-Lin2*) ; la densité s'exprime en fonction du nombre d'occurrences des variables du problème dans les expressions (*clauses*, *équivalences*, *équations*). L'intérêt de la considération de telles instances réside en la possibilité qu'elle offre d'utiliser des outils probabilistes, fort précieux pour l'établissement de rapports d'approximation. Les résultats sont évocateurs : les instances denses (*ensemble d'expressions au plus k-aires de cardinalité de l'ordre du nombre de variables à la puissance k - 1*, cf. définition 7.1) des problèmes *Min k - Sat* [15], *Max k - Sat* [8], *Max E - k - CCSP* [4] et *Min E - k - LIN2* [15] admettent des *PTAS*, alors que, pris dans leur version générale, ces problèmes sont tous *APX*-difficiles. Arora, Karger et Kar-pinski montrent même que les instances *denses* de tout problème de *Max SNP* admettent un schéma d'approximation polynomial ([8]) ; pour une information plus complète sur les résultats permis à ce jour par la densité des problèmes *APX*-difficiles, se référer à [58].

Si nous avons déjà, parfois à maintes reprises, évoqué les problèmes *Sat*, *CCSP* et *EQ*, c'est en revanche la première fois que nous abordons les problèmes *Lin2* d'équations binaires : il s'agit, étant donnée une instance $I = (X, E)$ composée d'un ensemble X de variables binaires et d'un ensemble E d'équations linéaires sur $X \cup \overline{X}$, de trouver une affectation qui satisfasse un *maximum* ou un *minimum* (selon qu'on se situe dans les versions *maximisation* ou *minimisation* de ce problème) de ces équations, définies modulo 2. Plus précisément, une équation de E sera de la forme $x_{i_1} \oplus x_{i_2} \oplus \dots \oplus x_{i_p} = b$ avec b à valeurs dans $\{0, 1\}$ et $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}$ sont des variables binaires de X ; une telle équation sera satisfaite si $b = 1$ et un nombre impair des arguments $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}$ sont affectés à 1, si $b = 0$ et un nombre pair des arguments $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}$ sont affectés à 1. La restriction de ce problème à des équations sur au plus k variables sera notée *k - Lin2* ; dans tous les cas, le 2 indique que l'on travaille sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Par la suite, on entendra par instance d'un problème de *k-Satisfaisabilité* (*resp.* *E - k-Satisfaisabilité*) tout ensemble C de clauses, disjonctives ou conjonctives, de taille au plus k (*resp.* exactement k) sur un ensemble X de variables. Le nombre d'occurrences d'une variable x_i d'un problème de *Satisfaisabilité* ou d'une instance de *Min* ou *Max EQ*, noté $d(x_i)$, calcule le nombre de clauses ou d'équivalence faisant apparaître les littéraux x_i ou \bar{x}_i ;

le nombre d'occurrences d'une variable x_i d'un problème d'*Équations binaires* sera également noté $d(x_i)$ et comptera naturellement le nombre d'équations faisant intervenir la variable x_i .

Définition 7.1. Densité d'une instance

Pour une constante $\delta > 0$, une instance $I = (X, E)$ à m clauses (*resp.* équivalences, équations binaires) sur n variables d'un problème de k -*Satisfaisabilité* (*resp.* d'*Équivalences*, de k -*Équations binaires*) sera dite δ -dense si le nombre $d(x_i)$ d'occurrences de chaque variable x_i de X est d'au moins $\delta \times n^{k-1}$ (*resp.* $\delta \times n$, $\delta \times n^{k-1}$), et δ -dense en moyenne si l'ensemble E est composé d'au moins $\delta \times n^k$ (*resp.* $\delta \times n^2$, $\delta \times n^k$) expressions; elle sera dite *dense* si elle est δ -dense pour un certain $\delta > 0$, et *dense en moyenne* si elle est δ -dense en moyenne pour un certain $\delta > 0$.

Remarque 7.3. Si une instance $I = (X, E)$ d'un problème de k -*Satisfaisabilité*, d'*Équivalences* ou de k -*Équations binaires* est δ -dense, elle est également δ/k -dense en moyenne :

$$\forall x \in X, d(x) \geq \delta \times n^{k-1} \Rightarrow |E| \geq \frac{1}{k} \sum_{x \in X} d(x) \geq \frac{\delta}{k} n^k.$$

Nous allons voir que, dans le cadre de l'approximation différentielle comme dans celui des optima locaux, les versions denses des problèmes sont aussi *difficiles* que le problème général. Pour ce, nous nous inspirerons le plus souvent de réductions proposées dans [15] que nous compléterons pour les adapter au cadre différentiel.

Remarque 7.4. Dans les constructions qui suivent où $L = X \cup \bar{X}$ désigne un ensemble de littéraux sur un ensemble X de variables, on parlera souvent de la restriction $\mathcal{P}'_r(L)$ de l'ensemble $\mathcal{P}'_r(L)$ des parties de taille r de L aux expressions qui ne contiennent pas de tautologie de la forme (l, \bar{l}) :

$$\mathcal{P}'_r(L) = \{c \in \mathcal{P}_r(L) / \forall l \in L, l \in c \Rightarrow \bar{l} \notin c\}.$$

Si n désigne le nombre de variables, la cardinalité de $\mathcal{P}'_r(L)$, fonction du choix de r variables parmi n puis de h variables à mettre sous forme négative parmi r pour h de 0 à r , est donnée par :

$$|\mathcal{P}'_r(L)| = C_n^r \times \sum_{h=0}^r C_r^h = 2^r C_n^r \Rightarrow |\mathcal{P}'_r(L)| = \Theta(n^r).$$

Proposition 7.15.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{ll} (i) & \text{Max } k - \text{Sat} \quad \overset{G[\delta](1,h)}{\propto} \quad \text{Max Dense } k - \text{Sat} \\ (ii) & \text{Max Dense } k - \text{Sat} \quad \overset{G[\delta](1,h)}{\propto} \quad \text{Max Dense } E - k - \text{Sat} \end{array} \right.$$

Preuve : inspirée de [15].

(i) Soit $I = (X, C)$ une instance de *Max k - Sat* sur $|X| = n$ variables; on introduit un ensemble Y de n variables et on considère toutes les k -clauses que l'on peut construire

en associant un littéral de $X \cup \overline{X}$ à $k - 1$ littéraux de $Y \cup \overline{Y}$, construisant l'instance I' de *Max k - Sat* suivante :

$$\begin{aligned} I' &= (X', C') \\ \text{avec} \quad X' &= X \cup Y \\ \text{et} \quad C' &= C \cup D, \quad D = (X \cup \overline{X}) \times \mathcal{P}_{k-1}(Y \cup \overline{Y}). \end{aligned}$$

I' est ainsi constituée de $2n$ variables et de $m + \Theta(n^{k-1})$ clauses ; chaque variable x_i apparaît dans au moins $2|\mathcal{P}_{k-1}(Y \cup \overline{Y})| = \Theta(n^{k-1})$ clauses et chaque variable y_i dans exactement $2n \times 2|\mathcal{P}_{k-2}((Y \setminus \{y_i\}) \cup (\overline{Y} \setminus \{\bar{y}_i\}))| = \Theta(n^{k-1})$ clauses : l'instance, construite en temps polynomial en $\max\{n, m\}$, est donc à la fois dense et dense en moyenne ($|C'| \geq \Theta(n^k)$). Considérons maintenant une affectation T' des valeurs de vérité sur X' et l'ensemble de clauses D ; T' satisfera toujours toutes les clauses de D , sauf les clauses formées sur les n littéraux faux de $X \cup \overline{X}$ et les n littéraux faux de $Y \cup \overline{Y}$: telle que D est construite, cela concerne $n \times C_n^{k-1}$ clauses. Ainsi, toute affectation T' sur X' satisfera exactement $K = |D| - n \times C_n^{k-1}$ clauses de D . On en déduit de cette observation les relations suivantes :

$$\forall (T, T') \in \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^{2n} / T|_X = T, \quad m_{Sat}(I', T') = m_{Sat}(C, T') + K = m_{Sat}(I, T) + K.$$

Cette propriété étant l'expression du fait que seules les variables de X sont pertinentes sur I' , et ce seulement pour la satisfaction des clauses de C , elle nous assure, plus que la simple affinité de la réduction, que toute extension T' d'un optimum h -local T sur I sera optimum h -local sur X' , et ce quelle que soit la constante h considérée : la $G[\delta](1, h)$ -réduction est vérifiée.

(ii) Soit $I = (X, C)$ une instance de *Max Dense k - Sat* à $|C| = m$ clauses et $|X| = n$ variables ; nous savons la transformer en une instance de *Max E - k - Sat* de sorte à préserver l'approximation différentielle et les optima locaux (cf. paragraphe 6.1.1), mais la densité ? Reprenons la construction proposée alors et agrémentons la de quelques clauses supplémentaires. On introduit de nouveau un ensemble de variables $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ de même taille que X , et à chaque clause $c_i = (\ell_1, \dots, \ell_p)$ de C d'au plus k littéraux, on associe l'ensemble C_i de clauses suivant, qui consiste à compléter c_i de toutes les façons possibles à partir des $k - p$ premier littéraux de Y et \overline{Y} :

$$\forall i = 1, \dots, m, \quad C_i = c_i \times \mathcal{P}_{k-p}(\{y_1, \dots, y_{k-p}\} \cup \{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{k-p}\}).$$

À une clause c_i de taille $p \leq k$, on aura ainsi associé $|P^{k-p}(\{y_1, \dots, y_{k-p}\} \cup \{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{k-p}\})| = 2^{k-p}$ clauses. Sur chacune de ces familles C_i , une affectation T' des valeurs de vérité T' sur

$X \cup \{y_1, \dots, y_k\}$ vérifiera toutes ses clauses, sauf peut-être une si T' ne satisfait pas c_i : supposons par exemple que T' affecte à 0 les variables y_1, \dots, y_k , de toutes les combinaisons des littéraux $y_1, \dots, y_k, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k$, la seule rendue fautive par T' sera (y_1, \dots, y_k) , toute autre combinaison comportant au moins une négation ; ainsi, la clause $c_i \cup \{y_1, \dots, y_k\}$ sera satisfaite si et seulement si T' satisfait c_i . Notons $D = \bigcup_{i=1}^m C_i$ l'union de ces clauses et $K = |D| - m$, la réflexion précédente nous inspire la relation :

$$\forall (T, T') \in \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^{n+k} / T|_X = T, \quad m_{Sat}(D, T') = m_{Sat}(I, T) + K.$$

Nous avons *régularisé* la taille des clauses, il faut maintenant *densifier* ; pour ce, on introduit toutes les clauses de taille k possible que l'on peut former sur les littéraux de $Y \cup \bar{Y}$, ce qui conduit à considérer l'instance I' de $Max E - k - Sat$ suivante :

$$\begin{aligned} I' = (X', C') \quad \text{avec} \quad X' = X \cup Y \quad \text{et} \quad C' = D \cup E, \quad E = \mathcal{P}_k(Y \cup \bar{Y}) \\ \Rightarrow \quad |X'| = 2n \quad |C'| = |D| + |E|, \quad |D| \leq m \times 2^{k-1}, \quad |E| = \Theta(n^k). \end{aligned}$$

La construction est bien polynomiale en la taille $\max\{n, m\}$ de l'instance initiale, la taille de l'ensemble C' de clauses considéré étant d'ordre $\Theta(m + n^k)$. De plus, il s'agit d'une instance de $Max E - k - Sat$ dense et dense en moyenne, chaque variable y_i apparaissant dans $|\mathcal{P}_{k-1}(Y \setminus \{y_i\} \cup \bar{Y} \setminus \{\bar{y}_i\})| = \Theta(n^{k-1})$ clauses (*on rappelle que* $\Theta(n^r) = \Theta((2n)^r)$). Toute affectation des variables de l'ensemble Y satisfera exactement $|E| - C_{2n}^k$ clauses de E (*toutes les clauses de E , sauf celles formées sur les littéraux de $Y \cup \bar{Y}$ rendus faux par l'affectation considérée*). Ainsi, si on note $K' = K + |E| - C_{2n}^k$, les valeurs des solutions sur les instances I et I' sont liées par la relation affine :

$$\forall (T, T') \in \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^{2n} / T|_X = T, \quad m_{Sat}(I', T') = m_{Sat}(I, T) + K'.$$

Cette réduction affine préserve-t-elle les optima locaux relativement à une fonction voisinage \mathcal{V} donnée ? Soit T une solution de I optimale sur $\mathcal{V}(I, T)$, nous prétendons qu'alors toute extension T' de T aux variables de l'ensemble Y est également optimale sur $\mathcal{V}(I', T')$. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que seule l'affectation des variables de X a une incidence sur la valeur d'une solution de I' : si S' est voisine de T' au sens de \mathcal{V} , la restriction S de S' à X est a fortiori voisine de T au sens de \mathcal{V} ; si on note \tilde{S} l'extension de S aux variables de l'ensemble Y qui coïncide avec T' ($\tilde{S}|_Y = \tilde{T}|_Y$), de l'optimalité locale de T ($m_{Sat}(I, T) \geq m_{Sat}(I, S)$) et de la relation affine liant les instances I et I' ($m_{Sat}(I, T) - m_{Sat}(I, S) = m_{Sat}(I', T') - m_{Sat}(I', \tilde{S})$), on conclut alors $m_{Sat}(I', S') = m_{Sat}(I', \tilde{S}) \leq m_{Sat}(I', T')$. La $G[\delta](1, h)$ -réduction est établie \diamond

Les mêmes transformations permettent d'établir ces équivalences :

Corollaire 7.16.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{lll} & \text{Min } k - \text{Sat} & \xrightarrow{G[\delta]_{\infty}^{(1,h)}} \text{Min Dense } k - \text{Sat} \\ \text{et} & \text{Min Dense } k - \text{Sat} & \xrightarrow{G[\delta]_{\infty}^{(1,h)}} \text{Min Dense } E - k - \text{Sat} \\ & \text{Max } k - \text{CCSP} & \xrightarrow{G[\delta]_{\infty}^{(1,h)}} \text{Max Dense } k - \text{CCSP} \\ \text{et} & \text{Max Dense } k - \text{CCSP} & \xrightarrow{G[\delta]_{\infty}^{(1,h)}} \text{Max Dense } E - k - \text{CCSP} \\ & \text{Min } k - \text{CCSP} & \xrightarrow{G[\delta]_{\infty}^{(1,h)}} \text{Min Dense } k - \text{CCSP} \\ \text{et} & \text{Min Dense } k - \text{CCSP} & \xrightarrow{G[\delta]_{\infty}^{(1,h)}} \text{Min Dense } E - k - \text{CCSP}. \end{array} \right.$$

Proposition 7.17.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{lll} \text{Min } k - \text{LIN2} & \xrightarrow{G[\delta]_{\infty}^{(1,h)}} & \text{Min Dense } k - \text{LIN2} \\ \text{Max } k - \text{LIN2} & \xrightarrow{G[\delta]_{\infty}^{(1,h)}} & \text{Max Dense } k - \text{LIN2} \end{array} \right.$$

Preuve : inspirée de [15].

Soit $I = (X, E)$ une instance de $\text{Max } k - \text{LIN2}$ composée de $|E| = m$ équations sur $|X| = n$ variables binaires, on *densifie* I en introduisant, une fois encore, un ensemble $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ de variables de même taille que X , ainsi que l'ensemble F d'équations défini par :

$$\forall i = 1, \dots, n, \forall J = \{j_1, \dots, j_{k-1}\} \subseteq \{1, \dots, n\}, \\ x_i \oplus y_{j_1} \oplus \dots \oplus y_{j_{k-1}} = 1 \in F \text{ et } x_i \oplus y_{j_1} \oplus \dots \oplus y_{j_{k-1}} = 0 \in F.$$

On a ainsi crée $|F'| = 2nC_n^{k-1} = \Theta(n^k)$ équations, dont exactement une sur deux sera vérifiée pour toute affectation des variables de X et de Y . F' fait intervenir chaque x_i dans $2C_n^{k-1} = \Theta(n^{k-1})$ équations et chaque variable y_j dans $2nC_n^{k-2} = \Theta(n^{k-1})$ équations : l'instance $I' = (X', E')$ définie par $X' = X \cup Y$ et $E' = E \cup F$ est dans à la fois dense et dens en moyenne. De plus, toute solution T de I' vérifie $nC_n^{k-1} + m_{\text{LIN2}}(I, T)$ équations : les valeurs des solutions d'une instance à l'autre sont conservées à un facteur constant près, et les optima locaux sur I sont transformés en optima locaux sur I' par n'importe quelle extension de l'affectation aux variables de l'ensemble Y , la valeur d'une solution sur I' dépendant exclusivement de la performance réalisée par l'affectation des variables de X sur l'ensemble E des équations originelles : il s'agit clairement d'une réduction polynomiale qui préserve la qualité des optima locaux, pour toute structure de voisinage, relativement à la mesure différentielle. On remarquera que si l'instance antécédent I est une instance de

$E - k - Lin2$ (composée d'équations sur exactement k arguments), il en sera de même de l'instance image $I' \diamond$

Proposition 7.18.

$$Min EQ \stackrel{G[\delta](1,h)}{\propto} Min Dense EQ \text{ et } Max EQ \stackrel{G[\delta](1,h)}{\propto} Max Dense EQ$$

Preuve: de façon semblable aux preuves précédentes, la réduction que nous concevons consiste à “grossir” l'instance initiale par l'introduction de nouvelles variables et relations.

Soit $I = (X, E)$ une instance de $Min EQ$ composée de $|E| = m$ équivalences sur $|X| = n$ variables binaires, on *densifie* I en introduisant, une fois dernière, l'ensemble $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ de variables de même taille que X , couplé de l'ensemble F d'équivalences défini par :

$$\forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, n, x_i \equiv y_j \in F \text{ et } x_i \equiv \bar{y}_j \in F.$$

F est constitué de $2n^2 = \Theta(n^2)$ équivalences qui font intervenir chaque variable x_i , chaque variable y_j , $2n = \Theta(n)$ fois chacune. L'instance $I' = (X', E')$, $X' = X \cup Y$, $E' = E \cup F$ ainsi construite, en temps évidemment polynomial en $\max\{m, n\}$, est bien dense et dense en moyenne. Il est par ailleurs facile de constater que tout couple (T, T') de solutions sur I et I' qui coïncident sur X vérifie la relation : $m_{EQ}(I', T') = m_{EQ}(I, T) + n^2$, toute affectation T' sur X' satisfaisant toujours exactement n^2 équivalences de F . Cette dernière réflexion suffit à se convaincre que la réduction proposée préserve les optima locaux et leur qualité différentielle, soit qu'elle est une $G[\delta](1, h)$ -réduction \diamond

Théorème 7.19. *Les problèmes suivants, dans leurs version maximisation comme minimisation, mêmes restreints à leurs ensembles d'instances denses, n'admettent pas de schéma d'approximation polynomiale différentiel à moins que P n'égale NP :*

$$E - k - Sat \ \forall k \geq 2, \quad E - k - CCSP \ \forall k \geq 2, \quad k - LIN2 \ \forall k \geq 2 \quad \text{et} \quad EQ.$$

Preuve: d'après les propositions 7.15, 7.17 et 7.18, pour chacun de ces problèmes, un schéma différentiel sur les instances denses induirait un schéma différentiel sur le problème général, dont on pourrait déduire par le biais de leur version *maximisation* un schéma classique d'approximation, ce qui ne peut être s'agissant de problèmes APX -difficiles, à moins que P et NP ne coïncident \diamond

7.3 Conclusion

Les réductions proposées dans ce chapitre ne nous ont pas permis de déduire du problème auquel on se réduit de qualité d'approximation intéressante des optima locaux du problème initial ; inversement, nous n'avons pas été en mesure de déduire le mauvais comportement des optima locaux de l'instance image d'un mauvais comportement connu des optima locaux de l'instance initiale ; cela s'explique simplement par le fait que nous n'avons pas, jusqu'ici, réussi à évaluer la qualité des optima locaux des problèmes concernés. Il serait cependant bon de le faire, nous pensons notamment à *Min RSSC* pour *Min SC*, *Max RIS* pour *Max CB* (avec des rapports d'approximation dépendant éventuellement de la taille de l'instance) dans l'espoir de résultats positifs, à *Min E - 2 - Sat* pour *Min W(1)EQ* dans l'hypothèse de résultats négatifs, à l'étude approfondie de problèmes comme *Min PB*, *Min EQ* et surtout *Max NAE - 2 - Sat* qui, comme problème *le plus simple* au sens de la réduction des problèmes de satisfaisabilité, nous donnerait une bonne idée de l'espoir que l'on pourrait nourrir d'approcher ou non de tels problèmes par leurs optima locaux en différentiel.

Néanmoins, profitons de l'occasion de cette conclusion pour présenter une synthèse des relations qu'entretiennent par *G*-réduction certains des problèmes que nous avons observés au cours de ce chapitre :

- (1) $Min EQ \stackrel{G(1,h)}{\propto} Min PB \stackrel{G(1,h)}{\propto} Min W[2] EQ$
- (2) $Max NAE k - Sat \stackrel{CG(1,h)}{\propto} Max k - Sat \stackrel{CG(1,h+1)}{\propto} Max NAE (k + 1) - Sat$
- (3) $Max Cut \stackrel{G[\delta](1,h)}{\leftrightarrow} Max Pos NAE E 2 - Sat$
- (4) $Max Cut \stackrel{G[\delta](1,h)}{\propto} Max NAE E 2 - Sat \stackrel{G[\delta](1,h)}{\propto} Max PB \stackrel{G[\delta](1,h)}{\propto} Max NAE W[2] 2 - Sat$

Le premier point provient des propositions 7.8 et 7.9, les points (3) et (4) de la proposition 7.14 ; pour la deuxième ligne, il faut juste revenir à la réduction proposée pour appuyer la proposition 7.11 pour se rendre compte qu'elle est, de par la forme des instances images de *Sat* produites, interprétable de la même façon aux sens de *GLO[R]* et *CGLO[R]*.

Concernant la densité, il faut peut-être juste remarquer que le rapport différentiel n'étant pas sensible à une transformation affine, il considère indifféremment les instances denses et non denses des problèmes du moment que la "*denseïfication*" de l'instance permet de conserver l'ordre relatif des solutions du problème initial ; or pour les problèmes de satisfaisabilité,

il semble *facile* d'introduire des variables et des clauses ou formules *indépendantes* de l'évaluation restreinte à l'ensemble initial de clauses ou formules qui nous intéresse en premier lieu.

Deuxième partie

Le problème du voyageur de commerce

Chapitre 8

Le voyageur de commerce

Sous le rapport différentiel, les sous-classes du problème de voyageur de commerce ne se comportent pas entre-elles comme avec le rapport classique : par exemple, la relative facilité du cas métrique par rapport au cas général n'est plus vraie ; qui plus est, les versions minimisation et maximisation deviennent totalement équivalentes.

Nous verrons dans ce chapitre les relations entre différentes familles de problèmes de voyageur de commerce d'une part et les deux mesures d'approximation d'autre part.

8.1 Équivalences sous le rapport différentiel

Une instance I du problème de voyageur de commerce est la donnée d'un graphe complet $G(V, E)$ à n sommets et d'une fonction $d : E \rightarrow \mathbb{N}$ de coût sur E . Le but est de trouver sur G un tour de valeur minimum ou maximum, le coût d'un tour étant donné par la somme du coût des arêtes qu'il traverse. Nous mettons en évidence certaines équivalences entre différentes versions du problème de voyageur de commerce basées sur des réductions affines particulières qui, d'une instance initiale à l'instance image, ne transforment que le coût des arêtes.

Soit \mathcal{K} une fonction qui à une instance I du voyageur de commerce associe le couple de réels $(k_I, K_I) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, on considère alors la réduction $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = (f_{\mathcal{K}}, Id_{Sol_{TSP}})$ définie par :

$$\forall I = (G, d) \in I_{TSP}, \quad \begin{cases} f_{\mathcal{K}}(I) = (G, d_{\mathcal{K}}) \text{ avec } d_{\mathcal{K}} = k_I d + K_I \\ Id_{Sol_{TSP}} \text{ fonction identité sur } Sol_{TSP}. \end{cases}$$

Si une réduction $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ entre deux versions Π et Π' du problème du voyageur de commerce vérifie

$$(\forall I \in I_{TSP}, k_I > 0 \wedge opt_{\Pi'} = opt_{\Pi}) \text{ ou } (\forall I \in I_{TSP}, k_I < 0 \wedge opt_{\Pi'} = \overline{opt}_{\Pi}),$$

alors elle est une réduction affine de Π à Π' . Effectivement, soit $I = (G, d)$ une instance de Π , tout tour s sur G vérifie :

$$m_{TSP}(f_{\mathcal{K}}(I), s) = \sum_{e \in s} d_{\mathcal{K}}(e) = \sum_{e \in s} (k_I d(e) + K_I) = k_I m_{TSP}(I, s) + n \times K_I.$$

Ainsi, nous montrons l'équivalence de différentes versions du problème de voyageur de commerce en explicitant simplement la fonction \mathcal{K} qui permet de passer d'une version à l'autre. Notons que ce cas particulier d'équivalence affine entre deux instances d'un problème valué qui ne se distinguent que par une transformation affine de leur fonction de valuation reste vraie de tout problème valué dont les solutions sont de taille constante (tels, par exemple, les problèmes de *chaîne hamiltonienne* et d'*arbre couvrant* dont les solutions sur un graphe à n sommets sont de taille $n - 1$).

8.1.1 Le cas métrique

Une instance (G, d) du problème de voyageur de commerce est une instance du cas métrique si les distances sur les arêtes vérifient l'inégalité triangulaire :

Définition 8.1. ΔTSP

$$(G, d) \in I_{\Delta TSP} \Leftrightarrow (G, d) \in I_{TSP} \wedge \forall (x, y, z) \in V, d(xy) + d(yz) \geq d(xz).$$

Proposition 8.1. Équivalence entre TSP et TSP métrique

$$Min TSP \stackrel{AF}{\Leftrightarrow} Min \Delta TSP \quad \text{et} \quad Max TSP \stackrel{AF}{\Leftrightarrow} Max \Delta TSP$$

Preuve

Considérons la fonction $\mathcal{K}_1 : (G, d) \mapsto (1, d_{max})$ où $d_{max} = \max_{e \in E} \{d(e)\}$; la réduction $\mathcal{R}_{\mathcal{K}_1}$ est une réduction du TSP général au TSP métrique puisque les instances construites vérifient bien l'inégalité triangulaire :

$$\forall i, j, k \in V, d_{\mathcal{K}}(ij) + d_{\mathcal{K}}(jk) = 2d_{max} + d(ij) + d(jk) \geq d_{\mathcal{K}}(ik) \quad \diamond$$

8.1.2 Ses acolytes

Si le TSP métrique vérifie l'inégalité triangulaire, deux nouvelles versions du problème de voyageur de commerce issues de ΔTSP la vérifient *presque* ou la vérifient *trop* : certains chercheurs ont introduit ces problèmes appelés *métrique stricte* et *métrique relaxé* en paramétrant simplement l'exigence d'inégalité triangulaire. Soit $\alpha > 0$ un rationnel, on ne demande

plus au système d de distances de vérifier pour trois sommets x , y et z du graphe considéré la relation $d(xz) \leq d(xy) + d(yz)$ mais $d(xz) \leq \alpha(d(xy) + d(yz))$. Si α est strictement inférieur à 1 (on le prendra alors dans l'intervalle $]1/2, 1[$ ¹), la relation est plus exigeante puisque l'inégalité devient stricte, et on note $\Delta_\alpha STSP$ (S pour *Stricte*) l'ensemble des instances dont les distances vérifient cette relation ; si en revanche α est strictement plus grand que 1, c'est que l'on relâche quelque peu la contrainte et l'on note alors $\Delta_\alpha RTSP$ (R pour *Relaxé*) l'ensemble des instances qui vérifient l'inégalité paramétrée. $\Delta_\alpha STSP$ étant le plus exigeant et $\Delta_\alpha RTSP$ le moins exigeant, on remarque que les instances des trois familles de problèmes ΔTSP , $\Delta_\alpha STSP$ et $\Delta_\alpha RTSP$ sont liées par la relation :

$$I_{\Delta_\alpha STSP} \subseteq I_{\Delta TSP} \subseteq I_{\Delta_\alpha RTSP}.$$

Aussi, tout résultat d'approximation pour le *TSP métrique relaxé* peut être transporté aux *TSP métrique stricte* et *métrique*, tout résultat d'approximation pour le *TSP métrique* peut être transporté aux *TSP métrique stricte*, et ce quelle que soit le type d'approximation considéré. Les versions *minimisation* de ces problèmes ont été étudiées et naturellement, le meilleur résultat classique d'approximation de la famille vaut pour la version stricte, avec un rapport de $1 - (2\alpha - 1)/(2 - \alpha)$ pour $\alpha \in [1/2, 2/3]$ et de $1 - 2\alpha/(3\alpha^2 + 1)$ pour $\alpha > 2/3$ [18], le second rapport est, nous l'avons déjà évoqué, de $2/3$ [25] pour la version classique, tandis que la version relaxée a été montrée approximable à $2/(3\alpha^2)$ [17]. Or, nous allons voir qu'une fois de plus, le rapport différentiel lisse les problèmes pour faire taire leurs divergences.

Proposition 8.2. Les problèmes $Min \Delta_\alpha RTSP$, $Min \Delta TSP$ et $Min \Delta_\alpha STSP$ d'une part, $Max \Delta_\alpha RTSP$, $Max \Delta TSP$ et $Max \Delta_\alpha STSP$ d'autre part, sont équivalents du point de vue de leur approximation différentielle.

Preuve : nous montrons les deux séries de réductions affines

$$\begin{array}{l} Min \Delta_\alpha RTSP \xrightarrow{AF} Min \Delta TSP \xrightarrow{AF} Min \Delta_\alpha STSP, \\ Max \Delta_\alpha RTSP \xrightarrow{AF} Max \Delta TSP \xrightarrow{AF} Max \Delta_\alpha STSP. \end{array}$$

Le principe reste le même, il consiste à transformer le jeu de distances d en un jeu d' par une transformation affine. De $\Delta_\alpha RTSP$ à ΔTSP pour commencer, il s'agit de trouver une transformation telle que les distances d et d' vérifient :

$$d(xz) \leq \alpha(d(xy) + d(yz)) \Rightarrow d'(xz) \leq d'(xy) + d'(yz).$$

1. pour $\alpha = 1/2$, la seule valuation possible consiste à mettre le valuer identiquement toutes les arêtes

Tentons l'expérience avec d' défini comme étant, sur chaque arête e , la somme de la distance initiale $d(e)$ et d'une constante k , à déterminer ; ainsi $d'(xz) \leq d'(xy) + d'(yz) \Leftrightarrow d(xz) + k \leq d(xy) + d(yz) + 2k$. Nous voulons donc pouvoir déduire de la relation $d(x, z) \leq \alpha(d(xy) + d(yz))$ l'inégalité $d(xz) \leq d(xy) + d(yz) + k$, ce que nous permettrait de faire la relation $\alpha(d(xy) + d(yz)) \leq d(xy) + d(yz) + k$. Ainsi k doit vérifier pour tout triplet $\{x, y, z\}$:

$$k \geq (\alpha - 1)(d(xy) + d(yz)).$$

En posant $k = 2(\alpha - 1)d_{max}$, on est assuré du résultat.

De ΔTSP à $\Delta_\alpha STSP$ à présent : selon le même principe, nous cherchons une constante h telle que la relation $d(x, z) \leq d(xy) + d(yz)$ induise l'inégalité :

$$d'(xz) \leq \alpha(d'(xy) + d'(yz)) \Leftrightarrow d(xz) + h \leq \alpha(d(xy) + d(yz) + 2h).$$

Cela consiste à demander

$$d(xy) + d(yz) \leq \alpha(d(xy) + d(yz)) + 2h\alpha - h \Leftrightarrow d(xy) + d(yz)(1 - \alpha) \leq h(2\alpha - 1).$$

En posant $h = 2d_{max}(1 - \alpha)/(2\alpha - 1)$, on obtient bien ce que l'on cherchait \diamond

8.1.3 Le cas bivalué

Pour les problèmes de type $(TSPab \ a < b)$, les arêtes du graphes ne peuvent prendre que les valeurs a et b . Dans le cadre du rapport différentiel, tous les problèmes de voyageur de commerce bivalués se ramènent au cas $TSP12$ pour lequel le parcours d'une arête coûte soit 1, soit 2. En classique, ce cas particulier du cas métrique a fait l'objet de nombreuses études.

Proposition 8.3.

$$Min TSPab \stackrel{AF}{\leftrightarrow} Min TSP12 \quad \text{et} \quad Max TSPab \stackrel{AF}{\leftrightarrow} Max TSP12$$

Preuve : évident avec la transformation $\mathcal{K}_2 : (G, d) \mapsto (\frac{1}{b-a}, \frac{b-2a}{b-a}) \diamond$

8.1.4 Le cas général

Désignons par $TSP1$ la restriction du problème de voyageur de commerce aux instances pour lesquelles $d_{min} = \min_{e \in E} \{d(e)\} = 1$; la proposition suivante, en établissant l'équivalence entre $Min TSP$ (*resp.* $Max TSP$) et $Min TSP1$ (*resp.* $Max TSP1$), nous permettra

de toujours supposer $d_{min} = 1$.

Proposition 8.4.

$$MinTSP \stackrel{AF}{\leftrightarrow} MinTSP1 \quad \text{et} \quad MaxTSP \stackrel{AF}{\leftrightarrow} MaxTSP1$$

Preuve : considérer $\mathcal{K}_3 : (G, d) \mapsto (1, 1 - d_{min})$ où $d_{min} = \min_{e \in E} \{d(e)\}$ \diamond

Proposition 8.5.

$$MinTSP \stackrel{AF}{\leftrightarrow} MaxTSP \quad \text{et} \quad MinTSPab \stackrel{AF}{\leftrightarrow} MaxTSPab.$$

Preuve : avec $\mathcal{K}_4 : (G, d) \mapsto (-1, d_{min} + d_{max})$ \diamond

8.1.5 Du TSP classique au TSP différentiel

Comme pour tout problème de maximisation, si une solution réalise un certain rapport différentiel r , alors elle réalise un rapport classique d'au moins r , le rapport différentiel étant dans le cas $opt_{\Pi} = \max$ fonction décroissante de $\omega_{\Pi}(I)$:

$$\forall \Pi \in NPO, \forall I \in I_{\Pi}, \omega_{\Pi}(I) \geq 0 \Rightarrow \forall s \in Sol_{\Pi}(I), \delta_{\Pi}(I, s) \leq \rho_{\Pi}(I, s).$$

Ce que inspire la proposition suivante :

Proposition 8.6. Soit Π un problème de maximisation de NPO , on a pour tout algorithme \mathcal{A} approché pour Π la relation :

$$\rho_{\Pi}^{\mathcal{A}} \geq \delta_{\Pi}^{\mathcal{A}}.$$

En particulier, \mathcal{A} PTAA pour $MaxTSP \Rightarrow \rho_{MaxTSP}^{\mathcal{A}} \geq \delta_{MaxTSP}^{\mathcal{A}}$.

Plus générale que $TSPab$, la restriction non plus au doublon $\{a, b\}$ mais à tout l'ensemble $\{a, a+1, \dots, b\}$ notée $TSP[a, b]$ permet, par des encadrements bien que naïfs des valeurs $\beta(I)$ et $\omega(I)$, de déduire des résultats de la mesure différentielle à la mesure classique de façon un peu plus fine. Soit \mathcal{A} un PTAA quelconque, on déduit d'un rapport différentiel constant r les rapports classiques suivants pour $MaxTSP[a, b]$ et $MinTSP[a, b]$:

$$MaxTSP[a, b] : \lambda_{\mathcal{A}}(I) \geq r\beta(I) + (1-r)\omega(I) \Leftrightarrow \frac{\lambda_{\mathcal{A}}(I)}{\beta(I)} \geq r + (1-r)\frac{\omega(I)}{\beta(I)} \geq r + (1-r)\frac{a}{b}$$

$$MinTSP[a, b] : \lambda_{\mathcal{A}}(I) \leq r\beta(I) + (1-r)\omega(I) \Leftrightarrow \frac{\lambda_{\mathcal{A}}(I)}{\beta(I)} \leq r + (1-r)\frac{\omega(I)}{\beta(I)} \leq r + (1-r)\frac{b}{a}.$$

Cependant, ces relations entrent dans le cadre plus général des problèmes pour lesquels le rapport de la pire à la meilleure solution est borné par une constante strictement positive (le lecteur est invité à se référer aux preuves des propositions 3.11).

Proposition 8.7. Soient Π un problème de maximisation de *NPO* et \mathcal{A} un algorithme approché pour Π , on a pour toute constante $\alpha \in [0, 1[$:

$$\forall I \in I_{\Pi}, \frac{\omega_{\Pi}(I)}{\beta_{\Pi}(I)} \geq \alpha \Rightarrow \rho_{\Pi}^{\mathcal{A}} \geq \delta_{\Pi}^{\mathcal{A}} + \alpha(1 - \delta_{\Pi}^{\mathcal{A}}).$$

Pour $\alpha = 0$, on revient à la proposition précédente.

$$\text{En particulier, } \mathcal{A} \text{ PTAA pour } TSP[a, b] \Rightarrow \rho_{\Pi}^{\mathcal{A}} \geq \delta_{\Pi}^{\mathcal{A}} + \frac{a}{b}(1 - \delta_{\Pi}^{\mathcal{A}}).$$

Proposition 8.8. Soient Π un problème de minimisation de *NPO* et \mathcal{A} un algorithme approché pour Π , les rapports classique et différentiel vérifient la relation suivante :

$$\exists \alpha \in]0, 1[/ \forall I \in I_{\Pi}, \frac{\beta_{\Pi}(I)}{\omega_{\Pi}(I)} \geq \alpha \Rightarrow \frac{1}{\rho_{\Pi}^{\mathcal{A}}} \leq \delta_{\Pi}^{\mathcal{A}} + \frac{1}{\alpha}(1 - \delta_{\Pi}^{\mathcal{A}}).$$

$$\text{En particulier, } \mathcal{A} \text{ PTAA pour } TSP[a, b] \Rightarrow \frac{1}{\rho_{\Pi}^{\mathcal{A}}} \leq \delta_{\Pi}^{\mathcal{A}} + \frac{b}{a}(1 - \delta_{\Pi}^{\mathcal{A}}).$$

En application directe de cette relation entre rapports classique et différentiel, on déduit du résultat négatif proposé dans [73] stipulant qu'on ne peut approximer $MinTSP[1, 10]$ à mieux de $128/129$ à moins que $P = NP$ qu'il n'est pas possible d'approcher en différentiel ce même problème à moins de $1151/1152$. Par équivalence affine, ce résultat vaut pour toute restriction des problèmes $MinTSP$ et $MaxTSP$ à des poids contenus dans des intervalles du type $[a, a + 9]$ pour tout entier a . Par ailleurs, si l'on se restreint à l'intervalle $[a, 2a]$, qui pour a suffisamment grand permet de refléter des cas pratiques, les optima locaux définis par le voisinage $2opt$ sont non seulement déterminés en temps polynomial, mais de plus assurent comme cela est montré au paragraphe 4.2 un rapport différentiel de $1/2$ qui, en approximation classique, revient à un rapport de $2/3$, meilleure approximation connue jusqu'ici pour TSP métrique. Enfin, cette correspondance entre les deux rapports nous permettra dans le cas bivalent $MaxTSPab$ de déduire un rapport classique de $7/8$ à partir de l'approximation différentielle de $3/4$ proposée au chapitre suivant. Ces relations ne présentent cependant pas grand intérêt du fait de la perte de performance due à la différence d'information prise en compte dans chacun des deux cadres d'approximation : il est intéressant de déterminer des résultats pour chacun de ces rapports, par des algorithmes et des analyses spécifiques, mais la transposition de résultats de l'un à l'autre permet tout au plus la comparaison de ceux-ci, pour autant que l'on soit assuré de la pertinence d'une telle démarche.

8.2 Résultats d'approximation

8.2.1 Approximation différentielle du cas général à $1/2$

Nous l'avons vu en 4.2, les optima locaux pour le voisinage $2 - opt$ garantissent un rapport $1/2$; cela nous offre une $1/2$ -approximation polynomiale du problème pour le rapport différentiel, à condition que l'algorithme de recherche locale s'arrête effectivement de façon certaine en temps polynomial. C'est notamment vrai dans le cas d'un optimum d'ordre polynomial puisqu'on peut alors se placer à distance polynomiale de l'optimum grâce, par exemple, à l'algorithme de Christofides [25] et dans celui d'un nombre polynomial de valeurs possibles pour les tours du graphe. Ce dernier cas n'est malheureusement pas vérifiable en temps polynomial ; notons tout de même deux circonstances favorables : disposer de distances bornées (d_{max} d'ordre polynomial) ou d'un nombre limité par une constante de valuations distinctes sur les arêtes.

Les cas de déroulement polynomial d'un algorithme de recherche locale sont certainement plus vastes que la seule borne à des poids polynomialement bornés ; cependant, il est à noter que la détermination d'optima locaux par le voisinage $6 - opt$ est exponentielle (indépendamment de la façon dont on choisit les solutions voisines améliorantes à chaque itération) (par un résultat de *PLS-complétude*, [66] et [82]) ; pour $k = 2$ ou $k = 3$, la preuve du déroulement exponentiel des *LSA* n'a pas (du moins à notre connaissance) été faite, mais le fait semble fort probable. Lueker [67] est tout de même parvenu à construire des instances du *TSP* métrique pour lesquelles le voisinage $2 - opt$, pour une certaine règle de choix du meilleur voisin à chaque itération, ne permettait pas d'atteindre un optimum local en moins d'un nombre exponentiel d'itérations. Un autre résultat de Fischer stipule que le problème de décision suivant : “*étant données une instance I de $MinTSP$, un tour T_0 de $Sol_{TSP}(I)$ et une constante $z \in \mathbb{N}$, peut-on déterminer un optimum local relativement au voisinage $2 - opt$ en moins de z itérations ?*” est *NP-complet* ; or, il consiste simplement à demander si T_0 est de hauteur au plus z dans le graphe de transition. Remarquons que ça n'est d'ailleurs pas parce qu'un tel chemin existe que l'algorithme de recherche locale fera les choix qui le mèneront sur ce chemin.

Le rapport d'approximation de l'algorithme $2 - opt$ en mesure différentielle est exactement $1/2$ puisque cette borne est atteinte pour la famille d'instances $(I_p)_{p \geq 2}$ définie par (*on reprend les notations déjà introduites aux paragraphes 3.1.2 et 4.2*) :

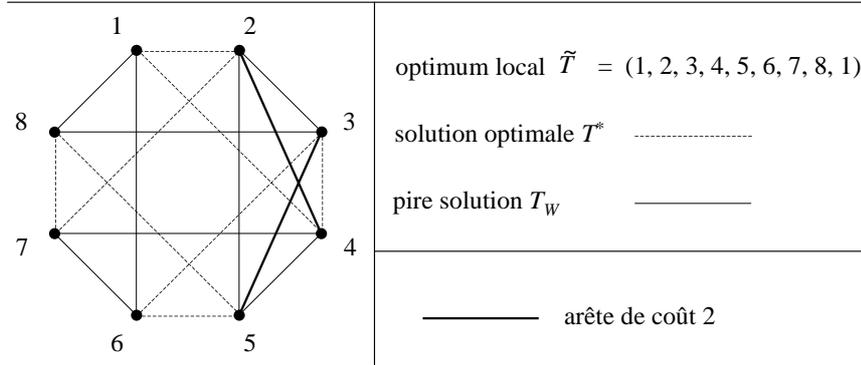


FIG. 8.1: Instance limite pour 2-opt

$\forall p \geq 1$, $I_p = (K_{4p}, d_p)$ avec pour arêtes de poids 1

$$T^* = \bigcup_{i=0}^{i=2p-1} \{[2i+2, 2i+1]\} \bigcup_{i=0}^{i=2p-2} \{[2i+1, 2i+4]\} \cup \{[4p-1, 2]\},$$

toutes les autres arêtes étant de poids 2 (K_n désigne un graphe complet à n sommets).

On voit facilement que l'ensemble des arêtes de poids 1 forme pour toute valeur de p un tour réalisable : c'est l'unique solution optimale de valeur $\beta(I_p) = 4p$. Par ailleurs, en prenant par exemple le tour

$$T_W = \bigcup_{i=1}^{i=2p-1} \{[2i, 2i+1]\} \cup \{[4p, 1]\} \bigcup_{i=1}^{i=2p-2} \{[2i, 2i+3]\} \cup \{[4p-2, 1]\} \cup \{[4p, 3]\},$$

on obtient une pire solution de valeur $\omega(I_p) = 8p$. Enfin, la solution $\tilde{T}_p = \{1, 2, \dots, 4p, 1\}$ alterne arêtes de poids 1 et arêtes de poids 2 : c'est un optimum local de valeur $m_{TSP}(I_p, \tilde{T}_p) = 6p$ (cf. figure 8.1).

Effectivement, considérons deux arêtes non adjacentes, l'une $[2i+1, 2i+2]$ de poids 1 et l'autre $[2j, 2j+1]$ de poids 2 ; échanger ces deux arêtes contre les arêtes $[2i+1, 2j]$ et $[2i+1, 2j+2]$ ne nous apporterait rien puisqu'au moins l'une de ces deux arêtes est de poids 2 : $d(2i+1, 2j) = 1 \Leftrightarrow j = i+1$ ou $j = i+2$ et $d(2j+1, 2i+2) = 1 \Leftrightarrow i = j+1$ ou $i = j+2$! De même, deux arêtes de poids 2 $[2i, 2i+1]$ et $[2j, 2j+1]$ ne peuvent faire l'objet d'un échange bénéfique puisque toute arête reliant des sommets de même parité est de poids 2.

Les solutions $(\tilde{T}_p)_{p \geq 2}$ constituent ainsi une suite d'optima locaux pour le voisinage 2-opt qui réalisent un rapport différentiel d'exactlyment 1/2 :

$$\delta(I_p, \tilde{T}_p) = \frac{\omega(I_p) - m_{TSP}(I_p, \tilde{T}_p)}{\omega(I_p) - \beta(I_p)} = \frac{8p - 6p}{8p - 4p} = \frac{1}{2}.$$

8.2.2 Approximation des cas *stricte* et *relaxé métriques*

Nous proposons quelques résultats d'approximation, classique et différentiel, pour la version *maximisation* des cas *métrique stricte* et *métrique relaxé* du problème de voyageur de commerce. Effectivement, autant la version *minimisation* de ces problèmes a fait l'objet d'études productives (notamment dans [5], [20], [17] pour $Min \Delta_\alpha RTSP$, [18] pour $Min \Delta_\alpha STSP$), autant la version *maximisation*, à notre connaissance, n'a dès lors pas été explorée.

Théorème 8.9. *Si un algorithme \mathcal{A} garantit un rapport classique $r > 0$ pour $Max \Delta TSP$, alors $Max \Delta_\alpha STSP$ est approximable, toujours en classique, à $r + (1 - r)[(1 - \alpha)/\alpha]^2$.*

Preuve

Soit $I = (G, d)$ une instance de $Max \Delta_\alpha STSP$, on lui associe l'instance $I' = (G, d')$ de $Max \Delta TSP$ en posant, pour toute arête e du graphe G , $d'(e) = d(e) - 2(1 - \alpha)d_{min}$; la plus petite distance sur I' est alors $d'_{min} = d_{min} - 2(1 - \alpha)d_{min} = (2\alpha - 1)d_{min}$. Le système de distances d' vérifie bien l'inégalité triangulaire pour tout trio de sommets x, y et z :

$$\begin{aligned} d(xz) \leq \alpha[d(xy) + d(yz)] &\Leftrightarrow d'(xz) + 2(1 - \alpha)d_{min} \leq \alpha[d'(xy) + d'(yz) + 4(1 - \alpha)d_{min}] \\ &\Leftrightarrow d'(xz) \leq \alpha[d'(xy) + d'(yz)] + (1 - \alpha)d_{min}(4\alpha - 2) \\ &\Leftrightarrow d'(xz) \leq \alpha[d'(xy) + d'(yz)] + (1 - \alpha)[d'_{min} + d'_{min}] \\ &\Rightarrow d'(xz) \leq d'(xy) + d'(yz). \end{aligned}$$

Pour plus de clareté, on note pour un tour T sur G respectivement $d(T)$ et $d'(T)$ sa valeur sur I et I' , et respectivement β et β' les valeurs optimales sur I et I' ; ces valeurs, d'une instance à l'autre, sont naturellement liées par la relation affine :

$$\forall T \text{ tour, } d'(T) = d(T) - 2n(1 - \alpha)d_{min} \Rightarrow \beta' = \beta - 2n(1 - \alpha)d_{min}.$$

Soit T un tour qui soit sur I' d'un rapport constant r à l'optimum, on écrit :

$$\begin{aligned} d'(T) \geq r\beta' &\Leftrightarrow d(T) - 2n(1 - \alpha)d_{min} \geq r[\beta - 2n(1 - \alpha)d_{min}] \\ &\Leftrightarrow d(T) \geq r\beta + (1 - r)2n(1 - \alpha)d_{min}. \end{aligned}$$

Or, il est prouvé dans [18] que les distances d'une instance de $\Delta_\alpha STSP$ vérifient toujours :

$$d_{min} \geq \frac{1 - \alpha}{2\alpha^2} d_{max}.$$

Sachant que l'optimum β sur I ne pourra jamais excéder nd_{max} , on conclut :

$$d(T) \geq r\beta + (1-r)n \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 d_{max} \geq r\beta + (1-r) \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 \beta \diamond$$

Corollaire 8.10. *Max Δ_α STSP est approximable à $3/4 + 1/4[(1-\alpha)/\alpha]^2$ pour le rapport classique.*

Preuve : directe d'après le résultat précédent et l'approximation à $3/4$ de *Max Δ TSP* proposée dans [78].

Corollaire 8.11. *Max Δ_α RTSP est approximable à $1/2$ pour le rapport classique.*

Preuve : l'approximation différentielle à $1/2$ que nous proposons pour *Max TSP* restant valide dans le cas particulier *métrique relaxé*, il suffit alors de rappeler que l'approximation différentielle assure toujours pour les problèmes de *maximisation* le même niveau d'approximation classique.

8.2.3 Le TSP aujourd'hui

Nous l'avons déjà dit, la version minimisation du problème de voyageur de commerce est *NPO-complet* (au sens d'une réduction préservant l'approximation à rapport constant) [72], et donc non approximable à rapport constant à moins que $P = NP$. En revanche, le cas métrique dans le cadre duquel les distances vérifient l'inégalité triangulaire est approximable à $3/2$ [25] et on ne peut l'approximer à moins de $41/40 - \varepsilon$ pour aucun ε strictement positif dans le cas asymétrique, à moins de $129/128 - \varepsilon$ dans le cas symétrique [73]. Dans [75], il est prouvé que la restriction de ce dernier cas aux distances 1 et 2 est *APX-complet*, approximable à $7/6$; on ne peut cependant pas l'approcher à mieux de $5381/5380$ [36]. Si les distances sont asymétriques, *Min TSP12* est approximable à $17/12$ [81] mais on ne peut atteindre $2805/2804 - \varepsilon$ pour aucun ε strictement positif [36]. Enfin, même si on se réduit aux graphes denses, *Min TSP12* n'admet pas de PTAS [38]; il faut effectivement passer au cas géométrique pour lequel la fonction de distance sur les arêtes est la distance euclidienne pour obtenir un schéma d'approximation : *Min Euclidean TSP* \in PTAS [7]. Plus facile du point de vue de l'approximation classique, la version maximisation est approximable à rapport constant de $3/4$ [78] pour le cas non orienté, $38/63$ dans le cas orienté [65].

Pour plus de précisions encore ou pour des résultats plus récents, consulter à l'adresse <http://www.nada.kth.se/~viggo/problemlist/> le compendium édité par Crescenzi et Kann.

8.3 Récapitulatif des principaux résultats

Tout d'abord, les équivalences affines : en rapprochant les problèmes deux à deux par réductions affines, nous avons établi l'équivalence, du point de vue de leur degré d'approximation différentielle, de nombreuses versions du problème de voyageur de commerce qu'il est temps de mettre à jour maintenant.

Théorème 8.12. *Problème général, TSP métrique*

Les problèmes et familles de problèmes $MinTSP$, $MaxTSP$, $MinTSP1$, $MaxTSP1$, $Min\Delta_\alpha RTSP$, $Max\Delta_\alpha RTSP$, $Min\Delta TSP$, $Max\Delta TSP$, $Min\Delta_\alpha STSP$, et $Max\Delta_\alpha STSP$ sont tous totalement équivalents quant à leur degré d'approximation différentielle.

Preuve - Il suffit de suivre le chemin indiqué par les équivalences affines proposées au paragraphe 8.1 :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & Min\Delta_\alpha STSP & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 MinTSP1 & \leftrightarrow & MinTSP & \leftrightarrow & Min\Delta TSP & \leftrightarrow & Min\Delta_\alpha RTSP \\
 \downarrow & & & & & & \\
 MaxTSP1 & \leftrightarrow & MaxTSP & \leftrightarrow & Max\Delta TSP & \leftrightarrow & Max\Delta_\alpha RTSP. \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & Max\Delta_\alpha STSP & &
 \end{array}$$

Théorème 8.13. *Problèmes bivalents*

Les problèmes et familles de problèmes $MinTSPab$, $MaxTSPab$, $MinTSP12$ et $MaxTSP12$ sont tous totalement équivalents quant à leur degré d'approximation différentielle.

Preuve - Même cause, mêmes effets, il suffit de se référer au paragraphe 8.1 :

$$\begin{array}{ccc}
 MinTSPab & \leftrightarrow & MinTSP12 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 MaxTSPab & \leftrightarrow & MaxTSP12.
 \end{array}$$

Enfin, (nous éludons les relations entre rapports différentiel et classique car, si elles nous seront utiles au prochain chapitre pour le problème spécifique de TSP bivalent, elles n'en demeurent pas moins d'un point de vue conceptuel qu'une manifestation particulière d'un phénomène plus général déjà mentionné à plusieurs reprises), nous évoquons la famille d'instances limites pour les optima 4-locaux de Min ou $MaxTSP$: nous montrons d'une part que le rapport différentiel garanti par de tels optima locaux est atteint, mais d'autre part qu'elles le sont pour des instances non anodines de TSP puisqu'il s'agit du cas réduit à des poids bivalents. Pour un LSA cherchant un optimum local relativement au voisinage

2_{opt} , des instances *qui sont pourtant parmi les plus simples* ne se comportent donc *pas mieux* que le problème général.

Chapitre 9

δ –approximation du *TSP* à $3/4$

L'algorithme que nous proposons s'inspire de l'idée proposée et exploitée par C. Papadimitriou et Yannakakis dans [75] qui consiste à partir d'une solution sur-optimale en la présence d'un 2-couplage de poids minimum, puis de regrouper les cycles de ce 2-couplage de sorte à former un tour de moindre coût. Par solution sur-optimale d'un problème, on entend solution optimale d'un problème relaxé : dans le cas d'une instance $I = (G, d)$ de *MinTSP*, un 2-couplage optimal est une solution de $Sol_{TSP12}(I)$ du problème de voyageur de commerce pour lequel on aurait relâché la contrainte d'unicité du cycle ; alors, comme étant défini sur un ensemble plus grand de solutions réalisables, cette solution sera naturellement de coût au plus le coût $\beta_{TSP12}(I)$ d'une solution optimale du problème initial.

9.1 L'algorithme

Nous l'avons vu, sous la mesure différentielle, on peut se restreindre à l'étude du cas (1,2). Soit donc $G(V, E)$ un graphe complet à n sommets et $d : E \rightarrow \{1, 2\}$ une fonction distance bivalente sur les arêtes. L'objectif du problème est de déterminer un tour sur les sommets de coût minimum, soit un tour qui emprunte un minimum d'arêtes de poids 2. Si \mathcal{E} désigne un ensemble d'arêtes, on notera $V(\mathcal{E})$ le sous-ensemble de sommets incidents à \mathcal{E} et $d(\mathcal{E}) = \sum_{e \in \mathcal{E}} d(e)$ le coût ou poids associé à \mathcal{E} . Par la suite, concernant les quantités $\beta_{TSP12}(I)$, $\omega_{TSP12}(I)$ et $\delta_{TSP12}(I, s)$, pour simplifier l'écriture et parce que cela n'induit aucune confusion, nous omettrons la référence explicite au problème : nous utiliserons donc les notations $\beta(I)$, $\omega(I)$ et $\delta(I, s)$.

Le résultat que nous exposons maintenant doit plus à l'analyse de l'algorithme proposé et de la structure de la solution qu'à la finesse de l'algorithme lui-même.

9.1.1 Le 2-couplage initial

Dans un graphe simple $G(V, E)$, un 2-couplage est un ensemble \mathcal{E} d'arêtes tel que tout sommet v de G est de degré au plus deux dans \mathcal{E} ; un 2-couplage est dit parfait si tout sommet est de degré exactement deux et constitue donc une partition des sommets en cycles. Déterminer un 2-couplage de taille maximum dans un graphe simple est équivalent à trouver une partition des sommets en cycles de poids minimum dans le graphe complet bivalué de sorte à ce que les arêtes présentes dans le graphe initial portent un coût unitaire tandis que les arêtes absentes du graphe initial portent un coût de deux. Par abus de langage, on parlera alors de 2-couplage de poids minimum. Nous partirons, pour construire notre solution du problème de voyageur de commerce, d'une telle partition, que nous transformerons en un tour par regroupement des cycles qui la constituent. Aussi prenons-nous le soin au préalable de diminuer au maximum le nombre de ses cycles, suivant le principe selon lequel *plus les cycles sont grands, moins ils sont nombreux, et moins le risque de perte lors de regroupements est fort*.

Tout d'abord, on exploite un résultat d'Hartvigsen qui a montré dans [48] qu'il était possible dans un graphe simple de déterminer en temps polynomial un 2-couplage de taille maximum parmi les 2-couplages sans triangle. Comme nous l'avons dit, cela revient à déterminer un 2-couplage de poids minimum dans un graphe complet : aussi partirons-nous, sur le graphe complet bivalué, d'une telle solution, c'est-à-dire d'une partition M des sommets en cycles de taille au moins 4 de poids minimum. La solution M de départ vérifie donc la propriété :

$$P1 \quad \forall \Gamma \in M, |V(\Gamma)| \geq 4.$$

Dans un deuxième temps, on cherche à obtenir à partir de M une solution minimale vis-à-vis d'une certaine façon de regrouper les cycles deux par deux par 2-échange, procédé que nous baptisons 2-fusion.

Définition 9.1. 2-échange

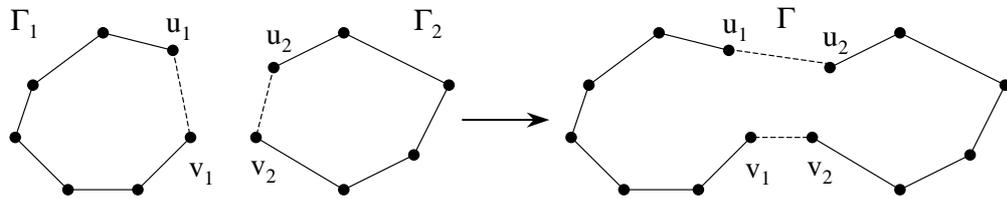
Soient Γ_1 et Γ_2 deux cycles, un 2-échange est tout échange de deux arêtes $u_1v_1 \in \Gamma_1$ et $u_2v_2 \in \Gamma_2$ contre le couple d'arêtes (u_1u_2, v_1v_2) .

Définition 9.2. 2-fusion

La 2-fusion de deux cycles Γ_1 et Γ_2 est tout cycle Γ résultant d'un 2-échange sur Γ_1 et Γ_2 à partir de deux arêtes u_1v_1 de Γ_1 et u_2v_2 de Γ_2 (*cf.* figure 9.1) :

$$\Gamma = (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \setminus \{u_1v_1, u_2v_2\} \cup \{u_1u_2, v_1v_2\}$$

pour tout couple d'arêtes $(u_1v_1, u_2v_2) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2$.

FIG. 9.1: 2-échange entre deux cycles Γ_1 et Γ_2

Une solution minimale vis-à-vis du 2-échange est qualifiée de 2-minimale :

Définition 9.3. Couplage 2-minimal

Un couplage M est 2-minimal s'il vérifie la propriété

$$P2 \quad \forall \Gamma_1 \neq \Gamma_2, \quad \forall u_1 v_1 \in \Gamma_1, \quad \forall u_2 v_2 \in \Gamma_2, \quad d(u_1 u_2) + d(v_1 v_2) > d(u_1 v_1) + d(u_2 v_2).$$

De la solution M est ainsi déterminé un 2-couplage sans triangle \widetilde{M} de poids minimum 2-minimal, soit une solution telle que tout regroupement de 2 cycles au travers d'un 2-échange serait sanctionné par une augmentation stricte du coût de la solution. Cette solution n'est autre qu'un optimum local relativement au voisinage 2-borné défini par la 2-fusion pour le problème de 2-couplage de poids minimum de taille minimum : puisque ce problème est évidemment polynomialement borné, la solution \widetilde{M} est donc déterminée en temps polynomial.

Proposition 9.1. Si M est un couplage 2-minimal alors au plus un de ses cycle contient des arêtes de poids 2.

Preuve

Par l'absurde : supposons que deux arêtes $u_1 v_1$ et $u_2 v_2$ de deux cycles distincts Γ_1 et Γ_2 soient de poids 2, on aurait alors " $d(u_1 u_2) + d(v_1 v_2) \leq 4$ " et " $d(u_1 v_1) + d(u_2 v_2) = 4$ ", ce qui contredirait la 2-minimalité \diamond

Si \widetilde{M} est un cycle unique, alors on est à l'optimum, un tour étant un 2-couplage sans triangle particulier. Aussi supposons-nous par la suite disposer d'une solution \widetilde{M} de taille au moins 2 :

$$P3 \quad |\widetilde{M}| \geq 2.$$

9.1.2 Préparation à la construction du tour

\widetilde{M} est un ensemble de cycles $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_p, \Gamma_0\}$ qui vérifie les propriétés $P1$, $P2$ et $P3$ avec au plus un cycle Γ_0 contenant des arêtes de poids 2. En vue du regroupement des cycles de \widetilde{M} en un tour, nous faisons apparaître des arêtes inter-cycles de poids 1 qu'il serait avantageux d'emprunter pour former un tour de coût raisonnable.

Dans un premier temps, on cherche à former un maximum de couples de cycles reliés par au moins une arête de poids 1. Cela revient à déterminer un couplage maximum dans le graphe H suivant (*un couplage est un ensemble d'arêtes disjointes*) :

$$H = (W_H, F_H)$$

$W_H = \{w_1, w_2, \dots, w_p\}$ on associe à chaque cycle Γ_i pour i de 1 à p un sommet w_i
 $\forall i \neq j, w_i w_j \in F_H \Leftrightarrow \exists uv \in \Gamma_i \times \Gamma_j / d(uv) = 1.$

Soit \mathcal{C}_H un tel couplage, de taille $|\mathcal{C}_H| = q$ (H et \mathcal{C}_H sont bien entendu construits en temps polynomial en n), on associe à chaque arête $w_{i_s} w_{j_s}$ de \mathcal{C}_H le couple de cycles $(\Gamma_{i_s}, \Gamma_{j_s})$ correspondants. Pour simplifier la description de \widetilde{M} , on renumérote les cycles en désignant les $2q$ cycles couplés par (Γ_1^s, Γ_2^s) pour s de 1 à q et les cycles restants par Γ_t pour t de 1 à r , $r = p - 2q$. À ce stade, on sait de la solution :

$$\forall s = 1, \dots, q, \quad \exists e^s \in V(\Gamma_1^s) \times V(\Gamma_2^s) / d(e^s) = 1.$$

Dans un second temps, on essaie de relier un couple à un cycle restant en mettant en évidence des arêtes de poids 1 entre l'ensemble V_s des sommets des cycles Γ_1^s et Γ_2^s adjacents aux sommets extrémités des arêtes de poids 1 e^s et les cycles Γ_t . Il suffit pour ce faire de construire le graphe biparti B suivant :

$$B = (W_B^1 \cup W_B^2, F_B)$$

$W_B^1 = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$ on associe à chaque cycle Γ_t restant un sommet w_t
 $W_B^2 = \{w^1, w^2, \dots, w^q\}$ on associe à chaque couple (Γ_1^s, Γ_2^s) un sommet w^s
 $\forall t, \forall s, w_t w^s \in F_B \Leftrightarrow \exists u \in \Gamma_t, \exists v \in V_s / d(uv) = 1$

et de déterminer sur B un nouveau couplage maximum \mathcal{C}_B , de taille $|\mathcal{C}_B| = q'$ (B et \mathcal{C}_B sont bien évidemment construits en temps polynomial en n). À chaque couple (w_t, w^s) de \mathcal{C}_B est associé le triplet $(\Gamma_1^s, \Gamma_2^s, \Gamma_t)$ correspondant. Toujours dans le soucis d'une description claire de \widetilde{M} , on renumérote les cycles en désignant les $3q'$ cycles groupés par trois par $(\Gamma_1^s, \Gamma_2^s, \Gamma_3^s)$ pour s de 1 à q' de sorte que l'arête de poids 1 mise en évidence par le couplage \mathcal{C}_B relie les cycles Γ_1^s et Γ_3^s ; les $2(q - q')$ couples non couverts par \mathcal{C}_B sont notés (Γ_1^s, Γ_2^s) pour s de $q' + 1$ à q et les cycles restants par Γ_t pour t de 1 à r' ($r' = r - q'$). À présent, on sait de la solution :

$$\forall s = 1, \dots, q', \quad \exists f^s \in V_s \times V(\Gamma_3^s) / d(f^s) = 1.$$

Ce second couplage, en faisant apparaître de nouvelles arêtes de poids 1 entre les cycles, permet certainement d'obtenir un tour encore meilleur dans le cas général. Malheureusement, il ne nous permet pas d'améliorer le rapport d'approximation puisque ce second couplage

n'intervient pas dans les instances limites pour lesquelles le rapport 3/4 est atteint (cf. paragraphe 9.2).

Finalement, ces remaniements suggèrent la description suivante de \widetilde{M} :

$$\widetilde{M} = \bigcup_{s=1}^{q'} (\Gamma_1^s, \Gamma_2^s, \Gamma_3^s) \bigcup_{s=q'+1}^q (\Gamma_1^s, \Gamma_2^s) \bigcup_{t=1}^{r'} \Gamma_t \cup \Gamma_0.$$

9.1.3 La solution approchée

Le principe est très simple : on utilise les arêtes de poids 1 e^s et f^s mises en évidence par les couplages \mathcal{C}_H et \mathcal{C}_B , on retire des arêtes de sorte à éliminer tout cyclage et on rattache les chaînes élémentaires résultantes en un tour !

Définition 9.4. e.c.e.d. : ensemble de chaînes élémentaires deux-à-deux disjointes
Un ensemble \mathcal{E} de chaînes est un e.c.e.d. s'il vérifie

- (i) toute chaîne \mathcal{C} de \mathcal{E} passe au plus une fois par un sommet donné ;
- (ii) deux chaînes distinctes \mathcal{C} et \mathcal{D} de \mathcal{E} n'ont pas de sommet commun.

Ci-suit le déroulement détaillé de l'algorithme

```

(A $\widetilde{T}$ )
→ input  $\widetilde{M}$ 
begin
e.c.e.d.  $\mathcal{E} = \emptyset$ ;
(1)  pour  $s$  de 1 à  $q'$  faire
      - soit dans  $\Gamma_1^s$  l'arête  $g_1^s$  adjacente à  $e^s$  et  $f^s$ ;
      - choisir dans  $\Gamma_2^s$  une arête  $g_2^s$  adjacente à  $e^s$ ;
      - choisir dans  $\Gamma_3^s$  une arête  $g_3^s$  adjacente à  $f^s$ ;
      -  $\mathcal{E} = \mathcal{E} \cup \Gamma_1^s \cup \Gamma_2^s \cup \Gamma_3^s \setminus \{g_1^s, g_2^s, g_3^s\} \cup \{e^s, f^s\}$ ;
(2)  pour  $s$  de  $q'+1$  à  $q$  faire
      - choisir dans  $\Gamma_1^s$  une arête  $g_1^s$  adjacente à  $e^s$ ;
      - choisir dans  $\Gamma_2^s$  une arête  $g_2^s$  adjacente à  $e^s$ ;
      -  $\mathcal{E} = \mathcal{E} \cup \Gamma_1^s \cup \Gamma_2^s \setminus \{g_1^s, g_2^s\} \cup \{e^s\}$ ;
(3)  pour  $t$  de 1 à  $r'$  faire
      - choisir dans  $\Gamma_t$  une arête  $g_t$ ;
      -  $\mathcal{E} = \mathcal{E} \cup \Gamma_t \setminus \{g_t\}$ ;
(4)  sur  $\Gamma_0$  faire
      - s'il existe dans  $\Gamma_0$  une arête de poids 1, choisir une arête  $g_0$ 

```

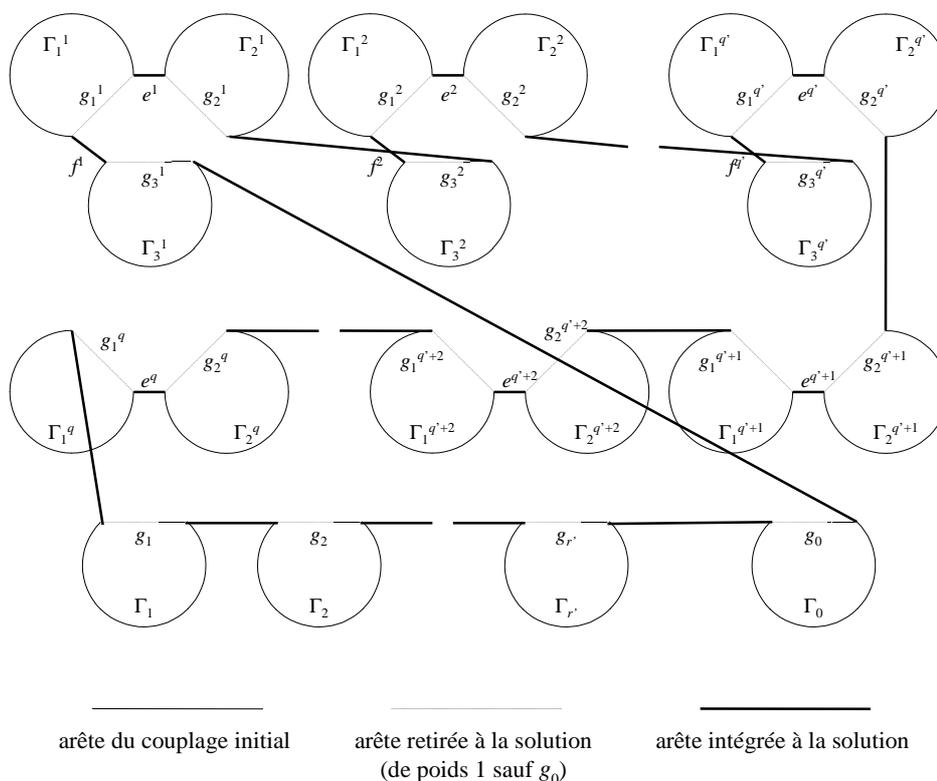


FIG. 9.2: La solution approchée

- de poids 2 adjacente à une arête de poids 1;
- sinon choisir une arête g_0 quelconque;
- $\mathcal{E} = \mathcal{E} \cup \Gamma_0 \setminus \{g_0\}$;
- (5) compléter \mathcal{E} de façon à obtenir un tour \tilde{T} sur V ;
- end
- ← output \tilde{T}

Les étapes (1) à (4) sont clairement polynomiales, et il en est de même pour la complétion de \mathcal{E} en un tour puisqu'il suffit de choisir un ordre aléatoire sur les $q + r' + 1$ composantes de \mathcal{E} , puis quel sommet parmi deux de la $k + 1$ ème composante du tour sera relié à la k ème composante (cf. figure 9.2).

9.1.4 Évaluation de la solution \tilde{T}

Proposition 9.2. Le tour \tilde{T} produit par l'algorithme $A_{\tilde{T}}$ contient au plus $d(\tilde{M}) - n + q + r'$ arêtes de coût deux :

$$d(\tilde{T}) \leq d(\tilde{M}) + q + r'.$$

Preuve

On voit facilement que durant les étapes (1) à (4), l'ensemble \mathcal{E} demeure bien un e.c.e.d., puisque chaque itération ajoute à \mathcal{E} une chaîne élémentaire disjointe des sommets déjà présents dans \mathcal{E} . Cet ensemble contient alors les n arêtes du 2-couplage initial desquelles ont été d'une part déduites les $3q' + 2(q - q') + r' = q' + 2q + r'$ arêtes de poids 1 $\cup_{s=1}^{q'} \{g_1^s, g_2^s, g_3^s\} \cup_{s=q'+1}^q \{g_1^s, g_2^s\} \cup_{s=1}^{r'} \{g_t\}$ ainsi qu'une éventuelle arête g_0 de poids 2 si $\Gamma_0 \neq \emptyset$, d'autre part ajoutées les $2q' + (q - q') = q' + q$ arêtes de poids 1 $\cup_{s=1}^{q'} \{e_1^s, f_2^s\} \cup_{s=q'+1}^q \{e^s\}$: \mathcal{E} est ainsi un e.c.e.d. de taille $n - (q + r') - \mathbb{1}_{\Gamma_0 \neq \emptyset}$ et de valeur $d(\tilde{M}) - (q + r') - 2 \mathbb{1}_{\Gamma_0 \neq \emptyset}$. Pour compléter \mathcal{E} en un tour sur V , il faut donc introduire exactement $q + r' + \mathbb{1}_{\Gamma_0 \neq \emptyset}$ arêtes, soit au plus autant d'arêtes de poids 2 :

$$d(\tilde{T}) \leq d(\tilde{M}) - (q + r' + 2 \mathbb{1}_{\Gamma_0 \neq \emptyset}) + 2(q + r' + \mathbb{1}_{\Gamma_0 \neq \emptyset}) = d(\tilde{M}) + q + r' \quad \diamond$$

9.1.5 Évaluation de l'optimum

Proposition 9.3.

$$\beta(G, d) \geq d(\tilde{M}).$$

Preuve

Nous l'avons dit, un tour optimal étant un 2-couplage sans triangle particulier, un 2-couplage sans triangle optimal est une solution sur-optimale dans le sens où c'est une solution non réalisable, de coût au moins aussi bon que la solution optimale, pour le problème de tournée \diamond

9.1.6 Évaluation d'une pire solution

Nous avons évalué \tilde{T} et $\beta(G, d)$, il nous reste à estimer la valeur $\omega(G, d)$ d'une pire solution. Pour ce, nous allons par l'exploitation de la 2-minimalité de \tilde{M} mettre en évidence des chaînes d'arêtes de coût deux entre les cycles de ce 2-couplage; ces résultats nous permettront alors de construire une mauvaise solution et d'achever la preuve du rapport de 3/4 assuré par toute solution de l'algorithme $A_{\tilde{T}}$.

Théorème 9.4.

$$\forall I = (G, d) \in I_{TSP12}, \quad \delta(I, A_{\tilde{T}}(I)) \geq 3/4.$$

Cas particulier d'optimalité

On note Γ_2 l'ensemble des arêtes de poids 2 du cycle Γ_0 . Si q est nul ($\mathcal{C}_H = \emptyset$) et que le cycle Γ_0 n'est qu'une succession d'arêtes de coût deux, le tour \tilde{T} produit par l'algorithme

est optimal.

Lemme 9.5. $(q = 0) \wedge (\Gamma_0 = \Gamma_2) \Rightarrow \delta(I, \tilde{T}) = 1$

Preuve

Effectivement, soit $k = |V(\Gamma_0)| = d(\tilde{M}) - n$ le nombre de sommets du cycle Γ_0 , ces sommets a_1, a_2, \dots, a_k ne sont par 2-minimalité adjacents à aucune arête de poids 1 ; par ailleurs, les cycles $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{p=r'}$ du 2-couplage \tilde{M} ne sont reliés entre eux que par des arêtes de poids 2. Cela signifie que si l'on considère la famille de sous-ensembles de sommets $\mathcal{F} = \{\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_k\}, V(\Gamma_1), V(\Gamma_2), \dots, V(\Gamma_p)\}$, alors toute arête reliant des sommets de deux composantes distinctes de \mathcal{F} est de coût deux. Or, tout tour sur V forme un cycle sur ces $k + p$ sous-ensembles, empruntant pour ce faire au moins autant d'arêtes reliant deux de ces composantes : ainsi, tout tour devra utiliser au moins $k + p$ arêtes de coût deux, et c'est ce que fait notre solution \tilde{T} , qui est donc optimale \diamond

Dorénavant, on supposera toujours vérifier la condition " $q = 0 \Rightarrow \Gamma_0 \neq \Gamma_2$ ".

Construction d'un 2-e.c.e.d. de taille $d(\tilde{M}) + 4(q + r) - n$

On appelle 2-e.c.e.d. tout e.c.e.d. qui n'est constitué que d'arêtes de coût deux. La démonstration du cas général se fonde sur la mise en évidence de 2-e.c.e.d. \tilde{W} de taille $d(\tilde{M}) + 4(q + r) - n$.

Proposition 9.6. Chaîne entre deux cycles

Entre deux cycles distincts de taille au moins k , on peut toujours faire passer une chaîne contenant au moins k arêtes de poids 2.

Preuve

Soient respectivement $\{a_1, a_2, \dots, a_{k+1}\}$ et $\{b_1, b_2, \dots, b_{k+1}\}$ $k + 1$ sommets successifs de deux cycles distincts Γ_a et Γ_b de taille au moins k (éventuellement $a_1 = a_{k+1}$ si $|V(\Gamma_a)| = k$ et $b_1 = b_{k+1}$ si $|V(\Gamma_b)| = k$) ; on montre que l'on peut toujours faire passer entre ces sommets une chaîne de longueur $2k - 1$ de valeur au moins $3k - 1$. Pour cela, il suffit de considérer les deux chaînes \mathcal{C} et \mathcal{D} définies comme suit

$$\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^k \{\{a_i, b_i\}\} \bigcup_{i=1}^{k-1} \{\{a_i, b_{i+1}\}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D} = \bigcup_{i=2}^{k+1} \{\{a_i, b_i\}\} \bigcup_{i=1}^{k-1} \{\{a_{i+1}, b_i\}\}.$$

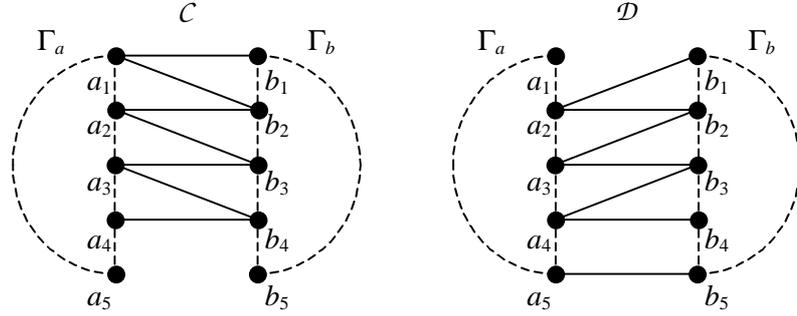


FIG. 9.3: Chaîne inter-cycles de valeur au moins 11

Effectivement, la 2-minimalité nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
 & \forall i = 1, \dots, k, \quad \max\{d(a_i b_i), d(a_{i+1} b_{i+1})\} = 2 \Rightarrow d(a_i b_i) + d(a_{i+1} b_{i+1}) \geq 3 \\
 \text{et } & \forall i = 1, \dots, k-1, \quad \max\{d(a_i b_{i+1}), d(a_{i+1} b_i)\} = 2 \Rightarrow d(a_i b_{i+1}) + d(a_{i+1} b_i) \geq 3 \\
 \Rightarrow & \sum_{i=1}^k d(a_i b_i) + \sum_{i=1}^k d(a_{i+1} b_{i+1}) + \sum_{i=1}^{k-1} d(a_{i+1} b_i) + \sum_{i=1}^{k-1} d(a_i b_{i+1}) \geq 6k - 3 \\
 \Leftrightarrow & d(\mathcal{C}) + d(\mathcal{D}) \geq 6k - 3 \Rightarrow \max\{d(\mathcal{C}), d(\mathcal{D})\} \geq \lceil (6k - 3)/2 \rceil = 3k - 1^1 \diamond
 \end{aligned}$$

En choisissant de façon adéquate les sommets a_1 et b_1 , on déduit directement de la preuve précédente la propriété 9.7 (cf. figure 9.3).

Propriété 9.7.

$\forall s = 1, \dots, q, \exists \mathcal{C}^s$ 2-e.c.e.d de taille 4 entre les cycles Γ_1^s et Γ_2^s qui laisse au moins un sommet de V_s de degré au plus un dans \mathcal{C}^s .

Preuve : prendre par exemple les sommets a_1 et b_1 dans V_s .

Propriété 9.8.

$\forall s = 1, \dots, q', \forall t = 1, \dots, r',$
 $\exists \mathcal{C}_t^s$ 2-e.c.e.d de taille 8 entre les cycles $\Gamma_1^s, \Gamma_2^s, \Gamma_3^s$ et Γ_t .

Preuve : considérer $\mathcal{C}_t^s = \mathcal{C}^s \cup \mathcal{C}'_t^s$ où \mathcal{C}'_t^s est une chaîne quelconque de longueur 4 entre les cycles Γ_t et Γ_3^s , ces deux cycles n'étant par optimalité du couplage \mathcal{C}_H reliés entre eux que par des arêtes de coût deux (cf. figure 9.4) \diamond

Propriété 9.9.

$\forall s = q' + 1, \dots, q, \forall t = 1, \dots, r',$
 $\exists \mathcal{C}_t^s$ 2-e.c.e.d de taille 8 entre les cycles Γ_1^s, Γ_2^s et Γ_t .

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \lceil x \rceil = \min_{n \in \mathbb{N}} \{n \geq x\}$

2. On rappelle que pour $s = 1, \dots, q, V_s$ désigne l'ensemble des sommets des cycles Γ_1^s et Γ_2^s adjacents aux sommets extrémités de l'arête de poids 1 e_s mise en évidence par le couplage \mathcal{C}_H .

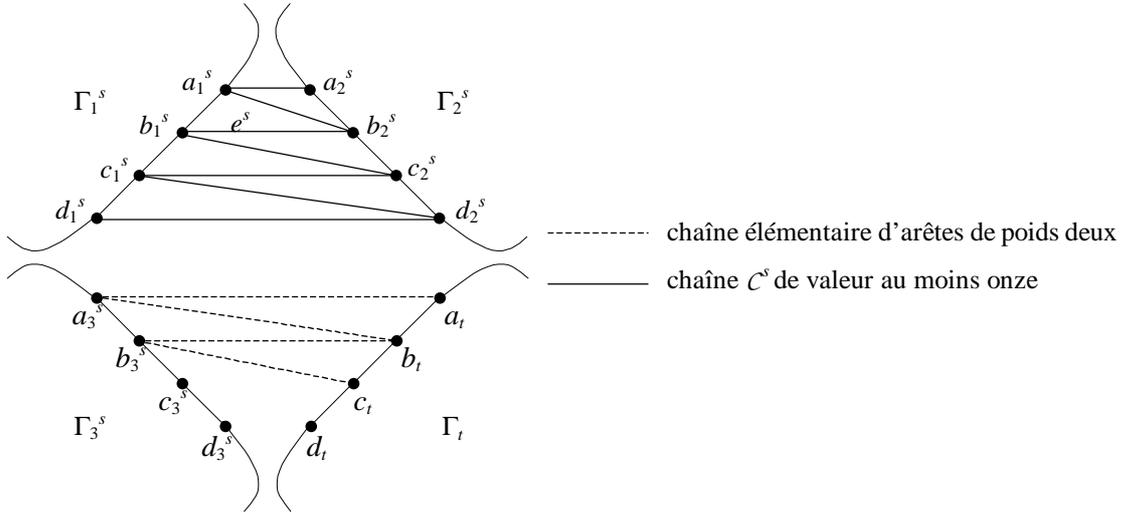


FIG. 9.4: 2-e.c.e.d. de taille 8 entre quatre cycles

Preuve

Soient u_1^s, v_1^s et u_2^s, v_2^s les sommets des cycles Γ_1^s et Γ_2^s de l'ensemble V_s , e_1^s et e_2^s les extrémités dans Γ_1^s et Γ_2^s de l'arête de poids 1 e^s , et a_t, b_t, c_t et d_t quatre sommets quelconques de Γ_t ; on sait d'une part que tout sommet du cycle Γ_t est, du fait de l'optimalité du couplage \mathcal{C}_B , relié à chaque sommet u_1^s, v_1^s, u_2^s et v_2^s par une arête de poids 2, et d'autre part que l'une au moins des arêtes $u_1^s e_2^s$ et $e_1^s u_2^s$ est de poids 2, par 2-minimalité du 2-couplage \widetilde{M} ; on peut toujours supposer $d(u_1^s e_2^s) = 2$ et poser alors par exemple $\mathcal{C}_t^s = \{(e_2^s, u_1^s, a_t, v_1^s, b_t, u_2^s, c_t, v_2^s, d_t)\}$ (cf. figure 9.5) \diamond

Propriété 9.10.

$$(r' \geq 2) \Rightarrow \exists \mathcal{E} \text{ 2-e.c.e.d de taille } 4r' - 1 \text{ entre les cycles } \Gamma_t, t = 1, \dots, r'.$$

Preuve

Les cycles résiduels $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{r'}$ n'étant reliés entre eux que par des arêtes de poids 2, tout chemin de longueur $4r' - 1$ entre ces cycles constitue un 2-e.c.e.d. de même taille; or, chaque cycle Γ_t contenant au moins quatre sommets distincts a_t, b_t, c_t et d_t , il est facile de faire passer un tel chemin par ces sommets, par exemple

$$\mathcal{E} = (a_1, a_2, \dots, a_t, \dots, a_{r'}, b_1, b_2, \dots, b_t, \dots, b_{r'}, c_1, c_2, \dots, c_t, \dots, c_{r'}, d_1, d_2, \dots, d_t, \dots, d_{r'})$$

(cf. figure 9.6) \diamond

Lemme 9.11. $(q \geq 1) \vee (\Gamma_0 \neq \Gamma_2 \wedge r \neq 1) \Rightarrow \delta(\widetilde{T}) \geq 3/4.$

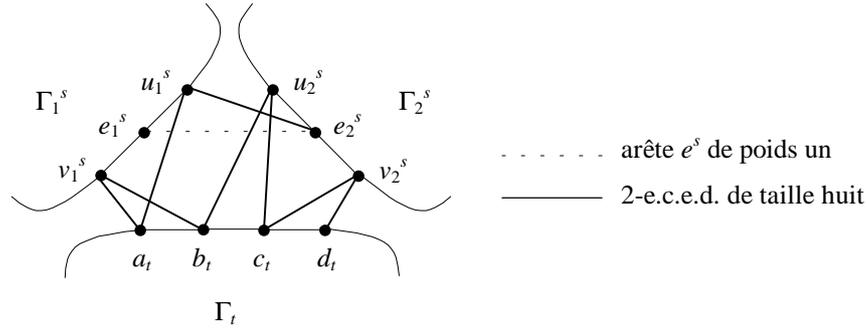


FIG. 9.5: 2-e.c.e.d. de taille 8 entre trois cycles

Preuve

On rappelle la forme du 2-couplage $\tilde{M} = \cup_{s=1}^{q'} (\Gamma_1^s, \Gamma_2^s, \Gamma_3^s) \cup_{s=q'+1}^q (\Gamma_1^s, \Gamma_2^s) \cup_{t=1}^{r'} \Gamma_t \cup \Gamma_0$. Pour construire sur $V \setminus V(\Gamma_0)$ le 2-e.c.e.d. W_Γ qui argumentera la preuve, nous utilisons les chaînes mises en évidence lors de l'établissement des propriétés 9.7, 9.8, 9.9 et 9.10 :

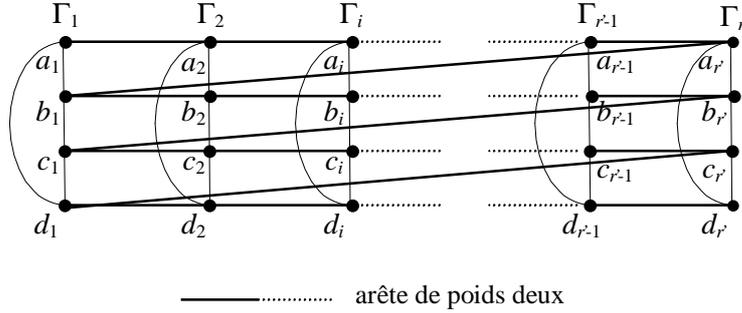
$$\begin{aligned}
 W_\Gamma &= \bigcup_{s=1}^{r'} \mathcal{C}_s^s \bigcup_{s=r'+1}^q \mathcal{C}^s & \text{si } r' \leq q, & \quad \text{de taille } 8r' + 4(q - r') = 4(q + r') \\
 W_\Gamma &= \bigcup_{s=1}^q \mathcal{C}^s \cup \mathcal{E} \cup \{\gamma\} & \text{si } r' > q > 0, & \quad \text{de taille } 4q + 4r' - 1 + 1 = 4(q + r') \\
 W_\Gamma &= \mathcal{E} & \text{sinon,} & \quad \text{de taille } 4r' - 1 = 4(q + r') - 1.
 \end{aligned}$$

Dans le deuxième cas ($r' > q$ et $q \geq 1$), γ désigne une arête entre un sommet de degré un dans \mathcal{E} et un sommet de degré au plus un dans W_Γ , pris dans $V(\Gamma_3^1)$ si $q' \geq 1$, dans V_q sinon : par l'optimalité des couplages \mathcal{C}_H et \mathcal{C}_B , γ est toujours de poids 2. Ainsi, nous avons mis en évidence un 2-e.c.e.d. W_Γ de taille $4(q + r')$ ou $4(q + r') - 1$ si $q = 0$.

Par ailleurs, soit $g_0 = u_0 v_0$ l'arête de poids 2 retirée au cycle Γ_0 par l'algorithme $(A_{\tilde{T}})$; si $\Gamma_0 \neq \Gamma_2$, g_0 a été choisie de sorte à ce que l'une de ses extrémités, disons v_0 , soit adjacente dans Γ_0 à une arête de poids 1. Soit γ' une arête liant le sommet v_0 à un sommet de degré au plus un dans W_Γ (un tel sommet existe puisque W_Γ est sans cycle) ; par 2-minimalité, γ' est de poids 2 et on pose $W_0 = \Gamma_2 \setminus \{g_0\} \cup \{\gamma'\}$ si $\Gamma_0 = \Gamma_2$, $W_0 = \Gamma_2 \cup \{\gamma'\}$ sinon. W_0 constitue ainsi un 2-e.c.e.d. de taille $|V(\Gamma_2)| = d(\tilde{M}) - n$ si $\Gamma_0 = \Gamma_2$, $d(\tilde{M}) - n + 1$ sinon.

En posant $\tilde{W} = W_\Gamma \cup W_0$, on obtient un 2-e.c.e.d. dont toute complétion en un tour T_W constituerait une solution de valeur au moins $d(\tilde{M}) + 4(q + r')$:

$$\begin{aligned}
 |\tilde{W}| &= 4(q + r') - \mathbb{1}_{q=0} + d(\tilde{M}) - n + \mathbb{1}_{\Gamma_0 \neq \Gamma_2} \geq d(\tilde{M}) - n + 4(q + r') \\
 &\quad \text{car on ne peut avoir simultanément } q = 0 \text{ et } \Gamma_0 = \Gamma_2.
 \end{aligned}$$

FIG. 9.6: Chaîne de valeur $2 \times (4r' - 1)$

Ainsi $\omega(I) \geq d(\widetilde{M}) + 4(q + r')$ et les propositions 9.2 et 9.3 amènent la conclusion :

$$\delta(G, d, \widetilde{T}) = \frac{\omega(G, d) - d(\widetilde{T})}{\omega(G, d) - \beta(G, d)} \geq \frac{d(\widetilde{M}) + 4(q + r') - (d(\widetilde{M}) + q + r')}{d(\widetilde{M}) + 4(q + r') - d(\widetilde{M})} = \frac{3}{4} \diamond$$

Lemme 9.12. $(q = 0), (r = 1), (\Gamma_0 \neq \Gamma_2) \Rightarrow \delta(\widetilde{T}) \geq 3/4.$

Preuve (cf. figure 9.7)

Soient trois sommets u_0, u_1 et u_2 de Γ_0 tels que $d(u_0u_1) = 1$ et $d(u_1u_2) = 2$. On note u_3 et u_4 les successeurs de u_2 dans Γ_0 (éventuellement $u_4 = u_0$). Soient a, b, c et d quatre sommets quelconques de Γ_1 et soient respectivement W_p et W_m les ensembles d'arêtes $\{au_1, u_1b, bu_2, u_2c\}$ et $\{u_1u_2\}$. Si u_3 est adjacent à deux arêtes de coût un, on pose $W_p = W_p \cup \{e\}$; si l'une seulement des arêtes u_2u_3 et u_3u_4 adjacentes à u_3 est de coût deux, $W_p = W_p \cup \{cu_3, u_3d\}$ et $W_m = W_m \cup \{\arg \max\{d(u_2u_3), d(u_3u_4)\}\}$; enfin, si $d(u_2u_3) = d(u_3u_4) = 2$, $W_p \cup \{cu_3, u_3d, du_4\}$, $W_m = W_m \cup \{u_2u_3, u_3u_4\}$. Dans tous les cas, on pose $W_{\widetilde{T}} = \Gamma_2 \cup W_p \setminus W_m$, de taille $d(\widetilde{M}) - n + 4 = d(\widetilde{M}) - n + 4r'$.

La conclusion est la même que pour le lemme précédent :

$$\omega(G, d) \geq d(\widetilde{M}) + 4r', \quad \beta \geq d(\widetilde{M}) \quad \text{et} \quad d(\widetilde{T}) \leq d(\widetilde{M}) + r' \Rightarrow \delta(G, d, \widetilde{T}) \geq 3/4 \quad \diamond$$

Ceci achève la démonstration du théorème 9.4.

9.2 Instance limite

Il existe une famille de graphes pour laquelle le rapport $3/4$ est atteint, celle des instances $I_n = (G_n(U \cup V_n, E_n), d_n)_{n \geq 4}$ définies par :

$$\begin{aligned}
 U &= \{u_1, u_2, u_3, u_4\}, \quad V_n = \{v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n\} \\
 \forall i &= 2, 4, \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad d(u_iv_j) = 2 \text{ toutes les autres arêtes étant de poids } 1.
 \end{aligned}$$

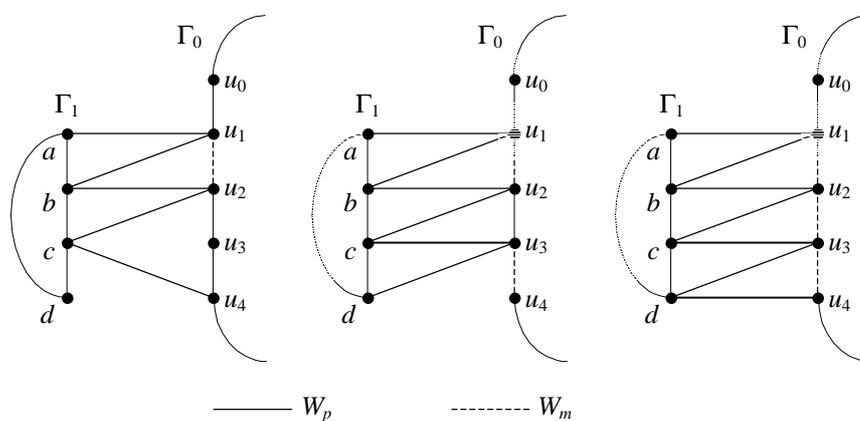
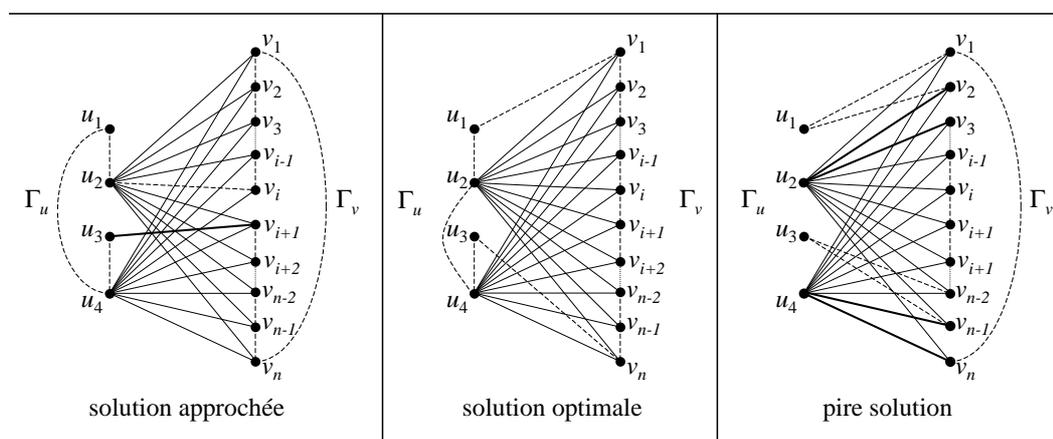


FIG. 9.7: Cas $q = 0, r = 1, \Gamma_0 \neq \Gamma_2$



Les arêtes non dessinées sont de poids 2

- arête de poids 1 empruntée par le tour considéré
- arête de poids 2 empruntée par le tour considéré

FIG. 9.8: Instance limite

Considérons le 2-couplage

$$\widetilde{M}_n = \{\Gamma^u = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_1), \Gamma_n^v = (v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n, v_1)\}$$

il est sans triangle, de poids minimum $4(n+1)$, et 2-minimal. Effectivement, toute 2-fusion des deux cycles fait intervenir une arête de Γ^u et une arête est nécessairement constituée d'un sommet d'indice impair, relié aux sommets de Γ^v par des arêtes de coût un, et un sommet d'indice pair, relié aux sommets de Γ^v par des arêtes de coût deux. Notre algorithme, en voulant emprunter une arête de poids un u_1v_i ou u_3v_i , fera ainsi apparaître une arête de poids 2 u_2v_{i+1} ou u_4v_{i+1} dans la solution \widetilde{T}_n : $d(\widetilde{T}_n) = 4(n+1) + 1$. Or, $\beta(I_n) = 4(n+1)$ et $\omega(I_n) = 4(n+1) + 4$ avec par exemple $T^* = (u_1, u_2, u_4, u_3, v_n, v_{n-1}, \dots, v_2, v_1, u_1)$ et $T_W = (u_1, v_2, u_2, v_3, v_4, \dots, v_{n-2}, u_3, v_{n-1}, u_4, v_n, v_1, u_1)$ (cf. figure 9.8) \diamond

Chapitre 10

Perspectives

Zoom sur un algorithme : *TSPab*

De 3/4 à 4/5 différentiel?

L'analyse que nous faisons semble ne pas exploiter au maximum, tant les propriétés du 2-couplage initial que celles des deux couplages C_B et C_H mis en évidence pour la résolution proposée, et il semblerait qu'une meilleure exploitation nous mènerait à un rapport de 4/5 ; cependant, à l'état actuel de nos recherches, cela ne reste qu'une conjecture.

Problèmes connexes

L'exploitation même du résultat 3/4-différentiel n'est pas optimale puisque celui-ci pourrait être transporté par réduction à des problèmes proches tels les problèmes de chaîne hamiltonienne de coût minimum, à extrémités fixées ou non pour lesquels on ne cherche plus un cycle mais une chaîne traversant une et une fois chaque sommet, en imposant éventuellement certaines sous-chaînes.

Classe $GLO[\delta]$

Types de problèmes

Il paraîtrait pertinent d'essayer de mettre en évidence certaines conditions d'appartenance à $GLO[\delta]$ selon l'expression du problème, de sa structure. On pourrait par exemple tenter d'isoler des familles de problèmes bien approximables comme nous l'avons fait avec les problèmes de partitionnement héréditaire. Nous pensons notamment, en restant dans le même ordre d'idée, aux problèmes de partitionnement héréditaire valorisant leur solution

par une autre fonction de coût (poids maximum, poids moyen...) que la fonction indicatrice ainsi qu'aux problèmes de partitionnement 1-héréditaire. Une propriété P sur un ensemble X est dite 1-héréditaire si elle n'est avérée sur un sous-ensemble S qu'à condition de vérifier pour un élément x_0 du sous-ensemble S : " $\forall S' \subseteq S, P(S' \cup \{x_0\})$ ". D'autres caractérisations des problèmes se situant *dans* ou *hors* $GLO[\delta]$ devraient cependant être envisagées, comme nous avons essayé de le faire par l'exploitation de la structure radiale des ensembles de solution.

Par ailleurs, plutôt que d'exhiber un trait caractéristique de tel ou tel problème par exemple par leur formulation logique ou la propriété de son ensemble de solutions, il est souvent intéressant de lier les problèmes entre-eux de manière à dessiner des sous-classes de problèmes relativement à la G -réduction, éventuellement les hiérarchiser (toujours par G -réduction) et, pourquoi pas, parvenir par ce biais à tracer les limites des classes $GLO[R]$ en établissant la complétude de certains problèmes.

Types d'optima locaux

Nous en avons proposé une illustration au cours du chapitre 6 avec les problèmes de satisfaisabilité, la définition même de l'optimum local, que ce soit par le critère d'optimalité ou de localité, ouvre un éventail d'étude plus riche qu'il n'y paraît, permettant d'élargir les classes d'approximation locale à rapport constant à de nouveaux problèmes, ou encore de comparer le comportement d'un même problème vis-à-vis de ces différentes stratégies d'approximation. Ces optima locaux peuvent être, comme il est proposé dans [3], le fruit de l'intégration dans les voisinages considérés de *solutions complémentaires* ou encore d'une *altération du critère d'optimisation*; citons de nouveau pour illustration l'exemple du problème $Max2 - CCSP$, parce qu'il est parlant : il est d'abord démontré que $Max2 - CCSP$ n'appartient pas à GLO pour des voisinages h -bornés *naturels*; puis qu'en revanche, les optima locaux, pour le voisinage 1-borné mais *relativement à une autre fonction objectif*, garantissent pour la fonction objectif initiale un rapport d'approximation classique de $1/4$; de même pour les optima locaux définis par *le voisinage miroir 1-borné* qui prend en compte comme voisin de toute solution la solution complémentaire; enfin, la combinaison de la *prise en compte d'une fonction objectif altérée* et *d'un voisinage miroir 1-borné* désigne des optima locaux qui garantissent un rapport classique de $2/5$. C'est tout un champ d'investigation ouvert pour la désignation d'optima locaux d'un problème et l'étude de la qualité de ceux-ci en terme de rapport d'approximation, classique comme différentiel. Ce champ peut être vaste, tout en

restant dans un cadre de stratégies simples de conception et de mise-en-œuvre : c'est là la motivation de ces recherches, voir comment *structurellement* l'ensemble des solutions d'un problème admet un ensemble de *bonnes solutions* que l'on est en mesure de décrire *a priori*. Les optima locaux ne sont pas décrits comme *le résultat du déroulement d'un algorithme* mais par certaines *propriétés* qui leurs sont *intrinsèques*.

Exemple 10.1. Le problème de sac-à-dos

Nous avons vu au paragraphe 4.3.3 que ni le problème de sac-à-dos, ni le sous-problème *Max Subset Sum* ne garantissaient la qualité de leurs optima locaux, en mettant en avant des familles d'instances qui admettaient de *mauvais* optima locaux. Devant ces échecs, peut-être ferions-nous mieux d'affiner la notion d'optima locaux de ces problèmes. Pour *Max KS* notamment, il pourrait sembler opportun de rechercher les optima locaux vis-à-vis d'un *objectif altéré* qui inciterait à sélectionner les objets de meilleur rapport "*qualité-prix*" : considérer comme critère de sélection des éléments le choix du meilleur rapport c_i/a_i pourrait s'avérer profitable, tant pertinent semble ce critère (*qui, en réalité, définit l'optimum réel*), aux vues des algorithmes approchés et autres schémas dédiés à ce problème qui l'utilisent également. Il s'agirait ici de tenter l'approche introduite dans [2] et [59] pour les problèmes de satisfaisabilité, celle des optima locaux altérés : peut-être qu'une solution du problème qui est optimum local relativement à une *autre fonction objective* dite *objectif altéré*, pourrait-elle garantir de meilleurs rapports qu'un optimum local relativement à la fonction initiale (*GGLO*)? Effectivement, si on regarde de plus près les mauvais optima locaux exhibés pour le problème de sac-à-dos, on remarque qu'ils peuvent sembler peu pertinents, puisqu'ils auraient choisi un élément de piètre rapport "*qualité-prix*" $(h+1)/(n-1)$ quand bien même tous les autres éléments ont un tel rapport de 1 ; ainsi pourrait-il s'avérer intéressant pour approcher le problème initial

$$\max \sum_{i=1}^n c_i \times x_i \quad \begin{cases} a \cdot x \leq b \\ x_i \leq b_i \quad \forall i \\ x \in \mathbb{N}^n, \end{cases}$$

d'évaluer la qualité d'optima h -locaux du problème altéré :

$$\max \sum_{i=1}^n c_i/a_i \times x_i \quad \begin{cases} a \cdot x \leq b \\ x_i \leq b_i \quad \forall i \\ x \in \mathbb{N}^n. \end{cases}$$

Une autre approche, pour *Max KS* comme pour *Max Subset Sum*, pourrait être de chercher un optimum local *dans l'ensemble d'objets complémentaire*. Notamment avec l'ensemble dominant au paragraphe 3.4, nous avons parlé de l'intérêt d'élargir le voisinage h -borné aux solutions complémentaires (*CGLO*) ; la nouvelle démarche que nous évoquons ici consisterait à chercher deux optima locaux : le premier de façon quelconque, puis le second dans

l'ensemble complémentaire d'objets de la première. Ceci n'est autre qu'une façon adaptée au problème de sac-à-dos d'élargir le voisinage d'une solution à l'ensemble complémentaire : si dans un problème de satisfaisabilité, deux affectations complémentaires peuvent être comparées à tout instant, ou encore pour le problème d'ensemble dominant, l'ensemble complémentaire de sommets d'une solution minimale est lui-même solution admissible, ça n'est pas le cas ici (*en général*) puisqu'il n'y a, a priori, aucune raison que l'ensemble complémentaire d'une solution constitue une solution réalisable.

Déjà quatre idées ont été évoquées : les optima h -locaux ([11]), les optima h -locaux miroirs ([3]), les optima h -locaux altérés ([2] et [59]) et les optima h -locaux dans deux ensembles complémentaires où il s'agirait, étant donné un optimum local, de le comparer à un optimum local de l'ensemble complémentaire de solutions et de renvoyer naturellement le meilleur de ces deux optima. Certains problèmes suggèrent une notion encore différente d'optima locaux, pas tant par la définition de l'optimalité locale que dans la définition même du problème, dans le sens de la restriction de l'ensemble de ses solutions à des solutions que l'on pourrait qualifier de *non dominées*. Nous pensons à des problèmes, tels le problème de *localisation* ou encore d'*arbre couvrant de profondeur 2*, dont la résolution fait apparaître une dépendance entre deux types de décision. Pour le premier, on dispose d'un certain nombre de sites sur lesquels peuvent être placés des concentrateurs et de terminaux à relier aux concentrateurs ; l'installation d'un concentrateur engendre un coût fixe, puis la liaison d'un terminal à un concentrateur engendre un coût généralement proportionnel à la distance les séparant, sachant qu'à un concentrateur installé on peut, dans le cas le moins restreint, raccorder autant de terminaux que l'on veut : l'enjeu du problème est alors de décider quels concentrateurs et quelles liaisons terminal-concentrateur installer de sorte que chaque terminal soit raccordé à un concentrateur, et ce à moindre coût. Le second problème cherche, dans un graphe complet arêtes-valué et étant donné un sommet r de ce graphe, à en recouvrir les sommets par un arbre de racine r et de profondeur 2 qui soit de moindre coût. En toute rigueur, deux solutions sont h -distantes si elle diffèrent pour le problème de localisation de h choix de concentrateurs et de liaisons terminal-concentrateur, pour le problème d'arbre couvrant de profondeur 2 de h choix du père des sommets. Or, cela se fait sans exploiter la structure *en deux temps* de ces problèmes : une fois qu'un ensemble de concentrateurs à installer est arrêté, on sait leur raccorder les terminaux à moindre coût en temps polynomial ; une fois les sommets de premier niveau (ayant pour père la racine r) déterminés, on sait leur raccorder les sommets restants, de niveau deux dans l'arbre, à moindre coût en temps polynomial. Cela traduit le fait que toutes les décisions n'ont pas même valeur : le

choix des concentrateurs pour le premier problème, celui des sommets de premier niveau pour le second suffisent à déterminer *entièrement* la solution. Considérant le raccordement des terminaux aux concentrateurs ou des sommets de second niveau aux sommets de niveau 1 comme des sous-problèmes du problème global, on aurait ainsi envie de définir, comme ensemble de solutions, les combinaisons de concentrateurs et de sommets de premier niveau, de sorte que deux solutions sont h -distantes si elles diffèrent du choix de h concentrateurs, de h sommets de premier niveau : des solutions qui auraient pu paraître éloignées de premier abord sont en réalité voisines si l'on restreint la description de l'ensemble des solutions aux choix réellement décisifs dans la constitution des solutions.

Rapport différentiel et classes de problèmes

La recherche en terme de rapport différentiel est encore jeune, et les liens entre les différentes classes d'approximation classiques, différentielles et logiques, leur positionnement relatif dans la hiérarchie des problèmes de *NPO*, ne sont pas encore bien établis, contrastant avec la connaissance que l'on en a en approximation classique. Or, nous avons à plusieurs reprises insisté sur cet aspect au cours de ce document, de tels résultats sont fort riches d'enseignement quant à la structure de *NPO*. Il serait notamment intéressant de savoir comment se situent sur l'échelle différentielle certains problèmes clef en approximation classique tels *Max Sat* et *Max 3-Sat*, mais aussi de déterminer des problèmes clef dans le cadre différentiel, problèmes complets dessinant les frontières, "*pour autant que P soit différent de NP*", entre les classes d'approximation différentielles. Concernant les problèmes de satisfaisabilité, les limites que nous avons tracées jusqu'ici sont pour le moins grossières : nous avons, d'un côté dans *APX*[δ], le problème *Max 2-CCSP*- ℓ (instances de *Max 2-CCSP* dont la pire solution vérifie au plus ℓ clauses) par la démonstration que l'on a faite de son appartenance à *CGLO*[δ], et de l'autre, *Max Wk-Sat-PB* pour $k \geq 4$ dont on a montré qu'il ne pouvait en différentiel être approché d'aucun rapport non nul : entre les deux, divers problèmes de satisfaisabilité restent à situer, et l'on peut espérer qu'ils atteindront différents degrés d'approximation différentielle. Si ces problèmes nous intéressent tout particulièrement, c'est qu'ils renferment en eux et permettent de lier entre-eux, nous l'avons vu par le biais de quelques réductions, nombre de problèmes de *NPO*.

Les rapports étant différents, ils n'expriment forcément pas la même description de *NP* et de la difficulté relative des problèmes vis-à-vis de leur degré d'approximabilité ; il est

cependant instructif de voir comment une réduction classique entre deux problèmes Π et Π' se traduit parfois en différentiel par une réduction de Π à une version *plus difficile* de Π' : nous pensons notamment, mais cela reste à démontrer, que la L -réduction générique proposée dans [74] par Papadimitriou et Yannakakis de tout problème de *Max SNP* à *Max 3-Sat* pourrait être vue, sous l'angle différentiel, comme une réduction affine de tout problème Π de *Max SNP* à *Max Maximal(k) 3-Sat* où *Max Maximal(k) 3-Sat* désigne la restriction de *Max 3-Sat* aux optima k -locaux du problème, k dépendant du nombre d'opérateurs du prédicat ϕ descriptif des éléments des solutions de Π . Les réductions mettent pour l'analyse classique en relation les solutions de l'instance initiale I avec des “bonnes” solutions de l'instance image $f(I)$. Il est courant que la transformation f “grossisse” le problème en y introduisant des “mauvaises” solutions, la preuve en est la restriction de l'ensemble $Sol_{\Pi'}(f(I))$ que font certains chercheurs à un sous-ensemble $S_{\Pi'}(f(I))$ qui soit *plus représentatif* de l'ensemble initial de solutions $Sol_{\Pi}(I)$ ([11] et [82]) ; or, en différentiel, la prise en compte de la pire solution interdit d'éluder ces mauvaises solutions : la réduction exhibe dans le cas différentiel une *homothétie* entre les deux ensembles de solutions $Sol_{\Pi}(I)$ et $Sol_{\Pi'}(f(I))$ qui doit considérer des solutions dans toute l'envergure de $Sol_{\Pi'}(f(I))$, quand le rapport classique se contente de translater $Sol_{\Pi}(I)$ sur une partie pertinente de $Sol_{\Pi'}(f(I))$, se permettant ainsi d'en délaissier toute une partie. Donnons pour illustration deux preuves de complétude dans *Max SNP* proposées dans [74] que nous nous sommes amusés à regarder sous l'angle différentiel : les L -réductions de *Max IS* à *Max 2-Sat* et de *Max k-Sat - B* à *Max IS - (B + k - 2)* se transforment en réductions affines de *Max IS* à *Max Maximal 2-Sat* (on entend par *Maximal* la restriction de l'ensemble des solutions aux affectations qui sont optima 1-locaux), de *Max k-Sat - B* à *Max Maximal IS - (B + k - 2)* (on entend par *Maximal* la restriction de l'ensemble des solutions aux stables maximaux). Ces réflexions et les réductions abordées dans ce document peuvent donner l'impression qu'en différentiel, deux problèmes sont soit affinement liés, soit non comparables ; cette impression est bien évidemment fautive, de nombreuses réductions, notamment des réductions continues, ayant déjà été établies ([32],[35]) ; il s'agit cependant bien d'une mise en avant du degré supérieur de difficulté de rapprochement non trivial de deux problèmes en différentiel, parce que ce rapport exige une proximité plus forte qu'en classique entre les espaces de solutions. Ainsi, il est possible que l'on fasse, sous l'angle de ce rapport, apparaître plus de familles de problèmes, sans nécessairement être en mesure de rapprocher et regrouper ces familles en terme de classes. Un obstacle essentiel à l'établissement d'un résultat de

complétude en approximation différentielle, est le fait que pour certains problèmes de NP , la notion même de *pire solution* est mal définie : prenons pour exemple le problème $CDFFA$ (*Consistent Deterministic Finite Automata*), décrit par exemple dans [79] ; il s'agit, sur un alphabet $\Sigma = \{0,1\}$ et étant donnés deux ensembles de mots $P \subseteq \Sigma^*$ et $N \subseteq \Sigma^*$, de concevoir un automate déterministe fini capable d'accepter les mots de P , mais pas ceux de N , à l'aide d'un minimum d'états (tout autre mot de Σ^* pouvant être accepté ou non). Qui pourrait donner en toute rigueur et sans équivoque le nombre d'états d'un automate déterministe fini acceptant P et non N avec le plus d'états possible ? Ce que l'on veut exprimer ici, c'est l'idée que la définition (ou la connaissance qu'on en a) des problèmes $\Pi = (\max, I_\Pi, Sol_\Pi, m_\Pi)$ ou $\Pi = (\min, I_\Pi, Sol_\Pi, m_\Pi)$ de NPO est parfois trop faible ou trop imprécise pour permettre d'appréhender la réalité cachée derrière les solutions optimales du problème $\bar{\Pi} = (\min, I_\Pi, Sol_\Pi, m_\Pi)$ ou $\bar{\Pi} = (\max, I_\Pi, Sol_\Pi, m_\Pi)$.

Ces difficultés (et la surprenante frilosité de la communauté scientifique à l'égard de cette ouverture du champ d'investigation de la discipline) ne doivent pourtant pas décourager les recherches sur cette voie. D'une part, l'approche différentielle se justifie d'elle-même dans le cadre de la résolution approchée avec garantie de performance : pour certaines décisions, se savoir aussi loin de la pire solution que proche de la solution optimale ($\delta_\Pi(I, T) \geq \omega_\Pi(I)/2 + \beta_\Pi(I)/2$) peut être plus crucial que de se savoir à moitié de l'optimum ($\rho_\Pi(I, T) \geq \beta_\Pi(I)/2$). D'autre part, s'il était besoin de la défendre, il suffirait pour y parvenir de se remémorer nombre d'algorithmes approchés pour ce rapport qui ont été trouvés ([32]), certains se basant sur la définition syntaxique des problèmes ([69]), certains égalant et améliorant même les meilleurs résultats classiques connus pour les problèmes concernés ($Max\ TSP$: [70],[71]), d'autres permettant d'en approcher qui sont non-approximables à moins que P n'égalé NP en classique ($Min\ C$: [31]), d'autres encore parvenant même à des schémas différentiels ([33]). Par ailleurs, la réduction affine est un outil qui, en établissant des classes d'équivalence, permet de regarder comme un seul des problèmes qu'on aurait pu croire comme différents, réduisant en quelque sorte la taille de NPO , sous le regard différentiel.

Il faudrait ainsi réfléchir à une définition de NPO qui soit non pas artificielle, mais cohérente avec l'approche différentielle au sens de la caractérisation de la pire solution, pour élargir comme il se doit la perspective différentielle d'un simple outil d'évaluation des algorithmes et des problèmes à une vision complète de l'approximation polynomiale et de l'appréhension de NPO .

Annexe A

Guide des problèmes rencontrés

Nous présentons ici les différents problèmes évoqués au cours de ce travail par le biais d'une définition accompagnée de certains résultats d'approximation, en se limitant toutefois à l'approximation à rapport constant. Aussi invitons-nous fortement le lecteur à consulter le très complet et toujours à jour compendium de Crescenzi et Kann à l'adresse <http://www.nada.kth.se/~viggo/problemlist/> pour plus de précisions concernant ces problèmes et les références des différents résultats qui s'y rapportent. Tous les résultats négatifs énoncés sont conditionnés par une hypothèse forte de complexité de type $P \neq NP$. Attention, les résultats donnés pour les rapports classique et différentiel, pour les problèmes de maximisation comme de minimisation, considèrent les rapports ρ' et δ' inverses des rapports ρ et δ pris comme référence dans ce document, et ceci dans un but de cohérence avec le compendium :

$$\begin{aligned} \rho'_{\Pi}(I, \lambda_{\mathcal{A}}(I)) &= \begin{cases} \beta_{\Pi}(I)/\lambda_{\mathcal{A}}(I) & \text{si } opt_{\Pi} = \min, \\ \lambda_{\mathcal{A}}(I)/\beta_{\Pi}(I) & \text{si } opt_{\Pi} = \max \end{cases} \\ \delta'_{\Pi}(I, \lambda_{\mathcal{A}}(I)) &= (\omega_{\Pi}(I) - \beta_{\Pi}(I)) / (\omega_{\Pi}(I) - \lambda_{\mathcal{A}}(I)) \quad . \end{aligned}$$

S'agissant de la mesure classique, on dira qu'un problème Π est ρ -approximable à rapport r et s'agissant du rapport différentiel, que Π est δ -approximable à rapport r . On parlera, pour le rapport R classique ou différentiel, de $NPO[R]$ (*resp.* d' $APX[R]$)-complétude ou difficulté vis-à-vis d'une réduction préservant les schémas d'approximation (*resp.* l'approximation à rapport constant). Pour exprimer la non approximabilité à rapport constant au sens de la mesure r , on notera $\neg APX[R]$; l'hypothèse de complexité (généralement $P \neq NP$) conditionnant cette assertion sera toujours omise.

Nous séparons les problèmes en les trois catégories “*problèmes dans les graphes*”, “*problèmes*

de programmation linéaire” et “problèmes de logique”, selon la façon dont il est le plus naturel ou le plus courant de les représenter (chaque problème ayant plusieurs représentations pertinentes envisageables et envisagées pour leur résolution).

Problèmes dans les graphes

Min DS

Minimum Dominating Set, ensemble dominant, $\neg APX$, $APX[\delta]$

Description

Instance : un graphe simple $G(V, E)$

Solution réalisable : sous-ensemble de sommets $U \subseteq V$ vérifiant pour tout sommet v de V : “ $v \in U$ ou $\langle \{v\}, U \rangle \neq \emptyset$ ”¹

Solution optimale : ensemble dominant U de taille minimum

Déclinaison

Min DS – B : degrés bornés par B , δ -approximable à B par *LSA*

À noter

ρ - et δ -approximable à 2 par *LSA* (optima miroirs 1-locaux, chapitre 3)²

Min VC

Minimum Vertex Cover, couverture de sommets, $APX - c$, $\neg APX[\delta]$

Description

Instance : un graphe simple $G(V, E)$

Solution réalisable : sous-ensemble de sommets $U \subseteq V$ tel que $E = \langle U, V \rangle$

Solution optimale : couverture de taille minimum

Déclinaisons

Min VC – B : degrés bornés par B , ρ - et δ -approximable à B par *LSA* (optima 1-locaux, [11], chapitre 3), $APX - c$ pour $B \geq 3$ [74]

Max IS

Maximum Independant Set, stable maximum, $\neg APX$, $\neg APX[\delta]$

Description

1. on rappelle la notation pour deux sous-ensembles de sommets X et Y , $\langle X, Y \rangle = \{xy \in E / x \in X \text{ et } y \in Y\}$

2. un *LSA* (*Local Search Algorithm*) est un algorithme de recherche local (cf. paragraphe 3.1.1)

Instance : un graphe simple $G(V, E)$

Solution réalisable : sous-ensemble de sommets $U \subseteq V$ tel que $\langle U, U \rangle = \emptyset$

Solution optimale : ensemble stable de taille maximum

Déclinaisons

Max IS - B : degrés bornés par B , ρ - et δ -approximable à B par *LSA* (optima 1-locaux, [11], chapitre 3), *APX - c* pour $B \geq 3$ [74]

Max RIS : *Max Regular-degree IS*, problème de stable dans un graphe régulier *i.e.* dont les sommets sont tous de même degré Δ

Max WIS : *Max Weighted IS*, sommets pondérés, il faut maximiser la somme des poids des sommets d'un stable dans G

Max Cl

Maximum Clique, clique maximum

Description

Instance : un graphe simple $G(V, E)$

Solution réalisable : sous-ensemble de sommets $U \subseteq V$ tel que $\langle U, U \rangle = U \times U$

Solution optimale : clique de taille maximum

À noter

approximation identique à celle de *Max IS* sous tout rapport

Max SP

Maximum Set Packing, couverture dans un hypergraphe

Description

Instance : une famille $C = \{c_1, \dots, c_i, \dots, c_n\}$ d'ensembles finis

Solution réalisable : sous-ensemble $D \subseteq C$ d'ensembles c_i deux à deux disjoints

Solution optimale : sous-ensemble d'ensembles disjoints de taille maximum

À noter

approximation identique à celle de *Max IS* sous tout rapport

Min IDS

Minimum Independant Dominating Set, ensemble dominant stable minimum, *NPO - c* [45] et [57]), $\neg APX[\delta]$

Description

Instance : un graphe simple $G(V, E)$

Solution réalisable : sous-ensemble de sommets à la fois stable et dominant

Solution optimale : solution réalisable de taille minimum

Déclinaison

Min WIDS: *Min Weighted IDS*, sommets pondérés, il faut minimiser la somme des poids des sommets d'un ensemble dominant stable dans G

À noter

également appelé *Min Mal IS Minimum Maximal Independent Set*, stable maximal minimum (tout stable maximal étant dominant); non δ -approximable à mieux que 0 [16]

Max CB

Maximum Complete Bipartite-graph, sous-graphe biparti complet

Description

Instance : un graphe simple $G(V, E)$

Solution réalisable : deux sous-ensembles disjoints U_1 et U_2 de V qui forment un graphe biparti complet *i.e.* tels que $\langle U_1, U_2 \rangle = U_1 \times U_2$ et $\langle U_1, U_1 \rangle = \langle U_2, U_2 \rangle = \emptyset$

Solution optimale : sous-graphe biparti complet sur U_1 et U_2 qui maximise $|U_1| + |U_2|$

Max Cut

Maximum Cut, coupe maximum, $APX - c$ [74], $APX[\delta]$

Description

Instance : un graphe simple $G(V, E)$

Solution réalisable : sous-ensemble de sommets $U \subseteq V$

Solution optimale : ensemble U de sommets qui maximise $|\langle U, V \setminus U \rangle|$

À noter

ρ - et δ -approximable à 2 par *LSA* (optima 1-locaux, [11], chapitre 3)

Min FES

Minimum Feedback Edge Set, ensemble minimum d'arêtes retour, $APX[\delta]$

Description

Instance : un graphe simple $G(V, E)$

Solution réalisable : sous-ensemble d'arêtes $F \subseteq E$ tel que tout cycle de G emprunte au moins une arête de F

Solution optimale : ensemble d'arêtes retour F de taille minimum

Déclinaison

Min DFES (Min Directed FES) : graphe orienté, $APX - h$ [56]

À noter

δ -approximable à 2 par *LSA* (optima 1-locaux, chapitre 4)

Min FNS

Minimum Feedback Node Set, ensemble minimum de sommets retour, $APX - c$ [12]

Description

Instance : un graphe simple $G(V, E)$

Solution réalisable : sous-ensemble de sommets $U \subseteq V$ tel que tout cycle de G emprunte au moins un sommet de U

Solution optimale : ensemble de sommets retour F de taille minimum

Déclinaisons

Min FNS - B : sommets de degré borné par B , δ -approximable à $(B + 2)/2$ par *LSA* (optima 1-locaux, chapitre 4)

Min DFNS (Min Directed FNS) : graphe orienté, $APX - h$ [56]

À noter

n'est pas ni dans *GLO*, ni dans *GLO* $[\delta]$ (chapitre 4)

Min SC

Minimum Set Cover, couverture d'ensemble, $\neg APX$, $\neg APX[\delta]$

Description

Instance : une famille $S = \{s_1, \dots, s_i, \dots, s_n\}$ de sous-ensembles d'un ensemble fini C

Solution réalisable : une couverture de l'ensemble C (i.e. un sous-ensemble $S' \subseteq S$ de sous-ensembles d'union C)

Solution optimale : une couverture de taille minimum

Déclinaison

Min SC - B : sous-ensembles s_j de taille au plus B , δ -approximable à $B + 1$ par *LSA* (optima 1-locaux, chapitre 4)

Min SC - Δ : les éléments c_i apparaissent dans au plus Δ sous-ensembles

Min RSSC : les sous-ensembles s_j sont tous de même taille

Min WSC : les sous-ensembles s_j sont pondérés par des entiers p_1, \dots, p_n , il s'agit de déterminer une couverture S' qui minimise la somme des poids des sous-ensemble dont elle est constituée

Min HS

Minimum Hitting Set, ensemble transversal

Description

Instance : une famille $C = \{c_1, \dots, c_i, \dots, c_n\}$ de sous-ensembles d'un ensemble fini S

Solution réalisable : un ensemble transversal (*i.e.* un sous-ensemble $T \subseteq S$ qui contient un élément au moins de chaque sous-ensemble c_i)

Solution optimale : un transversal de taille minimum

À noter

approximation identique à celle de *Min SC* sous tout rapport

Min C

Coloration Minimum, $\neg APX$, $APX[\delta] \setminus PTAS[\delta]$ [32]

Description

Instance : un graphe simple $G(V, E)$

Solution réalisable : une partition $\mathcal{S} = \{V_1, \dots, V_q\}$ de l'ensemble V des sommets en sous-ensembles stables

Solution optimale : partition de taille minimum

À noter

δ -approximable par *LSA* à 2 comme problème de partitionnement héréditaire (optima 1-locaux, chapitre 4)

Min TSP

Minimum Traveling Salesman Problem, voyageur de commerce, $NPO - c$ [72], $APX[\delta]$ [70]

Description

Instance : $(G(V, E), d)$ graphe simple arêtes-valué

Solution réalisable : $T \subseteq E$ tel que T forme un tour sur V , de valeur la somme des distances des arêtes qui le constituent

Solution optimale : tour de coût minimum

Déclinaison

Min Δ TSP: les distances vérifient l'inégalité triangulaire, approximable à rapport $3/2$, *APX* – *c* [75]

MinTSPab: distances à valeur dans $\{a, b\}$ pour deux réels $a < b$, approximable à $7/6$ pour $a = 1$ et $b = 2$, δ -approximable à $4/3$ (chapitre 9)

À noter

δ -approximable à 2 par *LSA* (voisinage 2 – *opt*, chapitre 4 et chapitre 8), δ -approximable à $3/2$ [70]

Max TSP

Version maximisation du problème précédent, *APX*, *APX*[δ]

Approximation

Approximable à rapport $4/3$ pour le cas non orienté, $63/38$ pour le cas orienté, à $7/8$ pour le cas particulier bivalué *MaxTSPab*; ρ -approximable à 2 par *LSA* (voisinage 2 – *opt*, chapitre 4); résultats différentiels identiques à ceux donnés pour la version minimisation

Problèmes de programmation linéaire

Min PL{0,1}

Progammation Linéaire en {0, 1}, *NPO* – *c* [72], \neg *APX*[δ]

Description

Instance: une matrice A $m \times n$ à coefficients dans \mathbb{Z} , un vecteur b de \mathbb{N}^m , un vecteur c de \mathbb{N}^n

Solution réalisable: un vecteur x de $\{0, 1\}^n$ qui vérifie $Ax \geq b$

Solution optimale: une solution x qui minimise $c \cdot x$

Version maxisation Min PL{0, 1}: il faut maximiser $c \cdot x$ sous contrainte $Ax \leq b$; *NPO* – *c* [21]; équivalent à *Min PL{0, 1}* en différentiel

À noter

non δ -approximable à mieux que 0 (chapitre 6)

Max KS

Maximum KnapSack, problème de sac-à-dos, *FPTAS* [52], *FPTAS*[δ]

Description

Instance: un ensemble X d'objets à valeur dans $\mathbb{N}^{|X|}$, pour chaque objet x un volume unitaire

$a_x \in \mathbb{N}$, une utilité unitaire $c_x \in \mathbb{N}$ et éventuellement une borne $b_x \in \mathbb{N}$; une capacité $b \in \mathbb{N}$ (capacité du sac)

Solution réalisable : une affectation entière des variables x telle que $\sum_{x \in X} a_x \leq b$

Solution optimale : une affectation réalisable qui maximise l'utilité $\sum_{x \in X} c_x$

Déclinaison

Max KS(k) : poids et utilités bornées par $|X|^k$ pour k constante universelle

Max KS{0,1} : les variables sont à valeur dans $\{0,1\}$

Version minisation Min KS : il faut minimiser $c \cdot x$ sous contrainte $a \cdot x \geq b$; équivalent à *Max KS* en différentiel.

Max S Sum

Maximum Subset Sum, problème de plus grand minorant, *FPTAS*, *FPTAS* $[\delta]$ (comme cas particulier du problème de sac-à-dos)

Description

Instance : une collection de n entiers a_1, \dots, a_n , un entier b

Solution réalisable : une sélection $x \in \{0,1\}^n$ des entiers a_1, \dots, a_n dont la valeur totale $\sum_{i=1}^n a_i \times x_i$ n'excède pas b

Solution optimale : une sélection réalisable qui se rapproche le plus de b

Version minimisation Min S Sum, problème du plus petit majorant : il faut minimiser $c \cdot x$ sous contrainte $a \cdot x \geq b$; admet également un schéma complet d'approximation en classique [44], équivalent à *Max S Sum* en différentiel.

Problèmes de logique

Max Sat

Maximum Satisfiability, problème de satisfaisabilité maximum, *APX* - c [74]

Description

Instance : un ensemble X de variables bivalentes, une famille $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ de clauses disjonctives sur l'ensemble des littéraux $\{x_1, \dots, x_n\} \cup \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$

Solution réalisable : une affectation des valeurs de vérité

Solution optimale : une affectation qui rende vraies un nombre maximum de clauses

À noter

ρ -approximable à 2 par *LSA* (optima 1-locaux [11], chapitre 6)

Déclinaisons

Max k - Sat : chaque clause contient *au plus k* littéraux ; *APX - c* [74], admet un *PTAS* pour ses instances denses [8] ;

Max E - k - Sat : chaque clause contient *exactement k* littéraux, *APX - c* (par réduction à partir de *Max k - Sat*), ρ -approximable à $1/(1 - 2^{-k})$ [53], et ce ratio n'est améliorable par aucune constante $\varepsilon > 0$ [49]

Max k⁺ - Sat : chaque clause contient *au moins k* littéraux ; approximable par *LSA* à $(2k+1)/2k$ (optima 1-locaux altérés, selon le critère *Max NAE Sat*, chapitre 6) pour $k \geq 3$, par *LSA* à $4/3$ pour $k = 2$ (optima miroirs 1-locaux chapitre 6, optima 1-locaux altérés [59])

Max WSat : les clauses sont pondérées par des entiers p_1, \dots, p_m et il s'agit de trouver une affectation T des valeurs de vérité qui maximise la somme des poids des clauses vérifiées par T

Max WSat : les variables sont pondérées par des entiers p_1, \dots, p_n dont la somme est comprise dans un intervalle $[B, 2B]$ (B dépendant éventuellement de n) et il s'agit de trouver une affectation T des valeurs de vérité qui maximise la somme des poids des variables mises à 1 par T si T satisfait la formule, B sinon ; *APX - c* [28] ; non δ -approximable à mieux que 0, indépendamment de l'ordre de grandeur des poids, et même pour des ensembles de clauses de taille k pour $k \geq 4$ (chapitre 4.4.1)

Min Sat (il faut vérifier un nombre minimum de clauses) ρ -approximable à 2 [22], non δ -approximable à mieux que 0 (chapitre 6)

Min k - Sat (il faut vérifier un nombre minimum de k -clauses) est *APX - c* [62] et ρ -approximable à $2(1 - 1/2^k)$ [22] pour $k \geq 2$; admet un *PTAS* pour ses instances denses pour $k = 2$ [14]

Max k-NAE-Sat

Maximum Not-All-Equal k-Satisfiability, *APX - c* pour $k = 3$ [74]

Description

Instance : un ensemble X de variables bivalentes, une famille $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ de clauses disjonctives de taille k sur l'ensemble des littéraux $\{x_1, \dots, x_n\} \cup \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$

Solution réalisable : une affectation des valeurs de vérité

Solution optimale : une affectation qui place au moins un littéral vrai et un littéral faux dans un nombre maximum de clauses

Déclinaisons

Max Pos NAE - k - Sat : seuls les littéraux positifs x_1, \dots, x_n interviennent, équivalent à *Max Cut* sous tout rapport

Max k-CCSP

Maximum k-ary Conjunctive Constraint Satisfaction, problème de satisfaction de k -conjonctions maximum, *APX - c* [21]

Description

Instance : un ensemble X de variables bivalentes, une famille $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ de clauses conjonctives de taille k sur l'ensemble des littéraux $\{x_1, \dots, x_n\} \cup \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$

Solution réalisable : une affectation des valeurs de vérité

Solution optimale : une affectation qui rende vraies un nombre maximum de clauses

Approximation

ρ -approximable à 2^{k-1} pour toute constante k [80], à 1.165 pour $k = 2$ et à 2 pour $k = 3$; ρ -approximable par *LSA* à $2^k - 1$ (optima 1-locaux altérés [3]) pour $k \geq 3$, à $2/3$ pour $k = 2$ (optima miroirs 1-locaux altérés, chapitre 6);

Déclinaisons

Max E - k - CCSP : chaque clause contient *exactement* k littéraux, admet un *PTAS* pour ses instances denses [4]

Min 3 - CCSP - 3 : version *minimisation* et le nombre des occurrences de chaque variable est borné par 3, *NPO - PB-complet* pour la E -réduction et ne peut être approché à $n^{1-\varepsilon}$ pour toute constante $\varepsilon > 0$ [61]

Min EQ

Minimum Equivalence, problème de satisfaction d'équivalences, *APX - h* [43]

Description

Instance : un ensemble X de variables bivalentes, une famille $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ d'équivalences du type $l_i \equiv l_j$ sur l'ensemble des littéraux $\{x_1, \dots, x_n\} \cup \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$

Solution réalisable : une affectation des valeurs de vérité

Solution optimale : une affectation qui rende vraies un nombre minimum d'équivalences

À noter

approximable en $O(\log n)$ [43]; admet un *PTAS* pour ses instances denses [14]

Min E-k-Lin2

Minimum kary-Equations2, problème d'équations k -aires sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Description

Instance : un ensemble X de variables bivalentes, une famille $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ d'équations linéaires k -aires à coefficients binaires sur X (du type $x_{i_1} \oplus \dots \oplus x_{i_p} = b$, $p \leq k$, $b \in \{0, 1\}$)

Solution réalisable : une affectation des variables de l'ensemble X

Solution optimale : une affectation qui rende vraies un nombre minimum d'équations

À noter

admet un *PTAS* pour ses instances denses [14]

Autres problèmes

Min BP

Minimum Bin Packing, problème de rangement en un nombre minimum de boîtes, *APX*, *PTAS* $[\delta] \setminus FPTAS[\delta]$ [33]

Description

Instance : une collection de n objets x_1, \dots, x_p de volumes entiers a_1, \dots, a_n , n boîtes b_1, \dots, b_n de même capacité entière b

Solution réalisable : une affectation $x \in \{1, \dots, n\}^n$ des objets x_j aux boîtes b_j de sorte que la somme $\sum_{i=1}^{p_j} a_{j_i}$ des volumes des objets $x_{j_1}, \dots, x_{j_{p_j}}$ placés dans chaque boîte b_j n'excède pas la capacité b de la boîte

Solution optimale : une affectation réalisable qui minimise le nombre de boîtes utilisées

À noter

δ -approximable par *LSA* à 2 comme problème de partitionnement héréditaire (optima 1-locaux, chapitre 4)

Min MS

Minimum Multiprocessor Scheduling, problème d'ordonnancement multiprocesseurs, *PTAS* [51]

Description

Instance : n tâches x_1, \dots, x_n de durées d'exécution entières p_1, \dots, p_n (durées indépendantes de la machine sur laquelle les tâches sont exécutées), m machines M_1, \dots, M_m

Solution réalisable : toute répartition $x \in \{1, \dots, m\}^n$ des tâches x_j sur les machines M_1, \dots, M_m de sorte que chaque tâche soit exécutée une et une seule fois

Solution optimale : une répartition qui minimise le plus long temps d'exécution des machines, le temps d'exécution d'une machine étant donné par la somme $\sum_{i=1}^{p_j} p_{j_i}$ des temps d'exécution des tâches $x_{j_1}, \dots, x_{j_{p_j}}$ qui lui ont été confiées

À noter

ρ -approximable par *LSA* à $2 - 1/m$ et δ -approximable par *LSA* à $m/(m - 1)$ (optima 1-locaux, chapitre 4)

Annexe B

Guide des définitions

B.1 Les fondements

NPO (paragraphe 2.1.1) - un problème Π de *NPO* est un quadruplet $(I_\Pi, Sol_\Pi, m_\Pi, opt_\Pi)$ qui vérifie :

- (i) I_Π est reconnaissable en temps polynomial en $|I|$
- (ii') $\exists p_\Pi$ polynôme t.q. $\forall I \in I_\Pi, Sol_\Pi(I) \subseteq \{0, 1\}^{p_\Pi(|I|)}$,
- (iii) $\forall I, \forall s$, décider si s est réalisable pour I est polynomial en $|I|$;
- (iv) $m_\Pi : I_\Pi \times Sol_\Pi \rightarrow \mathbb{N}$ est calculable en temps polynomial en $|I|$;
- (v) $opt_\Pi \in \{\min, \max\}$.
- (vi) $\forall I \in I_\Pi$, on sait déterminer une solution $triv_\Pi(I)$ en temps polynomial en $|I|$.

Valeurs remarquables $\beta_\Pi(I)$ et $\omega_\Pi(I)$ (paragraphe 2.1.2) - soient Π un problème de *NPO* et I l'une de ses instances :

$$\begin{aligned} \text{valeur optimale} \quad \beta_\Pi(I) &= opt_{\Pi s \in Sol_\Pi(I)} \{m_\Pi(I, s)\} \\ \text{valeur d'une pire solution} \quad \omega_\Pi(I) &= \overline{opt}_{\Pi s \in Sol_\Pi(I)} \{m_\Pi(I, s)\}^1. \end{aligned}$$

Quantités remarquables $supp_\Pi(I)$ et $diam_\Pi(I)$ (paragraphe 2.1.2) - soit Π un problème de *NPO* et I l'une de ses instances :

$$\begin{aligned} \text{le support} \quad supp_\Pi(I) &= |\{m_\Pi(I, s) : s \in Sol_\Pi(I)\}| \\ \text{le diamètre} \quad diam_\Pi(I) &= |\omega_\Pi(I) - \beta_\Pi(I)|. \end{aligned}$$

Problèmes polynomialement bornés *NPO-PB* (paragraphe 2.1.2) - un problème Π de *NPO* est dans la classe *NPO - PB* s'il existe un polynôme q_Π tel que :

$$\forall I \in I_\Pi, \max\{\omega_\Pi(I), \beta_\Pi(I)\} \leq q_\Pi(|I|).$$

1. $\forall \Pi \in NPO, (opt_\Pi = \max \Rightarrow \overline{opt}_\Pi = \min) \wedge (opt_\Pi = \min \Rightarrow \overline{opt}_\Pi = \max)$

Rapports d'évaluation (*paragraphe 2.3*) - la performance d'un algorithme approché \mathcal{A} sur une instance I d'un problème Π de NPO est donnée par les rapports, respectivement **classique** $\rho_{\Pi}^{\mathcal{A}}(I)$ et **différentiel** $\delta_{\Pi}^{\mathcal{A}}(I)$:

$$\rho_{\Pi}^{\mathcal{A}}(I) = \begin{cases} \lambda_{\mathcal{A}}(I)/\beta_{\Pi}(I) & \text{si } opt_{\Pi} = \max, \\ \beta_{\Pi}(I)/\lambda_{\mathcal{A}}(I) & \text{si } opt_{\Pi} = \min \end{cases} \quad \text{et } \delta_{\Pi}^{\mathcal{A}}(I) = \frac{\omega_{\Pi}(I) - \lambda_{\mathcal{A}}(I)}{\omega_{\Pi}(I) - \beta_{\Pi}(I)} ;$$

la performance de \mathcal{A} pour Π , en **classique** $\rho_{\Pi}^{\mathcal{A}}$ et **différentiel** $\delta_{\Pi}^{\mathcal{A}}$, est alors donnée par :

$$\rho_{\Pi}^{\mathcal{A}} = \inf_{I \in I_{\Pi}} \{\rho_{\Pi}^{\mathcal{A}}(I)\} \quad \text{et} \quad \delta_{\Pi}^{\mathcal{A}} = \inf_{I \in I_{\Pi}} \{\delta_{\Pi}^{\mathcal{A}}(I)\}.$$

Limites des classes (*paragraphes 2.6.2 et 2.6.3*) - soient X et Y deux classes de problèmes de NPO et \mathcal{X} une réduction préservant l'appartenance à X , on définit les trois classes suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{problèmes } Y\text{-complets} & Y\text{-c} = \{\Pi \in Y / \forall \Pi' \in Y, \Pi' \propto^{\mathcal{X}} \Pi\}, \\ \text{problèmes } Y\text{-difficiles} & Y\text{-h} = \{\Pi / \forall \Pi' \in Y, \Pi' \propto^{\mathcal{X}} \Pi\}, \\ \text{fermeture de } Y & \overline{Y}^{\mathcal{X}} = \{\Pi \in NPO / \exists \Pi' \in Y, \Pi \propto^{\mathcal{X}} \Pi'\}. \end{array}$$

B.2 Les classes

B.2.1 Classes d'approximation

PO - un problème Π de NPO est dans PO s'il existe un algorithme polynomial \mathcal{A} qui résoud Π à l'optimum.

APX[R] (*paragraphe 2.4*) - un problème Π de NPO est dans $APX[R]$ s'il existe un algorithme polynomial approché \mathcal{A} pour Π et une constante r_0 dans $]0, 1]$ tels que " $R_{\mathcal{A}}(\Pi) \geq r_0$ ".

Schéma d'approximation (*paragraphe 2.4*) - un schéma d'approximation pour Π est une famille d'algorithmes approchés $(\mathcal{A}_r)_{0 \leq r < 1}$ qui vérifie " $\forall r \in [0, 1[, R_{\mathcal{A}_r}(\Pi) \geq r$ ".

PTAS[R] (*paragraphe 2.4*) - un problème Π de NPO est dans $PTAS[R]$ s'il admet un schéma d'approximation $(\mathcal{A}_r)_{0 \leq r < 1}$ dont la complexité C vérifie :

$$\forall I, \forall r, C(\mathcal{A}_r(I)) = p_r(|I|) \quad (\text{le degré de } p_r \text{ dépend de } r).$$

B.2.2 Classes définies par la logique

MaxNP₀ (paragraphe 2.5) - un problème Π de maximisation de NP est dans $MaxNP_0$ s'il existe deux types similaires finis \mathcal{I} et \mathcal{S} , une formule ϕ du premier ordre sans quantificateur et deux constantes k et ℓ , tels que les optima de Π peuvent être exprimés sous la forme :

$$\beta_{\Pi}(I) = \max_S |\{x \in U^k / \exists y \in U^{\ell}, \phi(I, S, x, y)\}|$$

où I est une \mathcal{I} -structure finie d'univers U et S une \mathcal{S} -structure finie de même univers U .

MaxSNP₀ (paragraphe 2.5) - un problème Π de maximisation de NPO est dans $MaxSNP_0$ s'il existe deux types similaires finis \mathcal{I} et \mathcal{S} , une formule ϕ du premier ordre sans quantificateur et une constante k , tels que les optima de Π peuvent être exprimés sous la forme :

$$\beta_{\Pi}(I) = \max_S |\{x \in U^k / \phi(I, S, x)\}|$$

où I et S sont respectivement une \mathcal{I} et une \mathcal{S} -structures finies d'univers U .

MaxSNP et **MaxNP** (paragraphe 2.5) :

$$MaxNP = \overline{MaxNP_0^L} \quad \text{et} \quad MaxSNP = \overline{MaxSNP_0^L}.$$

B.2.3 Classes d'approximation locale

GLO[R] (paragraphe 3.2) - soit R une mesure d'approximation, un problème Π de NPO est dans la classe $GLO[R]$ s'il existe une constante h , une constante $r \in]0, 1]$ et un **voisinage** \mathcal{V} ***h-borné*** pour Π tels que l'on sait pour toute instance déterminer des optima locaux relativement à \mathcal{V} en temps polynomial et qui vérifient :

$$\forall I \in I_{\Pi}, \forall \tilde{s} \in Sol_{\Pi}(I), \tilde{s} \text{ optimum local relativement à } \mathcal{V} \Rightarrow R_{\Pi}(I, \tilde{s}) \geq r.$$

CGLO[R] (paragraphe 6.2) - soit R une mesure d'approximation, un problème Π de NPO est dans la classe $CGLO[R]$ s'il existe une constante h , une constante $r \in]0, 1]$ et un **voisinage** \mathcal{V} ***miroir h-borné*** pour Π tels que l'on sait pour toute instance déterminer des optima locaux relativement à \mathcal{V} en temps polynomial et qui vérifient :

$$\forall I \in I_{\Pi}, \forall \tilde{s} \in Sol_{\Pi}(I), \tilde{s} \text{ optimum local relativement à } \mathcal{V} \Rightarrow R_{\Pi}(I, \tilde{s}) \geq r.$$

GGLO[R] (paragraphe 6.2) - soient $\Pi = (opt_{\Pi}, I_{\Pi}, Sol_{\Pi}, m_{\Pi})$ un problème de NPO et une fonction $m'_{\Pi} : I_{\Pi} \times Sol_{\Pi}(I) \rightarrow \mathbb{N}$, on dénote par $\Pi' = (opt_{\Pi}, I_{\Pi}, Sol_{\Pi}, m'_{\Pi})$ le **problème**

altéré associé à Π et m'_Π ; soit R une mesure d'approximation, un problème Π de *NPO* est dans la classe $GGLO[R]$ s'il existe une constante h , une constante $r \in]0, 1]$, un **voisinage** \mathcal{V} *h-borné* pour Π et **une fonction** m'_Π calculable en temps polynomiale en $|I|$ pour $I \in I_\Pi$ tels que l'on sait pour toute instance I déterminer des optima locaux relativement à \mathcal{V} et m'_Π en temps polynomial et qui vérifient :

$$\forall I \in I_\Pi, \tilde{s} \in \text{Sol}_\Pi(I) \text{ optimum local de } \Pi' \text{ relativement à } \mathcal{V} \Rightarrow R_\Pi(I, \tilde{s}) \geq r.$$

GCGLO[R] (*paragraphe 6.2*) - soit R une mesure d'approximation, un problème Π de *NPO* est dans la classe $GCGLO[R]$ s'il existe une constante h , une constante $r \in]0, 1]$, un voisinage \mathcal{V} *h-borné* pour Π et une fonction m'_Π calculable en temps polynomial en $|I|$ pour $I \in I_\Pi$ tels que l'on sait pour toute instance I déterminer des optima locaux relativement à \mathcal{V} et m'_Π en temps polynomial et qui vérifient :

$$\forall I \in I_\Pi, \forall \tilde{s} \in \text{Sol}_\Pi(I), \left\{ \begin{array}{l} m_\Pi(I, \tilde{s}) \succeq m_\Pi(I, \bar{\tilde{s}}) \\ \forall s' \in \mathcal{V}(I, \tilde{s}) \quad m'_\Pi(I, \tilde{s}) \succeq m'_\Pi(I, s') \end{array} \right\} \Rightarrow R_\Pi(I, \tilde{s}) \geq r.$$

PLS (*paragraphe 5.1*) - un couple (Π, \mathcal{V}) où Π est un problème de *NPO* et \mathcal{V} une fonction voisinage sur Π est un problème de *PLS* s'il existe un algorithme C_Π qui vérifie :

$$\begin{array}{l} PLS1 \quad \exists p_\ell \text{ polynôme / } C_\Pi(I, s) \text{ de complexité au pire des cas } p_\ell(|I|) ; \\ PLS2 \quad \forall I \in I_\Pi, \forall s \in \text{Sol}_\Pi(I), C_\Pi(I, s) = \begin{cases} s \text{ si } s \text{ optimum sur } \mathcal{V}(I, s), \\ t \in \mathcal{V}(I, s) / m_\Pi(I, t) \succ m_\Pi(I, s) \text{ sinon.} \end{cases} \end{array}$$

B.3 Réductions

Réduction polynomiale (*paragraphe 2.6.1*) - une réduction polynomiale d'un problème Π à un problème Π' de *NPO* est la donnée d'un couple $\mathcal{R} = (f, g)$ de fonctions polynomiales en $|I|$ pour $I \in I_\Pi$ définies par :

$$\begin{array}{ll} f : I_\Pi \rightarrow I_{\Pi'}, & g : \text{Sol}_{\Pi'}(f(I_\Pi)) \rightarrow \text{Sol}_\Pi, \\ I \mapsto I' & s' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)) \mapsto s \in \text{Sol}_\Pi(I). \end{array}$$

B.3.1 Propriétés remarquables

Réduction monotone (*paragraphe 2.6.1*) - une réduction $\mathcal{R} = (f, g)$ est monotone si elle vérifie pour toute instance $I \in I_\Pi$ et tout couple de solutions $(s'_1, s'_2) \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I))$:

$$v_{\Pi'}(f(I), s'_1) \succeq v_{\Pi'}(f(I), s'_2) \Rightarrow v_\Pi(I, g(s'_1)) \succeq v_\Pi(I, g(s'_2)).$$

Réduction surjective (*paragraphe 2.6.1*) - une réduction $\mathcal{R} = (f, g)$ est surjective si elle vérifie pour toute instance $I \in I_\Pi$ “ $Sol_\Pi(I) = g(Sol_{\Pi'}(f(I)))$ ”.

Réduction bijective (*paragraphe 2.7.2*) - une réduction $\mathcal{R} = (f, g)$ est bijective si et seulement si pour toute instance $I \in I_\Pi$, $g|_{Sol_{\Pi'}(f(I))}$ est une bijection de $Sol_{\Pi'}(f(I))$ sur $Sol_\Pi(I)$.

Réduction de voisinage (*paragraphe 3.5.1*) - une réduction $\mathcal{R} = (f, g)$ entre deux problèmes Π et Π' de *NPO* est une *réduction de voisinage* si elle vérifie :

$$\forall h' \in \mathbb{N}, \forall \mathcal{V}' \text{ voisinage } h'\text{-borné sur } f(I), \exists h \in \mathbb{N}, \exists \mathcal{V} \text{ voisinage } h\text{-borné sur } I / \\ \forall I \in I_\Pi, \forall \tilde{s} \text{ optimum sur } \mathcal{V}(I, \tilde{s}), \exists \tilde{s}' \text{ optimum sur } \mathcal{V}'(f(I), \tilde{s}') \text{ t.q. } m_\Pi(I, \tilde{s}) \succeq m_\Pi(I, g(\tilde{s}')).$$

Réduction strictement monotone (*paragraphe 3.5.1*) - une réduction (f, g) est strictement monotone si elle vérifie pour toute instance $I \in I_\Pi$ et tout couple de solutions $(s', t') \in Sol_{\Pi'}(f(I))$:

$$m_{\Pi'}(f(I), t') \succ m_{\Pi'}(f(I), s') \Rightarrow m_\Pi(I, g(t')) \succ m_\Pi(I, g(s')).$$

Réduction voisinage-surjective (*paragraphe 3.5.1*) - une réduction (f, g) est *voisinage-surjective* si et seulement si elle vérifie :

$$\forall \mathcal{V}' \text{ voisinage } h'\text{-borné pour } \Pi', \exists \mathcal{V} \text{ voisinage } h\text{-borné pour } \Pi \text{ t.q.} \\ \forall I \in I_\Pi, \forall s' \in Sol_{\Pi'}(f(I)), g(\mathcal{V}'(f(I), s')) \subseteq \mathcal{V}(I, g(s')).$$

B.3.2 Réductions remarquables

A-réduction (*paragraphe 2.6.1*) - soient Π et Π' deux problèmes de *NPO*, on dit que Π se *A-réduit* à Π' et on note $\Pi \overset{A[R1, R2]}{\propto} \Pi'$ s'il existe une réduction $\mathcal{R} = (f, g)$ et une fonction $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ qui vérifient pour deux mesures d'approximation $R1, R2 \in \{\rho, \delta\}$:

$$A1 \quad c(r) = 0 \Rightarrow r = 0 \\ A2(R1, R2) \quad \forall I \in I_\Pi, \forall s' \in Sol_{\Pi'}(f(I)), R1_{\Pi'}(f(I), s') \geq r \Rightarrow R2_\Pi(I, g(s')) \geq c(r).$$

P-réduction (*paragraphe 2.6.1*) - soient Π et Π' deux problèmes de *NPO*, on dit que Π se *P-réduit* à Π' et on note $\Pi \overset{P[R1, R2]}{\propto} \Pi'$ s'il existe une réduction $\mathcal{R} = (f, g)$ et une fonction $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ qui vérifient pour deux mesures d'approximation $R1, R2 \in \{\rho, \delta\}$:

$$P1 \quad c(r) = 1 \Rightarrow r = 1 \\ P2(R1, R2) \quad \forall I \in I_\Pi, \forall s' \in Sol_{\Pi'}(f(I)), R2_{\Pi'}(f(I), s') \geq c(r) \Rightarrow R1_\Pi(I, g(s')) \geq r.$$

L-réduction (paragraphe 2.6.1) - soient Π et Π' deux problèmes de *NPO* tels que $opt_{\Pi} = opt_{\Pi'}$, on dit pour les rapports classique et différentiel que Π se *L-réduit* (resp. se *L*[δ]-réduit) à Π' et on note $\Pi \overset{L}{\propto} \Pi'$ (resp. $\Pi \overset{L[\delta]}{\propto} \Pi'$) s'ils vérifient pour deux constantes $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$:

$$\begin{aligned} L1 \quad & \forall I \in I_{\Pi}, \quad \beta_{\Pi'}(f(I)) \leq \alpha_1 \beta_{\Pi}(I) && \text{(resp. } \text{diam}_{\Pi'}(f(I)) \leq \alpha_1 \text{diam}_{\Pi}(I)) \\ L2 \quad & \forall I \in I_{\Pi}, \quad \forall s' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)), \quad |m_{\Pi}(I, g(s')) - \beta_{\Pi}(I)| \leq \alpha_2 |m_{\Pi'}(f(I), s') - \beta_{\Pi'}(f(I))|. \end{aligned}$$

Réduction continue (paragraphe 2.7.1) - soient Π et Π' deux problèmes de *NPO* tels que $opt_{\Pi} = opt_{\Pi'}$, une réduction continue de Π à Π' est la donnée de trois fonctions f de I_{Π} dans I'_{Π} , g de $\text{Sol}_{\Pi'}(f(I_{\Pi}))$ dans Sol_{Π} et g' de Sol_{Π} dans $\text{Sol}_{\Pi'}(f(I_{\Pi}))$, toutes trois polynomiales en $|I|$, et qui vérifient pour quatre constantes $a > 0$, $b \geq 0$, $a' > 0$ et $b' \geq 0$ les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} C1 \quad & \forall I \in I_{\Pi}, \forall s \in \text{Sol}_{\Pi}(I), \\ & m_{\Pi'}(f(I), g'(s)) \begin{cases} \geq 1/a \times m_{\Pi}(I, s) - b & \text{si } opt_{\Pi} = \max \\ \leq 1/a \times m_{\Pi}(I, s) + b & \text{sinon} \end{cases} \\ C2 \quad & \forall I \in I_{\Pi}, \forall s' \in \text{Sol}_{\Pi}(f(I)), \\ & m_{\Pi}(I, g(s')) \begin{cases} \geq 1/a' \times m_{\Pi'}(f(I), s') - b' & \text{si } opt_{\Pi} = \max \\ \leq 1/a' \times m_{\Pi'}(f(I), s') + b' & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Réduction continue différentielle (paragraphe 2.7.1) - une réduction continue entre deux problèmes Π et Π' de *NPO* sera dite **continue différentielle** et notée $\Pi \overset{C[\delta]}{\propto} \Pi'$ si elle vérifie les propriétés supplémentaires suivantes :

$$\begin{aligned} & a \times a' = 1 \quad (\text{réduction d'expansion 1}) \\ C3 \quad & \forall I \in I_{\Pi}, \quad \omega_{\Pi'}(f(I)) \geq 1/a \times \omega_{\Pi}(I) - b \quad (\text{resp. } \leq 1/a \times \omega_{\Pi}(I) + b). \end{aligned}$$

Réduction affine (paragraphe 2.7.2) - soient Π et Π' deux problèmes de *NPO*, on dit que Π se *AF-réduit* à Π' et on note $\Pi \overset{AF}{\propto} \Pi'$ s'il existe de Π à Π' une réduction $\mathcal{R} = (f, g)$ qui vérifie :

$$\begin{aligned} AF1 \quad & \mathcal{R} \text{ surjective} \\ AF2 \quad & \forall I \in I_{\Pi}, \quad \exists k_I \in \mathbb{R}, \quad \exists k'_I \in \mathbb{R}^* \quad (k_I > 0 \text{ si } opt_{\Pi} = opt_{\Pi'}, \quad k_I < 0 \text{ sinon}) \text{ t.q.} \\ & \forall s' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)), \quad m_{\Pi'}(f(I), s') = k_I m_{\Pi}(I, g(s')) + k'_I. \end{aligned}$$

Réduction fortement affine (paragraphe 2.7.2) - une réduction *fortement affine* entre deux problèmes Π et Π' de *NPO*, notée $\Pi \overset{AF}{\rightleftharpoons} \Pi'$, est une réduction $\mathcal{R} = (f, g)$ affine bijective; s'il existe deux réductions fortement affines, l'une de Π à Π' , l'autre de Π' à Π , on notera $\Pi \overset{AF}{\rightleftharpoons} \Pi'$ et les problèmes Π à Π' seront dits *affinement équivalents*.

LOC-réduction (paragraphe 3.5.1) - une réduction $\mathcal{R} = (f, g)$ entre deux problèmes Π et Π' de *NPO* est une *LOC*-réduction si elle vérifie les propriétés suivantes (on note pour toute instance I de I_Π $I' = f(I)$):

- a) $\forall I \in I_\Pi, \exists S_{\Pi'}(I') \subseteq \text{Sol}_{\Pi'}(I')$ t.q.
- i) *surjectivité*: $g(S_{\Pi'}(I')) = \text{Sol}_\Pi(I)$
- ii) *monotonie partielle*:

$$\forall s', t' \in S_{\Pi'}(I'), m_{\Pi'}(I', s') \prec m_{\Pi'}(I', t') \Rightarrow m_\Pi(I, g(s')) \prec m_\Pi(I, g(t'))$$
- b) $\forall h'$ constante, $\exists h$ constante t.q.
- iii) *localité*: $\forall \mathcal{V}'$ voisinage h' -borné pour Π' , $\exists \mathcal{V}$ h -borné pour Π vérifiant

$$\forall I \in I_\Pi, \forall s' \in S_{\Pi'}(I'), g(\mathcal{V}'(I', s') \cap S_{\Pi'}(I')) \subseteq \mathcal{V}(I, g(s'))$$
- iv) *dominance*: $\forall t' \in S_{\Pi'}(I'), t'$ optimum sur $S_{\Pi'}(I') \cap \mathcal{V}'(I', t') \Rightarrow t'$ optimum sur $\mathcal{V}'(I', t')$

LOC'-réduction (paragraphe 3.5.1) - une *LOC'*-réduction d'un problème Π à un problème Π' est une réduction \mathcal{R} qui vérifie:

- (i) \mathcal{R} surjective, (ii) \mathcal{R} strictement monotone, (iii) \mathcal{R} voisinage-surjective.

G-réduction (paragraphe 3.5.2) - soient Π et Π' deux problèmes de *NPO*, on dit que Π se *G*-réduit à Π' et on note $\Pi \stackrel{G[R1, R2]}{\propto} \Pi'$ s'il existe trois fonctions f, g et c qui vérifient pour deux mesures d'approximation *R1* et *R2*:

- (i) (f, g, c) est une $A[R1, R2]$ -réduction,
- (ii) (f, g) est une réduction de voisinage.

PLS-réduction (paragraphe 5.1) - soient (Π, \mathcal{V}) et (Π', \mathcal{V}') deux problèmes de *PLS*, une *PLS*-réduction $\mathcal{R} = (f, g)$ de (Π, \mathcal{V}) à (Π', \mathcal{V}') , notée $(\Pi, \mathcal{V}) \stackrel{PLS}{\propto} (\Pi', \mathcal{V}')$, est une réduction de Π à Π' qui vérifie pour toute instance $I \in I_\Pi$ et toute solution $s' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I))$:

$$s' \text{ optimum sur } \mathcal{V}'(f(I), s') \Rightarrow g(s') \text{ optimum sur } \mathcal{V}(I, g(s')).$$

B.4 Les principes locaux

Voisinage (paragraphe 3.1.2) - soit Π un problème de *NPO*, un voisinage sur Π est une fonction $\mathcal{V} : I_\Pi \times \text{Sol}_\Pi \rightarrow \mathcal{P}(\text{Sol}_\Pi)$ qui à toute solution $s \in \text{Sol}_\Pi(I)$ de toute instance $I \in I_\Pi$ associe un sous-ensemble $\mathcal{V}(I, s) \subseteq \text{Sol}_\Pi(I)$ de solutions de I contenant s , de taille au plus $p_\mathcal{V}(|I|)$ où $p_\mathcal{V}$ est un polynôme.

Optimum local (*paragraphe 3.1.1*) :

\tilde{s} optimum local de I relativement à $\mathcal{V} \Leftrightarrow \forall s \in \mathcal{V}(I, \tilde{s}), m_{\Pi}(I, \tilde{s}) \succeq m_{\Pi}(I, s)$.

Voisinages h -borné (*paragraphe 3.1.2*) - soient Π un problème de *NPO* et h une constante, le voisinage \mathcal{V}_{Π}^h h -borné pour Π est défini en toute solution s comme l'ensemble des solutions au plus h -distantes de s :

$$\forall h, \forall I \in I_{\Pi}, \forall s \in Sol_{\Pi}(I), \mathcal{V}_{\Pi}^h(I, s) = \{t \in Sol_{\Pi}(I) / d(s, t) \leq h\} ;$$

un voisinage $\mathcal{V} : I_{\Pi} \times Sol_{\Pi} \rightarrow Sol_{\Pi}$ est un *voisinage miroir h -borné* s'il existe un voisinage h -borné \mathcal{W} tel que

$$\forall I \in I_{\Pi}, \forall s \in Sol_{\Pi}(I), \mathcal{V}(I, s) = \mathcal{W}(I, s) \cup \mathcal{W}(I, \bar{s}).$$

B.5 Problèmes particuliers

Propriété héréditaire et anti-héréditaire (*paragraphes 4.1.1 et 5.2.3*) - une propriété P est *héréditaire* (*resp. anti-héréditaire*) sur un ensemble Z si elle vérifie

$$\begin{aligned} P(\emptyset) \quad \wedge \quad \forall(X, Y) / X \subseteq Y \subseteq Z, P(Y) \Rightarrow P(X) \\ \text{resp.} \quad P(Z) \quad \wedge \quad \forall(X, Y) / X \subseteq Y \subseteq Z, P(X) \Rightarrow P(Y). \end{aligned}$$

Problème héréditaire et anti-héréditaire (*paragraphe 5.2.3*) - soit Π un problème de *NPO* ; Π est un problème *héréditaire* (*resp. anti-héréditaire*) s'il existe une propriété héréditaire (*resp. anti-héréditaire*) P telle que toute instance I de Π revient à résoudre un problème du type :

$$\begin{aligned} \beta_{\Pi}(I) &= \max\{\alpha(Y), Y \subseteq X/P(Y)\}, \\ \text{resp.} \quad \beta_{\Pi}(I) &= \min\{\alpha(Y), Y \subseteq X/P(Y)\}. \end{aligned}$$

où α est une fonction d'évaluation des ensembles de type cardinalité, somme des poids, poids maximum, poids moyen...

P -partition (*paragraphes 4.1.1 et 5.2.3*) - soit P une propriété et X un ensemble, une P -partition de X est un ensemble $\mathcal{S} = \{V_1, \dots, V_q\}$ de sous-ensembles de X qui vérifie les trois propriétés

$$\bigcup_{i=1}^q V_i = X, \quad \forall i, j = 1, \dots, q, i \neq j \Rightarrow V_i \cap V_j = \emptyset \quad \text{et} \quad \forall i = 1, \dots, q, P(V_i).$$

Problème de partitionnement héréditaire (*paragraphes 4.1.1 et 5.2.3*) - soit Π un problème de *NPO* dont les instances sont la donnée d'un ensemble X et éventuellement d'une valuation $p : X \rightarrow \mathbb{N}$ des éléments de X ; Π est un problème de partitionnement héréditaire s'il existe une propriété héréditaire P telle que toute instance I de Π revient à résoudre un problème du type :

$$\beta_{\Pi}(I) = \min\left\{\sum_{i=1}^q \alpha(V_i) \mid \mathcal{S} = \{V_1, \dots, V_q\} \text{ } P\text{-partition de } V\right\}$$

où α est une fonction d'évaluation des ensembles de type indicatrice notée $\|$, poids maximum, poids moyen...

Bibliographie

- [1] A. Aiello, E. Burattini, A. Massorotti, and F. Ventriglia. A new evaluation function for approximation algorithms. *Sem. IRIA*, 1979.
- [2] P. Alimonti. New local search approximation techniques for maximum generalized satisfiability problems. In *Proc. of the 2nd Italian Conference on Algorithms and Complexity*, pages 40–53, 1994.
- [3] P. Alimonti. *Local search and approximability of MAX SNP problems*. PhD thesis, Università degli Studi di Roma La Sapienza, 1997.
- [4] G. Andersson and L. Engebretsen. Sampling methods applied to non-boolean optimization problems. In *Proc. of the 2nd Symposium on Randomization and Approximation Techniques in Computer Science, LNCS 1518*, pages 357–368. Springer-Verlag, 1998.
- [5] T. Andreae and H. Bandelt. Performance guarantees for approximation algorithms depending on parametrized triangle inequalities. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 8:1–16, 1995.
- [6] L. Trevisan and G.B. Sorkin, M. Sudan, and D.P. Williamson. Gadgets, approximation, and linear programming. In *Proc. of the 37th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 617–626. IEEE Computer Society, 1996.
- [7] S. Arora. Polynomial time approximation scheme for Euclidean TSP and other geometric problems. In *Proc. of the 37th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 2–11, 1996.
- [8] S. Arora, D. Karger, and M. Karpinski. Polynomial time approximation schemes for dense instances of NP-hard problems. In *Proc. of the 27th ACM STOC*, pages 284–293, 1995. also in *Journal of Computer and System Sciences* 58(1999), 193-210.

- [9] G. Ausiello, A. d'Atri, and M. Protasi. Structure preserving reductions among convex optimization problems. *Journal of Computer and System Sciences*, 21:136–153, 1980.
- [10] G. Ausiello and M. Protasi. Local search, reducibility and approximability of NP-optimization problems. *Information Processing Letters*, 54(2):73–79, 1995.
- [11] G. Ausiello and M. Protasi. NP optimization problems and local optima graph theory. In Y. Alavi and A. Schwenk, editors, *Combinatorics and Applications: Proc. of the Seventh Quadriennial International Conference on the Theory and Applications of Graphs*, volume 2, pages 957–975, 1995.
- [12] V. Bafna, P. Berman, and T. Fujito. Approximating feedback vertex set for undirected graphs within ratio 2. Unpublished manuscript, 1994.
- [13] R. Battiti and M. Protasi. *Handbook of Combinatorial Optimization*, volume 1, chapter Approximate Algorithms and Heuristics for MAX-SAT, pages 77–148. Kluwer Academic Publishers, d.-z. du and p.m. parlados edition, 1998.
- [14] C. Bazgan and W. Fernandez de la Vega. A Polynomial Time Approximation Scheme for Dense MIN 2 SAT. In *Proc. of the 12th International Symposium on Fundamentals of Computation Theory, LNCS 1684*, pages 91–99, 1999.
- [15] C. Bazgan, W. Fernandez de la Vega, and M. Karpinski. Polynomial time approximation schemes for dense instances of minimum constraint satisfaction. *À paraître*, 2001.
- [16] C. Bazgan and V. Paschos. Differential approximation for satisfiability and related problems. 2001.
- [17] H. Böckenhauer, J. Hromkovic, R. Klasing, S. Seibert, and W. Unger. Towards the notion of stability of approximation algorithms and the traveling salesman problem. In *Report 31, Electronic Colloquium on Computational Complexity*, 1999.
- [18] H. Böckenhauer, J. Hromkovic, R. Klasing, S. Seibert, and W. Unger. An improved lower bound on the approximability of metric TSP and approximation algorithms for the TSP with sharpened triangle inequality. In *Proc. of the 17th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, LNCS*, volume 1770, pages 382–394. Springer-Verlag, 2000.

- [19] M. Bellare, O. Goldreich, and M. Sudan. Free bits, pcps and non-approximability - towards tight results. *SIAM Journal on Computing*, 27:804–915, 1998.
- [20] M. A. Bender and C. Chekuri. Performance guarantees for the TSP with a parametrized triangle inequality. In *Proc. of WADS'99, LNCS*, volume 1663, pages 80–85. Springer-Verlag, 1999.
- [21] P. Berman and G. Schnitger. On the complexity of approximating the independent set problem. *Information and Computation*, 96:77–94, 1992.
- [22] D. Bertsimas, C-P. Teo, and R. Vohra. On dependent randomized rounding algorithms. In *Proc. of the 5th International Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization, LNCS 1084*, pages 330–344. Springer-Verlag, 1996.
- [23] A. Blum and D. Karger. An $\tilde{O}(n^{3/14})$ -coloring algorithm for 3-colorable graphs. *Information Processing Letters*, 6:49–53, 1997.
- [24] B. Bollobás. *Random Graphs*. Academic Press, London, 1985.
- [25] N. Christofides. Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem. Technical report, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie–Mellon University, 1976.
- [26] S.A. Cook. The complexity of theorem-proving procedures. In *Conference Record of Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 151–158, 1971.
- [27] G. Cornuejols, M.L. Fisher, and G.L. Nemhauser. Location of bank, account to optimize float: an analytic study of exact and approximate algorithms. *Management Science*, 23:789–810, 1977.
- [28] P. Crescenzi and A. Panconesi. Completeness in approximation classes. *Information and Computation*, 93(2):241–262, 1991.
- [29] P. Crescenzi and L. Trevisan. On approximation scheme preserving reducibility and its applications. In *Proc. of the 14th Annual Conference on Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science, LNCS 880*, pages 330–341. Springer-Verlag, 1994.

- [30] M. Demange. *Approximation polynomiale de problèmes NP-complets et programmation linéaire : une nouvelle mesure d'approximation et algorithmes*. PhD thesis, CERMSEM Université Paris I, 1994.
- [31] M. Demange, P. Grisoni, and V.Th. Paschos. Approximation results for the minimum graph coloring problem. *Information Processing Letters*, 50:19–23, 1994.
- [32] M. Demange, P. Grisoni, and V.Th. Paschos. Differential approximation algorithms for some combinatorial optimization problems. *Theoretical Computer Science*, 209(1–2):107–122, 1998.
- [33] M. Demange, J. Monnot, and V. Th. Paschos. Bridging gap between standard and differential polynomial approximation, the case of bin-packing. *Applied Mathematics Letters*, 12, 1999.
- [34] M. Demange and V. Th. Paschos. On an approximation measure founded on the links between optimization and polynomial approximation theory. *Theoretical Computer Science*, 158(1–2):117–141, 1996.
- [35] M. Demange and V.Th. Paschos. Asymptotic differential approximation ratio: definitions, motivations and application to some combinatorial problems. *RAIRO Operations Research*, 33:481–507, 1999.
- [36] L. Engebretsen. An explicit lower bound for TSP with distances one and two. In *Proc. of the 16th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, LNCS 1563*, pages 373–382, 1999.
- [37] R. Fagin. *Generalized first-order spectra and polynomial-time recognizable sets*, pages 43–73. R.M. Karp, American Mathematics Society, Providence R.I., 1974.
- [38] W. Fernandez de la Vega and M. Karpinski. On the approximation hardness of dense TSP and other path problems. *Information Processing Letters*, 70:53–55, 1999.
- [39] S. Fischer. A note on the complexity of local search problems. *Information Processing Letters*, 53:69–75, 1995.
- [40] S. Fischer, L. A. Hemaspaandra, and L. Torenvliet. Witness-isomorphic reductions and the local search problem (extended abstract). In *Proc. of the 20th International Foundations of Computer Science 1995 (MFCS)*, pages 277–287, 1995.

- [41] M.L. Fisher, G.L. Nemhauser, and L.A. Wolsey. An analysis of approximations for finding a maximum weight Hamiltonian circuit. *Operations Research*, 27(4):799–809, 1979.
- [42] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computers and intractability, A guide to the theory of NP-completeness*. W.H. Freeman and Co., San Francisco, 1979.
- [43] N. Garg, V.V. Vazirani, and M. Yannakakis. Approximate max-flow min-(multi)cut theorems and their applications. *SIAM Journal on Computing*, 25:235–251, 1996.
- [44] G.V. Gens and E.V. Levner. Computational complexity of approximation algorithms for combinatorial problems. In *Proc. of the 8th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science, LNCS 74*, pages 292–300. Springer-Verlag, 1979.
- [45] M. M. Halldórsson. Approximating the minimum maximalindependence number. *Information Processing Letter*, 46:169–172, 1993.
- [46] M. M. Halldórsson. Approximating k -set cover and complementary graph coloring. In *Proc. of the 5th International Integer Programming and Combinatorial Optimization Conference (IPCO V), LNCS 1084*, pages 118–131, June 1996.
- [47] P. Hansen and B. Jaumard. Algorithms for the maximum satisfiability problem. *Computing*, 44:279–303, 1990.
- [48] Hartvigsen. *Extensions of matching theory*. PhD thesis, Carnegie-Mellon University, 1984.
- [49] J. Håstad. Some optimal inapproximability results. In *Proc. of the 29th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 1–10, 1997.
- [50] J. Håstad. Clique is hard to approximate within $n^{1-\epsilon}$. *Acta Mathematica*, 182:105–142, 1999.
- [51] D.S. Hochbaum and D.B. Shmoys. Using dual approximation algorithms for scheduling problems: theoretical and practical results. *Journal of the ACM*, 34:144–162, 1987.
- [52] O.H. Ibarra and C.E. Kim. Fast approximation for the knapsack and sum of subset problems. *J. ACM*, 22:463–468, 1975.

- [53] D.S. Johnson. Approximation algorithms for combinatorial problems. *Journal of Computer and System Sciences*, 9:256–278, 1974.
- [54] D.S. Johnson and L.A. McGeoch. *The Traveling Salesman Problem: A Case Study*. Emile Aarts and Jan Karel Lenstra, 1997.
- [55] D.S. Johnson, C.H. Papadimitriou, and M. Yannakakis. How easy is local search? In *Proc. of the 26th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 39–42, 1985. Also *Journal of Computer and System Sciences*, **37**(1), pp. 79–100, 1988.
- [56] V. Kann. *On the Approximability of NP-complete Optimization Problems*. PhD thesis, Department of Numerical Analysis and Computing Science, Royal Institute of Technology, Stockholm, 1992.
- [57] V. Kann. Polynomially bounded minimization problems which are hard to approximate. *Nordic Journal of Computing*, 1:317–331, 1994. also in proceedings of the 20th International Colloquium on Automata, Languages and Programming, pp. 52–63, 1993, Springer-Verlag LNCS 700.
- [58] M. Karpinski. Polynomial time approximation schemes for some dense instances of NP-hard optimization problems. In *Proc. of the 1st Symposium on Randomization and Approximation Techniques in Computer Science, RANDOM '97 (invited paper), LNCS 1269*, pages 1–14. Springer-Verlag, 1997.
- [59] S. Khanna, R. Motwani, M. Sudan, and U. Vazirani. On syntactic versus computational views of approximability. In *Proc. of the 35th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 819–836, 1994.
- [60] S. Khanna, R. Motwani, M. Sudan, and U. Vazirani. On syntactic versus computational views of approximability. *SIAM Journal on Computing*, 28:164–191, 1999.
- [61] H. Klauck. On the complexity of global and local approximation. In *SWAT 96*, 1996.
- [62] R. Kohli, R. Krishnamurti, and P. Mirchandani. The minimum satisfiability problem. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 7:275–283, 1994.
- [63] Ph.G. Kolaitis and M.N. Thakur. Logical definability of NP-optimization problems. *Information and Computation*, 115(2):321–353, 1994.

- [64] Ph.G. Kolaitis and M.N. Thakur. Approximation properties of NP minimization classes. *Journal of Computer and System Sciences*, 50(3):391–411, 1995.
- [65] S.R. Kosaraju, J.K. Park, and C. Stein. Long tours and short superstrings. In *Proc. of the 35th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 166–177, 1994.
- [66] M.W. Krentel. Structure in locally optimal solutions. In *Proc. of the 30th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 216–221, 1989.
- [67] G. Lueker. Department of Computer Science, Princeton University, Princeton NJ, 1976.
- [68] J. Monnot. *Familles critiques d'instances et approximation polynomiale*. PhD thesis, LAMSADE Université Paris 9, 1998.
- [69] J. Monnot. Approximation of NP-hard problems with constant size feasible solutions. manuscript, 2000.
- [70] J. Monnot. Differential approximation results for the traveling salesman and related problems. 2000.
- [71] J. Monnot, V. Th. Paschos, and S. Toulouse. Differential approximation results for the traveling salesman problem with distances 1 and 2 (extended abstract). In *Proc. of the F.C.T. '2001 The symposia on Fundamentals of Computation Theory (accepted paper)*, LNCS, 2001.
- [72] P. Orponen and H. Mannila. On approximation preserving reductions: complete problems and robust measures. Technical Report C-1987-28, Department of Computer Science, University of Helsinki, 1987.
- [73] C.H. Papadimitriou and S. Vempala. On the approximability of the traveling salesman problem. In *Proc. of the 32nd ACM Symposium on the Theory of Computing*, 2000.
- [74] C.H. Papadimitriou and M. Yannakakis. Optimization, approximation and complexity classes. *Journal of Computer and System Sciences*, 43:425–440, 1991.
- [75] C.H. Papadimitriou and M. Yannakakis. The traveling salesman problem with distances one and two. *Mathematics of Operations Research*, 18:1–11, 1993.

- [76] V. Th. Paschos and L. Renotte. Approximability preserving reductions for NP-complete problems. *Foundations of Computing and Decision Sciences*, 20(1), 1995.
- [77] A.A. Schäffer and M. Yannakakis. Simple local search problems that are hard to solve. *SIAM Journal on Computing*, 20(1):56–87, 1991.
- [78] A.I. Serdyukov. An algorithm with an estimate for the traveling salesman problem of the maximum. *Upravlyaemye Sistemy*, 25:80–86, 1984.
- [79] H.U. Simon. On approximate solutions for combinatorial optimization problems. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 3(2):294–310, 1990.
- [80] L. Trevisan. Positive linear programming, parallel approximation and pcps. In *Proc. of the 4th Annual European Symposium on Algorithms, LNCS 1136*, pages 62–75. Springer-Verlag, 1996.
- [81] S. Vishwanathan. An approximation algorithm for the asymmetric travelling salesman problem with distances one and two. *Information Processing Letters*, 44:297–302, 1992.
- [82] M. Yannakakis. *Computational complexity*, pages 19–55. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley and sons Ltd, 1997.

Résumé

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de l'approximation polynomiale au pire des cas des problèmes difficiles d'optimisation combinatoire qui se donne pour double objectif de fournir en temps polynomial des solutions de qualité garantie au sens des mesures classique rapport à l'optimum ou différentielle chemin relatif parcouru depuis la pire solution vers l'optimum. Nos recherches se concentrent sur deux aspects : la mesure différentielle qui est un outil d'évaluation des solutions et l'optimalité locale qui désigne un type de solutions. S'il propose un algorithme à rapport différentiel constant pour $MinTSPab$, ce travail s'attache essentiellement, non pas à déterminer des solutions particulières remarquables (données a posteriori par un algorithme spécifique), mais à reconnaître les problèmes dont les optima locaux (définis a priori par le voisinage) sont tous de qualité. Les structures qui nous intéressent désignent comme voisinage d'une solution l'ensemble des solutions qui lui sont au plus h -distantes (voisinages h -bornés), éventuellement élargi aux solutions complémentaires (voisinages miroirs h -bornés), pour une constante h . L'optimalité locale peut ensuite être définie relativement à la fonction objectif ou à un autre critère alors appelé objectif altéré. Selon les modalités considérées, les problèmes $MaxSat$ et $MinTSP(k)$, respectivement pour les rapports classique et différentiel, garantissent la qualité de leurs optima locaux ; en revanche, $MinFES$ admet des optima locaux arbitrairement mauvais pour les deux rapports ; enfin, les optima locaux de $Max2-CCSP$ assurent un rapport classique de $1/3$ mais ne pourront jamais faire mieux. C'est ce type de résultats que nous proposons dans ce document, positifs, négatifs ou limites, accompagnés d'une réflexion sur la définition et l'accessibilité des optima locaux d'une part, sur la richesse et les difficultés de l'approximation différentielle d'autre part.

Abstract

In the field of worst-case approximation of NP -hard problems, one aims to devise polynomial time algorithms achieving a good evaluation of the solutions whose value is a constant times the value of the optimal one (usual framework), or, in the differential approximation, solutions for which their distance from the worst solution value is constant times the distance between worst solution value and optimal value. This thesis focus on two main notions : the differential ratio which is a way of evaluating the solutions quality and the local optimality which refers to a special kind of solutions. The main purpose of this work is the evaluation of the ability of NP -hard problems to guarantee the quality of their local optima. We impose the neighbourhood of a given solution to be bounded (h -bounded neighbourhoods), or/and to contain the complementary solutions (relaxed h -bounded neighbourhoods), where h is a constant. Local optimality can be defined according to the objective value (oblivious optima) or according to another objective value (non oblivious optima). For instance, $MaxSat$ and $MinTSP(k)$ problems have guaranteed local optima, for the usual and the differential ratios, respectively ; on the other hand, we show that there exist problems as $MinFNS$ admitting arbitrarily bad local optima for any measure. Finally, the local optima of $Max2-CCSP$ for the relaxed 1-bounded neighbourhood are $1/3$ to the optimum value, and this ratio cannot be improved by any relaxed h -bounded neighbourhood. This document contains also some thoughts on the definition and the tractability of the local optima as well as on the difficulties and the relevance of the use of differential measure.